

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Затверджено

На засіданні
кафедри теорії функцій і
функціонального аналізу
механіко-математичного факультету
Львівського національного
університету імені Івана Франка
(протокол № _1 від 27.08. 2020 р.)

В.о. завідувача кафедри Скасків О.Б.



Силабус з навчальної дисципліни

“Функціональний аналіз”,

що викладається в межах ОПІ “Статистичний аналіз даних”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з
спеціальності 112 – Статистика

Львів 2020 р.

Назва дисципліни	Функціональний аналіз
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 112 – статистика
Викладачі дисципліни	Микитюк Ярослав Володимирович, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу; Сущик Наталія Степанівна, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Контактна інформація викладачів	yaroslav.mykytyuk@lnu.edu.ua , nataliya.sushchik@lnu.edu.ua ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 373. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультацію з теоретичної чи практичної частини курсу можна отримати на нараді MS Teams у будь-який зручний для студентів та викладача час, а також очно в день проведення лекцій чи практичних занять за попередньою домовленістю.
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Функціональний аналіз” є нормативною дисципліною з спеціальності 112 – статистика для освітньої програми “Статистичний аналіз даних», яка викладається в 6-му семестрі в обсязі 3-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS), 7-му семестрі в обсязі 3-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс розроблено таким чином, щоб надати учасникам знання про лінійні оператори та інтегральні рівняння. Багато понять курсу (деякі топологічні поняття в метричних просторах, норма елемента, скалярний добуток, норма оператора, спектр та резольвента оператора, розподіли, тощо) є базовими у інших курсах, тому в курсі представлено широкий розгляд практичних і теоретичних задач для розуміння та ефективного їх засвоєння.
Мета та цілі дисципліни	Мета: освоєння студентами теоретичних і практичних основ з теорії лінійних нормованих просторів та лінійних операторів. Цілі: викласти основні положення теорії функціонального аналізу; вивчити мову функціонального аналізу, яка активно використовується в теорії ймовірностей, в теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, в теорії функцій; ознайомити з методами розв’язування інтегральних рівнянь.
Література для вивчення дисципліни	1. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель В. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 560 с. 2. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри : підручник : пер. з рус, Пер. Я. С. Магола, І. Е. Чижиков; За наук. ред. О. Б. Скасків.– Львів : Чижиков І. Е., 2012.– 589 с. 3. Я. Микитюк, Н. Сущик Функціональний аналіз. Конспект лекцій та практичних занять, 2020

	<p>https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktsionalnyy-analiz-112-statystyka (Методичні матеріали)</p> <p>4. В.Лянце, Т.Кудрик, Г.Чуйко. Функціональний аналіз // Львів, Вид.центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.</p> <p>5. Сторож О., Кудрик Т., Сущик Н. Додаткові розділи теорії міри і функціонального аналізу. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2018. –198с.</p> <p>6. Сторож О. Г. Задачі з теорії міри та функціонального аналізу: збірник задач /Олег Сторож. Львів : І. Чижиков, 2011. 151 с.</p>
Обсяг курсу	<p>6 семестр. Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 48 год., з них 32 год. лекцій та 16 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 42 год.</p> <p>7 семестр. Загальний обсяг: 90 годин. Аудиторних занять: 48 год., з них 32 год. лекцій та 16 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 42 год.</p> <p>Протягом 6-7семестрів. Загальний обсяг: 180 годин. Аудиторних занять: 96 год., з них 64 год. лекцій та 32 години лабораторних робіт. Самостійної роботи: 84 год.</p>
Очікувані результати навчання	<p><u>В результаті вивчення даного курсу студент повинен знати:</u> наукові поняття та математичні методи функціонального аналізу; <u>вміти:</u> розв'язувати задачі, пов'язані із вивченням поняття лінійних операторів, аналізувати операторні рівняння в різних банахових просторах та знаходити розв'язок конкретних інтегральних рівнянь.</p> <p>В результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і спеціальних (фахових) (СК) компетентностей:</p> <p>ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу; ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях; ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності; ЗК-8. Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел. ЗК-10. Здатність працювати в команді. ЗК-11. Здатність до професійного спілкування з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами в інших галузях знань. ЗК-12. Здатність працювати автономно. ЗК-13. Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.</p> <p>СК-1. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях математичного аналізу, лінійної алгебри, геометрії, логіки, теорії функцій, диференціальних рівнянь. СК-2. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички в галузях теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії випадкових процесів. СК-3. Здатність здійснювати логічні математичні міркування із чітким зазначенням припущень та висновків. СК-4. Здатність до математичного формулювання задач та вибору методів їх розв'язання. СК-5. Здатність до кількісно-статистичного мислення. СК-6. Здатність до ймовірнісного мислення, що передбачає сприйняття стохастичної природи явищ. СК-7. Здатність робити якісні висновки з кількісних даних. СК-9. Здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження та аналізувати дані цих досліджень. СК-10. Здатність проводити дослідження ймовірнісно-статистичних моделей та інтерпретувати одержані результати. СК-12. Здатність застосовувати ймовірнісно-статистичні методи в міждисциплінарному контексті. СК-13. Здатність подавати статистичні процедури та результати їхнього</p>

	<p>застосування у формі, придатній для цільової аудиторії, до якої звертаються, як усно, так і письмово.</p> <p>СК-14. Здатність до аналізу основ і властивостей статистичних алгоритмів та розуміння переваг і обмежень тих чи інших підходів, у тому числі до оцінки їх обґрунтованості й ефективності.</p> <p>СК-15. Здатність аналізувати основи і властивості базових економічних та фінансових структур, інтерпретувати показники фінансової діяльності, користуватися методами оптимального керування економічних та природних процесів.</p> <p>СК-16. Здатність застосовувати у професійній діяльності знання та навички з машинного навчання, обробки зображень і природної мови.</p> <p>СК-17. Здатність моделювати та пояснювати дані просторових і часових вибірок за допомогою знань і навичок з регресійного аналізу.</p> <p>і здобуде такі результати навчання (РН):</p> <p>РН-5. Володіти базовими знаннями та вміннями з фундаментальних розділів математики: математичного аналізу, алгебри, аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь, у тому числі в частинних похідних.</p> <p>РН-8. Вміти працювати з різними типами збіжності випадкових величин та розподілів, користуватися граничними законами теорії ймовірностей.</p> <p>РН-15. Володіти математичними та статистичними методами аналізу, прогнозування та оцінки параметрів математичних моделей, статистичними методами інтерпретації та обробки числових даних.</p> <p>РН-17. Знати методи моделювання природничих та/або соціальних процесів.</p> <p>РН-19. Вміти оцінювати та забезпечувати якість виконуваних досліджень.</p>
Ключові слова	Метричний простір, банахів простір, гільбертів простір, ряд Фур'є, лінійний оператор, спектр та резольвента оператора, інтегральні рівняння, узагальнені функції.
Формат курсу	Очний. Проведення лекцій, практичних робіт і консультацій.
Теми	Див. Схема курсу
Підсумковий контроль, форма	Екзамен у кінці 7 семестру.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з <ul style="list-style-type: none"> - Математичного аналізу; - Лінійної алгебри і аналітичної геометрії; - Диференціальних рівнянь; - Теорії міри та інтеграла Лебега.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Презентації, лекції Індивідуальні завдання Тестові завдання
Необхідне обладнання	Комп'ютер з можливістю підключення до інтернету

Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)

Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:

- *Змістовий модуль 1:* 5% загальної кількості балів за активну роботу на заняттях, 10% загальної кількості балів за виконання практичних аудиторних і домашніх та тестових завдань, 15% загальної кількості балів за контрольну роботу; максимальна кількість балів 30.
 - *Змістовий модуль 2:* 5% загальної кількості балів за активну роботу на заняттях, 5% загальної кількості балів за виконання практичних аудиторних і домашніх та тестових завдань, 15% загальної кількості балів за контрольну роботу; максимальна кількість балів 20.
 - *Екзамен:* 50% загальної кількості балів; максимальна кількість балів 50.
- Підсумкова максимальна кількість балів 100.

Письмові роботи: Очікується, що студенти виконають дві письмові роботи і одну письмову роботу під час заліку.

Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.

Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та тестових завдань, передбачених курсом.

Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.

Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.

Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.

Оцінювання контрольних робіт (2 змістових модулі містять по одній контрольній роботі кожен, загалом 12 практичних завдань та одне теоретичне завдання; максимальна кількість балів: 25) відбувається шляхом оцінки роботи студента під час написання контрольної роботи в аудиторії (0-2 балів за одне завдання) та захисту написаної студентом теоретичного завдання (0-1 балу за завдання).

Бали оцінювання аудиторного виконання контрольної роботи нараховуються за наступним співвідношенням:

2 – завдання розв'язано правильно з детальним обґрунтуванням розв'язку, що свідчить про те, що студент в повному обсязі володіє навчальним матеріалом теми, яка стосується розглядуваного завдання;

1 – студент лише частково виконав завдання чи завдання виконано з помірними недоліками, що свідчить про те, що студент не досить добре

	<p>розуміє розглянутий матеріал по відповідній темі, 0 – розв'язання завдання не є виконаним, тобто студент зовсім не засвоїв розглянутий матеріал.</p> <p>Бали оцінювання теоретичного завдання нараховуються за наступним співвідношенням: 1 – студент надає правильні відповіді на запитання, описані у завданні, тобто володіє навчальним матеріалом, має розуміння розглянутої теми; 0 – студент не дає відповідь на питання, яке йому запропоновано у завданні.</p> <p>Оцінювання екзамену відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені запитання. Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне запитання нараховуються за наступним співвідношенням: 75-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обґрунтовано, логічно; 50-75% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні неточності та/або невідповідності; 25-50% – виявлено множинні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові; 0-25% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи.</p> <p>Критерії оцінювання результатів неформальної освіти: Нарахування балів відбувається за публікацію студентом тез доповідей на конференціях, наукових статей, за участь студента у діяльності наукових гуртків, семінарів, круглих столів, конкурсів, участь у заходах неформальної освіти, за отримання сертифікатів про проходження навчання на різних освітніх платформах за тематикою навчальної дисципліни. Кількість балів визначається відсотком покриття результатів відповідної активності до вимог результатів навчання з навчальної дисципліни</p>
<p>Питання до екзамену.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Метричні простори. Приклади. 2. Збіжність в метричному просторі. 3. Деякі топологічні поняття в метричних просторах. 4. Неперервні відображення в метричних просторах. 5. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії. 6. Принцип стискуючих відображень. 7. Компактність в метричних просторах. 8. Лінійні нормовані простори. Приклади. 9. Гільбертів простір. Приклади. 10. Нерівність Коші-Буняковського. 11. Неперервність скалярного добутку. Формула паралелограма. 12. Ортогональні доповнення. 13. Теорема про ортогональну проекцію. Наслідки з неї. 14. Нерівності Гельдера, Юнга і Мінковського. 15. Ряди в нормованих просторах. Критерій збіжності ортогонального ряду. 16. Абстрактні ряди Фур'є. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. 17. Класичний ряд Фур'є в просторі квадратично інтегрованих функцій. 18. Лінійні неперервні оператори в нормованих просторах. 19. Лінійні функціонали в нормованих просторах. 20. Рівномірна та сильна збіжність лінійних неперервних операторів. 21. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі. 22. Обернений оператор.

	23. Теорема С. Банаха про обернений оператор. 24. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала. 25. Спряжений оператор. 26. Спектр лінійного оператора. 27. Резольвента лінійного оператора 28. Інтегральні рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром. 29. Інтегральні рівняння Вольтерра 2-го роду з неперервним ядром. 30. Скінченновимірні оператори. 31. Компактні оператори та їх основні властивості. 32. Альтернатива Фредгольма для інтегральних компактних операторів. 33. Самоспряжені оператори. 34. Узагальнені функції (розподіли). 35. Похідна узагальнених функцій.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу “Функціональний аналіз”

Тиж- день	Лекції		Практичні заняття		СР К-ть год Л-ра
	Назва теми	К- сть год	Назва теми	К- сть год	
6-ий семестр					
1	Вступ Історія виникнення дисципліни Функціональний аналіз. Тема 1. Метричні простори. 1.1. Означення метричного простору. Приклади. 1.2. Нерівність Гельдера та Мінковського для послідовностей. 1.3. Простори сумовних функцій. 1.4. Нерівність Гельдера та Мінковського для інтегралів.	2	Метричні простори.	2	2 [1-6]
2	1.5. Збіжність в метричному просторі. 1.6. Повні метричні простори.	2			3 [1-6]

3	1.7. Деякі топологічні поняття в метричних просторах. 1.8. Властивості відкритих та замкнених множин. 1.9. Сепарабельні простори.	2	Деякі топологічні поняття в метричних просторах.	2	2 [1-6]
4	1.10. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії.	2			3 [1-6]
5	1.11. Неперервні відображення в метричних просторах. Критерій неперервності. Принцип продовження за неперервністю.	2	Теорема Бера. Неперервні відображення в метричних просторах.	2	2 [1-6]
6	1.12. Принцип стискуючих відображень. Теорема Банаха про нерухому точку.	2			3 [1-6]
7	1.13. Компактність в метричних просторах. Теорема Гаусдорфа. 1.14. Теорема Арцела-Асколі.	2	Принцип стискуючих відображень. Компактність в метричних просторах.	2	2 [1-6]
8	Тема 2. Лінійні нормовані простори. 2.1. Лінійні простори. 2.2. Банахів простір. Приклади. 2.3. Норма елемента. Еквівалентні норми.	2			3 [1-6]
9	Тема 3. Гільбертові простори. 3.1. Скалярний добуток. Гільбертів простір. Приклади гільбертових просторів. 3.2. Нерівність Коші-Буняковсько-го.	2	Аксіоми норми. Еквівалентні норми.	2	2 [1-6]

10	3.3. Властивості скалярного добутку. 3.4. Неперервність скалярного добутку. 3.5. Формула паралелограма.	2			3 [1-6]
11	3.6. Ортогональні доповнення. 3.7. Теорема про ортогональну проєкцію. Наслідки з неї.	2	Банахові простори.	2	2 [1-6]
12	3.8. Нерівності Гельдера, Юнга і Мінковського	2			3 [1-6]
13	Тема 4. Ряди в нормованих просторах. 4.1. Означення ряду в нормованому просторі. 4.2. Критерій збіжності ортогонального ряду.	2	Гільбертові простори. Теорема про ортогональну проєкцію.	2	2 [1-6]
14	4.3. Абстрактні ряди Фур'є. 4.4. Нерівність Бесселя. 4.5. Рівність Парсеваля.	2			3 [1-6]
15	4.6. Класичний ряд Фур'є в просторі квадратично інтегровних функцій на $(-\pi, \pi)$.	2	Контрольна робота № 1.	2	2 [1-6]
16	4.7. Проблеми існування бази в сепарабельному гільбертовому просторі.	2			3 [1-5]
Всього		32		16	42
7-ий семестр					
1	Тема 5. Лінійні неперервні оператори в нормованих просторах. 5.1. Означення лінійного оператора, неперервність та обмеженість оператора. Приклади. 5.2. Алгебра лінійних неперервних операторів.	2	Знаходження норми лінійного функціонала.	2	2 [1-6]
2	5.3. Рівномірна та сильна збіжність в алгебрі лінійних	2			3

	неперервних операторів. Добуток операторів.				[1-6]
3	5.5. Лінійні неперервні функціонали. Означення та приклади обмежених функціоналів.	2	Знаходження норми лінійного оператора.		2 [1-6]
4	5.6. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала в гільбертовому просторі.	2			3 [1-6]
5	Тема 6. Обернений оператор. 6.1. Означення оборотного оператора. 6.2. Критерій існування оберненого оператора. 6.3. Коректна оборотність лінійного оператора.	2	Знаходження оберненого оператора.	2	2 [1-6]
6	6.4. Теорема Банаха про обернений оператор у банаховому просторі	2			3 [1-6]
7	6.5. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного функціонала.	2	Знаходження спряженого оператора.	2	2 [1-6]
8	Тема 7. Спряжений оператор. 7.1. Означення спряженого оператора, приклади. 7.2. Властивості спряженого оператора.	2			3 [1-6]
9	Тема 8. Спектр та резольвента лінійного оператора. 8.1. Резольвента лінійного оператора. 8.2. Спектр та його властивості.	2	Знаходження власних значень оператора.	2	2 [1-6]
10	Тема 9. Інтегральні рівняння Фредгольма. 9.1. Означення інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду з неперервним ядром. 9.2. Методи розв'язування інтегральних рівнянь.	2			3 [1-6]
11	9.3. Інтегральні рівняння Вольтерра.	2	Знаходження резольвенти та спектру оператора.	2	2 [1-6]

12	Тема 10. Компактні оператори та їх основні властивості. 10.1. Означення та приклади компактних операторів. 10.2. Основні властивості компактних операторів.	2		2	3 [1-6]
13	10.3. Альтернатива Фредгольма для інтегральних компактних операторів.	2	Розв'язування інтегральних рівнянь.	2	2 [1-6]
14	Тема 11. Самоспряжені оператори та їх основні властивості.	2			3 [1-6]
15	Тема 12. Узагальнені функції. 12.1. Простір основних функцій. 12.2. Розподіли. Регулярні та сингулярні функції.	2	Контрольна робота № 2	2	2 [1-6]
16	12.3. Похідна узагальнених функцій.	2			3 [1-6]
	Разом за 7-ий семестр	32		16	42
	Разом за 6-ий і 7-ий семестри	64		32	84
	Викладач: доц. Микитюк Я.В.		Викладач: доц. Сущик Н.С.		