

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу**



**Затверджено**

На засіданні  
кафедри теорії функцій і функціонального  
аналізу  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 28.08.2023 р.)

Завідувач кафедри проф. Скасків О.Б.

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Функціональний аналіз”,**  
**що викладається в межах ОПШ “ Статистичний аналіз даних ”**  
**першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з**  
**спеціальності 112 - Статистика**

Львів 2023 р.

<b>Назва дисципліни</b>	Функціональний аналіз
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 112 – статистика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Микитюк Ярослав Володимирович, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу; Сущик Наталія Степанівна, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:yaroslav.mykytyuk@lnu.edu.ua">yaroslav.mykytyuk@lnu.edu.ua</a> , <a href="mailto:nataliya.sushchuk@lnu.edu.ua">nataliya.sushchuk@lnu.edu.ua</a> ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 373. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультацію з теоретичної чи практичної частини курсу можна отримати на нараді MS Teams у будь-який зручний для студентів та викладача час, а також очно в день проведення лекцій чи практичних занять за попередньою домовленістю.
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktionalnyy-analiz-112-statystyka">https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktionalnyy-analiz-112-statystyka</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Функціональний аналіз” є нормативною дисципліною зі спеціальності 112 – «Статистика» для освітньої програми «Статистичний аналіз даних», яка викладається в 6-му семестрі в обсязі 3-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), 7-му семестрі в обсязі 3-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Курс розроблено так, щоб надати учасникам знання про лінійні оператори та інтегральні рівняння. Багато понять курсу (деякі топологічні поняття в метричних просторах, норма елемента, скалярний добуток, норма оператора, спектр та резольвента оператора, розподіли, тощо) є базовими у інших курсах, тому в курсі представлено широкий розгляд практичних і теоретичних задач для розуміння та ефективного їх засвоєння.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	<b>Мета:</b> освоєння студентами теоретичних і практичних основ з теорії лінійних нормованих просторів та лінійних операторів. <b>Цілі:</b> викласти основні положення теорії функціонального аналізу; вивчити мову функціонального аналізу, яка активно використовується в теорії ймовірностей, в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, в теорії функцій; ознайомити з методами розв’язування інтегральних рівнянь.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель В. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 560 с. 2. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри : підручник : пер. з рус, Пер. Я. С. Магола, І. Е. Чижиков; За наук. ред. О. Б. Скасків.– Львів : Чижиков І. Е., 2012.– 589 с. 3. Я. Микитюк, Н. Сущик Функціональний аналіз. Конспект лекцій та практичних занять, 2023

	<p><a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktsionalnyy-analiz-112-statystyka">https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktsionalnyy-analiz-112-statystyka</a> (Методичні матеріали)</p> <p>4. В.Лянце, Т.Кудрик, Г.Чуйко. Функціональний аналіз // Львів, Вид.центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.</p> <p>5. Сторож О., Кудрик Т., Сущик Н. Додаткові розділи теорії міри і функціонального аналізу. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2018. –198с.</p> <p>6. Сторож О. Г. Задачі з теорії міри та функціонального аналізу: збірник задач /Олег Сторож. Львів : І. Чижиков, 2011. 151 с.</p>
<b>Обсяг курсу</b>	<p><b>6 семестр.</b> Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 48 год., з них 32 год. лекцій та 16 години практичних робіт. Самостійної роботи: 42 год.</p> <p><b>7 семестр.</b> Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 48 год., з них 32 год. лекцій та 16 години практичних робіт. Самостійної роботи: 42 год.</p> <p><b>Протягом 6-7семестрів.</b> Загальний обсяг: 180 годин. Аудиторних занять: 96 год., з них 64 год. лекцій та 32 години практичних робіт. Самостійної роботи: 84 год.</p>
<b>Очікувані результати навчання</b>	<p>В результаті вивчення даного курсу студент повинен <b>знати:</b> наукові поняття та математичні методи функціонального аналізу; <b>вміти:</b> розв'язувати задачі, пов'язані із вивченням поняття лінійних операторів, аналізувати операторні рівняння в різних банахових просторах та знаходити розв'язок конкретних інтегральних рівнянь.</p> <p>В результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких <b>загальних (ЗК) і спеціальних (фахових) (СК) компетентностей:</b></p> <p>ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</p> <p>ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;</p> <p>ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;</p> <p>ЗК-8. Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.</p> <p>ЗК-10. Здатність працювати в команді.</p> <p>ЗК-11. Здатність до професійного спілкування з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами в інших галузях знань.</p> <p>ЗК-12. Здатність працювати автономно.</p> <p>ЗК-13. Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.</p> <p>СК-1. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях математичного аналізу, лінійної алгебри, геометрії, логіки, теорії функцій, диференціальних рівнянь.</p> <p>СК-2. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів.</p> <p>СК-3. Здатність здійснювати логічні математичні міркування із чітким зазначенням припущень та висновків.</p> <p>СК-4. Здатність до математичного формулювання задач та вибору методів їх розв'язання.</p> <p>СК-5. Здатність до кількісно-статистичного мислення.</p> <p>СК-6. Здатність до ймовірнісного мислення, що передбачає сприйняття стохастичної природи явищ.</p> <p>СК-7. Здатність робити якісні висновки з кількісних даних.</p> <p>СК-9. Здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження та аналізувати дані цих досліджень.</p> <p>СК-10. Здатність проводити дослідження ймовірнісно-статистичних моделей та інтерпретувати одержані результати.</p> <p>СК-12. Здатність застосовувати ймовірнісно-статистичні методи в міждисциплінарному контексті.</p> <p>СК-13. Здатність подавати статистичні процедури та результати їхнього застосування у формі, придатній для цільової аудиторії, до якої</p>

	<p>звертаються, як усно, так і письмово.</p> <p>СК-14. Здатність до аналізу основ і властивостей статистичних алгоритмів та розуміння переваг і обмежень тих чи інших підходів, у тому числі до оцінки їх обґрунтованості й ефективності.</p> <p>СК-15. Здатність аналізувати основи і властивості базових економічних та фінансових структур, інтерпретувати показники фінансової діяльності, користуватися методами оптимального керування економічних та природних процесів.</p> <p>СК-16. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички з машинного навчання, обробки зображень і природної мови.</p> <p>СК-17. Здатність моделювати та пояснювати дані просторових і часових вибірок за допомогою знань і навичок з регресійного аналізу.</p> <p>і здобуде такі <b>результати навчання (РН)</b>:</p> <p>РН-5. Володіти базовими знаннями та вміннями з фундаментальних розділів математики: математичного аналізу, алгебри, аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, у тому числі в частинних похідних.</p> <p>РН-8. Вміти працювати з різними типами збіжності випадкових величин та розподілів, користуватися граничними законами теорії ймовірностей.</p> <p>РН-15. Володіти математичними та статистичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів математичних моделей, статистичними методами інтерпретації та обробки числових даних.</p> <p>РН-17. Знати методи моделювання природничих та/або соціальних процесів.</p> <p>РН-19. Вміти оцінювати та забезпечувати якість виконуваних досліджень.</p>
<b>Ключові слова</b>	Метричний простір, банахів простір, гільбертів простір, ряд Фур'є, лінійний оператор, спектр та резольвента оператора, інтегральні рівняння, узагальнені функції.
<b>Формат курсу</b>	Очний
<b>Теми</b>	Див. Схема курсу
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Екзамен у кінці 7 семестру.
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> <li>- Математичного аналізу;</li> <li>- Лінійної алгебри і аналітичної геометрії;</li> <li>- Диференціальних рівнянь;</li> <li>- Теорії міри та інтеграла Лебега.</li> </ul>
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції Індивідуальні завдання Тестові завдання
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер з можливістю підключення до інтернету

**Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)**

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:

- *Змістовий модуль 1:* 5% загальної кількості балів за активну роботу на заняттях, 10% загальної кількості балів за виконання практичних аудиторних і домашніх та тестових завдань, 15% загальної кількості балів за контрольну роботу; максимальна кількість балів 30.
  - *Змістовий модуль 2:* 5% загальної кількості балів за активну роботу на заняттях, 5% загальної кількості балів за виконання практичних аудиторних і домашніх та тестових завдань, 15% загальної кількості балів за контрольну роботу; максимальна кількість балів 20.
  - *Екзамен:* 50% загальної кількості балів; максимальна кількість балів 50.
- Підсумкова максимальна кількість балів 100.

**Письмові роботи:** Очікується, що студенти виконають дві письмові роботи і одну письмову роботу під час заліку.

**Академічна доброчесність:** Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

**Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та тестових завдань, передбачених курсом.

**Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

**Політика виставлення балів.** Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.

Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.

**Оцінювання контрольних робіт** (2 змістових модулі містять по одній контрольній роботі кожен, загалом 12 практичних завдань та одне теоретичне завдання; максимальна кількість балів: 25) відбувається шляхом оцінки роботи студента під час написання контрольної роботи в аудиторії (0-2 балів за одне завдання) та захисту написаної студентом теоретичного завдання (0-1 балу за завдання).

Бали оцінювання аудиторного виконання контрольної роботи нараховуються за наступним співвідношенням:

2 – завдання розв'язано правильно з детальним обґрунтуванням розв'язку, що свідчить про те, що студент в повному обсязі володіє навчальним матеріалом теми, яка стосується розглядуваного завдання;

1 – студент лише частково виконав завдання чи завдання виконано з помірними недоліками, що свідчить про те, що студент не досить добре

	<p>розуміє розглянутий матеріал по відповідній темі,  0 – розв'язання завдання не є виконаним, тобто студент зовсім не засвоїв розглянутий матеріал.</p> <p><b>Бали оцінювання теоретичного завдання нараховуються за наступним співвідношенням:</b>  1 – студент надає правильні відповіді на запитання, описані у завданні, тобто володіє навчальним матеріалом, має розуміння розглянутої теми;  0 – студент не дає відповідь на питання, яке йому запропоновано у завданні.</p> <p><b>Оцінювання екзамену</b> відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені запитання.  Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне запитання нараховуються за наступним співвідношенням:  75-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обґрунтовано, логічно;  50-75% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні неточності та/або невідповідності;  25-50% – виявлено множинні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові;  0-25% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи.</p> <p><b>Критерії оцінювання результатів неформальної освіти:</b>  Нарахування балів відбувається за публікацію студентом тез доповідей на конференціях, наукових статей, за участь студента у діяльності наукових гуртків, семінарів, круглих столів, конкурсів, участь у заходах неформальної освіти, за отримання сертифікатів про проходження навчання на різних освітніх платформах за тематикою навчальної дисципліни. Кількість балів визначається відсотком покриття результатів відповідної активності до вимог результатів навчання з навчальної дисципліни</p>
<p><b>Питання до екзамену</b></p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Метричні простори. Приклади.</li> <li>2. Збіжність в метричному просторі.</li> <li>3. Деякі топологічні поняття в метричних просторах.</li> <li>4. Неперервні відображення в метричних просторах.</li> <li>5. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії.</li> <li>6. Принцип стискуючих відображень.</li> <li>7. Компактність в метричних просторах.</li> <li>8. Лінійні нормовані простори. Приклади.</li> <li>9. Гільбертів простір. Приклади.</li> <li>10. Нерівність Коші-Буняковського.</li> <li>11. Неперервність скалярного добутку. Формула паралелограма.</li> <li>12. Ортогональні доповнення.</li> <li>13. Теорема про ортогональну проекцію. Наслідки з неї.</li> <li>14. Нерівності Гельдера, Юнга і Мінковського.</li> <li>15. Ряди в нормованих просторах. Критерій збіжності ортогонального ряду.</li> <li>16. Абстрактні ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля.</li> <li>17. Класичний ряд Фур'є в просторі квадратично інтегрованих функцій.</li> <li>18. Лінійні неперервні оператори в нормованих просторах.</li> <li>19. Лінійні функціонали в нормованих просторах.</li> <li>20. Рівномірна та сильна збіжність лінійних неперервних операторів.</li> <li>21. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі.</li> <li>22. Обернений оператор.</li> </ol>

	<p>23. Теорема С. Банаха про обернений оператор.</p> <p>24. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала.</p> <p>25. Спряжений оператор.</p> <p>26. Спектр лінійного оператора.</p> <p>27. Резольвента лінійного оператора</p> <p>28. Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром.</p> <p>29. Інтегральні рівняння Вольтерра 2-го роду з неперервним ядром.</p> <p>30. Скінченновимірні оператори.</p> <p>31. Компактні оператори та їх основні властивості.</p> <p>32. Альтернатива Фредгольма для інтегральних компактних операторів.</p> <p>33. Самоспряжені оператори.</p> <p>34. Узагальнені функції (розподіли).</p> <p>35. Похідна узагальнених функцій.</p>
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

### Схема курсу “Функціональний аналіз”

Тиж- день	Лекції		Практичні заняття		СР К-ть год Л-ра
	Назва теми	К- сть год	Назва теми	К- сть год	
<b>6-ий семестр</b>					
1	<b>Вступ</b> Історія виникнення дисципліни Функціональний аналіз. <b>Тема 1. Метричні простори.</b> 1.1. Означення метричного простору. Приклади. 1.2. Нерівність Гельдера та Мінковського для послідовностей. 1.3. Простори сумовних функцій. 1.4. Нерівність Гельдера та Мінковського для інтегралів.	2	Метричні простори.	2	2  [1-6]
2	1.5. Збіжність в метричному просторі. 1.6. Повні метричні простори.	2			3  [1-6]

3	1.7. Деякі топологічні поняття в метричних просторах. 1.8. Властивості відкритих та замкнених множин. 1.9. Сепарабельні простори.	2	Деякі топологічні поняття в метричних просторах.	2	2 [1-6]
4	1.10. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії.	2			3 [1-6]
5	1.11. Неперервні відображення в метричних просторах. Критерій неперервності. Принцип продовження за неперервністю.	2	Теорема Бера. Неперервні відображення в метричних просторах.	2	2 [1-6]
6	1.12. Принцип стискуючих відображень. Теорема Банаха про нерухому точку.	2			3 [1-6]
7	1.13. Компактність в метричних просторах. Теорема Гаусдорфа. 1.14. Теорема Арцела-Асколі.	2	Принцип стискуючих відображень. Компактність в метричних просторах.	2	2 [1-6]
8	<b>Тема 2.</b> Лінійні нормовані простори. 2.1. Лінійні простори. 2.2. Банахів простір. Приклади. 2.3. Норма елемента. Еквівалентні норми.	2			3 [1-6]
9	<b>Тема 3.</b> Гільбертові простори. 3.1. Скалярний добуток. Гільбертів простір. Приклади гільбертових просторів. 3.2. Нерівність Коші-	2	Аксіоми норми. Еквівалентні норми.	2	2 [1-6]



	Буняковсько-го.				
10	3.3. Властивості скалярного добутку. 3.4. Неперервність скалярного добутку. 3.5. Формула паралелограма.	2			3 [1-6]
11	3.6. Ортогональні доповнення. 3.7. Теорема про ортогональну проекцію. Наслідки з неї.	2	Банахові простори.	2	2 [1-6]
12	3.8. Нерівності Гельдера, Юнга і Мінковського	2			3 [1-6]
13	<b>Тема 4.</b> Ряди в нормованих просторах. 4.1. Означення ряду в нормованому просторі. 4.2. Критерій збіжності ортогонального ряду.	2	Гільбертові простори. Теорема про ортогональну проекцію.	2	2 [1-6]
14	4.3. Абстрактні ряди Фур'є. 4.4. Нерівність Бесселя. 4.5. Рівність Парсеваля.	2			3 [1-6]
15	4.6. Класичний ряд Фур'є в просторі квадратично інтегровних функцій на $(-\pi, \pi)$ .	2	Контрольна робота № 1.	2	2 [1-6]
16	4.7. Проблеми існування бази в сепарабельному гільбертовому просторі.	2			3 [1-5]
Всього		<b>32</b>		<b>16</b>	<b>42</b>
<b>7-ий семестр</b>					
1	<b>Тема 5.</b> Лінійні неперервні оператори в нормованих просторах. 5.1. Означення лінійного оператора, неперервність та	2	Знаходження норми лінійного функціонала.	2	2 [1-6]

	обмеженість оператора. Приклади. 5.2. Алгебра лінійних неперервних операторів.				
2	5.3. Рівномірна та сильна збіжність в алгебрі лінійних неперервних операторів. Добуток операторів.	2			3 [1-6]
3	5.5. Лінійні неперервні функціонали. Означення та приклади обмежених функціоналів.	2	Знаходження норми лінійного оператора.		2 [1-6]
4	5.6. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі.	2			3 [1-6]
5	<b>Тема 6.</b> Обернений оператор. 6.1. Означення оборотного оператора. 6.2. Критерій існування оберненого оператора. 6.3. Коректна оборотність лінійного оператора.	2	Знаходження оберненого оператора.	2	2 [1-6]
6	6.4. Теорема Банаха про обернений оператор у банаховому просторі	2			3 [1-6]
7	6.5. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала.	2	Знаходження спряженого оператора.	2	2 [1-6]
8	<b>Тема 7.</b> Спряжений оператор. 7.1. Означення спряженого оператора, приклади. 7.2. Властивості спряженого оператора.	2			3 [1-6]
9	<b>Тема 8.</b> Спектр та резольвента лінійного оператора. 8.1. Резольвента лінійного оператора. 8.2. Спектр та його властивості.	2	Знаходження власних значень оператора.	2	2 [1-6]
10	<b>Тема 9.</b> Інтегральні рівняння Фредгольма. 9.1. Означення інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром. 9.2. Методи розв'язування	2			3 [1-6]

	інтегральних рівнянь.				
11	9.3. Інтегральні рівняння Вольєрра.	2	Знаходження резольвенти та спектру оператора.	2	2 [1-6]
12	<b>Тема 10.</b> Компактні оператори та їх основні властивості. 10.1. Означення та приклади компактних операторів. 10.2. Основні властивості компактних операторів.	2		2	3 [1-6]
13	10.3. Альтернатива Фредгольма для інтегральних компактних операторів.	2	Розв'язування інтегральних рівнянь.	2	2 [1-6]
14	<b>Тема 11.</b> Самоспряжені оператори та їх основні властивості.	2			3 [1-6]
15	<b>Тема 12.</b> Узагальнені функції. 12.1. Простір основних функцій. 12.2. Розподіли. Регулярні та сингулярні функції.	2	Контрольна робота № 2	2	2 [1-6]
16	12.3. Похідна узагальнених функцій.	2			3 [1-6]
	Разом за 7-ий семестр	32		16	42
	Разом за 6-ий і 7-ий семестри	<b>64</b>		<b>32</b>	<b>84</b>
	Викладач: доц. Микитюк Я.В.		Викладач: доц. Сущик Н.С.		