Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 03.03.2026

I–II курси

1. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть явну формулу для A^n.

Розв'язок.

Запишемо $A = I + N$, де

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = 0.$$

Тоді за біномом Ньютона

$$A^n = (I + N)^n = I + nN + C_n^2 N^2.$$

Отже,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & C_n^2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k + n^2}}.$$

Розв'язок.

Оскільки

$$\frac{n}{\sqrt{n+n^2}} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} < \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = 1,$$

то за теоремою про три послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} = 1$.

Відповідь: 1.

3. Знайти довжину найкоротшого шляху між точкою $A(-10,-10)$ та прямою L, що задана рівнянням $x+y=20$, за умови, що цей шлях не може проходити всередині круга C, обмеженого колом $x^2+y^2=72$.

Розв'язок. Шлях складається з трьох частин: відрізка дотичної до кола (AT_1), дуги кола (T_1T_2) та перпендикуляра від кола до прямої (T_2B).

Центр кола $O(0,0)$, радіус $R=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$.

Відстань до точки A: $OA=\sqrt{(-10)^2+(-10)^2}=10\sqrt{2}$. Відстань від центру O до прямої $x+y-20=0$:

$$d=\frac{|0+0-20|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{20}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2}.$$

Відрізок дотичної AT_1:

$$AT_1=\sqrt{OA^2-R^2}=\sqrt{200-72}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}.$$

Перпендикуляр $T_2B=d=10\sqrt{2}$.

Центральний кут дуги $\beta=\arccos\frac{3}{5}$. Довжина дуги: $s=R\cdot\beta=6\sqrt{2}\cdot\arccos 0,6$.

Загальна довжина

$$L=AT_1+s+T_2B=6\sqrt{2}\Big(3+\arccos\frac{3}{5}\Big).$$

4. Знайдіть всі натуральні n, для яких n^4+4 є простим числом.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2).$$

При $n\geq 2$ обидва множники більші за 1, отже число складене.

При $n=1$ маємо $1^4+4=5$ — просте.

Відповідь. $n=1$.

5. Нехай $f(x)$ — диференційовна функція, яка задовольняє рівняння

$$f(f(x))=x^2-x+1$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$ і $f(1)=1$. Яке значення може набувати $f'(1)$?

Розв'язок. Диференціюючи $f(f(x)) = x^2 - x + 1$, отримуємо: $f'(f(x)) \cdot f'(x) = 2x - 1$.

При $x = 1$ маємо: $f'(f(1)) \cdot f'(1) = 2(1) - 1$. Оскільки $f(1) = 1$, то $(f'(1))^2 = 1$, звідки $f'(1) = \pm 1$.

Диференціюючи ще раз: $g''(x) = f''(f(x))(f'(x))^2 + f'(f(x))f''(x)$. При $x = 1$: $g''(1) = f''(1)(f'(1))^2 + f'(1)f''(1) = 2$. Якщо $f'(1) = -1$, то $f''(1)(1 - 1) = 2 \implies 0 = 2$ (суперечність). Якщо $f'(1) = 1$, то $f''(1)(1+1) = 2 \implies f''(1) = 1$.

Відповідь: $f'(1) = 1$.

Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 03.03.2026

III–VI курси

1. Знайти суму ряду

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

Розв'язок. Використаємо ряд Тейлора для експоненти $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Диференціюючи за x, отримуємо:

$$\frac{d}{dx} e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} \implies e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}$$

Помножимо на x

$$x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n!}$$

Диференціюємо ще раз за x

$$e^x + x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n!}$$

При $x = 1$ маємо

$$e + e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$$

Відповідь: $2e$.

2. Розв'язати рівняння: $xy' - y = y^2 \ln x$.

Розв'язок. Поділимо рівняння на y^2

$$\frac{xy' - y}{y^2} = \ln x.$$

Зауважимо, що ліва частина є похідною частки $-\frac{x}{y}$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = \ln x, \quad -\frac{x}{y} = x \ln x - x + C$$

Відповідь: $y = \frac{x}{x(1-\ln x)-C}$.

3. Обчислити інтеграл при $a > -1$:

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} dx$$

Розв'язання: Використаємо метод диференціювання за параметром

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{x^a - 1}{\ln x}\right) dx = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}$$

Інтегруючи за a:

$$I(a) = \int \frac{1}{a+1} da = \ln(a+1) + C$$

При $a = 0$ маємо $I(0) = 0$, тому $C = 0$.

Відповідь: $\ln(a+1)$.

4. Нехай A — квадратна матриця розміру $n \times n$, де $n \geq 2$, така, що для будь-якої матриці B розміру $n \times n$ виконується рівність

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B) + \det(A) \cdot \det(B).$$

Знайдіть всі можливі матриці A.

Розв'язок. Якщо $B = A$, то

$$\det(2A) = 2\det(A) + \det(A)^2, \quad 2^n \det(A) = 2\det(A) + \det(A)^2.$$

Тому, $\det(A) = 2^n - 2$ або $\det(A) = 0$.

Якщо $B = -A$, то

$$0 = \det(0) = \det(A) + (-1)^n \det(A) + \det(A) \cdot (-1)^n \det(A).$$

Тоді, $\det(A) = (-1)^{n+1} - 1$ або $\det(A) = 0$. Отже, $\det(A) = 0$.

Тоді рівність $\det(A + B) = \det(A) + \det(B) + \det(A) \cdot \det(B)$ можна записати у вигляді $\det(A + B) = \det(B)$. Нехай $B = kI$, де k — дійсне число, I — одинична матриця. Тоді для будь-якого дійсного числа k виконується рівність $\det(A + kI) = k^n$.

Визначник $\det(A + kI)$ можна розкласти через власні значення матриці A. Якщо матриця A має власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то

$$\det(A + kI) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + k) = k^n.$$

Щоб ця рівність виконувалась для будь-якого k, всі власні значення λ_i мають бути рівними нулю. Тобто, A є нульовою матрицею.

Відповідь. A може бути тільки нульовою матрицею.

5. Випадкова величина X має рівномірний дискретний розподіл і набуває значень 0, 1, 2, а випадкова величина Y має рівномірний розподіл на $(0; 3)$. Знайдіть математичне сподівання максимуму цих випадкових величин, якщо X і Y незалежні?

Розв'язок. Нехай $\xi = \max\{X, Y\}$. Тоді

$$F_\xi(t) = P(\max\{X, Y\} < t) = P(X < t) \cdot P(y < t) = F_x(t) \cdot F_y(t).$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0]; \\ \frac{1}{3}, & t \in (0, 1]; \\ \frac{2}{3}, & t \in (1, 2]; \\ 1, & t \in (2, +\infty); \end{cases} \quad F_y(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0]; \\ \frac{t}{3}, & t \in (0, 3]; \\ 1, & t \in (3, +\infty), \end{cases} \quad F_z(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0]; \\ \frac{t}{9}, & t \in (0, 1]; \\ \frac{2t}{9}, & t \in (1, 2]; \\ \frac{t}{3}, & t \in (2, 3]; \\ 1, & t \in (3, +\infty). \end{cases}$$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) =$$

$$= \int_0^1 x d\left(\frac{x}{9}\right) + \frac{1}{9} \cdot 1 + \int_1^2 x\, d\left(\frac{2x}{9}\right) + \frac{2}{9} \cdot 2 + \int_2^3 x\, d\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{16}{9}.$$

Відповідь. 16/9.