

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної економіки, економетрії,
фінансової та страхової математики



Затверджено

На засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
Львівського національного університету імені Івана Франка
(протокол № 1 від 30.08.2023 р.)

Завідувач кафедри Кирилич В.М.

Силабус з навчальної дисципліни
„Математичний аналіз II функції багатьох змінних”,
що викладається в межах ОПП „Статистичний аналіз даних”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
для здобувачів зі спеціальності 112 „Статистика”

Назва дисципліни	Математичний аналіз II функції багатьох змінних
Адреса викладання дисципліни	Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, м. Львів, Україна, 79000
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 112 Статистика
Викладачі дисципліни	Червінка Костянтин Андрійович, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
Контактна інформація викладачів	Електронна пошта: kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua, веб-сторінка: https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/chervinka-k-a
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення практичних занять (за розкладом або попередньою домовленістю). В іншому випадку можливі он-лайн консультації через Zoom, Skype, MSTeams, Viber тощо. Для погодження часу он-лайн консультацій слід писати на електронну пошту викладача
Сторінка курсу	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/matematychnyy-analiz-ii-funksii-bahatokh-zminnykh-112-statystyka-sad-afm
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Математичний аналіз II функції багатьох змінних» є нормативною дисципліною зі спеціальності Статистика для освітньої програми «Статистичний аналіз даних», яка викладається в 3-му та 4-му семестрах в обсязі 9 (4 + 5) кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс розроблено так, щоб надати учасникам необхідні теоретичні і практичні навички з диференціального та інтегрального числення функції багатьох змінних, включаючи кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли, інтеграли залежні від параметра, теорії рядів Фур'є та перетворення Фур'є, теорії поля та векторного аналізу.
Мета та цілі дисципліни	Метою нормативної навчальної дисципліни «Математичний аналіз II» є оволодіння студентами класичними методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу в різноманітних задачах математики і прикладної математики, для їх використання в подальших курсах з математики та статистики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.
Література для вивчення дисципліни	<i>Основна література:</i> 1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.В. Математичний аналіз. Київ: Знання, 2008. – 416 с. 2. Заболоцький М.В., Фединяк С.І., Філевич П.В., Червінка К.А. Практикум з математичного аналізу: Навчальний посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 312 с. <i>Додаткова література</i> 3. Математичний аналіз : навчальний посібник / А. І. Щерба, А. М. Нестеренко, І. В. Мірошкіна; В. О. Щерба; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 513 с. 4. Бохонов, Ю. Є. (2023). Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне

	<p>числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграли, що залежать від параметра. – Електронне мережне навчальне видання – el.kpi.ua/bitstream/1234_56789/56825/1/Bokhonov_many_variables_02-06-23.pdf</p> <ol style="list-style-type: none"> 5. Підкуйко С.І. Ряди Фур'є : навчальний посібник. – Львів: 2013. – 160 с. 6. Жерновникова О. А. Математичний аналіз : практикум для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти спец. «014 Середня освіта (матем.)» / О.А. Жерновникова, Т.І. Дейніченко, О.Д. Чібісов ; Харк. нац. пед. ун-т імені Г.С. Сковороди. – Харків : ХНПУ, 2021. – 96 с. 7. Математичний аналіз 3: Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Збірник задач для самостійної роботи та розрахункових робіт [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Г.Бондаренко, А.Ю.Мальцев, Г.Б.Подколзін.– Електронні текстові дані (1 файл: 1,60 Мб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 52 с. 8. Підкуйко С.І. Інтеграли, залежні від параметра. – Львів: 2013. – 152 с. 9. Taylor, M. E. (2020). <i>Introduction to Analysis in Several Variables: Advanced Calculus</i> (Vol. 46). American Mathematical Soc. 10. Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2021). <i>Calculus: One and several variables</i>. John Wiley & Sons.
<p>Обсяг курсу</p>	<p>192 (96 + 96) години аудиторних занять. З них 96 (48 + 48) годин лекційних занять, 96 (48 + 48) годин практичних занять та 78 (24 + 54) години самостійної роботи.</p>
<p>Очікувані результати навчання</p>	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Знати основні поняття математичного аналізу, зокрема: розвинення періодичних функцій в ряди Фур'є; диференціювання функцій багатьох змінних та їх властивості, дослідження функцій на екстремум і умовний екстремум, означення і властивості кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів, їх зв'язок, властивості інтегралів, залежних від параметру, означення та властивості В, Г -функцій та перетворення Фур'є; - Вміти розвивати функції в ряди Фур'є, досліджувати функції багатьох змінних на диференційованість, екстремум, умовний екстремум, обчислювати кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, досліджувати на збіжність невластиві інтеграли залежні від параметру, знаходити основні характеристики скалярних та векторних полів. <p>В результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і спеціальних (фахових) (СК) компетентностей:</p> <p>ЗК-1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. ЗК-2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях. ЗК-3. Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності. ЗК-8. Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел. ЗК-10. Здатність працювати в команді. ЗК-11. Здатність до професійного спілкування з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами в інших галузях знань).</p> <p>СК-1. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях математичного аналізу, лінійної алгебри, геометрії, логіки, теорії функцій, диференціальних рівнянь. СК-2. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів.</p>

	<p>СК-3. Здатність здійснювати логічні математичні міркування із чітким зазначенням припущень та висновків.</p> <p>СК-4. Здатність до математичного формулювання задач та вибору методів їх розв'язання.</p> <p>СК-5. Здатність до кількісно-статистичного мислення.</p> <p>СК-6. Здатність до ймовірнісного мислення, що передбачає сприйняття стохастичної природи явищ.</p> <p>СК-7. Здатність робити якісні висновки з кількісних даних.</p> <p>СК-10. Здатність проводити дослідження ймовірнісно-статистичних моделей та інтерпретувати одержані результати.</p> <p>СК-12. Здатність застосовувати ймовірнісно-статистичні методи в міждисциплінарному контексті.</p> <p>СК-14. Здатність до аналізу основ і властивостей статистичних алгоритмів та розуміння переваг і обмежень тих чи інших підходів, у тому числі до оцінки їх обґрунтованості й ефективності.</p> <p>СК-15. Здатність аналізувати основи і властивості базових економічних та фінансових структур, інтерпретувати показники фінансової діяльності, користуватися методами оптимального керування економічних та природних процесів.</p> <p>СК-16. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички з машинного навчання, обробки зображень і природної мови.</p> <p>СК-17. Здатність моделювати та пояснювати дані просторових і часових вибірок за допомогою знань і навичок з регресійного аналізу.</p> <p>і здобуде такі результати навчання (РН):</p> <p>РН-5. Володіти базовими знаннями та вміннями з фундаментальних розділів математики: математичного аналізу, алгебри, аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, у тому числі в частинних похідних.</p> <p>РН-15. Володіти математичними та статистичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів математичних моделей, статистичними методами інтерпретації та обробки числових даних.</p> <p>РН-17. Знати методи моделювання природничих та/або соціальних процесів.</p>
Формат курсу	Очний
Теми	<p style="text-align: center;"><u>Теми та плани лекцій</u></p> <p><u>3-й семестр.</u></p> <p style="text-align: center;">Ряди Фур'є.</p> <p><i>Загальне поняття ряду Фур'є.</i> Ортогональні системи функцій. Теорема про екстремальну властивість коефіцієнтів Фур'є. Нерівність Беселя. Повні системи функцій. База векторів в нормованому просторі. Критерій повноти системи векторів в гільбертовому просторі.</p> <p><i>Тригонометричний ряд Фур'є.</i> Означення тригонометричного ряду Фур'є. Лема Рімана. Ядро Діріхле. Принцип локалізації. Достатні умови збіжності ряду Фур'є в точці (умова Діні). Ядро Фейєра. Терема Вейерштраса про апроксимацію. Зв'язок між гладкістю функцій та наявністю спадання її коефіцієнтів Фур'є. Теорема про повноту тригонометричної системи. Рівність Парсеваля. Теорема про єдиність ряду Фур'є.</p> <p style="text-align: center;">Диференціальне числення функцій багатьох змінних.</p> <p><i>Метричні та топологічні простори.</i> Поняття метричного простору. Відкриті і замкнені підмножини метричного простору. Поняття топологічного простору. Компактність.</p>

Абсолютна властивість множини бути компактом. Властивості компактів в \mathbf{R}^n . Критерій метричного компакту. Зв'язність. Критерій зв'язності множини в \mathbf{R} . Лінійна зв'язність лінійної підмножини в \mathbf{R}^n . Повні метричні простори.

Неперервні відображення метричних та топологічних просторів. Границя відображення. Загальні властивості. Границя композиції. Критерій Коші існування границі відображення. Неперервність відображення в точці. Критерій відображення топологічних просторів. Локальні властивості неперервних відображень. Образ компакту при неперервному відображенні. Теорема Больцано-Коші про проміжне значення. Теорема Вейерштраса. Теорема Кантора про рівномірну неперервність. Образ зв'язної множини при неперервному відображенні. Поняття стислого відображення. Принцип нерухомої точки Пікара-Банаха. Існування та єдиність розв'язку звичайного диференціального рівняння. Диференційовані відображення \mathbf{R}^m в \mathbf{R}^n . Лінійні відображення \mathbf{R}^m в \mathbf{R}^n . Лінійна структура в \mathbf{R}^m . Норма в \mathbf{R}^m . Евклідова структура в \mathbf{R}^m . Диференційовність відображення в точці. Зв'язок між диференціалом і частинними похідними відображення в точці. Матриця Якобі. Лінійність операції диференціювання та арифметичні властивості диференціалу. Диференціал композиції відображень. Диференціал оберненого відображення. Теорема про середнє. Достатня умова диференційовності функції в точці.

Частинні похідні вищих порядків. Формули Тейлора із залишковими членами у формах Лагранжа, Пеано, інтегральній формі. Необхідна та достатня умова точки екстремуму. Критерій Сильвестра.

Неявно задані функції та умовний екстремум

Необхідна умова локального екстремуму. Дотична площина і дотичний вектор до графіка функції. Теорема про неявну функцію. Функціональна залежність функцій. Розклад дифеоморфізму в композицію найпростіших. Функція Лагранжа у задачах на умовний екстремум.

Кратні інтеграли.

Інтеграл Рімана на n -вимірному проміжку.

Властивості мір n -вимірних проміжків. Означення інтеграла Рімана. Критерій Коші інтегрованості функції за Ріманом. Необхідна умова інтегрованості функції за Ріманом. Достатня умова інтегрованості функції. Нижня і верхня суми Дарбу. Інтеграл Дарбу. Теорема Дарбу. Критерій Дарбу інтегрованості функції. Множини Лебегової міри нуль. Критерій Лебега інтегрованості функції за Ріманом.

Інтеграл функції по множині.

Допустимі множини. Означення інтеграла по множині. Міра Жордана множини. Множини вимірні за Жорданом. Критерій Лебега існування інтеграла по допустимій множині. Лінійність інтеграла. Адитивність інтеграла. Теорема про середнє для інтеграла. Теорема Фубіні. Теорема про заміну змінної в кратному інтегралі.

Невластиві кратні інтеграли.

Вичерпання множини. Означення збіжності невластивого інтегралу.

4-й семестр.

Криволінійні інтеграли.

Означення та теореми існування криволінійних інтегралів I та II родів. Фізичний зміст та властивості. Формула Гріна. Критерій незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування в довільній та однозв'язній областях.

Поверхневі інтеграли.

Означення поверхні. Гладкі поверхні. Дотична площина та нормаль. Орієнтація гладких поверхонь. Формула для обчислення площі поверхні. Означення та властивості поверхневих інтегралів першого та другого родів. Фізичний зміст. Формули Гауса-Остроградського та Стокса.

Елементи векторного аналізу і теорії поля.

Диференціальні оператори **grad, rot, div, ∇** . Векторний запис класичних інтегральних формул. Поняття потенціального і соленоїдального полів. Критерій потенціальності і соленоїдальності поля

Інтеграли, залежні від параметру.

Теорема про комутування двох граничних переходів.

Властиві інтеграли залежні від параметру.

Неперервність інтегралів залежних від параметру. Диференціювання інтегралів залежних від параметру. Інтегрування інтегралів залежних від параметру.

Невластиві інтеграли залежні від параметру.

Рівномірна збіжність невластивих інтегралів залежних від параметру. Граничний перехід під знаком інтегралу залежного від параметру. Неperервність невластивих інтегралів залежних від параметру. Диференціювання невластивих інтегралів залежних від параметру. Інтегрування невластивих інтегралів залежних від параметру.

Ейлерові інтеграли.

Бета-функція. Гама-функція. Формула пониження. Формула Ейлера-Гауса. Формула доповнення. Зв'язок між бета- і гама-функціями.

Перетворення Фур'є.

Означення перетворення Фур'є та інтегралу Фур'є. Теорема про властивості перетворення Фур'є. Достатні умови зображення функції інтегралом Фур'є (умови Діні). Обернене перетворення Фур'є. Зв'язок між гладкістю функції та швидкістю спадання її перетворення Фур'є. Простір швидкоспадних функцій

Диференціальні форми.

Зовнішні форми в \mathbf{R}^m . Зовнішній добуток форм. Зв'язок векторного добутку і скалярного добутку із зовнішнім добутком форм. Властивості відображення f^* . Означення диференціальної p -форми на многовиді. Теорема про загальний вигляд диференціальної p -форми в локальних координатах. Означення зовнішнього диференціала. Властивості. Означення відображення f^* . Властивості.

Теми практичних робіт.

1-й семестр.

Тема 1: Ряди Фур'є.

Тема 2: Границя функції багатьох змінних.

Тема 3: Неperервність та диференційованість функцій.

Тема 4: Похідні композиції функцій.

Тема 5: Похідна за напрямком. Диференціали вищих порядків.

Тема 6: Формула Тейлора.

Контрольна робота 1.

Тема 7: Екстремуми функцій багатьох змінних.

Тема 8: Неявно задані функції.

Тема 9: Диференціювання неявно заданих функцій.

Тема 10: Умовний та абсолютний екстремум.

Тема 11: Задачі на екстремум.

	<p>Контрольна робота 2. Тема 12: Означення подвійного інтеграла. Тема 13: Зведення подвійного інтеграла до повторних. Тема 14: Заміна змінних в подвійному інтегралі. Тема 15: Обчислення об'ємів та площ поверхонь. Тема 16: Потрійні та n-кратні інтеграли.</p> <p>Контрольна робота 3. <u>II-й семестр.</u> Тема 1: Обчислення криволінійних інтегралів першого роду. Тема 2: Обчислення криволінійних інтегралів другого роду. Тема 3: Умови незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування. Тема 4: Формула Гріна.</p> <p>Контрольна робота 1. Тема 5: Дотична площина та нормаль до поверхні. Тема 6: Поверхневі інтеграли. Тема 7: Формула Стокса. Тема 8. Формула Остроградського. Тема 9: Елементи теорії поля.</p> <p>Контрольна робота 2. Тема 10: Властиві інтеграли залежні від параметра. Диференціювання та інтегрування. Тема 11: Області збіжності невластивих інтегралів залежних від параметра. Тема 12: Рівномірна збіжність невластивих інтегралів. Тема 13: Диференціювання та інтегрування невластивих інтегралів. Тема 14: Інтеграл Ейлера. Тема 15: Диференціювання та інтегрування інтегралів Ейлера.</p> <p>Контрольна робота 3.</p>
Підсумковий контроль, форма	екзамен в кінці кожного семестру
Пререквізити	Для вивчення даного курсу студенти потрібні базові знання з: <ul style="list-style-type: none"> • Математичний аналіз I
Навчальні методи й техніки, що будуть використані під час викладання курсу	Інформаційні методи (лекція, бесіда, ілюстрація, демонстрація); дедуктивні методи на основі узагальнень; евристичні методи (проблемна лекція); інтерактивні методи (дискусія)
Необхідне обладнання	проектор, комп'ютер, дошка, крейда
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховують за наступним співвідношенням: Протягом кожного семестру відбувається 3 контрольні роботи, кожна з яких оцінюється в 10 балів, та письмовий колоквіум – 20 балів. Разом за семестр студент може отримати 50 балів. Іспит оцінюється в 50 балів. Максимальна кількість балів 100</p> <p>Очікується, що протягом кожного семестру студенти виконають 3 контрольних роботи та напишуть письмовий колоквіум. Ці роботи є допуском до складання іспиту. Головна їх мета – перевірка самостійної роботи студентів в процесі навчання, виявлення ступеня засвоєння ними теоретичних положень курсу. При розв'язанні задач необхідно детально вказувати, яким саме був хід роздумів, які</p>

формули було використано. Списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її не зарахування, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі заняття курсу. Студенти мають інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися усіх строків визначених для виконання усіх видів робіт, передбачених курсом. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

Оцінювання практичних робіт

У кожному семестрі матеріал розділено на три змістовних модулі, кожен із яких завершується написанням контрольної роботи.

Контрольна робота виконується студентом у аудиторії, оцінюється у 0-10 балів за одну роботу. Бал за контрольну роботу є арифметичною сумою балів за кожне завдання, заокругленою вгору до цілого числа. Завдання є елементарними (оцінюються у 1 бал) або комплексними (оцінюються у k балів). Оцінка за комплексне завдання формується аналогічно до оцінки за елементарне із масштабним множником k . Оцінка за елементарне завдання формується таким чином:

1,00 бали – студент в повному обсязі виконав завдання, отримав правильну відповідь і дав усі необхідні пояснення; допускаються описки, що не впливають на хід розв'язування;

0,75 бали – студент отримав вірну відповідь, опустивши пояснення окремих кроків чи суттєвих моментів (як от відсутність ілюстрації до задачі), або ж за правильного ходу роботи і пояснень допустив помилку у формулюванні кінцевої відповіді;

0,50 бали – хід розв'язування в цілому вірний, але містить прогалини і кінцева відповідь невірна або незрозумілим є механізм її отримання;

0,25 бали – наведено необхідні співвідношення для розв'язання задачі, але їх не застосовано чи застосовано із суттєвою помилкою, або ж проведено аналіз задачі, проте фактичне розв'язування не розпочато;

0,00 балів – відсутні усі з перелічених вище елементів розв'язування.

Оцінювання підсумкового колоквиуму відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені запитання.

Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне запитання нараховуються за наступним співвідношенням:

75-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обґрунтовано, логічно;

50-75% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні неточності та/або невідповідності;

25-50% – виявлено множинні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові;

0-25% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи.

Бал за колоквиум розраховують як отриманий відсоток від 20 балів.

Критерії оцінювання результатів неформальної освіти:

	<p>Нарахування балів відбувається за публікацію студентом тез доповідей на конференціях, наукових статей, за участь студента у діяльності наукових гуртків, семінарів, круглих столів, конкурсів, участь у заходах неформальної освіти, за отримання сертифікатів про проходження навчання на різних освітніх платформах (Coursera, Prometheus тощо). Кількість балів визначається відсотком покриття результатів відповідної активності до вимог результатів навчання з навчальної дисципліни</p>
<p>Питання до екзамену</p>	<p><u>3-й семестр</u></p> <p><i>I. Ряди Фур'є.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Нескінченновимірні лінійні евклідові простори. Нерівність Коші-Буняковського. Приклади ортонормованих систем. 2. Означення ряду Фур'є. 3. Теорема про найменше відхилення часткових сум ряду Фур'є. 4. Закриті системи. Рівність Парсеваля. Єдиність ряду Фур'є. 5. Збіжність в середньому. Зв'язок з рівномірною збіжністю. 6. Нерівність Бесселя для коефіцієнтів ряду Фур'є. 7. Означення повної системи. Зв'язок між повними та замкнутими системами. 8. Тригонометричний ряд Фур'є. Наслідки з замкненості тригонометричної системи. 9. Найпростіші достатні умови розвинення в тригонометричний ряд Фур'є 10. Теорема про почленне диференціювання тригонометричних рядів Фур'є. <p><i>II. Функції багатьох змінних.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 11. Простір \mathbf{R}^n. Границя послідовності точок, властивості границь. 12. Відкриті та замкнені множини в \mathbf{R}^n, властивості. 13. Компакт та його властивості. 14. Функції багатьох змінних, їх границі та властивості. 15. Неперервність функцій багатьох змінних, їх властивості. 16. Теорема Вейерштраса про неперервність функцій на компактi. 17. Аналог теореми Больцано-Коші, теорема Кантора, рівномірна неперервність. 18. Часткові похідні та диференціал функції. 19. Зв'язок між неперервністю, диференційованістю та існуванням частинних похідних. Приклади. 20. Достатня умова диференційованості. 21. Теорема про часткові похідні від композиції функцій. Диференційованість складної функції. 22. Інваріантність 1-го диференціалу. 23. Похідна за напрямком. Терма існування. Градієнт. 24. Часткові похідні вищих порядків. Рівність мішаних похідних. 25. Диференціали вищих порядків. 26. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних. 27. Означення точки локального екстремуму. Необхідна умова точки екстремуму. 28. Достатня умова точки екстремуму. Критерій Сильвестра. <p><i>III. неявно задані функції.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 29. неявно задані функції, що визначаються одним рівнянням, їх існування. 30. Обчислення часткових похідних неявно заданих функцій. Похідна оберненої функції.

31. Теорема існування неявно заданих функцій , що задані системою.
32. Поняття умовного екстремуму, необхідна умова.
33. Достатня умова точки умовного екстремуму.

IV. Кратні інтеграли.

34. Означення подвійного інтегралу, необхідна умова інтегрованості.
35. Суми Дарбу. Критерій інтегрованості.
36. Класи інтегрованих функцій.
37. Зведення подвійного інтегралу до повторного.
38. Основні властивості подвійних інтегралів.
39. Заміна змінних. Геометричний зміст модуля і знаку якобіану.
40. Потрійні інтеграли, сферична та циліндрична системи координат.
41. Невластиві кратні інтеграли. Критерій збіжності для невід'ємних функцій. Ознака порівняння.
42. Невластивий кратний інтеграл від довільних функцій. Еквівалентність збіжності та абсолютної збіжності.
43. Статичні моменти фігури. Центр ваги. II-га теорема Гульдена.

V. Метричні простори.

44. Означення метричного простору, приклади. Означення кулі, околу, внутрішньої точки.
45. Відкриті та замкнені множини, їх властивості.
46. Збіжність в метричних просторах. Компакти. Необхідна та достатня умови компактності.
47. Неперервні відображення в метричних просторах. Теорема Вейерштраса.
48. Повні метричні простори. Критерій повноти.
49. Теорема про нерухому точку.
50. Лінійні нормовані простори. Банахів простір. Приклади.
51. Евклідові простори. Теорема про повноту скінченновимірного евклідового простору.
52. Лінійні оператори в нормованих просторах. Норма лінійного оператора. Необхідна та достатня умови неперервності.
53. Диференціювання в нормованих просторах. Похідна Фреше („сильна похідна.”).
54. Відображення з \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^m .
55. Лінійні відображення з \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^m . Диференційованість. Властивості диференційованих відображень.
56. Відображення з ненульовим якобіаном (принцип збереження області, теорема про обернену функцію).

4-й семестр

I. Криволінійний інтеграл.

1. Означення та теореми існування криволінійного інтегралу першого роду.
2. Означення та теорема існування криволінійного інтегралу другого роду. Фізичний зміст та властивості.
3. Формула Гріна.
4. Критерій незалежності криволінійного інтегралу другого роду від шляху інтегрування.
5. Критерій незалежності криволінійного інтегралу 2-го роду від шляху інтегрування в однозв'язній області.

II. Поверхневі інтеграли.

	<p>6. Означення поверхні., гладкі поверхні. 7. Дотична площина та нормаль. 8. Площа поверхні. Формула до обчислення площ. 9. Орієнтація гладких поверхонь. Склеювання поверхонь. 10. Поверхневий інтеграл 1-го роду. (Властивості. Фізичний зміст) 11. Поверхневий інтеграл 2-го роду.</p> <p>III. Елементи теорії поля..</p> <p>12. Основні характеристики векторних полів. 13. Плоско-паралельне векторне поле. Необхідна і достатня умови потенціальності. 14. Теорема Гауса-Остроградського. Геом.зміст дивергенції. 15. Формула Стокса. Геометричний зміст ротора. 16. Соленоїдальне векторне поле. 17. Потенціальні векторні поля.</p> <p>IV. Інтеграл залежні від параметра.</p> <p>18. Рівномірна збіжність по одній змінній функції двох змінних. Зв'язок з рівномірно збіжними функ.послідовностями. 19. Властивості рівномірно збіжної сім'ї функцій. 20. Достатня умова рівномірної збіжності. 21. Неперервність та інтегровність властивого інтегралу залежного від параметру. 22. Теорема про диференційовність властивого інтегралу залежного від параметру. 23. Неперервність властивого інтегралу залежного від параметру, межі якого залежать від параметру. 24. Диференційованість властивого інтегралу залежного від параметру. Формула Лейбніца.</p> <p>V. Невластиві інтеграл залежні від параметра.</p> <p>25. Рівномірна збіжність невластивого інтегралу залежного від параметру. Критерій Коші рівномірної збіжності. 26. Ознака Вейерштраса рівномірної збіжності. 27. Ознака Діріхле та Абеля. 28. Терема про граничний перехід під знаком невл-го інтегралу. 29. Неперервність невластивого інтегралу та наслідки. 30. Інтегровність невластивого інтегралу залежного від параметру. 31. Диференційовність невластивого інтегралу залежного від параметру 32. Інтегровність невластивого інтегралу залежного від параметру по нескінченному проміжку. 33. Інтеграл Діріхле. 34. Інтеграл Пуассона 35. Гама функція та її властивості. 36. Бета функція та її властивості. 37. Зв'язок між гама та бета функціями.</p> <p>VI. Перетворення та інтеграл Фур'є.</p> <p>38. Інтеграл Фур'є, його властивості. 39. Достатні умови зображення функції інтегралом Фур'є. 40. Перетворення Фур'є та його властивості. 41. Обернена формула перетворення Фур'є.</p>
<p>Опитування</p>	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

Схема курсу

Тиж- день, се- местр	Лекційний курс		Практичні заняття		к- сть год СР	Літе- рату- ра
	Зміст теми	к-сть год	Зміст теми	к-сть год		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1/3	Загальне поняття ряду Фур'є	2	Розвинення функції у тригонометричний ряд Фур'є	4	2	[1, 2, 5, 9]
2/3	Тригонометричний ряд Фур'є. Метричні та топологічні простори.	4	ОДЗ та лінії рівня ФБЗ	2	1	[1, 2, 5, 9]
3/3	Простір \mathbb{R}^m . Неперервні відображення у метричних просторах	2	Подвійні границі. Частинні похідні.	4	2	[1, 2, 3, 10]
4/3	Диференціальне числення ФБЗ, частинні похідні та диференціали	4	Частинні похідні та диференціал. Похідна за напрямом та градієнт	2	1	[1, 2, 3, 10]
5/3	Геометричний зміст частинних похідних і першого диференціалу	2	Неявно задані ФБЗ: похідні та диференціал	4	2	[1, 2, 6, 9]
6/3	Формула Тейлора для ФБЗ. Контрольна робота 1	4	Формула Тейлора для ФБЗ	2	1	[1, 2, 3, 10]
7/3	Безумовний екстремум ФБЗ	2	Задачі на екстремум	4	2	[1, 2, 3, 10]
8/3	Теорія неявних функцій	4	Похідні неявно заданих функцій	2	1	[1, 2, 3, 9]
9/3	Умовний екстремум ФБЗ	2	Умовний екстремум. Контрольна робота 2	4	2	[1, 2, 3, 10]
10/3	Площа плоскої фігури та подвійний інтеграл	4	Подвійні інтеграли. Зведення подв. інтегралу до повторного	2	1	[1, 2, 3, 10]
11/3	Класи інтегровних функцій	2	Обчислення подвійних інтегралів	4	2	[1, 2, 3, 10]
12/3	Властивості подвійних інтегралів. Теорема Фубіні.	4	Геометр. та фізичні застосування	2	1	[1, 2, 3, 10]
13/3	Заміна змінних. Геометричний зміст модуля і знаку якобіану.	2	Заміна змінних у подвійному інтегралі	4	2	[1, 2, 3, 10]
14/3	Потрійні та n -кратні інтеграли. Сферична та циліндрична системи.	4	Потрійні інтеграли	2	1	[1, 2, 3, 10]
15/3	Невластиві кратні інтеграли.	2	Циліндрична і сферична системи координат	4	2	[2, 3, 7, 10]
16/3	Механ. застосування, центр ваги. Колоквіум	4	Контрольна робота 3	2	1	[1-3, 6, 10]
	Усього за семестр	48		48	24	

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1/4	Крива. Криволінійні інтеграли першого і другого роду.	4	Криві на площині і у просторі, їх параметризація	2	2	[1-3, 7, 9-10]
2/4	Формула Гріна. Незалежність від шляху	2	Обчислення криволінійних інтегралів I і II роду	4	5	[1-3, 10]
3/4	Застосування криволінійних інтегралів.	4	Інтеграл від повного диференціалу	2	2	[1-3, 10]
4/4	Поняття поверхні. Параметризація. Дотична і нормаль	2	Інт. по замкнутому контури, ф.Гріна	4	5	[1, 2, 7,10]
5/4	Площа поверхні. Формула до обчислення площ. Орієнтація поверхні	4	Контрольна робота 1	2	2	[1, 2, 6, 10]
6/4	Поверхневий інтеграл 1-го роду. (Властивості. Фізичний зміст)	2	Обчислення поверхневих інтегралів першого та другого роду	4	5	[1-3, 10]
7/4	Поверхневий інтеграл 2-го роду. Векторні та скалярні поля	4	Застосування поверхневих інтегралів	2	2	[1-3, 10]
8/4	Формула Гауса-Остроградського	2	Формула Гауса-Остроградського	4	5	[1-3, 9, 10]
9/4	Формула Стокса. Соленоїдні та потенціалі векторні поля	4	Формула Стокса	2	2	[1-3, 9, 10]
10/4	Контрольна робота 2	2	Знаходження градієнту, ротору та дивігенції	4	4	[1-3, 10]
11/4	Рівномірна збіжність функції двох змінних до граничної	4	Дослідження на рівномірну збіжність функції двох	2	2	[1, 2, 4, 8, 10]
12/4	Властиві інтеграли, залежні від параметру. Умови неперервності, диференційовності й інтегровності	2	Інтегрування та диференціювання інтегралів, залежних від параметру	4	4	[1, 2, 4, 8, 10]
13/4	Невластиві інтеграли ЗВП. Умови неперервності, диференційовності й інтегровності.	4	Дослідження на рівномірну збіжність невластивих ІЗВП	2	2	[1, 2, 4, 8, 10]
14/4	Інтеграл Ейлера	2	Інтеграл Пуассона, Діріхле, Фрулані, Френеля	4	5	[1, 2, 4, 8, 10]
15/4	Перетворення та інтеграл Фур'є.	4	Гамма і бета-функції	2	2	[1, 2, 4, 5, 10]
16/4	Колоквіум	2	Застосування перетворення Фур'є. Контрольна робота 3	4	5	[1-10]
	Усього за семестр	48		48	54	
	Усього за рік	96		96	78	