

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь



Затверджено

на засіданні кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка
(протокол № 1 від 22.06.2023)

Завідувач кафедри:

проф. Олег БУГРІЙ

Силабус з навчальної дисципліни
“ Диференціальні рівняння ”,
що викладається в межах ОПП “Статистичний аналіз даних”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів із
спеціальності 112 – Статистика

Назва дисципліни	Диференціальні рівняння
Адреса викладання дисципліни	м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичного факультет Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – Математика і статистика 112 – Статистика
Викладачі дисципліни	Бокало Микола Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь
Контактна інформація викладачів	mykola.bokalo@lnu.edu.ua
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/dyferentsialni-rivniannia-112-statystyka
Інформація про дисципліну	Курс розроблено для ознайомлення студентів з основними поняттями та методами теорії звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь із частинними похідними першого порядку.
Коротка анотація дисципліни	Дисципліна “Диференціальні рівняння” є нормативною дисципліною з спеціальності 112 -- Статистика для освітньої програми “Статистичний аналіз даних”, яка викладається в 3-му та 4-ому семестрах в обсязі 8 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Мета та цілі дисципліни	<i>Мета:</i> ознайомити з основними поняттями та методами теорії звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь із частинними похідними першого порядку. <i>Цілі:</i> викласти основні положення теорії звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними першого порядку, показати методи їх розв’язування.
Література для вивчення дисципліни	1) М.М. Бокало. Електронний текст лекцій по курсу «Диференціальні рівняння», 2023 // Сторінка курсу. 2) М.М. Бокало. Електронний текст матеріалів для практичних занять по курсу «Диференціальні рівняння», 2023 // Сторінка курсу. 3) А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. <i>Диференціальні рівняння</i> . – Підручник. -- Київ, 2003.

	<p>4) М. М. Бокало. <i>Нормальні лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь</i>. -- Навчально-методичний посібник. -- Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.</p> <p>5) Бугрій О.М., Процах Н.П., Бугрій Н.В. <i>Основи диференціальних рівнянь: теорія, приклади та задачі</i>. – Навчальний посібник. – Львів, 2011.</p> <p>6) Бугрій О.М. <i>Диференціальні рівняння</i>. -- Методичні вказівки. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006.</p> <p>7) Гой Т.П., Махней О.В. <i>Диференціальні рівняння</i>. – Івано-Франківськ, 2010.</p> <p>8) Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. <i>Диференціальні рівняння у прикладах і задачах</i>. – К.: Вища школа, 1994.</p> <p>9) Craig A. Tracy. <i>Lectures on Differential Equations</i>. Department of Mathematics University of California Davis, 2017.</p>
<p>Обсяг курсу</p>	<p>Загальний обсяг у 3-ому семестрі -- 120 годин. Аудиторних занять -- 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 годин практичних годин. Самостійної роботи -- 56 год. Кредитів – 4.</p> <p>Загальний обсяг у 4-ому семестрі -- 120 годин. Аудиторних занять -- 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 годин практичних робіт. Самостійної роботи -- 56 год. Кредитів – 4.</p>
<p>Очікувані результати навчання</p>	<p>У результаті вивчення даного курсу студент буде:</p> <p>знати: класифікацію звичайних диференціальних рівнянь та систем рівнянь, методи їх розв'язування та розв'язування рівнянь із частинними похідними першого порядку, основні властивості розв'язків, формулювання задачі Коші, доведення їх коректності, основи теорії стійкості за Ляпуновим для систем звичайних диференціальних рівнянь;</p> <p>вміти: знаходити загальні розв'язки основних типів звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, лінійних рівнянь вищих порядків та лінійних систем рівнянь, рівнянь з частинними похідними першого порядку та розв'язувати задачі Коші для них.</p> <p>В результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і спеціальних (фахових) (СК) компетентностей:</p> <p>ЗК-1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. ЗК-2. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях. ЗК-3. Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності. ЗК-8. Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел. ЗК-10. Здатність працювати в команді. ЗК-11. Здатність до професійного спілкування з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами в інших галузях знань).</p> <p>СК-1. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях математичного аналізу, лінійної алгебри, геометрії, логіки, теорії функцій, диференціальних рівнянь.</p>

	<p>СК-2. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів.</p> <p>СК-3. Здатність здійснювати логічні математичні міркування із чітким зазначенням припущень та висновків.</p> <p>СК-4. Здатність до математичного формулювання задач та вибору методів їх розв'язання.</p> <p>СК-5. Здатність до кількісно-статистичного мислення.</p> <p>СК-6. Здатність до ймовірнісного мислення, що передбачає сприйняття стохастичної природи явищ.</p> <p>СК-7. Здатність робити якісні висновки з кількісних даних.</p> <p>СК-10. Здатність проводити дослідження ймовірнісно-статистичних моделей та інтерпретувати одержані результати.</p> <p>СК-12. Здатність застосовувати ймовірнісно-статистичні методи в міждисциплінарному контексті.</p> <p>СК-14. Здатність до аналізу основ і властивостей статистичних алгоритмів та розуміння переваг і обмежень тих чи інших підходів, у тому числі до оцінки їх обґрунтованості й ефективності.</p> <p>СК-15. Здатність аналізувати основи і властивості базових економічних та фінансових структур, інтерпретувати показники фінансової діяльності, користуватися методами оптимального керування економічних та природних процесів.</p> <p>СК-16. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички з машинного навчання, обробки зображень і природної мови.</p> <p>СК-17. Здатність моделювати та пояснювати дані просторових і часових вибірок за допомогою знань і навичок з регресійного аналізу.</p> <p>і здобуде такі результати навчання (РН):</p> <p>РН-5. Володіти базовими знаннями та вміннями з фундаментальних розділів математики: математичного аналізу, алгебри, аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, у тому числі в частинних похідних.</p> <p>РН-15. Володіти математичними та статистичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів математичних моделей, статистичними методами інтерпретації та обробки числових даних.</p> <p>РН-17. Знати методи моделювання природничих та/або соціальних процесів.</p>
Ключові слова	Звичайне диференціальне рівняння, рівняння з частинними похідними першого порядку, задача Коші, крайова задача.
Формат курсу	Очний
Теми	Див. "Схема курсу"
Підсумковий контроль, форма	Залік в 3-ому семестрі, іспит в 4-ому семестрі (письмово)
Пререквізити	Для вивчення даного курсу студенти повинні мати базові знання з:

	<ul style="list-style-type: none"> - лінійної алгебри, - аналітичної геометрії, - математичного аналізу
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Лекції, практичні заняття, презентації та самостійна робота
Необхідне обладнання	Комп'ютер із необхідним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі.
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Оцінювання проводиться в кожному семестрі за 100-бальною шкалою. Бали в 3-ому семестрі нараховуються так:</p> <ul style="list-style-type: none"> • контрольна робота №1 – 16 балів; контрольна робота №2 – 18 балів; контрольна робота №3 – 21 бал; колоквіум №1 – 8 балів; колоквіум №2 – 8 балів; виконання домашніх завдань – 24 бали; премія за активну роботу на заняттях – 5 балів. Всього – 100 балів. <p>Бали в 4-ому семестрі нараховуються так:</p> <ul style="list-style-type: none"> • контрольна робота №4 – 8 балів; контрольна робота №5 – 8 балів; контрольна робота №6 – 8 балів; контрольна робота №7 – 8 балів; • колоквіум №3 – 6 балів; колоквіум №4 – 6 балів; колоквіум №5 – 6 балів; • іспит – 50 балів. Всього – 100 балів. <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися визначених термінів для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування</p>

	<p>та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються. Оцінювання колоквиуму та контрольних робіт відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені запитання. Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне запитання нараховуються за наступним співвідношенням: 75-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обґрунтовано, логічно; 50-75% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні неточності та/або невідповідності; 25-50% – виявлено множинні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові; 0-25% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи. Критерії оцінювання результатів неформальної освіти: Нарахування балів відбувається за публікацію студентом тез доповідей на конференціях, наукових статей, за участь студента у діяльності наукових гуртків, семінарів, круглих столів, конкурсів, участь у заходах неформальної освіти, за отримання сертифікатів про проходження навчання на різних освітніх платформах (Coursera, Prometheus тощо), курсах провідних ІТ компаній за тематикою навчальної дисципліни. Кількість балів визначається відсотком покриття результатів відповідної активності до вимог результатів навчання з навчальної дисципліни.</p>
<p>Питання до екзамену</p>	<p>Формулювання задач для звичайних диференціальних рівнянь та означення їх розв'язків, інтегровні типи звичайних диференціальних рівнянь, задача Коші для нормального диференціального рівняння першого порядку, неявні диференціальні рівняння, нормальні системи диференціальних рівнянь та диференціальні рівняння вищого порядку, лінійні рівняння вищого порядку зі змінними коефіцієнтами, лінійні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами, системи лінійних диференціальних рівнянь, системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, нормальні загальні системи диференціальних рівнянь, диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку</p>
<p>Опитування</p>	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

Схема курсу

Тиж- день	Лекції			Практичні заняття		СР К-ть год Л-ра
	Назва теми	К- сть год		Назва теми	К- сть год	
3-ій семестр						
1	<p>Вступ 1. Поняття звичайного диференціального рівняння (ЗДР) та його порядку. 2. Приклади математичних моделей природних процесів, які є задачами для ЗДР. Тема 1. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку <i>§1. Вступ до теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку</i> 1. Розв'язок, інтеграл, загальний розв'язок та загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння першого порядку. 2. Класифікація рівнянь за формою запису. 3. Поле напрямків. Схематична побудова інтегральних ліній ЗДР.</p>	2		Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них	2	3 [1-9]
2	<p><i>§2. Класи інтегровних рівнянь першого порядку</i> 1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них. 2. Однорідні рівняння та звідні до них.</p>	2		Геометричні та фізичні задачі, при розв'язуванні яких використовують диференціальні рівняння	2	2 [1-9]
3	<p>3. Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них. 4. Рівняння в повних диференціалах та звідні до них. 5. Інтегрування нерозв'язних стосовно</p>	2		Однорідні рівняння та звідні до них	2	3 [1-9]

	похідної рівнянь. Рівняння Лагранжа та Клеро.					
4	§3. <i>Задача Коші для розв'язаних стосовно похідної звичайних диференціальних рівнянь.</i> 1. Формулювання задачі Коші для розв'язаного стосовно похідної ЗДР першого порядку. Інтегральне рівняння, якому еквівалентна задача Коші для ЗДР. 2. Теорема Пеано про існування розв'язку задачі Коші для ЗДР. 3. Лема Гронуолла-Белмана. Умова Ліпшица.	2		Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них (I)	2	2 [1-9]
5	<u>4. Теорема Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЗДР.</u> <u>5.Продовження розв'язку ЗДР.</u> <u>6. Гладкість та аналітичність розв'язку ЗДР.</u>	2		Лінійні рівняння першого порядку та звідні до них (II)	2	3 [1-9]
6	7. Неперервна залежність від параметрів та початкових даних розв'язку задачі Коші для ЗДР. 8. Диференційовність за параметрами та початковими даними розв'язку задачі Коші для ЗДР. 9. Існування повного загального розв'язку ЗДР першого порядку.	2		Контрольна робота № 1	2	2 [1-9]
7	§4. <i>Задача Коші для нерозв'язаних стосовно похідної звичайних диференціальних рівнянь.</i> 1. Формулювання задачі Коші для нерозв'язаних	2		Рівняння у повних диференціалах. Інтегрувальний множник	2	3 [1-9]

	стосовно похідної рівнянь; існування та єдиність її розв'язку. 2. Особливі розв'язки звичайних диференціальних рівнянь.					
8	Колоквіум №1	2		Рівняння нерозв'язні щодо похідної (I)	2	2 [1-9]
9	Тема 2. Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь та звичайні диференціальні рівняння вищих порядків. <i>§1. Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь (НС).</i> 1. Поняття НС. Геометрична інтерпретація НС. 2. Задача Коші для НС: існування та єдиність розв'язку, продовження розв'язку. 3. Гладкість та аналітичність розв'язку задачі Коші для НС. 4. Неперервна та диференційовна залежність від початкових даних та параметрів розв'язку задачі Коші для НС. 5. Існування повного загального розв'язку НС.	2		Рівняння нерозв'язні щодо похідної (II)	2	3 [1-9]
10	<i>§2. Звичайні диференціальні рівняння вищих порядків.</i> 1. Зведення рівнянь вищих порядків до нормальних систем. 2. Задача Коші для рівняння вищого порядку:	2		Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння першого порядку	2	2 [1-9]

	існування та єдиність розв'язку, продовження розв'язку. 3.Гладкість та аналітичність розв'язку задачі Коші для рівняння вищого порядку. 4.Неперервна та диференційовна залежність від початкових даних та параметрів розв'язку задачі Коші для рівняння вищого порядку. 5. Існування повного загального розв'язку рівняння вищого порядку. 6. Деякі способи пониження порядку рівнянь вищих порядків.					
11	Колоквіум №2	2		Контрольна робота № 2	2	4 [1-9]
12	Тема 3. Нормальні лінійні системи та лінійні рівняння вищих порядків <i>§1. Нормальні лінійні системи (НЛС).</i> 1. Поняття НЛС. Коректність задачі Коші для НЛС. Структура повного загального розв'язку НЛС. 1.1. Поняття НЛС. 1.2. Коректність задачі Коші для НЛС. 1.3. Структура повного загального розв'язку НЛС.	2		Рівняння вищих порядків (I)	2	2 [1-9]
13	2. Зображення повного загального розв'язку нормальної лінійної однорідної системи (НЛОС). 3. Фундаментальна матриця розв'язків НЛОС та визначник	2		Рівняння вищих порядків (II)	2	3 [1-9]

	Вронського.					
14	<p>4. Формула Остроградського-Ліувілля. 5. Метод варіації сталих знаходження час-ткових розв'язків нормальних лінійних неоднорідних систем (НЛНС). §2. Лінійні рівняння вищих порядків (ЛР).</p> <p>1. Поняття ЛР. Зв'язок між ЛР і НЛС. Коректність задачі Коші для ЛР. Структура повного загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР).</p> <p>1.1. Поняття ЛР. 1.2. Зв'язок між ЛР і НЛС. 1.3. Коректність задачі Коші для ЛР.</p>	2		Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нормальних систем та рівнянь вищого порядку	2	3 [1-9]
15	<p>1.4. Структура повного загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР).</p> <p>2. Зображення повного загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (ЛОР).</p> <p>3. Визначник Вронського для ЛОР. Формула Остроградського-Ліувілля. 4. Метод варіації сталих знаходження часткових розв'язків ЛНР.</p>	2		Лінійні диференціальні рівняння	2	3 [1-9]
16	Колоквіум № 3	2		Контрольна робота № 3	2	2 [1-9]

		32			32	56
4-ий семестр						
1	<p><i>§3. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами.</i></p> <p>1. Повний загальний розв'язок ЛОР зі сталими коефіцієнтами.</p>	2		Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2	3 [1-9]
2	<p>2. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків ЛНР зі сталими коефіцієнтами.</p>	2		Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами (метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків)	2	2 [1-9]
3	3. Рівняння Ейлера.	2		Контрольна робота № 4	2	3 [1-7]
4	<p><i>§4. Лінійні рівняння з поліноміальними коефіцієнтами.</i></p> <p>1. Метод степеневих рядів. 2. Метод узагальнених степеневих рядів. Рівняння Бесселя.</p>	2		Метод варіації сталих знаходження часткових розв'язків лінійних неоднорідних рівнянь. Рівняння Ейлера	2	2 [1-9]
5	<p><i>§5. Крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку.</i></p> <p>1. Формулювання крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку, єдиність їх розв'язків. 2. Існування розв'язків крайових задач для лінійних рівнянь другого порядку. Функція Гріна.</p>	2		Метод степеневих рядів знаходження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. Лінійні рівняння з поліноміальними коефіцієнтами.	2	4 [1-9]
6	<p><i>§6. Нормальні лінійні системи зі сталими коефіцієнтами.</i></p> <p>1. Повний загальний розв'язок НЛОС зі сталими коефіцієнтами.</p>	2		Крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку	2	2 [1-9]

7	2. Метод неозначених коефіцієнтів знаходження часткових розв'язків НЛНС зі сталими коефіцієнтами.	2		Контрольна робота № 5	2	4 [1-9]
8	Колоквіум № 4	2		Нормальні лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами (випадок співпадіння алгебраїчної і геометричної і кратностей)	2	2 [1-9]
9	Тема 4. Динамічні (автономні) системи §1. Основні поняття теорії динамічних систем. §2. Властивості розв'язків динамічних систем. §3. Типи фазових портретів двовимірних НЛОС зі сталими коефіцієнтами.	2		Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами (випадок неспівпадіння алгебраїчної і геометричної кратності)	2	3 [1-9]
10	Тема 5. Перші інтеграли нормальних систем §1. Поняття першого інтеграла нормальної системи та існування повної системи перших інтегралів. 1. Поняття першого інтеграла динамічної системи та його критерій. 2. Існування пов- ної системи перших інтегралів динамічних систем. 3. Перші інтеграли нединамічних систем.	2		Нормальні лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами (метод неозначених коефіцієнтів)	2	2 [1-9]
11	§2. Застосування перших інтегралів до знаходження розв'язків нормальних систем.	2		Лінійні неоднорідні системи зі сталими коефіцієнтами (метод варіації сталих)	2	3 [1-9]

	1. Пониження порядку нормальної системи за допомогою її перших інтегралів. 2. Зображення повного загального інтегралу нормальної системи через повну систему її перших інтегралів.					
12	Тема 6. Рівняння з частинними похідними першого порядку <i>§1. Загальний розв'язок рівнянь з частинними похідними першого порядку.</i> 1. Класифікація рівнянь з частинними похідними першого порядку. 2. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. 3. Загальний розв'язок квазілінійного рівняння.	2		Контрольна робота № 6	2	2 [1-9]
13	<i>§2. Задача Коші для рівнянь з частинними похідними першого порядку.</i> 1. Задача Коші для майже лінійних рівнянь у випадку двох незалежних змінних. 2. Задача Коші для квазілінійних рівнянь у випадку двох незалежних змінних. 3. Задача Коші для квазілінійних рівнянь у випадку багатьох незалежних змінних.	2		Перші інтеграли нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь	2	3 [1-9]
14	Тема 7. Стійкість за Ляпуновим розв'язків нормальних систем <i>§1. Поняття стійкості за Ляпуновим розв'язку</i>	2		Загальний розв'язок рівняння з частинними похідними	2	2 [1-9]

	<i>НС. §2. Критерій стійкості за Ляпуновим нульового розв'язку НЛОС зі сталою ма- трицею</i>				
15	<i>§3. Функції Ляпунова і теореми Ляпунова про стійкість розв'язку НС. §4. Дослідження стійкості за Ляпуновим розв'язку НС за першим наближенням.</i>	2		Задача Коші для рівняння з частинними похідними	2 2 [1-9]
16	Колоквіум № 5	2		Контрольна робота № 7	2 3 [1-9]
	Всього за 4-ий семестр	32			32 41
	Всього	64			64 97

Примітка: В [1] викладений повністю весь теоретичний матеріал по даному курсу, а --- в [2] --- матеріали до всіх практичних занять.