ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Механіко-математичний факультет

Кафедра механіки

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної (дипломної) роботи

бакалавр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

Визначення критичного навантаження за згину з розтягом пластини з шайбою та тріщиною за смугового контакту її берегів

Виконала: студентка IV курсу,
група МТП-41,
спеціальність 113 Прикладна математика
спеціалізація Математичне моделювання та комп'ютерна механіка

Рябець А.В.

Керівник *доц. Слободян М.С.*

Рецензент Доц., к.т.н Віра В.
Заст. директора інституту будівництва та інженерних систем
НУ „Львівська політехніка"

Львів - 2023

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

Факультет механіко-математичний
Кафедра механіки
Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Спеціальність **113 прикладна математика**
(шифр і назва)
Спеціалізація Математичне моделювання та комп'ютерна механіка

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри механіки
проф. Андрейків О.Є.
"23" лютого 2023 року

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ (ДИПЛОМНУ) РОБОТУ СТУДЕНТУ

Рябець Анастасії Василівні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1.Тема роботи Визначення критичного навантаження за згину з розтягом пластини з шайбою та тріщиною за смугового контакту її берегів
керівник роботи Слободян М.С., доцент,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від "22" лютого 2023 року № 7
2. Строк подання студентом роботи 12 червня 2023 року
3. Вихідні дані до роботи Слободян М.С. Визначення критичного навантаження за згину пластини з круговим отвором та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / М.С. Слободян, В. Коломієць // Конференція молодих учених „Підстригачівські читання – 2015". – 2015.
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) 1. Вступ; 2. Основні співвідношення; 3. Двовісний згин з розтягом пластини з абсолютною жорсткою циліндричною шайбою та тріщиною за смугового контакту її берегів; 4. Висновки; 5. Список використаних джерел; 6. Додаток А. Код програми на мові програмування Python.
5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної (дипломної) роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка

Студент _____ (підпис) Рябець А. В. (прізвище та ініціали)

Керівник роботи _____ (підпис) Слободян М. С. (прізвище та ініціали)

ЗМІСТ

ВСТУП 3

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ 7

1.1 Метод механічних квадратур для розв’язування системи сингулярних інтегральних рівнянь 7

1.2 Класична теорія згину пластин 9

1.3 Плоска задача теорії пружності 13

1.4 Критерій руйнування пластини 15

РОЗДІЛ 2. ДВОВІСНИЙ ЗГИН З РОЗТЯГОМ ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНОЮ ЖОРСТКОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ШАЙБОЮ ТА ТРІЩИНОЮ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ 17

2.1 Формулювання задачі 17

2.2 Побудова розв'язку задачі 19

2.3 Згин з розтягом пластини з жорсткою круговою шайбою та прямолінійною тріщиною 26

2.3.1 Тріщина, що паралельна осі Ox 26

2.3.2 Тріщина, що паралельна осі Oy 30

2.3.3 Тріщина, що розташована довільно 33

ВИСНОВКИ 37

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 38

ДОДАТОК А. Код програми на мові програмування Python 41

ВСТУП

Металеві пластини використовуються у різних галузях промисловості. Найбільш широко – у металургійній промисловості , де найчастіше використовують металеві конструкції, різне обладнання, трубопроводи, що піддаються корозії та впливу навколишнього середовища, через що на них можуть утворюватися тріщини. Також пластини використовують у таких галузях як машино- чи суднобудування, в авіаційній чи космічній промисловості, де утворення тріщин є суттєвою проблемою та може призвести до аварійних наслідків, що є небезпечними для багатьох людей. Тріщини утворюються часто у металевих конструкціях, які використовуються у газовій та нафтовій промисловостях, а також у будівельній промисловості, зокрема у стінах, чи бетонних спорудах. Через утворення та поширення тріщин збільшуються навантаження в елементах конструкцій, стиках і сполученнях, знижується несуча здатність деталей, виникає руйнування обладнання [12].

Мета даної роботи – визначення критичного навантаження за згину з розтягом пластини з тріщиною та шайбою за наявності контакту її берегів.

Актуальність роботи полягає у тому, що пластинчасті елементи конструкцій дуже широко використовуються у різних галузях промисловості та можуть містити шайби, а у подальшому їх використанні у них можуть зароджуватись тріщиноподібні дефекти, які впливають на міцність конструкції.

На рисунках, які подані нижче, показано тріщини, які зародились у різних конструкціях.

Рисунок 1 – Тріщина у трубі

Рисунок 2 – Тріщини у блоці циліндрів

Рисунок 3 – Тріщина у стіні

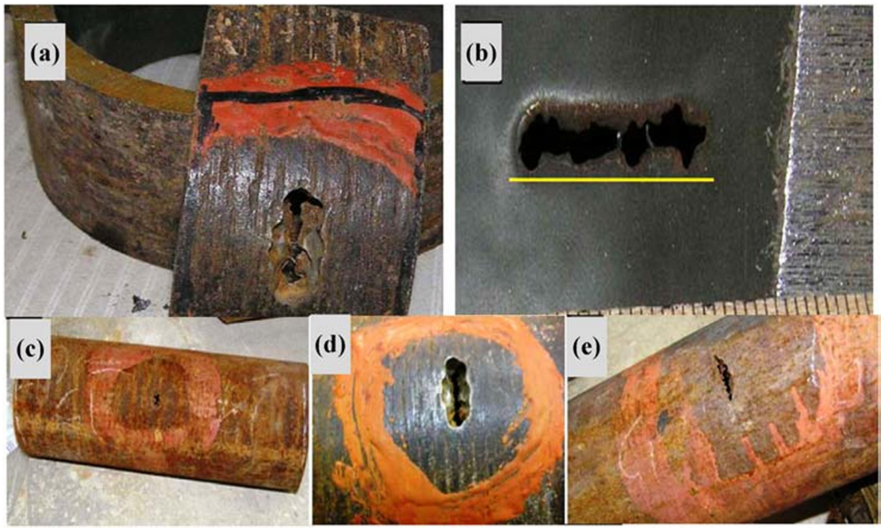


Рисунок 4 – Тріщини у бурильних трубах у нафтогазовій промисловості

Концепції механіки руйнування викладені у праці [1], автором якої є О. Є. Андрейків. Згин пластини з тріщинами за відстуності контакту її берегів досліджено у роботі [2] Л. Т. Бережницького. У працях [3], [4], [5], [6], [7], [8], авторами яких є В. К. Опанасович, М. С. Слободян, В. Я. Бедрій, І. С. Звізло, досліджено задачу двовісного згину пластин з різними шайбами та тріщинами. Задачу двовісного розтягу пластини з шайбою та тріщиною досліджено у працях Є. Б. Яреми, В. К. Опанасовича, М. С. Слободяна, В. В. Рощота, М. І. Матулки, О. В. Білаша [12], [18]. Контактне зусилля між берегами тріщини, коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів, а також критичне навантаження, яке може витримати пластина досліджено у роботі М. С. Слободяна, В. Коломієць [11]. Вплив точності наближення на величину критичного навантаження, через яке утворюється руйнування досліджено у роботі [10], авторами якої є М. Ф. Селіванов, В. В. Процан. У праці М. І. Шайнога [14] проведено числовий аналіз критичного навантаження, при яких елемент конструкції буде руйнуватися. У монографії [13], автором якої є Г. Т. Сулим, розв’язані конкретні двовимірні задачі теорії пружності (плоска та антиплоска), теплопровідності та термопружності для однорідних і шаруватих (кусково-однорідних) тіл, що містять одне, декілька чи періодичні системи тонких включень. У працях [15], [16] І. П. Шацького, В. В. Перепічки досліджено згин пластин з контактуючими берегами,

ослаблених розрізом. Також І. П. Шацький досліджував циклічно-симетричну задачу за згину пластини з системою тріщин за наявності контакту її берегів [17].

Alwar R. S., Ramachandran Nambissan [19] досліджували вплив закриття тріщини на коефіцієнт інтенсивності напружень для пластин, що піддаються згинанню за допомогою 3-D аналізу кінцевих елементів. У роботі [20], авторами якої є Jones D. P., Swedlow J. L., досліджено вплив закриття тріщини та пружно-пластичного потоку на поведінку при згинанні тонких пластин з тріщинами за допомогою комп'ютерної програми для інкрементального згинання пружних пластин. Вплив закриття тріщини при вигині пластини досліджував Y. W. Kwon [21]. У роботі M. J. Young, C. T. Sun. [22] досліджено вплив закриття тріщини на коефіцієнт інтенсивності напружень у згинальних пластинах.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

1.1. Метод механічних квадратур для розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь

Метод механічних квадратур застосовується для розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь в задачі для тіла з внутрішньою тріщиною [9]. Він ґрунтується на інтерполяційних поліномах і квадратурних формулах для сингулярних інтегралів [9].

Інтегральні рівняння задачі термопружності та задачі теплопровідності за умови крайових умов першого та другого роду для нескінченної площини, що має криволінійний розріз L можна звести до такого вигляду

$$\int_{-1}^{1}\left[K(\xi,\eta)\varphi(\xi)+L(\xi,\eta)\overline{\varphi(\xi)}\right]d\xi=\pi P(\eta),\ \ |\eta|<1 \tag{1.1}$$

за допомогою заміни змінних

$$t=\omega(\xi)=x(\xi)+iy(\xi),\quad t'=\omega(\eta),\quad \xi,\eta\in[1,-1], \tag{1.2}$$

що перетворює контур L у відрізок $[-1,1]$.

Розв'язок рівняння (1.1) шукаємо у класі H^* функцій, необмежених для $\xi=\pm1$, тобто [9]

$$\varphi(\xi)=\frac{U(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{1.3}$$

де $U(\xi)$ – неперервна на відрізку $[-1,1]$ невідома функція ($U(\xi)\in$ H) [9].

Враховуючи додаткову умову

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi=B \tag{1.4}$$

розв'язок рівняння (1.1) у класі H^* функцій існує і він єдиний [9].

Далі скористаємося квадратурними формулами Гаусса-Чебишова, щоб отримати числовий розв'язок рівняння (1.1). Для сингулярного інтеграла маємо [9]

$$\int_{-1}^{1} \frac{U(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\eta)} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{U(\xi_k)}{\xi_k-\eta} + \pi U(\eta)\frac{U_{n-1}(\eta)}{T_n(\eta)}, \tag{1.5}$$

де $T_n(\eta) = \cos(n\arccos\eta)$, $U_{n-1}(\eta) = \sin(n\arccos\eta)/\sqrt{1-\eta^2}$ – багаточлени Чебишова першого і другого роду [9], $\xi_k -$ вузли, які є коренями рівняння $T_n(\xi) = 0$. Їх знаходять за формулою

$$\xi_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.6}$$

У таких точках

$$\eta_m = \cos\frac{\pi m}{n}, \quad m = \overline{1,n-1}, \tag{1.7}$$

де η_m – корені рівняння $U_{n-1}(\eta) = 0$, квадратурна формула (1.5) буде спрощуватись

$$\int_{-1}^{1} \frac{U(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\eta_m)} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{U(\xi_k)}{\xi_k-\eta_m}. \tag{1.8}$$

Квадратурна формула Гаусса для регулярного інтеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{U(\xi)d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} U(\xi_k). \tag{1.9}$$

збігається з формулою (1.8) для сингулярного інтеграла у вузлах $\eta = \eta_m$. Якщо $U(\xi_k)$ є поліномом степеня не вище $2n$ і $2n-1$, то відомо, що формули (1.5), (1.9) є точними.

Систему n лінійних алгебраїчних рівнянь отримуємо, використовуючи квадратурні формули (1.8) та (1.9) до рівняння (1.1) та умови (1.4)

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[K(\xi_k,\eta_m)\,U(\xi_k) + L(\xi_k,\eta_m)\overline{U(\xi_k)}] = P(\eta_m), \;\; m = \overline{1,n-1} \\ \dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U(\xi_k) = B \end{cases} \tag{1.10}$$

для визначення n невідомих $U(\xi_k)$ $(k = \overline{1,n})$. Ця система є дискретним аналогом інтегрального рівняння (1.1) та умови (1.4) [9]. Якщо її розв’язати,

використавши інтерполяційний поліном Лагранжа, отримаємо функцію $U(\xi)$ у вигляді

$$U(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\,U(\xi_k)\frac{T_n(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-\xi_k} \tag{1.11}$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень виражаються через знайдений наближений розв'язок за формулами [9]

$$K_{\mathrm{I}}^{\pm} - iK_{\mathrm{II}}^{\pm} = \pm\sqrt{\pi|\omega'(\pm1)|}\frac{U(\pm1)}{\omega(\pm1)}, \tag{1.12}$$

де

$$U(1) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\,U(\xi_k)ctg\frac{2k-1}{4n}\pi,$$

$$U(-1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}\,U(\xi_k)tg\frac{2k-1}{4n}\pi.$$

1.2. Класична теорія згину пластин

Розглянемо ізотропну нескінченну пластину, товщина якої $2h$. Вона має циліндричну шайбу радіуса R та тріщину завдовжки $2l_1$. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$. Вісь $O\tilde{z}$ направимо перпендикулярно до системи координат та нехай початок системи координат буде у центрі щайби. Також введемо полярну систему координат r і θ у площині Oxy з полюсом у точці O і полярною віссю Ox. Нехай x_{O1}, y_{O1} – координати центру тріщини, а α_1- кут нахилу тріщини до осі Ox. Декартову систему координат Ox_1y_1 з центром O_1 пов'яжемо з тріщиною у точці z_{O1} (див. рис. 1.1). Через S^+ позначимо область всередині шайби, а через S^- - ззовні. Через L_1 позначимо лінію, де розміщена тріщина, а коло позначимо через L. Нехай на пластину діє деяке зовнішнє навантаження.

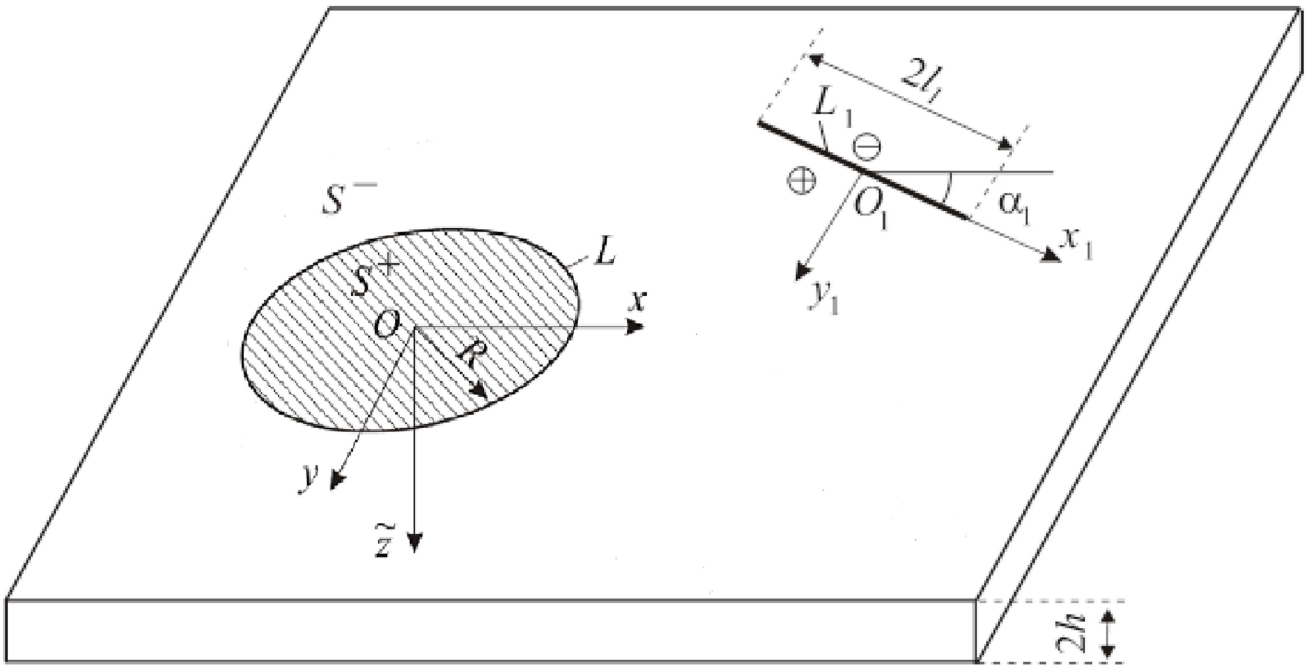


Рис. 1.1. Нескінченна пластина з круговим отвором та тріщиною

Тоді через дві функції комплексної змінної $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ можна визначити напружено-деформований стан пластини без нормального навантаження на її поверхнях $\tilde{z} = \pm h$.

$$M_x + M_y = -2D(1+\upsilon)\{\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\},$$
$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2D(1-\upsilon)\{z\Phi'(z) + \Psi(z)\},$$
$$N_x - iN_y = -4D\Phi'(z), \tag{1.13}$$
$$u_\varsigma + iv_\varsigma = -\{\varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}\}\tilde{z},$$
$$w = Re\{z\varphi(z) + \chi(z)\}, \Phi(z) = \varphi'(z), \Psi(z) = \psi'(z), \psi(z) = \chi'(z),$$

де M_x, M_y і H_{xy} – згинальні і крутний моменти, N_x, N_y – перерізувальні сили; w – прогин точок пластини, u_3, v_3 – компоненти вектора переміщень, $\tilde{z}$- нормальна координата точки пластини по відношенню до її серединної площини, $(-h \le \tilde{z} \le h), D = 2Eh^3/\{3(1-\upsilon^2)\}$ – циліндрична жорсткість, E – модуль Юнга, υ – коефіцієнт Пуассона, $z = x + iy$, $i^2 = -1, x\ i\ y$ – декартові координати точки серединної площини пластини.

Комплексні потенціали можна подати у такому вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_K(z) + \Phi_1(z), \Psi(z) = \Psi_K(z) + \Psi_1(z), \tag{1.14}$$

де $\Phi_1(z), \Psi_1(z)$ – функції, голоморфні ззовні тріщини, а $\Phi_K(z), \Psi_K(z)$ – функції, що голоморфні в області S^-.

Якщо у нас є дві декартові системи координат xOy та $x_1O_1y_1$, що пов'язані між собою даним співвідношенням

$$z = z_{01} + z_1 e^{i\alpha_1},\ z_{01} = z - z_1 e^{i\alpha_1} \tag{1.15}$$

а функції $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ виконують таку ж саму роль у системі $x_1O_1y_1$, що й функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ у системі xOy, тоді

$$\begin{gathered}\Phi_1(z_1) = \Phi_1\left(z_1 e^{i\alpha_1} + z_{01}\right),\\ \Psi_1(z_1) = e^{2\alpha_1}\left\{\Psi\left(z_1 e^{i\alpha_1} + z_{01}\right) + z_{01}\Phi'\left(z_1 e^{i\alpha_1} + z_{01}\right)\right\},\end{gathered} \tag{1.16}$$

де $z_1 = x_1 + iy_1$.

Тоді формулу (1.14) перепишемо у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_K(z) + \Phi_1(z_1), \Psi(z) = \Psi_K(z) + (\Psi_1(z_1)e^{-2i\alpha_1} - \overline{z_{01}}\Phi_1{}'(z_1)e^{-i\alpha_1}\}. \tag{1.17}$$

Щоб визначити напружено-деформований стан пластини з круговим отвором та тріщиною використаємо такі формулами

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = \frac{\partial g}{\partial x}, \tag{1.18}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} = f, \tag{1.19}$$

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)} = \tilde{g}, \tag{1.20}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)} = \tilde{f}, \tag{1.21}$$

де

$$g = \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial x}, f = -\frac{1}{D(1-\upsilon)}\left\{M_y + i\tilde{c}' + iH_{xy} + i\int_{l_1}^{t} N_y(\tau)d\tau\right\}, \tilde{\kappa} = \frac{3+\upsilon}{1-\upsilon}$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{iz}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]e^{i\theta}\right\}, \tilde{f} = -\frac{1}{D(1-\upsilon)}\left\{M_r + i\tilde{c_0}' + iH_{r\theta} + i\int_0^s N_r(\tau)d\tau\right\},$$

де $H_{r\theta}$ – крутний момент у полярній системі координат, $\tilde{c_0}', \tilde{c}'$ - дійсні сталі.

Ввівши функції

$$\Omega_1(z_1) = -\overline{\Phi_1}(z_1) - z_1\overline{\Phi_1{}'}(z_1) - \overline{\Psi_1}(z_1),$$

$$\Phi_{\mathrm{K}}(z) = -\overline{\Phi_{\mathrm{K}}}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Psi_{\mathrm{K}}}\left(\frac{R^2}{z}\right), z \in S^+,$$

то комплексні потенціали $\Psi_1(z_1)$ та $\Psi_{\mathrm{K}}(z)$ отримають вигляд

$$\Psi_1(z_1) = -\Phi_1(z_1) - z_1\Phi_1{}'(z_1) - \overline{\Omega_1}(z_1), \tag{1.22}$$

$$\Psi_{\mathrm{K}}(z) = \frac{R^2}{z}\left\{\overline{\Phi_{\mathrm{K}}}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \Phi_{\mathrm{K}}(z) - z\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)\right\}. \tag{1.23}$$

Враховуючи формули (1.17), (1.22), (1.23), формули (1.18)-(1.21) перепишемо таким чином

$$\Phi_{\mathrm{K}}(z) - \frac{R^2}{r^2}\Phi_{\mathrm{K}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left\{\overline{\Phi_{\mathrm{K}}(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)}\right\} + \Phi_1(z_1)$$
$$+ \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_1}\right)\overline{\Phi_1(z_1)} + \frac{\bar{z}}{z}\left\{\Omega_1(\bar{z_1}) - (z_1 - \bar{z_1})\overline{\Phi_1{}'(z_1)}\right\}e^{2i\alpha_1}$$
$$= \tilde{g}. \tag{1.24}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi_{\mathrm{K}}(z) + \frac{R^2}{r^2}\Phi_{\mathrm{K}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left\{\overline{\Phi_{\mathrm{K}}(z)} - \bar{z}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)}\right\} + \tilde{\kappa}\Phi_1(z_1)$$
$$- \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_1}\right)\overline{\Phi_1(z_1)} - \frac{\bar{z}}{z}\left\{\Omega_1(\bar{z_1}) - (z_1 - \bar{z_1})\overline{\Phi_1{}'(z_1)}\right\}e^{2i\alpha_1}$$
$$= \tilde{f}. \tag{1.25}$$

$$\Phi_1(z_1) - \Omega_1(\bar{z_1}) + (z_1 - \bar{z_1})\overline{\Phi_1{}'(z_1)} + \Phi_{\mathrm{K}}(z) + \left(1 + \frac{R^2e^{-2i\alpha_1}}{\bar{z}^2}\right)\overline{\Phi_{\mathrm{K}}(z)}$$
$$+ ze^{-2i\alpha_1}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)} + \frac{R^2e^{-2i\alpha_1}}{\bar{z}^2}\left\{\Phi_{\mathrm{K}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)}\right\}$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x_1}, \tag{1.26}$$

$$\tilde{\kappa}\Phi_1(z_1) + \Omega_1(\bar{z_1}) - (z_1 - \bar{z_1})\overline{\Phi_1{}'(z_1)} + \tilde{\kappa}\Phi_{\mathrm{K}}(z) - \left(1 + \frac{R^2e^{-2i\alpha_1}}{\bar{z}^2}\right)\overline{\Phi_{\mathrm{K}}(z)}$$
$$- ze^{-2i\alpha_1}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)} - \frac{R^2e^{-2i\alpha_1}}{\bar{z}^2}\left\{\Phi_{\mathrm{K}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z}\overline{\Phi_{\mathrm{K}}{}'(z)}\right\}$$
$$= f_1, \tag{1.27}$$

Вважаємо, що на пластину діє таке зовнішнє навантаження, що для безмежної області виконується наступне

$$\Phi(z) = \Gamma + \frac{\mathrm{M}_\infty}{8\pi i D z} + \Phi_*(z),$$
$$\Psi(z) = \Gamma' - \frac{\overline{\mathrm{M}_\infty}}{8\pi i D z} + \Psi_*(z), \tag{1.28}$$

де $\Phi_*(z)$ і $\Psi_*(z)$ – функції, голоморфні в області S^-, M_∞ - головний момент зовнішнього навантаження, що прикладений до пластини відносно початку координат;

$$\Gamma = -\frac{\mathrm{M}_x{}^\infty + \mathrm{M}_y{}^\infty}{4D(1+\upsilon)}, \Gamma' = \frac{\mathrm{M}_y{}^\infty - \mathrm{M}_x{}^\infty + 2i\mathrm{H}_{xy}{}^\infty}{2D(1-\upsilon)}, \tag{1.29}$$

де $\mathrm{M}_x{}^\infty, \mathrm{M}_y{}^\infty, \mathrm{H}_{xy}{}^\infty$ - згинальні та крутний моменти, які задані на нескінченності.

1.3. Плоска задача теорії пружності

Через функції комплексної змінної $\Phi_\Pi(z)$ і $\Psi_\Pi(z)$ у декартовій системі координат виражаються компоненти тензора напружень $\sigma_{\Pi x}$, $\sigma_{\Pi y}$, $\tau_{\Pi xy}$ і вектора переміщень u_Π, ν_Π за плоскої деформації пружного середовища або за узагальненого плоского напруженого стану

$$\sigma_{\Pi x} + \sigma_{\Pi y} = 2\left\{\Phi_\Pi(z) + \overline{\Phi_\Pi(z)}\right\},$$
$$\sigma_{\Pi y} - i\tau_{\Pi xy} = \Phi_\Pi(z) + \overline{\Phi_\Pi(z)} + z\overline{\Phi_\Pi{}'(z)} + \overline{\Psi_\Pi(z)}, \tag{1.30}$$
$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{u}_\Pi + i\nu_\Pi) = \kappa\Phi_\Pi(z) - \overline{\Phi_\Pi(z)} - z\overline{\Phi_\Pi{}'(z)} - \overline{\Psi_\Pi(z)},$$

де $\mu = \mathrm{E}/(2(1+\upsilon))$ – модуль зсуву матеріалу, $\kappa = (3-\upsilon)/(1+\upsilon)$ – для узагальненого плоского напруженого стану.

За допомогою наступних співвідношень отримуємо компоненти тензора напружень $\sigma_{\Pi r}$, $\sigma_{\Pi\theta}$, $\tau_{\Pi r\theta}$ і вектора переміщень $\mathrm{u}_{\Pi\mathrm{r}}$, $\mathrm{u}_{\Pi\theta}$ у полярній системі координат

$$\sigma_{\Pi r} + \sigma_{\Pi\theta} = 2\left\{\Phi_\Pi(z) + \overline{\Phi_\Pi(z)}\right\},$$
$$\sigma_{\Pi r} + i\tau_{\Pi r\theta} = \Phi_\Pi(z) + \overline{\Phi_\Pi(z)} - z\overline{\Phi_\Pi{}'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi_\Pi(z)}, \tag{1.31}$$
$$2\mu\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{u}_{\Pi\mathrm{r}} + i\nu_{\Pi\theta}) = iz\left\{\kappa\Phi_\Pi(z) - \overline{\Phi_\Pi(z)} + \bar{z}\overline{\Phi_\Pi{}'(z)} + \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi_\Pi(z)}\right\}.$$

Далі розглянемо нескінченну пластину, що містить у собі круговий отвір і тріщину (див. рис. 1.1) та знаходиться під дією навантаження, за якого виконуються умови узагальненого плоского напруженого стану.

Комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Psi_{\Pi}(z)$, при переході від однієї декартової системи координат до іншої, перетворюються за формулами, що аналогічні до (1.16). Для них будуть мати місце залежності, подібні до (1.17),

$$\Phi_{\Pi}(z) = \Phi_{\Pi\text{К}}(z) + \Phi_{\Pi 1}(z_1), \Psi_{\Pi}(z) = \Psi_{\Pi\text{К}}(z) + \Psi_{\Pi 1}(z_1)e^{-2i\alpha_1} - \overline{z_{01}}\Phi'_{\Pi 1}(z_1)e^{-i\alpha_1}.$$

Ввівши функції,

$$\Omega_{\Pi 1}(z_1) = \overline{\Phi_{\Pi 1}}(z_1) + z_1\overline{\Phi'_{\Pi 1}}(z_1) + \overline{\Psi_{\Pi 1}}(z_1),$$

$$\Phi_{\Pi\text{К}}(z) = -\overline{\Phi_{\Pi\text{К}}}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi'_{\Pi\text{К}}}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi_{\Pi\text{К}}}\left(\frac{R^2}{z}\right), z \in S^+,$$

матимемо такі залежності

$$\begin{aligned}\sigma_{\Pi r} + i\tau_{\Pi r\theta} = {} & \Phi_{\Pi\text{К}}(z) - \frac{R^2}{r^2}\Phi_{\Pi\text{К}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\left\{\overline{\Phi_{\Pi\text{К}}(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'_{\Pi\text{К}}(z)}\right\} \\ & + \Phi_{\Pi 1}(z_1) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_1}\right)\overline{\Phi_{\Pi 1}(z_1)} \\ & - \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_1}\left\{\Omega_{\Pi 1}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)}\right\},\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}2\mu\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\Pi r} + iu_{\Pi\theta}) & \\ = {} & \kappa\Phi_{\Pi\text{R}}(z) + \frac{R^2}{r^2}\Phi_{\Pi\text{R}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cdot\left\{\overline{\Phi_{\Pi\text{R}}(z)} - \bar{z}\overline{\Phi'_{\Pi\text{К}}(z)}\right\} \\ & + \kappa\Phi_{\Pi 1}(z_1) - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_1}\right)\overline{\Phi_{\Pi 1}(z_1)} \\ & + \frac{\bar{z}}{z}e^{2i\alpha_1}\left\{\Omega_{\Pi 1}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)}\right\},\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\Pi y} - i\tau_{\Pi xy} = {} & \Phi_{\Pi 1}(z_1) + \Omega_{\Pi 1}(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1)\overline{\Phi'_{\Pi 1}(z_1)} + \Phi_{\Pi\text{К}}(z) \\ & + \left(1 + \frac{R^2}{\bar{z}}e^{-2i\alpha_1}\right)\overline{\Phi_{\Pi\text{К}}(z)} + ze^{-2i\alpha_1}\overline{\Phi'_{\Pi\text{К}}(z)} \\ & + \frac{R^2}{\bar{z}^2}e^{-2i\alpha_1}\left\{\Phi_{\Pi\text{К}}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) - \bar{z}\overline{\Phi'_{\Pi\text{К}}(z)}\right\},\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial\theta}(u_{\Pi}+iu_{\Pi\theta})$$
$$=\kappa\Phi_{\Pi1}(z_1)-\Omega_{\Pi1}(\bar{z}_1)-(z_1-\bar{z}_1)\overline{\Phi'_{\Pi1}(z_1)}+\kappa\Phi_{\Pi K}(z)$$
$$-\left(1+\frac{R^2}{\bar{z}^2}e^{-2i\alpha_1}\right)\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}-ze^{-2i\alpha_1}\overline{\Phi'_{\Pi K}(z)}$$
$$-\frac{R^2}{\bar{z}^2}e^{-2i\alpha_1}\left\{\Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)-\bar{z}\overline{\Phi_{\Pi K}(z)}\right\}, \qquad (1.35)$$

Нехай (X,Y) це головний вектор зовнішніх зусиль, що прикладені до тіла. Тоді для функцій $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Psi_{\Pi}(z)$ буде справедливе твердження

$$\Phi_{\Pi}(z)=\tilde{\Gamma}-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)z}+\Phi_{\Pi0}(z), |z|\to 0,$$
$$\Psi_{\Pi}(z)=\tilde{\Gamma}'+\frac{\kappa(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)z}+\Psi_{\Pi0}(z), |z|\to 0, \qquad (1.36)$$

де $\Phi_{\Pi}(z)$ і $\Psi_{\Pi}(z)$ – функції, голоморфні у S^-. При великих |z| для цих функцій мають місце такі розвинення

$$\Phi_{\Pi0}(z)=\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots, \Psi_{\Pi0}(z)=\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_3}{z^3}+\ldots \qquad (1.37)$$
$$\tilde{\Gamma}=\frac{P_1+P_2}{4}, \tilde{\Gamma}'=-\frac{1}{2}e^{-2i\alpha_\beta}(P_1-P_2), \qquad (1.38)$$

де β – кут між напрямком напруження P_1 і віссюOx, P_1, P_2 – головні напруження на нескінченності.

1.4. Критерій руйнування пластини

Щоб визначити граничне значення навантаження, коли тріщина зростатиме, використаємо енергетичний критерій. При утворенні одиниці площі нової поверхні розриву G, формула інтенсивності вивільнення пружної енергії виглядає так

$$G=\lim_{\Delta L\to 0}\frac{1}{4h\Delta L}\int_0^{\Delta L}\int_{-h}^{h}\{\tau_{xy}(r,\theta=0,\tilde{z})[u(\Delta L-r)]+\sigma_y(r,\theta$$
$$=0,\tilde{z})[v(\Delta L-r)]+\tau_{yz}(r,\theta=0,\tilde{z})[w(\Delta L-r)]\}d\tilde{z}dr, \qquad (1.39)$$

де

$$[f(x)]=f(x,\theta=\pi)-f(x,\theta=-\pi).$$

На основі даних формул визначимо величини τ_{xy} і σ_{yy}

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2h}\left(S_{xy} + \frac{3\tilde{z}}{h^2}H_{xy}\right);\ \sigma_y = \frac{1}{2h}\left(N_y + \frac{3\tilde{z}}{h^2}M_y\right). \tag{1.40}$$

Можемо записати, що

$$S_{xy}(r,\theta = 0) = \frac{k_2}{\sqrt{2r}}, H_{xy}(r,\theta = 0) = \frac{1+\upsilon}{(3+\upsilon)\sqrt{2r}}K_2,$$

$$N_y(r,\theta = 0) = \frac{k_1}{\sqrt{2r}}, M_y(r,\theta = 0) = \frac{K_1}{\sqrt{2r}},$$

$$\tau_{yz}(r,\theta = 0,\tilde{z}) = -\frac{3K_2}{4h\sqrt{2r^3}(3+\upsilon)}\left\{1 - \frac{\tilde{z}^2}{h}\right\}, \tag{1.41}$$

$$[u(\Delta L - r)] = \frac{4\sqrt{\Delta L - r}}{\sqrt{2}Eh}k_2 + \frac{6(1+\upsilon)\sqrt{2(\Delta L - r)}}{h^2E(3+\upsilon)}\frac{\tilde{z}}{h}K_2,$$

$$[v(\Delta L - r)] = \frac{4\sqrt{\Delta L - r}}{\sqrt{2}Eh}k_1 + \frac{6(1+\upsilon)\sqrt{2(\Delta L - r)}}{h^2E(3+\upsilon)}\frac{\tilde{z}}{h}K_1,$$

$$[w(\Delta L - r)] = \frac{4(1+\upsilon)\sqrt{2(\Delta L - r)^3}}{h^2E(3+\upsilon)}K_2.$$

Якщо підставити (1.41) і (1.40) у (1.39), то отримаємо залежність

$$G = \frac{\pi}{4h^2E}\left\{{k_1}^2 + {k_2}^2 + \frac{3(1+\upsilon)}{h^2(3+\upsilon)}\left({K_1}^2 + {K_2}^2\right)\right\}. \tag{1.42}$$

Якщо задовольнити умову граничної рівноваги

$$G = G_c = 2\gamma^*,$$

будемо мати

$$\gamma^* = \frac{\pi}{8h^2E}\left\{{k_1}^2 + {k_2}^2 + \frac{3(1+\upsilon)}{h^2(3+\upsilon)}\left({K_1}^2 + {K_2}^2\right)\right\}. \tag{1.43}$$

де γ^* - густина ефектичної поверхневої енергії матеріалу.

Спрогнозувати чи буде відбуватися руйнування пластини чи ні, при заданих параметрах задачі, можна на основі формули (1.43) і якщо знати коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів.

РОЗДІЛ 2

ДВОВІСНИЙ ЗГИН З РОЗТЯГОМ ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНОЮ ЖОРСТКОЮ ЦИЛІНДРИЧНОЮ ШАЙБОЮ ТА ТРІЩИНОЮ ЗА СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

2.1. Формулювання задачі

Нехай маємо ізотропну пластину товщиною $2h$, яка має абсолютно жорстку циліндричну шайбу та довільно розташовану прямолінійну наскрізну тріщину. Радіус шайби – R, довжина тріщини – $2l_1$. Декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ введемо у серединній площині пластини. Початок координат нехай буде у центрі шайби і нехай вісь $O\tilde{z}$ буде перпендикулярною до пластини. З площиною Oxy пов'яжемо полярну систему координат r i θ з полярною віссю Ox і полюсом у точці O. Через (x_{01}, y_{01}) позначимо координати площини Oxy. Вона співпадає з центром тріщини. Кут нахилу тріщини до осі позначимо через α_1. З цією тріщиною пов'яжемо декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Нехай O_1 у точці z_{01} $(z_{01} = x_{01} + iy_{01})$ початок цієї системи координат. Нехай пластина згинається рівномірно розподіленими моментами $M_x{}^{\infty}$ і $M_y{}^{\infty}$ та розтягується рівномірно розподіленим навантаженням P_1 та P_2. Через S^+ позначимо область всередині шайби, а через S^-–область ззовні шайби. Через L_1 позначимо лінію, де розміщена тріщина, а межу шайби позначимо через L.

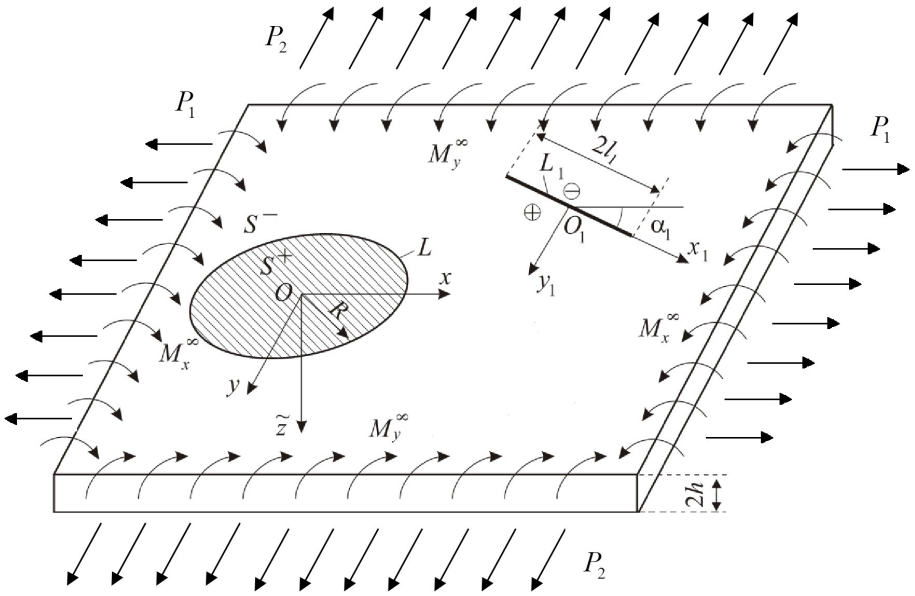


Рис. 2.1. Нескінченна пластина з шайбою та довільно розташованою тріщиною

Тоді нехай за даного навантаження береги тріщин контактують по всій довжині по лінії на верхній основі пластини. Завдяки контакту берегів тріщини, крім згинальних моментів з'являються ще і мембранні зусилля. За рахунок цього розв'язок задачі буде у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини і плоскої задачі.

Будемо мати такі крайові умови на межі шайби

$$w = 0, x \in L, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, x \in L, \tag{2.2}$$

$$u_{\Pi r} = 0, x \in L, \tag{2.3}$$

$$u_{\Pi \theta} = 0, x \in L, \tag{2.4}$$

де $u_{\Pi r}$ та $u_{\Pi \theta}$ – компоненти вектора переміщень у полярній систему координат, а w – прогин пластини.

Дані крайові умови, враховуючи гладкий контакт берегів тріщини при геометрично лінійному підході, матимуть вигляд

$$P^{+} = P^{-} = 0, x_1 \in L_1, \tag{2.5}$$

$$M_{y_1}{}^{+} = M_{y_1}{}^{-} = N_1 h, x_1 \in L_1, \tag{2.6}$$

$$\tau_{\Pi x_1 y_1}{}^{+} = \tau_{\Pi x_1 y_1}{}^{-} = 0, x_1 \in L_1, \tag{2.7}$$

$$\sigma_{\Pi x_1 y_1}{}^{+} = \sigma_{\Pi x_1 y_1}{}^{-} = -\frac{N_1}{h}, x_1 \in L_1, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial [v_{\Pi}]}{\partial x_1} + h\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial y_1}\right] = 0, x_1 \in L_1, \tag{2.9}$$

де N_1 – контактне зусилля між берегами тріщини.

Формули (2.1)-(2.9) – взаємозв'язані крайові умови для задачі згину пластини та плоскої задачі. Вони описують контактну взаємодію берегів даної тріщини у двовимірній постановці, при тому, що пластина має абсолютно жорстку шайбу.

2.2 Побудова розв'язку задачі

Задача згину пластини

Для розв'язку задачі згину пластини проаналізуємо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$. Проробивши певні викладки, будемо мати

$$\Omega_1(z_1) = \tilde{\kappa}\Phi_1(z_1), \tag{2.10}$$

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-l_1}^{l_1} \frac{y_1(t)}{t - z_1}dt, \tag{2.11}$$

Врахувавши крайові умови (2.1), (2.2) та формулу (1.24), матимемо

$$\Phi_1{}^+(s) - \Phi_1{}^-(s) + \Phi_1\big((s - z_{01})e^{-i\alpha_1}\big) + \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_1}}{s^2}\right)\overline{\Phi_1}\left(\left(\frac{R^2}{s^2} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)$$

$$+\frac{R^2}{s^2}e^{2i\alpha_1}\{\Omega_1\left(\left(\frac{R^2}{s} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right) - \{(s - \bar{z}_{01})e^{-i\alpha_1}$$

$$-\left(\frac{R^2}{s} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\}\overline{\Phi_1{}'}(\left(\frac{R^2}{s} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1})\} = 0, s \in L. \tag{2.12}$$

Далі введемо функцію

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_1(z) - \Phi_1\big((z - z_{01})e^{-i\alpha_1}\big), z \in S^+ \\ \Phi_1(z) + \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_1}}{z^2}\right)\overline{\Phi_1}\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right) + \end{cases} \tag{2.13}$$

$$+\frac{R^2}{z^2}e^{2i\alpha_1}\{\Omega_1\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right) - \{(z - z_{01})e^{-i\alpha_1}$$

$$-\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\}\overline{\Phi_1{}'}(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1})\}, z \in S^-.$$

Маємо задачу лінійного спряження

$$F^+(s) - F^-(s) = 0, s \in L.$$

Розв'язок даної задачі можна записати так

$$F(z) = \frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \Gamma + B,$$

де

$$B = \frac{i}{2\pi}\int_{-l_1}^{l_1} \frac{\overline{y_1(t)}dt}{t + z_{01}e^{i\alpha_1}}.$$

Функцію $\Phi_1(z)$ можна визначити із (2.13), так як нам відома функція $F(z)$

$$\Phi_1(z) = \frac{\overline{\Gamma'}R^2}{z^2} + \Gamma + B + \Phi_1\big((z - z_{01})e^{-i\alpha_1}\big), z \in S^+, \tag{2.14}$$

$$\Phi_1(z) = \frac{\overline{\Gamma'}R^2}{z^2} + \Gamma + B - \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_1}}{z^2}\right)\overline{\Phi_1}\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)$$
$$- \frac{R^2}{z^2}e^{2i\alpha_1}\{\Omega_1\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right) - \{(z - z_{01})e^{-i\alpha_1}$$
$$- \left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\}\overline{\Phi_1}'(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1})\}, z \in S^-. \tag{2.15}$$

За допомогою крайових умов (2.5) і (2.6) із формули (1.27), враховуючи формулу (2.10), матимемо

$$\tilde{\kappa}\Phi_1{}^+(z_1) + \tilde{\kappa}\Phi_1{}^-(z_1) + \tilde{\kappa}\Phi_1\big(z_{01} + x_1 e^{i\alpha_1}\big)$$
$$- \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_1}}{(\overline{z_{01}} + x_1 e^{-i\alpha_1})^2}\right)\overline{\Phi_1(z_{01} + x_1 e^{i\alpha_1})}$$
$$- e^{-2i\alpha_1}\left(z_{01} + x_1 e^{i\alpha_1} - \frac{R^2}{\overline{z_{01}} + x_1 e^{-i\alpha_1}}\right)\overline{\Phi_1{}'(z_{01} + x_1 e^{i\alpha_1})}$$
$$- \frac{R^2 e^{-2i\alpha_1}}{(\overline{z_{01}} + x_1 e^{-i\alpha_1})^2}\Phi_1\left(\frac{R^2}{\overline{z_{01}} + x_1 e^{-i\alpha_1}}\right) = i\tilde{c}'_1 + qhN_1(x_1), x_1$$
$$\in L_1 \tag{2.16}$$

де $z_1 = (z_{01} - z_{01} + x_1 e^{i\alpha_1})e^{-i\alpha_1}$.

Враховуючи формули (2.10), (2.11), (2.14), (2.15), формулу (2.16) можна переписати у вигляді ССІР, щоб знайти невідому функцію $y_1(t)$, яка у безрозмірних змінних буде мати вигляд

$$\int_{-1}^{1}\{K_1(\eta,\xi)Y_1(\eta) + L_1(\eta,\xi)\overline{Y_1(\eta)}\}d(\eta) = i\,\tilde{c}'_1 + q\frac{hN_1(\xi)}{M_y^\infty} + \tilde{P}_1(\xi), \xi \in [-1,1] \tag{2.17}$$

де

$$K_1(\eta,\xi) = \frac{\tilde{\kappa}}{\pi i(\eta - \xi)} + \widetilde{K_1}(\eta,\xi), \qquad L_1(\eta,\xi) = \widetilde{L_1}(\eta,\xi),$$

$$\widetilde{K_1}(\eta,\xi) = \tilde{\kappa}K_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2}\right)K_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) - e^{-2i\alpha_1}\left(X_1 - \frac{1}{\bar{X}_1}\right)K_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi)$$

$$- \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2}K_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi),$$

$$\widetilde{L_1}(\eta,\xi) = \tilde{\kappa}L_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) - \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2}\right)L_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) - e^{-2i\alpha_1}(X_1 - \frac{1}{\bar{X}_1})L_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi)$$

$$- \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2}L_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi),$$

$$K_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) = -\frac{\tilde{\kappa}}{2\pi i X_1}\frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}}{\overline{T_1}X_1 - 1},$$

$$L_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{\overline{T_1}} + \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}F_1}{(\overline{T_1}X_1 - 1)^2} - \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{X_1}\frac{X_1^2 + e^{2i\alpha_1}}{\overline{T_1}X_1 - 1}\right\},$$

$$K_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}}{T_1} + \frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}\overline{F_1}}{(T_1\overline{X_1} - 1)^2} - \frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}}{\overline{X_1}}\frac{\overline{X_1^2} + e^{2i\alpha_1}}{T_1\overline{X_1} - 1}\right\},$$

$$L_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) = \frac{\tilde{\kappa}}{2\pi i\overline{X_1}}\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{T_1\overline{X_1} - 1},$$

$$K_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi) = \frac{1}{\pi i}\frac{\lambda_1}{(T_1\overline{X_1} - 1)^2}\left\{e^{i\alpha_1} + \frac{e^{-i\alpha_1}}{\overline{X_1^2}} + \frac{T_1\overline{X_1} - 1}{\overline{X_1^2}}e^{-i\alpha_1} - \frac{e^{i\alpha_1}\overline{F_1}}{\overline{X_1}} - \frac{e^{i\alpha_1}}{\overline{X_1}}\frac{\overline{F_1}}{T_1\overline{X_1} - 1}\right\},$$

$$L_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi) = -\frac{\tilde{\kappa}}{\pi i\overline{X_1^2}}\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{T_1\overline{X_1} - 1}(1 + \frac{1}{2(T_1\overline{X_1} - 1)}),$$

$$K_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi) = \frac{\lambda_1\overline{X_1}e^{i\alpha_1}}{2\pi i(T_1\overline{X_1} - 1)}, \qquad L_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi) = -\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{2\pi i\overline{T_1}},$$

$$\widetilde{P_1}(\xi) = -\tilde{\kappa}A - \frac{\tilde{\kappa}B}{X_1^2} + A + \frac{B}{\overline{X_1^2}} - e^{-2i\alpha_1}\left\{-\frac{B}{\overline{X_1^4}} - \frac{A}{\overline{X_1^2}} + 2B\frac{X_1\overline{X_1} - 1}{\overline{X_1^4}} - B - \frac{A}{\overline{X_1^2}}\right\},$$

$$Z_{01} = \frac{z_{01}}{R} = \frac{x_{01}}{R} + i\frac{y_{01}}{R},\ x_1 = l_1\xi, t = l_1\eta, \lambda_1 = \frac{l_1}{R}\ , q = -\frac{3}{2}(1 + \upsilon),$$

$$T_1 = Z_{01} + \lambda_1\eta e^{i\alpha_1}, X_1 = Z_{01} + \lambda_1\xi e^{i\alpha_1}, F_1 = X_1 - Z_{01} - \frac{e^{2i\alpha_1}}{X_1} + \overline{Z_{01}}e^{2i\alpha_1},$$

$$A = -0.375(1 + \rho)(1 - \upsilon), B = 0.75(1 - \rho)(1 - \upsilon), \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty},$$

$$y_1(t) = \frac{M_y^\infty Y_1(l_1\eta)}{Eh^3}, Y_1(\eta) = Y_{11}(\eta) + iY_{12}(\eta),$$

де $Y_{11}(\eta), Y_{12}(\eta)$ – дійсні функції.

Побудова розв'язку плоскої задачі

Щоб розв'язати плоску задачу треба ввести комплексні потенціали $\Phi_{\text{К}}(z)$ і $\Psi_{\text{К}}(z)$. Тоді матимемо

$$\Phi_{\text{П}1}(z) = \Omega_{\text{П}1}(z), \tag{2.18}$$

$$\Phi_{\text{П}1}(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l_1}^{l_1} \frac{g_1'(t)dt}{t - z_1}, \tag{2.19}$$

Врахувавши граничні умови (2.3) і (2.4), із формули (1.31) отримаємо

$$\kappa\Phi_{\text{ПК}}^{-}(s) + \Phi_{\text{ПК}}^{+}(s) + \kappa\Phi_{\text{П}1}\left((s - z_{01})e^{-i\alpha_1}\right) - \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_1}}{s^2}\right)\overline{\Phi_{\text{П}1}}\left(\left(\frac{R^2}{s} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)$$
$$+ \frac{R^2}{s^2}e^{2i\alpha_1}\left\{\Omega_{\text{П}1}\left(\left(\frac{R^2}{s} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)\right.$$
$$\left. + \left((s - z_{01})e^{-i\alpha_1} - \left(\frac{R^2}{s} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)\overline{\Phi'_{\text{П}1}}\left(\left(\frac{R^2}{s} - z_{01}\right)e^{i\alpha_1}\right)\right\} = 0, s$$
$$\in L \tag{2.20}$$

Далі розглянемо функцію

$$F_{\text{П}}(z) = \begin{cases} \Phi_{\text{П}K}(z) + \kappa\Phi_{\text{П}1}(z - z_{01})e^{-i\alpha_1}, z \in S^{+}, \\ -\kappa\Phi_{\text{П}K}(z) + \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_1}}{z^2}\right)\overline{\Phi_{\text{П}1}}\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right) - \end{cases}$$
$$-\frac{R^2}{z^2}e^{2i\alpha_1}\left\{\Omega_{\text{П}1}\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)\right.$$
$$\left. + \left((z - z_{01})e^{-i\alpha_1} - \left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right)e^{i\alpha_1}\right)\overline{\Phi'_{\text{П}1}}\left(\left(\frac{R^2}{z} - z_{01}\right)e^{i\alpha_1}\right)\right\} = 0, z$$
$$\in S^{-} \tag{2.21}$$

Із формули (2.20) запишемо отриману задачу лінійного спряження

$$F_{\text{П}}^{+}(s) - F_{\text{П}}^{-}(s) = 0, s \in L.$$

Її розв’язок буде мати вигляд

$$F_{\text{П}}(z) = B_{\text{П}},$$

де

$$B_{\Pi} = \frac{\bar{\tilde{\Gamma}}' R^2}{z^2} + \tilde{\Gamma} + \frac{1}{2\pi} \int_{-l_1}^{l_1} \frac{\overline{g_1'(t)} dt}{t + \overline{z_{01}} e^{i\alpha_1}}.$$

З формули (2.21) отримаємо

$$\Phi_{\Pi K}(z) = B_{\Pi} - \kappa \Phi_{\Pi 1}\left((z - z_{01}) e^{-i\alpha_1}\right), z \in S^+, \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\Pi K}(z) = \frac{1}{k}\{-B_{\Pi} + \left(1 + \frac{R^2 e^{2i\alpha_1}}{z^2}\right) \overline{\Phi_{\Pi 1}}\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right) e^{i\alpha_1}\right) \\ - \frac{R^2}{z^2} e^{2i\alpha_1} \left\{\Omega_{\Pi 1}\left(\left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right) e^{i\alpha_1}\right)\right. \\ \left. + \left((z - z_{01}) e^{-i\alpha_1} - \left(\frac{R^2}{z} - \overline{z_{01}}\right) e^{i\alpha_1}\right) \overline{\Phi'_{\Pi 1}}\left(\left(\frac{R^2}{z} - z_{01}\right) e^{i\alpha_1}\right)\right\}, z \\ \in S^-,\end{aligned} \tag{2.23}$$

Далі формулу (1.34), враховуюючи крайові умови (2.7), (2.8) та співвідношення (2.18) запишемо таким чином

$$\begin{aligned}-\frac{N_1}{2h} = \Phi_{\Pi 1}^+(x_1) + \Phi_{\Pi 1}^-(x_1) + +\Phi_{\Pi K}\left(x_1 e^{i\alpha_1} + z_{01}\right) \\ + \left(1 + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_1}}{(x_1 e^{-i\alpha_1} + \overline{z_{01}})^2}\right) \overline{\Phi_{\Pi K}(x_1 e^{i\alpha_1} + z_{01})} \\ + e^{-2i\alpha_1}\left(x_1 e^{i\alpha_1} + z_{01} - \frac{R^2}{x_1 e^{-i\alpha_1} + \overline{z_{01}}}\right) \overline{\Phi'_{\Pi K}(x_1 e^{i\alpha_1} + z_{01})} \\ + \frac{R^2 e^{-2i\alpha_1}}{(x_1 e^{-i\alpha_1} + \overline{z_{01}})^2} \Phi_{\Pi K}\left(\frac{R^2}{x_1 e^{-i\alpha_1} + \overline{z_{01}}}\right),\end{aligned} \tag{2.24}$$

Враховуючи формули (2.24), (2.19), (2.22), (2.23), отримаємо ССІР, щоб знайти невідому функцію $g'_1(t)$, яка у безрозмірних змінних виглядатиме так

$$\int_{-l}^{l} \{R_1(\eta, \xi) G_1(\eta) + S_1(\eta, \xi) \overline{G_1(\eta)}\} d\eta = -\frac{h N_1(\xi)}{2 M_y^{\infty}} + \widetilde{H}_1(\xi), \xi \in [-1,1], \tag{2.25}$$

де

$$R_1(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} + \widetilde{R_1}(\eta, \xi), \quad S_1(\eta, \xi) = \widetilde{S_1}(\eta, \xi),$$

$$\widetilde{R_1}(\eta,\xi) = R_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) + \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2}\right) R_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) + e^{-2i\alpha_1}\left(X_1 - \frac{1}{\bar{X}_1}\right) R_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi)$$
$$+ \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2} R_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi),$$

$$\widetilde{S_1}(\eta,\xi) = S_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) + \left(1 + \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2}\right) S_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) + e^{-2i\alpha_1}\left(X_1 - \frac{1}{\bar{X}_1}\right) S_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi)$$
$$+ \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\bar{X}_1^2} S_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi),$$

$$R_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa X_1}\frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}}{\bar{T}_1 X_1 - 1},$$

$$S_1^{\mathrm{I}}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa}\left\{\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{\bar{T}_1} + \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1} F_1}{(\bar{T}_1 X_1 - 1)^2} - \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{X_1}\frac{X_1^2 + e^{2i\alpha_1}}{\bar{T}_1 X_1 - 1}\right\},$$

$$R_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa}\left\{\frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}}{T_1} + \frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}\bar{F}_1}{(T_1\overline{X_1} - 1)^2} - \frac{\lambda_1 e^{i\alpha_1}}{\overline{X_1}}\frac{\overline{X_1^2} + e^{2i\alpha_1}}{T_1\overline{X_1} - 1}\right\},$$

$$S_1^{\mathrm{II}}(\eta,\xi) = -\frac{1}{2\pi\kappa\overline{X_1}}\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{T_1\overline{X_1} - 1},$$

$$R_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi) = -\frac{1}{\pi\kappa}\frac{\lambda_1}{(T_1\overline{X_1} - 1)^2}\left\{e^{i\alpha_1} + \frac{e^{-i\alpha_1}}{\overline{X_1^2}} + \frac{T_1\overline{X_1} - 1}{\overline{X_1^2}} e^{-i\alpha_1} - \frac{e^{i\alpha_1}\bar{F}_1}{\overline{X_1}}\right.$$
$$\left. - \frac{e^{i\alpha_1}}{\overline{X_1}}\frac{\bar{F}_1}{T_1\overline{X_1} - 1}\right\},$$

$$S_1^{\mathrm{III}}(\eta,\xi) = \frac{1}{\pi\kappa\overline{X_1^2}}\frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{T_1\overline{X_1} - 1}\left(1 + \frac{1}{2(T_1\overline{X_1} - 1)}\right),$$

$$R_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi) = -\frac{\kappa\lambda_1\overline{X_1} e^{i\alpha_1}}{2\pi(T_1\overline{X_1} - 1)}, \qquad S_1^{\mathrm{IV}}(\eta,\xi) = \frac{\lambda_1 e^{-i\alpha_1}}{2\pi\bar{T}_1},$$

$$\widetilde{H}_1(\xi) = 2\gamma + \frac{\gamma'}{X_1^2} + \frac{\gamma'}{\bar{X}_1^2} - e^{-2i\alpha_1}\left(\frac{\gamma'}{\bar{X}_1^4} + \frac{\gamma}{\bar{X}_1^2} + \frac{2(X_1\bar{X}_1 - 1)}{\bar{X}_1^4}\gamma' - \gamma' - \frac{\gamma}{\bar{X}_1^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{p_1 + p_2}{4}, \gamma' = -\frac{p_1 + p_2}{2}, p_1 = \frac{hP_1}{M_y^\infty}, p_2 = \frac{hP_2}{M_y^\infty}$$

$$g_1'(t) = \frac{M_y^\infty G_1(l_1\eta)}{h^2}, G_1(\eta) = G_{11}(\eta) + iG_{12}(\eta),$$

де $G_{11}(\eta), G_{12}(\eta)$ – дійсні функції.

Інтегральні рівняння задачі

Рівняння (2.17) та (2.25) перепишемо у вигляді

$$Im\left(\int_{-l}^{l}\{K_1(\eta,\xi)Y_1(\eta)+L_1(\eta,\xi)\overline{Y_1(\eta)}\,d\eta\right)=\tilde{c}_1'+Im\widetilde{P_1}(\xi),\xi\in[-1,1], \quad (2.26)$$

$$Re\left(\int_{-l}^{l}\{K_1(\eta,\xi)Y_1(\eta)+L_1(\eta,\xi)\overline{Y_1(\eta)}\,d\eta\right)$$

$$+\frac{q}{2}Re\left(\int_{-l}^{l}\{R_1(\eta,\xi)G_1(\eta)+S_1(\eta,\xi)\overline{G_1(\eta)}\,d\eta\right)=Re\widetilde{P_1}(\xi)+Re\widetilde{H}_1(\xi),\xi$$

$$\in[-1,1] \quad (2.27)$$

$$Im\left(\int_{-l}^{l}\{R_1(\eta,\xi)G_1(\eta)+S_1(\eta,\xi)\overline{G_1(\eta)}\,d\eta\right)=Im\widetilde{H}_1(\xi),\xi\in[-1,1], \quad (2.28)$$

Зважаючи на крайову умову (2.9), матимемо

$$G_{11}(\eta)+\frac{1+\tilde{\kappa}}{(1+\kappa)(1+\upsilon)}Y_{12}(\eta)=0,\eta\in[-1,1], \quad (2.29)$$

Додаємо до системи рівнянь (2.26)-(2.28) рівняння

$$\int_{-l}^{l}Y_1(\eta)d\eta=0,\quad \int_{-l}^{l}\eta Y_{11}(\eta)d\eta=0, \quad (2.30)$$

що при обході контуру тріщини виражають собою однозначність кутів повороту і прогину пластини.

Під час обходу контуру тріщини, використовуючи умову однозначності переміщень, отримаємо

$$\int_{-l}^{l}G_1(\eta)d\eta=0. \quad (2.31)$$

2.3. Згин з розтягом пластини з жорсткою круговою шайбою та прямолінійною тріщиною

2.3.1. Тріщина, що паралельна осі *Ox*

За даних початкових умов $\upsilon = 0.3, z_0 = 1 + \varepsilon, \varepsilon = \frac{d}{R}, \alpha = 0°$ зроблено числовий аналіз для пластини з жорсткою круговою шайбою та прямолінійною тріщиною, що паралельна осі *Ox* (див. рис. 2.2).

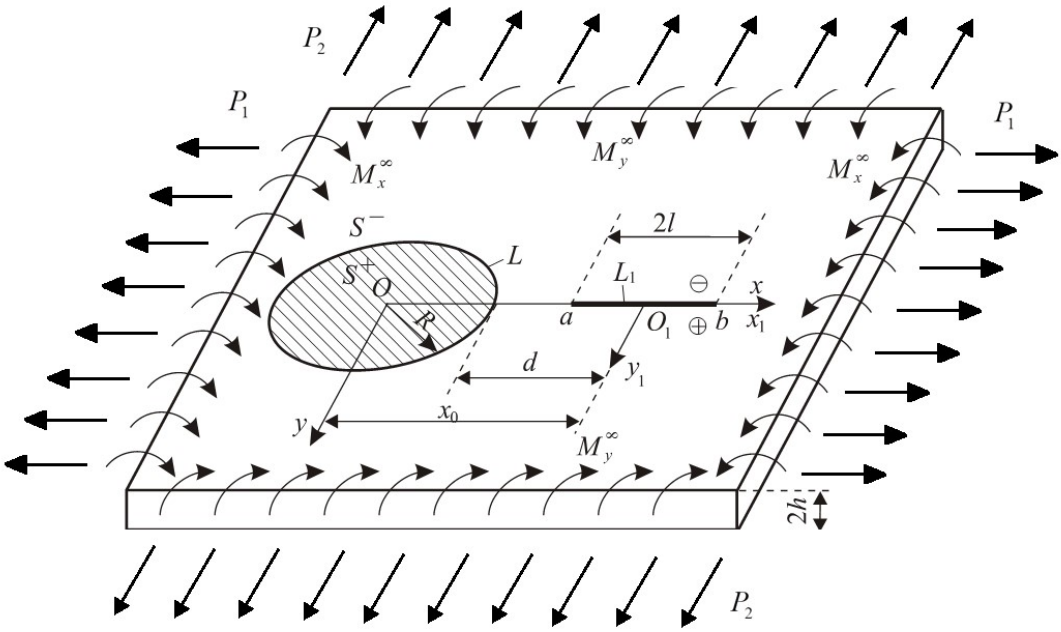


Рис. 2.2. Схема розміщення тріщини

На рис. 2.3 та 2.4 показано графіки залежності зведеного контактного зусилля $N^* = \frac{hN}{M_y^\infty}$ від величини $\xi = \frac{x_1}{l}$ між берегами тріщини.

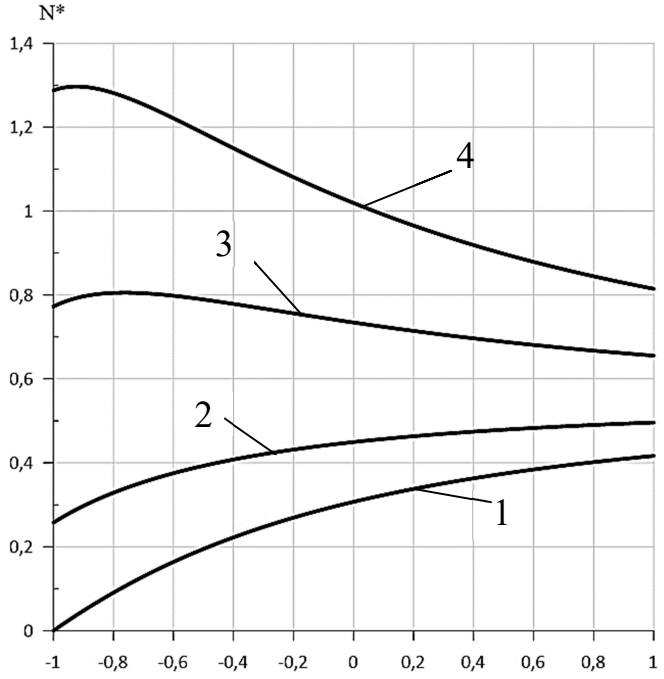


Рис. 2.3. Залежність зведеного контактного зусилля при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

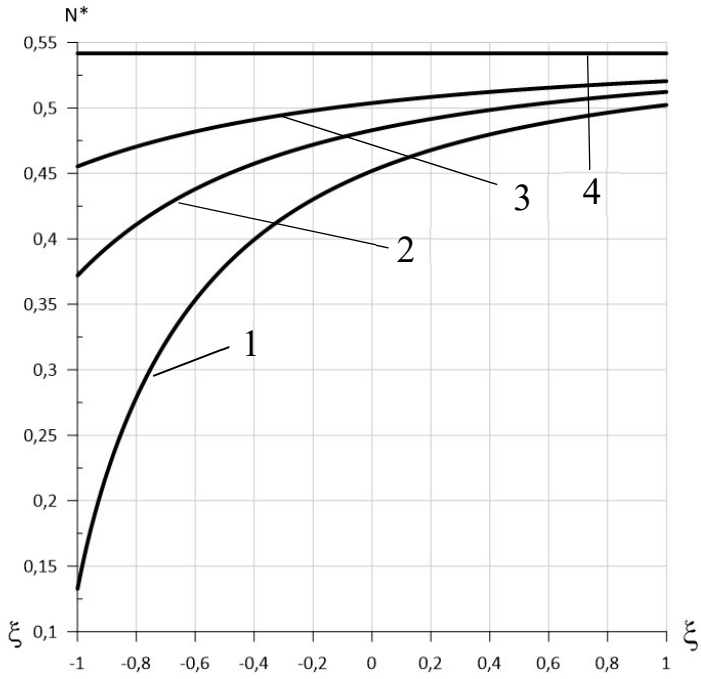
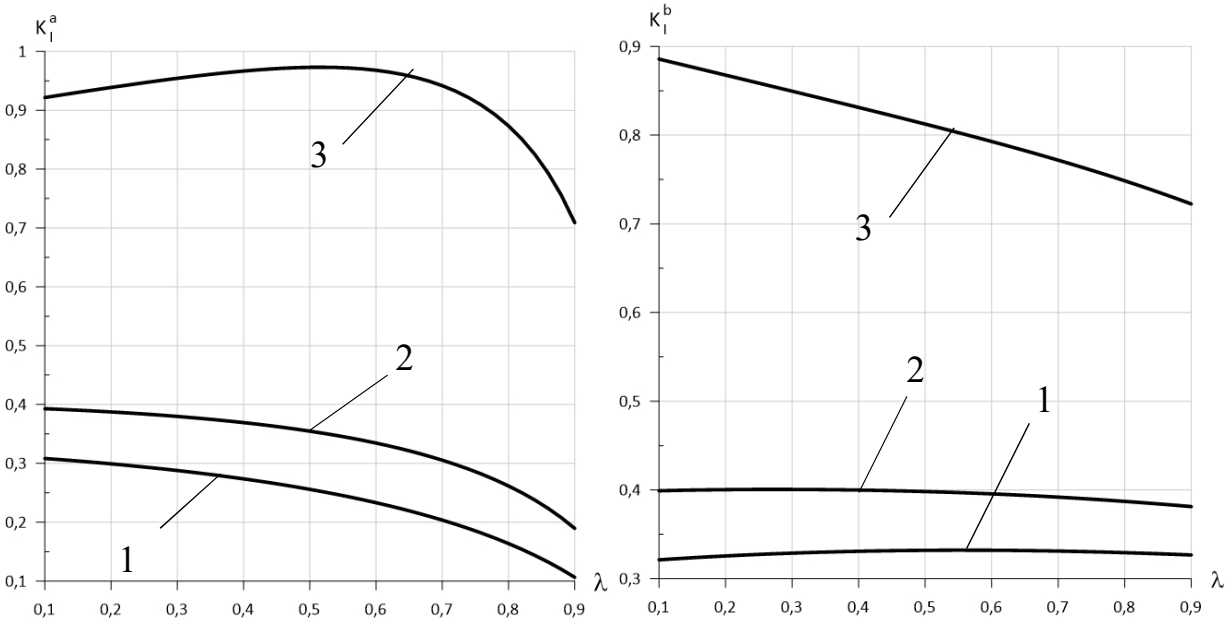


Рис. 2.4. Залежність зведеного контактного зусилля при різних відносних довжинах $\varepsilon = d/R$ тріщини до шайби

Рис. 2.3 побудовано за таких вхідних даних: $\varepsilon = \frac{d}{R} = 1, \lambda = \frac{l}{R} = 0.8$. Графік 1 побудовано при $\rho = 0.5$, графік 2 – при $\rho = 1$, графік 3 – при $\rho = 2$, графік 4 – при $\rho = 3$. Графічна залежність показала, що при $0.5 \leq \rho \leq 1$ зведене контактне зусилля N^* зростає та отримує максимальне значення при $\xi = 1$. При $2 \leq \rho \leq 3$ – спадає і досягає максимального значення при $\xi = -1$.

При $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} = 1, \lambda = \frac{l}{R} = 1$ зображено рис. 2.4. Графік 1 побудовано при $\varepsilon = \frac{d}{R} = 1.1$, графік 2 – при $\varepsilon = 1.5$, графік 3 – при $\varepsilon = 2$, графік 4 – при $\varepsilon = \infty$. Числовий аналіз показав, що при збільшенні відносної довжини тріщини до шайби контактне зусилля зростає та досягає максимального значення у точці b при $\xi = 1$ та $\varepsilon = 2$. А при $\varepsilon = \infty$ досягає максимального значення $N^* = 0.54$.

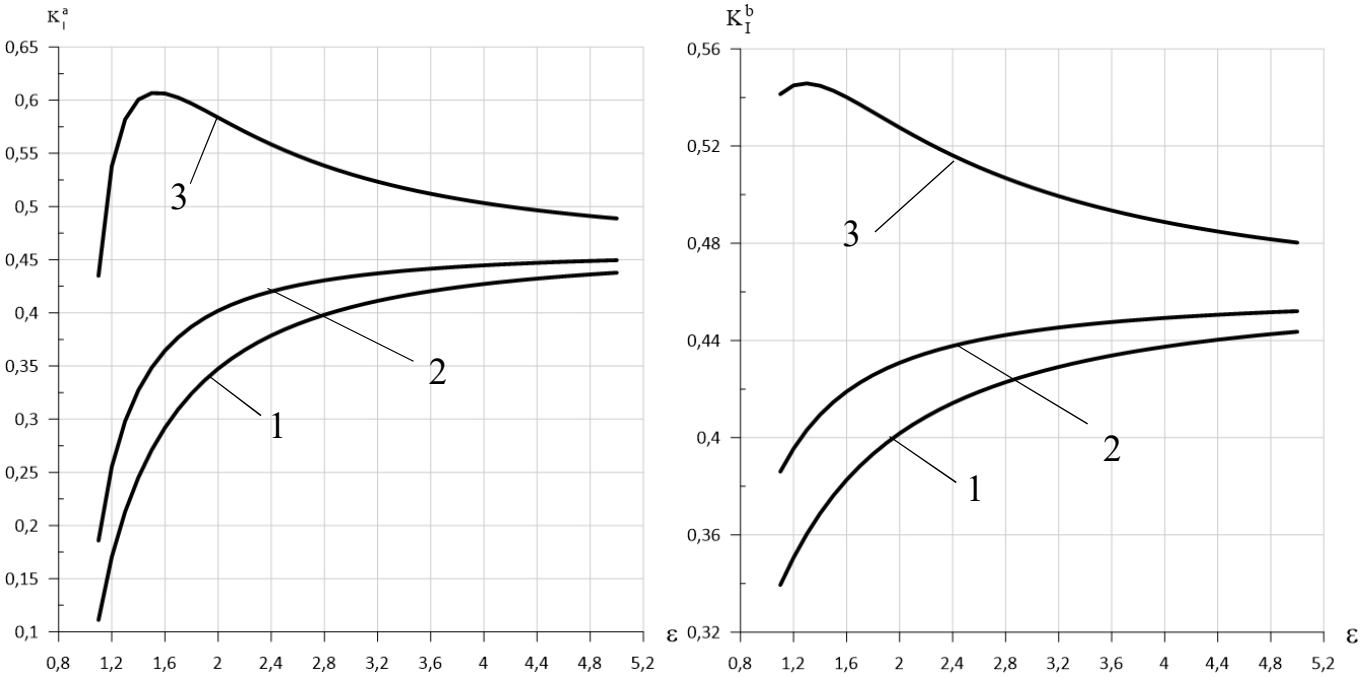
Рис. 2.5-2.6 показують графічну залежність КІМ $K_M^* = K_M/(M_y^\infty \sqrt{l})$ у точці a (рис. А) та у точці b (рис. Б)



а) б)

Рис. 2.5. Залежність КІМ від $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$ від відносної довжини тріщини $\lambda = l/R$ при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

Рис. 2.5 зображено при $\varepsilon = 2$. Графік 1 побудовано при $\rho = 0.68$, графік 2 – при $\rho = 1$, графік 3 – при $\rho = 3$. Графічна залежність показала, що у точці а при $\rho < 3$ та збільшенні відносної довжини тріщини КІМ спадає. При $\rho = 3$ КІМ зростає до свого максимального значення, а потім різко спадає.



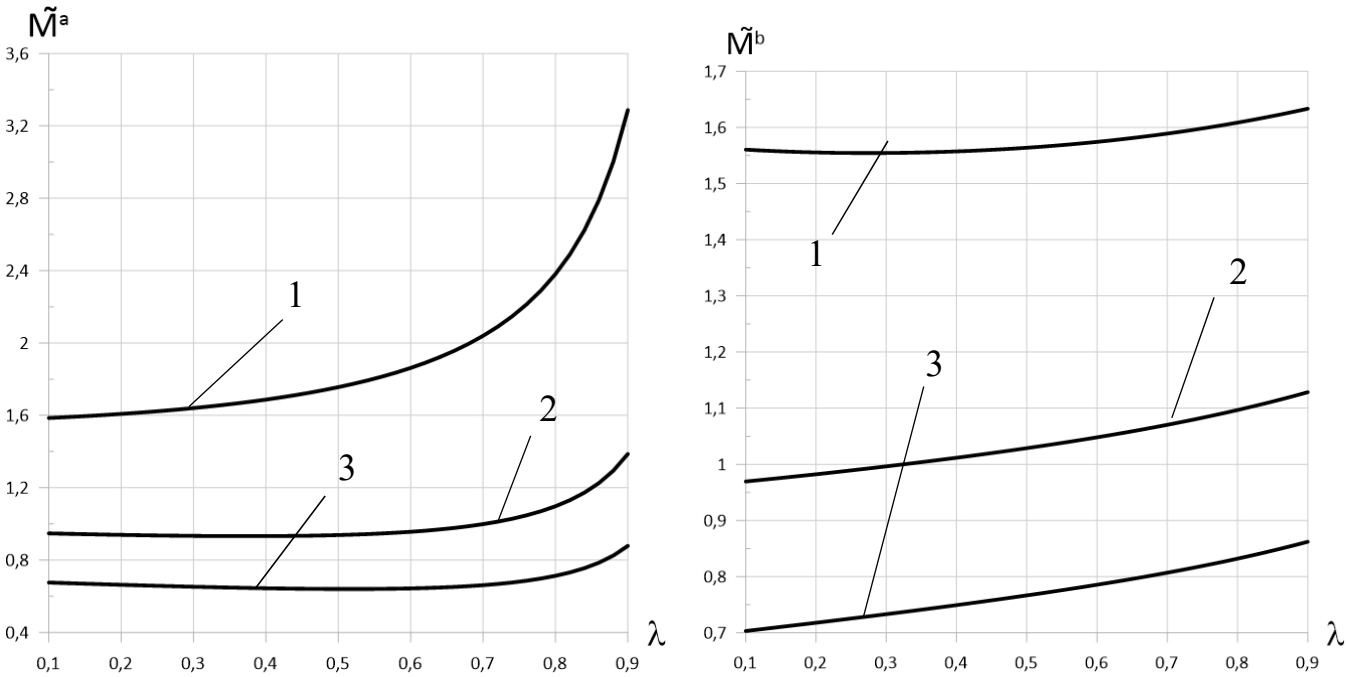
а) б)

Рис. 2.6. Залежність КІМ від $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$ від відносної відстані ε тріщини до шайби при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

У точці b значення КІМ при різних значеннях ρ спадають зі збільшенням відносної довжини тріщини λ.

Рис. 2.6 зображено при відносній довжині тріщини $\lambda = \frac{l}{R} = 1$. Графік 1 отримано при $\rho = 0.7$, графік 2 – при $\rho = 1$, графік 3 – при $\rho = 2$. З побудованих графіків бачимо, що при $\rho < 2$ КІМ у обидвох точках зростає за збільшення відносної відстані ε тріщини до шайби. Але у випадку, коли $\rho = 2$, КІМ у обидвох точках спочатку зростає, а потім спадає.

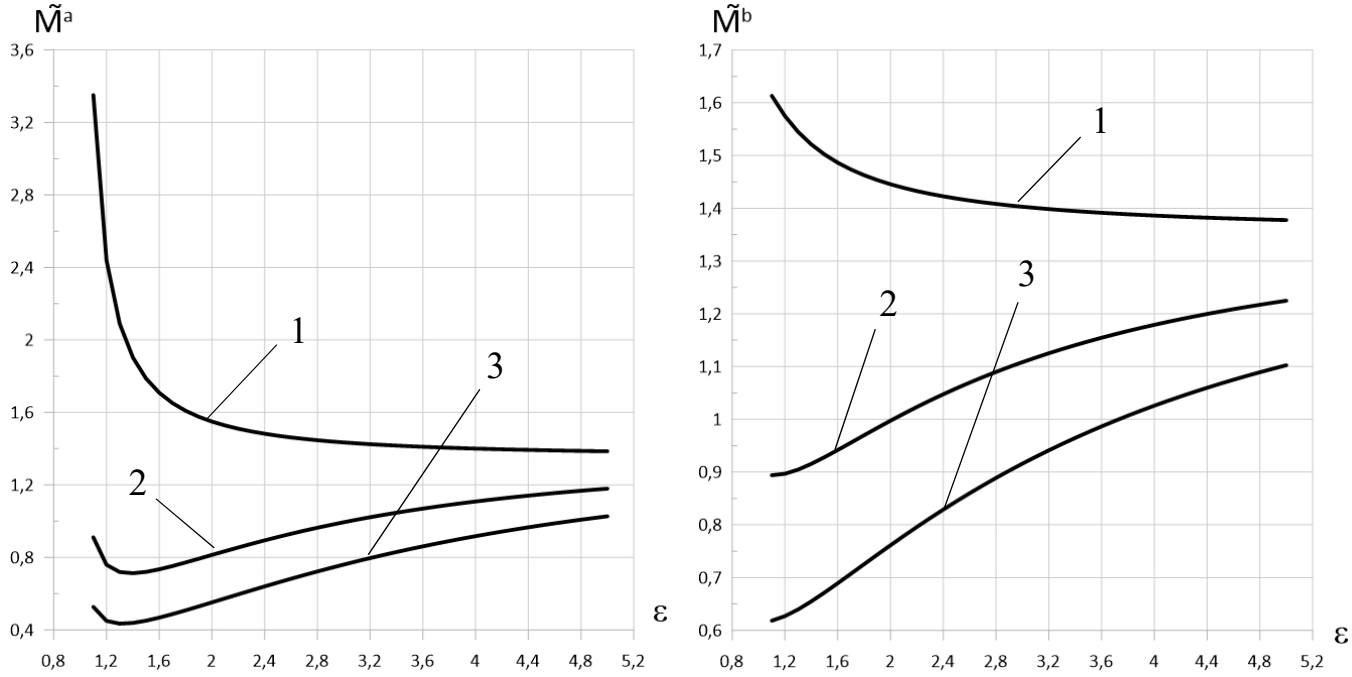
Рис. 2.7-2.8 показують графічну залежність критичного моменту $\widetilde{M} = \frac{M_y^\infty}{2h^2}\sqrt{\frac{\pi l}{2\gamma_* E}} = (k_1^2 + \frac{3(1+\upsilon)}{3+\upsilon}K_1^2)^{-1/2}$ у різних точках (a та b), рис. а) та б) відповідно. Графічна залежність 2.7 побудована при $\varepsilon = \frac{d}{R} = 1$. Графік 1 отримано при $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} == 1$, графік 2 при - $\rho = 2$, графік 3 при - $\rho = 3$. Числовий аналіз демонструє, що критичний момент $\widetilde{M}$ у обидвох точках зростає при збільшенні відносної довжини тріщини λ.



а) б)

Рис. 2.7. Залежність критичного моменту від відносної довжини тріщини λ при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

Рис. 2.8 побудовано при $\lambda = \frac{l}{R} = 1$. Графік 1 отримано при $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} = 1$, графік 2 при - $\rho = 3$, графік 3 при - $\rho = 5$. Графік показує, що критичний момент $\widetilde{M}$ при $\rho = 1$ спадає у обидвох точках. У точці a при $\rho = 3$ та $\rho = 5$ критичний момент $\widetilde{M}$ спочатку спадає, а потім зростає. При $\rho = 3$ та $\rho = 5$ у точці b значення критичного моменту $\widetilde{M}$ трохи зменшується, а потім збільшується за зростання відносної відстані ε тріщини до шайби.



а) б)

Рис. 2.8. Залежність критичного моменту від відносної відстані ε тріщини до шайби при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

2.3.2. Тріщина, що паралельна осі *Oy*

Проведено числовий аналіз задачі за згину з розтягом пластини з шайбою та тріщиною, що паралельна осі Oy при $\upsilon = 0.3, z_0 = 1 + \varepsilon, \varepsilon = \frac{d}{R}, \alpha = 90°$ (див. рис. 2.9).

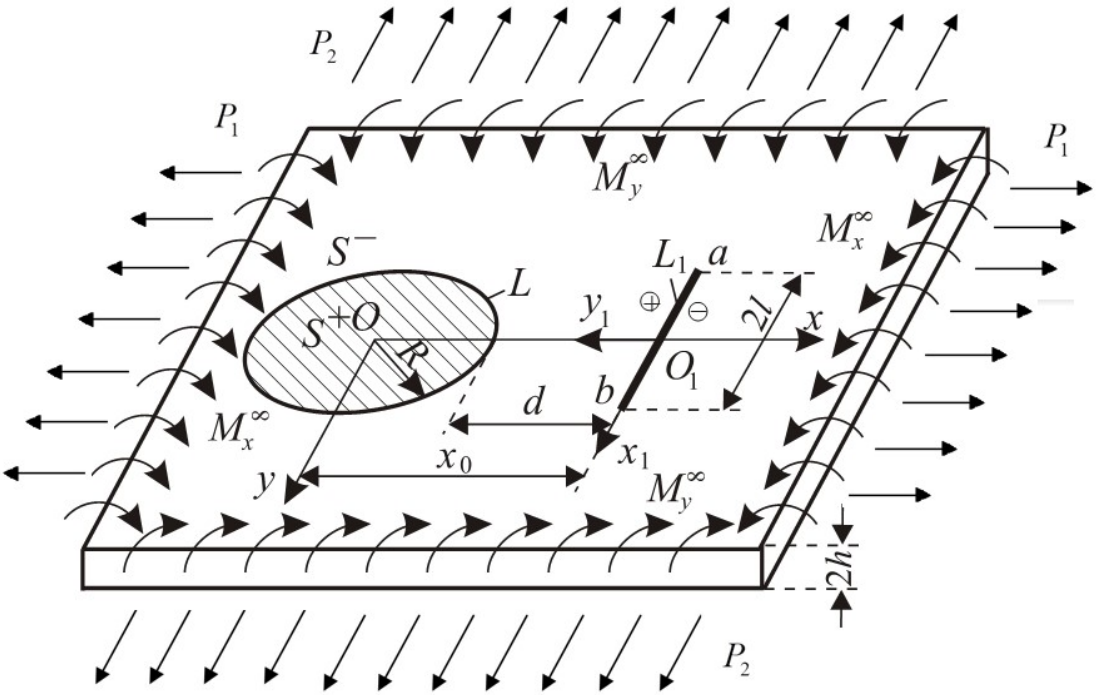


Рис. 2.9. Схема розміщення тріщини

На рис. 2.10 та 2.11 показано графіки залежності зведеного контактного зусилля

$N^* = \frac{hN}{M_y^\infty}$ від величини $\xi = \frac{x_1}{l}$.

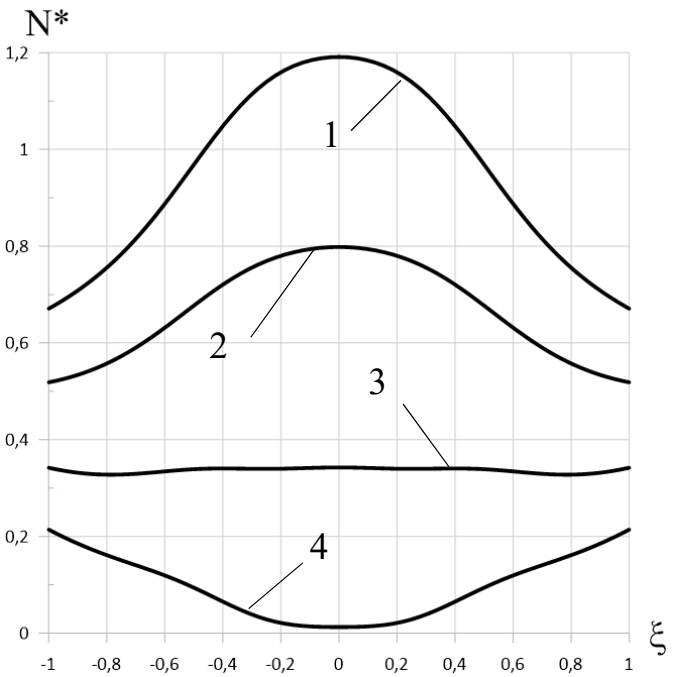


Рис. 2.10. Залежність зведеного контактного зусилля при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

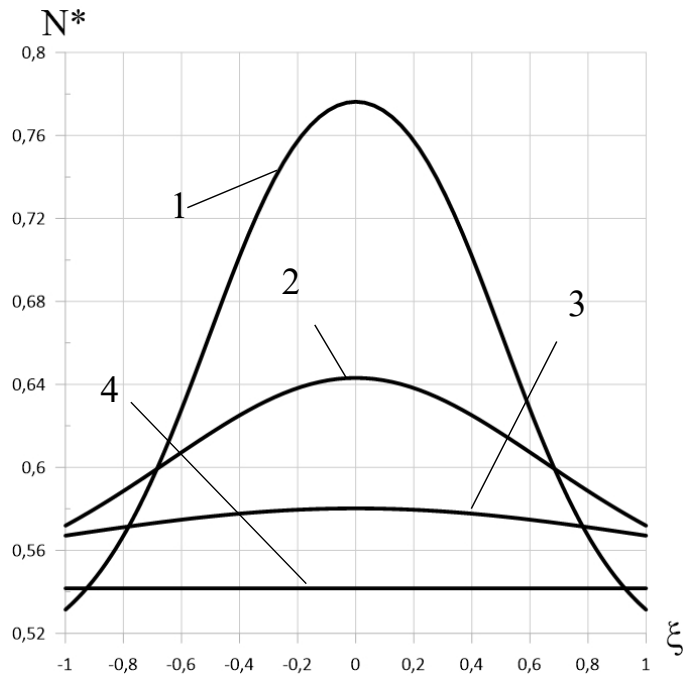


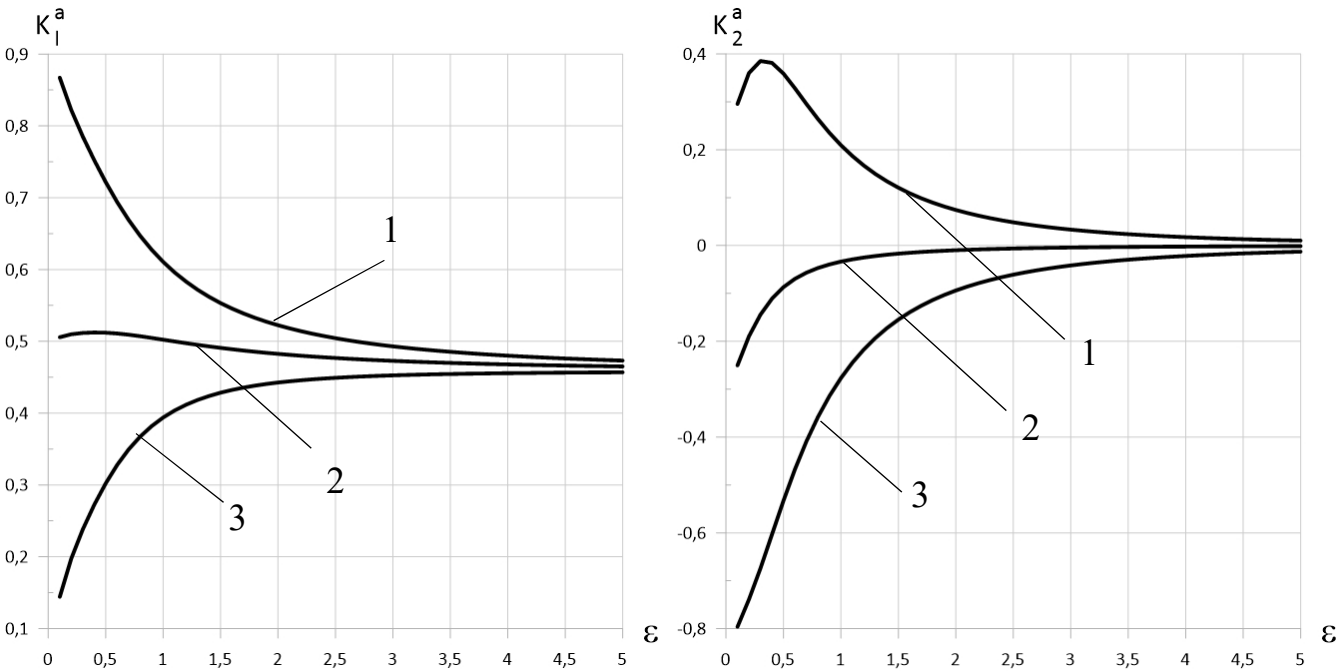
Рис. 2.11. Залежність зведеного контактного зусилля при різних

відносних відстанях ε тріщини до шайби

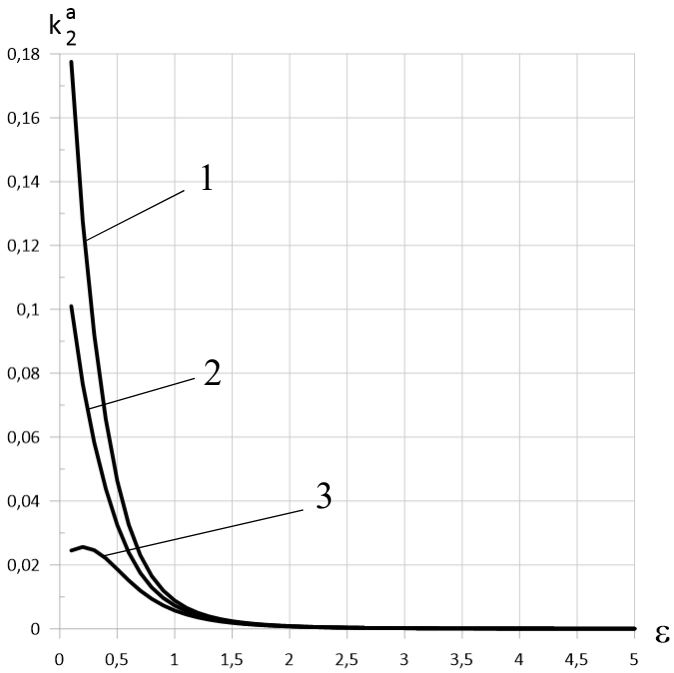
Рис. 2.10 побудовано при таких значеннях: $\lambda = \frac{l}{R} = 1,\ \varepsilon = \frac{d}{R} = 0.2$. Графік 1 отримано при $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} = 0$, графік 2 – при $\rho = 1$, графік 3 – при $\rho = 2.16$, графік 4 – при $\rho = 3$. Отримали таку графічну залежність, що при найбільшому значенні ρ зведене контактне зусилля отримує мінімальне значення посередині. При значенні $\rho < 2.16$ зведене контактне зусилля отримує максимальне значення посередині, а при $\rho = 2.16$ – по краях тріщини.

Рис. 2.11 зображено при $\lambda = \frac{l}{R} = 1,\ \rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} = 1$. Графік 1 побудовано при $\varepsilon = 0.3$, графік 2 при – $\varepsilon = 1$, графік 3 при – $\varepsilon = 2$, графік 4 при – $\varepsilon = \infty$. Графічна залежність показала, що майже у всіх випадках при збільшенні величини ξ, зведене контактне зусилля N^* зростає посередині тріщини.

На рис. 2.12 показано зведені КІМ $K_M^* = K_M/(M_y^\infty\sqrt{l})$ і КІЗ $k_N^* = hk_N/(M_x^\infty\sqrt{l})$ у точці а, а саме: рисунок *а*) – для K_1, *б*) – для K_2, *в*) – для k_2.



а) б)



в)

Рис. 2.12. Залежність КІМ від відносної відстані ε тріщини до шайби при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

Рис 2.12 отримано при значенні $\lambda = \frac{l}{R} = 0.5$. Графік 1 побудовано при $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} == 0$, графік 2 при – $\rho = 1$, графік 3 – при $\rho = 2$. Числові результати показали, що КІМ та КІЗ (K_1 та k_2) при $\rho = 0$ спадають, а КІМ K_2 – спочатку зростає, а потім спадає. При $\rho = 2$ КІМ зростають, а КІЗ – спочатку зростає, а потім спадає. При $\rho = 1$, кожен графік веде себе по різному: КІЗ – спадає, КІМ K_2 – зростає, а КІМ K_1 – спочатку зростає, а потім спадає. Також, при збільшенні відносної відстані ε тріщини до шайби, КІЗ і КІМ K_2 зменшуються до нуля.

2.3.3. Тріщина, що розташована довільно

За даних початкових умов $\upsilon = 0.3, z_0 = 1 + \varepsilon, \varepsilon = \frac{d}{R}$ зроблено числовий аналіз для пластини з жорсткою круговою шайбою та прямолінійною довільно розташованою тріщиною (див. рис. 2.13).

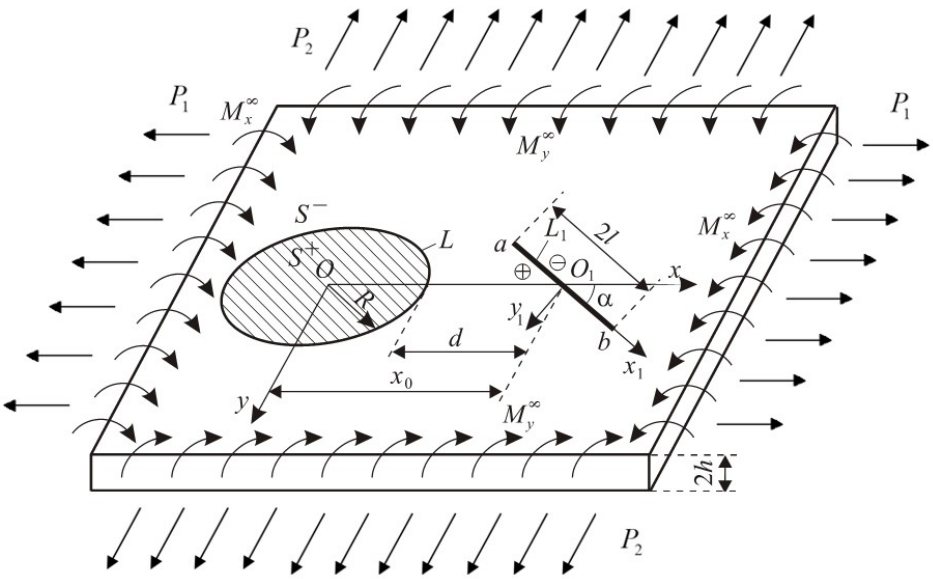


Рис. 2.13. Схема розташування тріщини

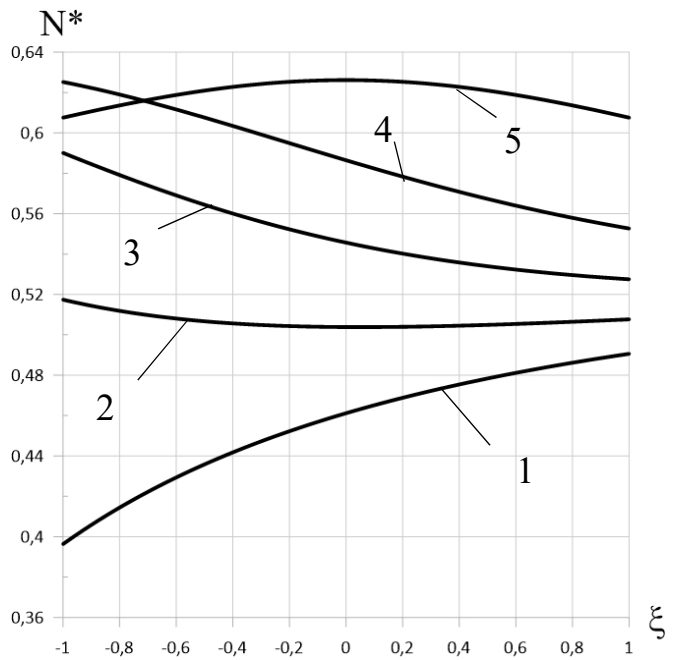
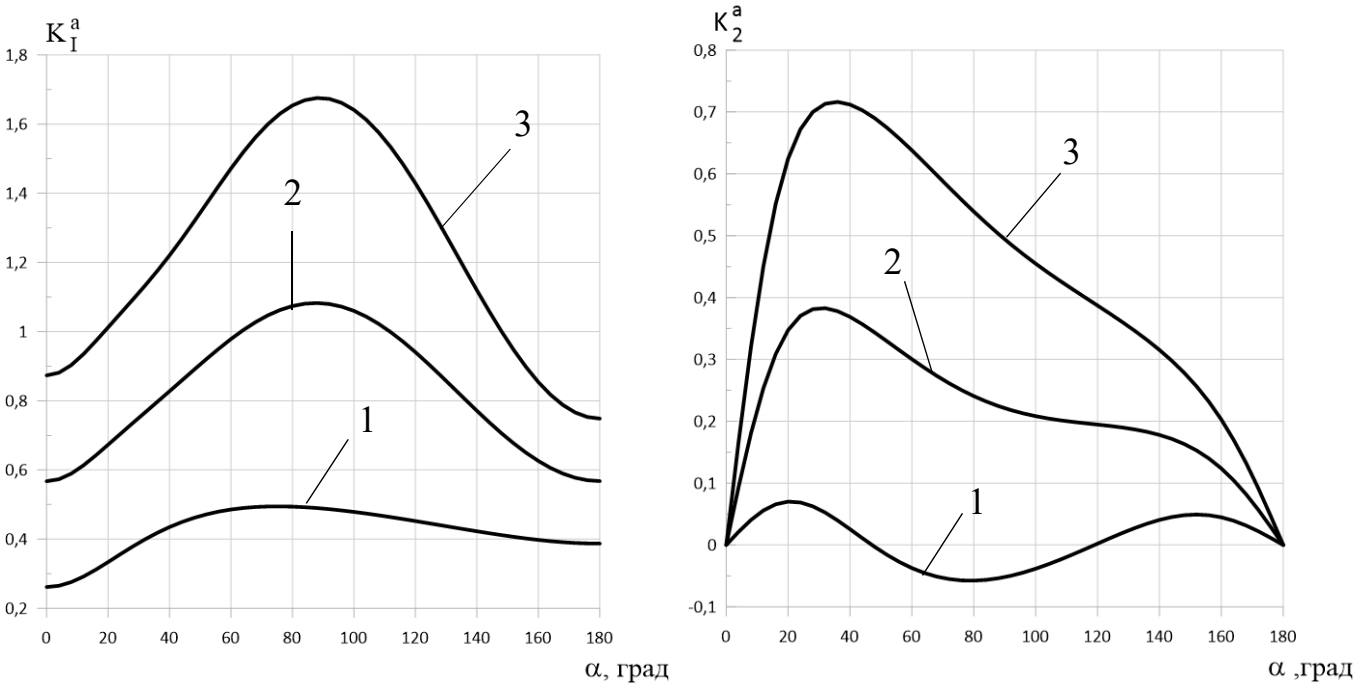


Рис. 2.14. Залежність зведеного контактного зусилля при різних кутах нахилу тріщини α

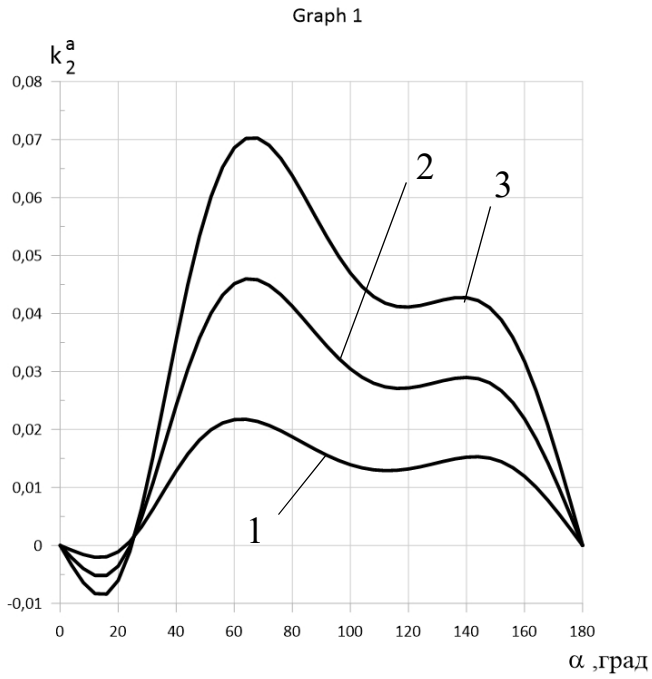
Графічну залежність зведеного контактного зусилля $N^* = \frac{hN}{M_y^\infty}$ від величини $\xi = \frac{x_1}{l}$ отримано на рис.2.14 за умов , $\varepsilon = \frac{d}{R} = 1$, $\lambda = \frac{l}{R} = 0.5$, $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} = 1$. Графік 1 зображено при $\alpha = 0°$, графік 2 – при $\alpha = 30°$, графік 3 – при $\alpha = 45°$, графік 4 – при $\alpha = 60°$, графік 5 – при $\alpha = 90°$. Отримавши графічну залежність бачимо, що при $\alpha = 0°$ та $\alpha = 90°$ зведене контактне зусилля N^* зростає при збільшенні ξ, а в інших випадках – спадає.

Рис. 2.15 показує графічну залежність КІМ $K_M^* = K_M/(M_y^\infty\sqrt{l})$ і КІЗ $k_N^* = hk_N/(M_x^\infty\sqrt{l})$ у точці а, що залежить від кута нахилу тріщини α та $\varepsilon = \frac{d}{R} = 1$, $\lambda = \frac{l}{R} == 0.8$. Графік 1 зображено при $\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty} = 1$, графік 2 при – $\rho = 2$, графік 3 при – $\rho == 3$.



а) б)

Як бачимо з рисунків, при збільшенні кута нахилу тріщини α, кожен з коефіцієнтів інтенсивності поводиться по різному, а саме: КІМ K_2 та КІЗ k_2 поступово прямують до нуля при різних ρ, перед тим то зростають, то спадають, а КІМ K_1 при $\rho = 1$ і $\alpha < 75°$, при $\rho = 2$ і $\alpha < 88°$ та при $\rho = 3$ і $\alpha < 89°$ зростає, при $\rho = 1$ і $\alpha > 75°$, при $\rho = 2$ і $\alpha > 88°$ та при $\rho = 3$ і $\alpha > 89°$ спадає.



в)

Рис. 2.15. Залежність КІЗ та КІМ від кута нахилу тріщини α при різних значеннях $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty$

ВИСНОВКИ

Дослідження, що спрямоване на визначення критичного навантаження за згину з розтягом пластини з шайбою та тріщиною за смугового контакту її берегів, є важливим аспектом у різних галузях промисловості. Отримані результати мають велике значення для різних інженерних індустрій.

У даній роботі подано основні співвідношення, які в подальшому використовуються для розв’язування задачі. Сформульовано та розв’язано задачу згину з розтягом безмежної пластини, яка має циліндричну шайбу та радіальну тріщину за смугового контакту її берегів. Задачу розв’язано за допомогою мови програмування Python, використовуючи метод механічних квадратур та метод Гаусса (код програми подано у додатку А).

Отримані результати розв'язку задачі проаналізовано, проведено числовий аналіз, який подано у вигляді графічних залежностей. Також досліджено як КІМ, КІЗ і критичний момент задачі змінюються за смугового контакту берегів тріщини. Виявлено, що за умови контаку берегів тріщини КІМ зменшуються, виникають КІЗ k_1 та k_2, а також збільшується критичне навантаження $\widetilde{M}$ тріщини. Числовий аналіз показав, що наявність у пластині циліндричної жорсткої шайби безпосередньо впливає на КІМ та КІЗ.

Висновок дослідження підтверджує, що наявність у пластині тріщини та шайби має суттєвий вплив на її міцність та навантаження, яке вона може витримувати.

Отже, результати роботи показують необхідність ретельного аналізу та врахування тріщин у пластинах з шайбами для ефективності різних інженерних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрейків О. Є. Просторові задачі теорії тріщин / О. Є. Андрейків. – Київ: Наукова думка, 1982. – 348 с.

2. Бережницький Л. Т. Вигин тонких пластин с дефектами типу тріщин / Л. Т. Бережницький. – К.: Наук. думка. – 1979. – 400 С.

3. Опанасович В. К. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують / В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Вісник Львівського державного аграрного університету. – 2007. – № 8. – с. 75-87.

4. Опанасович В. К. Двовісний згин ізотропної пластини з прямокутною жорсткою шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. К. Опанасович, М. С. Слободян, В. Я. Бедрій// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математична. № 3. – 2015. – С. 21-24.

5. Опанасович В. К. Двовісний згин кусково-однорідної пластини з пружною круговою шайбою та радіальною тріщиною у шайбі з урахуванням контакту її берегів / В. К. Опанасович, І. С. Звізло, М. С. Слободян // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2012. – Вип. 76. – С. 164-174.

6. Опанасович В. К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують/ В. К. Опанасович, М. С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.

7. Опанасович В. К. Згин ізотропної пластини з квадратною жорсткою шайбою і прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / В. К. Опанасович, М. С. Слободян, В. Я. Бедрій // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – № 2 (78). – С. 81-93.

8. Опанасович В. К. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною всередині шайби з урахуванням контакту її берегів / В. К. Опанасович, М. С. Слободян, І .С. Звізло // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип. 19. – С. 240-246.

9. Саврук М. П., Зеленяк В. М. Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами / М. П. Саврук, В. М. Зеленяк. – Львів: РАСТР, 2009. – 212 с.

10. Селіванов М. Ф. Вплив неврахування умови плавності змикання берегів тріщини при визначенні критичного навантаження / М. Ф. Селіванов, В. В. Процан // Доповідь Національної академії наук України. – 2020. – № 3. – С. 28-34.

11. Слободян М. С. Визначення критичного навантаження за згину пластини з круговим отвором та тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів / М .С. Слободян, В. Коломієць // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2015». – 2015.

12. Слободян М. С. Двовісний розтяг пластини з абсолютно жорсткою круговою шайбою та радіальною тріщиною з урахуванням пластичних зон поблизу її вершин / М. С. Слободян, М. І. Матулка, О. В. Білаш // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. – 2017. – № 2. – С. 260-266.

13. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. 2007. – 716 с.

14. Шайнога М. І. Визначення критичного навантаження за згину з розтягом пластичних елементів конструкцій з отвором та тріщинами, береги яких контактують / М. І. Шайнога // VII Всеукраїнська конференція курсантів та студентів. – 2020. – С. 7-9.

15. Шацький І. П. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький, В. В. Перепічка // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1992. – Т. 28. – № 2. – С. 54-58.

16. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.

17. Шацький І. П. Циклічно-симетрична задача згину пластини з системою тріщин, береги яких контактують / І. П. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2003. – № 3 (69). – С. 7-12.

18. Ярема Є. Б. Двовісний розтяг пластини з жорсткою криволінійною шайбою та прямолінійною наскрізною тріщиною / Є. Б. Ярема, В. К. Опанасович, М. С. Слободян, В. В. Рощот // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математична. – Вип. 3 – 2017. – С. 257-261.

19. Alwar R. S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – a 3-D finite element analysis/ R .S.Alwar, Ramachandran Nambissan. // Eng. Fract. Mech. – 1983. – 17, No. 4. – P. 323–333.

20. Jones D. P. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate/ D. P. Jones, J. L. Swedlow // Int. J. Fract. – 1975. – No. 11. – P. 897–914.

21. Kwon Y. W. Finite analysis of crack closure in plate bending. Computers and Structures / Y. W. Kwon // –Vol. 32, No. 6, 1989. – pp. 1439-1445.

22. Young M. J., C. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates– A classical plate solution. International journal of fracture. / M. J. Young, C. T. Sun. // – Vol. 55, 1992. – pp. 81-93.

Додаток А. Код програми на мові програмування Python

```
import cmath

import numpy as np
epsilon = 1
z01 = complex(1, epsilon)
#вхідні дані:
n = 99
ny = 0.3
K = (3 - ny)/(1 + ny)
K_hv = (3 + ny)/(1 - ny)
i = 1
alfa = 0 #cmath.pi/6
lamb = 0.8
q = (-3*(1+ny))/2
ro = 0.5
Z01 = z01
A = -0.375*(1+ro)*(1-ny)
B = 0.75*(1-ro)*(1-ny)
def ksi_func(k):
    ksi = np.cos((2*k-1)/(2*n)*cmath.pi)   # k = 1;n
    return ksi
def eta_func(m):
    eta = np.cos((cmath.pi*m)/n) # m = 1;n-1
    return eta
def X1(k):
    x1 = Z01 + lamb*ksi_func(k)*cmath.exp(i*alfa)
    return x1
def F1(k):
    f1 = X1(k) - Z01 - cmath.exp(2*i*alfa)/X1(k) + Z01.conjugate()*cmath.exp(2*i*alfa)
    return f1
def T1(m):
    t1 = Z01 + lamb*eta_func(m)*cmath.exp(i*alfa)
    return t1
def P1_hv(k):
    p1_hv = -K_hv*A-(K_hv*B)/(X1(k)**2)+A+B/(X1(k).conjugate()**2)-cmath.exp(-2*i*alfa)*(-B/(X1(k)**4)-
A/(X1(k)**2)+2*B*(X1(k)*X1(k).conjugate()-1)/(X1(k).conjugate()**4)-B-A/(X1(k)**2))
    return p1_hv
def K11(k,m):
    k11 = -K_hv*lamb*cmath.exp(i*alfa)/(2*cmath.pi*i*X1(k)*(T1(m).conjugate()*X1(k) - 1)) #OK
    return k11
def L11(k,m):
```

```
    l11 = (-1/(2*cmath.pi*i))*((lamb*cmath.exp(-i*alfa))/T1(m).conjugate() + (lamb*cmath.exp(-
i*alfa)*F1(k))/((T1(m).conjugate()*X1(k)-1)**2) - ((lamb*cmath.exp(-
i*alfa))/X1(k))*(X1(k)**2+cmath.exp(2*i*alfa))/(T1(m).conjugate()*X1(k)-1))

    return l11

def L12(k,m):

    l12 = (K_hv/(2*cmath.pi*i*X1(k).conjugate()))*((lamb*cmath.exp(-i*alfa))/(T1(m)*X1(k).conjugate()-1))

    return l12

def K12(k,m):

    k12 = (1/(2*cmath.pi*i))*((lamb*cmath.exp(i*alfa))/T1(m) +
(lamb*cmath.exp(i*alfa)*F1(k).conjugate())/((T1(m)*X1(k).conjugate()-1)**2) -
(lamb*cmath.exp(i*alfa))/(X1(k).conjugate())*((X1(k).conjugate()**2)+cmath.exp(2*i*alfa))/(T1(m)*X1(k).conjugate()-
1)) #OK

    return k12

def K13(k,m):

    k13 = (1/(i*cmath.pi))*(lamb/(T1(m)*X1(k).conjugate()-1)**2)*((cmath.exp(i*alfa)+cmath.exp(-
i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2)+((T1(m)*X1(k).conjugate() - 1)*cmath.exp(-i*alfa))/(X1(k).conjugate()**2))-
(cmath.exp(i*alfa)*F1(k).conjugate())/X1(k).conjugate()-
(cmath.exp(i*alfa)/X1(k).conjugate())*(F1(k).conjugate()/(T1(m)*X1(k).conjugate() - 1)))

    return k13

def L13(k,m):

    l13 = (-K_hv/(cmath.pi*i*X1(k).conjugate()**2))*((lamb*cmath.exp(-i*alfa))/(T1(m)*X1(k).conjugate()-
1)*(1+1/(2*(T1(m)*X1(k).conjugate()-1))))

    return l13

def K14(k,m):

    k14 = (lamb*X1(k).conjugate()*cmath.exp(i*alfa))/(2*cmath.pi*i*(T1(m)*X1(k).conjugate()-1))

    return k14

def L14(k,m):

    l14 = (-lamb*cmath.exp(-i*alfa))/(2*cmath.pi*i*T1(m).conjugate())

    return l14

def K1_hv(k,m):

    k1_hv = K_hv*K11(k, m) - (1 + cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2))*K12(k, m) - cmath.exp(-
2*i*alfa)*(X1(k) - 1/X1(k).conjugate())*K13(k, m) - (cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2))*K14(k,m)

    return k1_hv

def L1_hv(k,m):

    l1_hv = K_hv*L11(k,m)-(1 + (cmath.exp(-2*i*alfa))/(X1(k).conjugate()**2))*L12(k,m)-cmath.exp(-2*i*alfa)*(X1(k)-
1/X1(k).conjugate())*L13(k,m)-(cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2))*L14(k,m)

    return l1_hv

def K1(k,m):

    k1 = K_hv/(cmath.pi*i*(eta_func(m)-ksi_func(k))) + K1_hv(k,m)

    return k1

def L1(k,m):

    l1 = L1_hv(k,m)

    return l1

def R11(k,m):

    r11 = -1*(lamb*cmath.exp(i*alfa))/((2*cmath.pi*K*X1(k))*(T1(m).conjugate()*X1(k) - 1))
```

```
    return r11
def S11(k,m):
    s11 = (-1/(2*cmath.pi*K))*((lamb*cmath.exp(-i*alfa))/T1(m).conjugate() + (lamb*cmath.exp(-
i*alfa)*F1(k))/((T1(m).conjugate()*X1(m)-1)**2) - (lamb*cmath.exp(-
i*alfa)/X1(k)*(X1(k)**2+cmath.exp(2*i*alfa))/(T1(m).conjugate()*X1(k)-1)))
    return s11
def R12(k,m):
    r12 = (-1/(2*cmath.pi*K))*((lamb*cmath.exp(i*alfa))/T1(m) +
(lamb*cmath.exp(i*alfa)*F1(k).conjugate())/((T1(m)*X1(k).conjugate()-1)**2) -
(lamb*cmath.exp(i*alfa)/X1(k).conjugate()*(X1(k).conjugate()**2+cmath.exp(2*i*alfa))/(T1(m)*X1(k).conjugate()-1)))
    return r12
def S12(k,m):
    s12 = (-1*(lamb*cmath.exp(-i*alfa))/((2*cmath.pi*K*X1(k).conjugate())*(T1(m)*X1(k).conjugate()-1)))
    return s12
def R13(k,m):
    r13 = (-1/(cmath.pi*K)*(lamb/(T1(m)*X1(k).conjugate()-1)**2))*(cmath.exp(i*alfa)+cmath.exp(-
i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2)+(T1(m)*X1(k).conjugate()-1)*cmath.exp(-i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2)-
(cmath.exp(i*alfa)*F1(k).conjugate())/X1(k).conjugate()-
(cmath.exp(i*alfa)/X1(k).conjugate())*(F1(k).conjugate()/(T1(m)*X1(k).conjugate()-1)))
    return r13
def S13(k,m):
    s13 = (1/(cmath.pi*K*(X1(k).conjugate())**2))*((lamb*cmath.exp(-i*alfa))/(T1(m)*X1(k).conjugate()-
1)*(1+1/(2*(T1(m)*X1(k).conjugate()-1))))
    return s13
def R14(k,m):
    r14 = -(K*lamb*X1(k).conjugate()*cmath.exp(i*alfa))/(2*cmath.pi*(T1(m)*X1(k).conjugate()-1))
    return r14
def S14(k,m):
    s14 = (lamb*cmath.exp(-i*alfa))/(2*cmath.pi*T1(m).conjugate())
    return s14
def R1_hv(k,m):
    r1_hv = R11(k,m)+(1+cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2))*R12(k,m)+cmath.exp(-2*i*alfa)*(X1(k)-
1/X1(k).conjugate())*R13(k,m)+cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2)*R14(k,m)
    return r1_hv
def S1_hv(k,m):
    s1_hv = S11(k,m)+(1+cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2))*S12(k,m)+cmath.exp(-2*i*alfa)*(X1(k)-
1/X1(k).conjugate())*S13(k,m)+cmath.exp(-2*i*alfa)/(X1(k).conjugate()**2)*S14(k,m)
    return s1_hv
def R1(k,m):
    r1 = 1/(cmath.pi*(eta_func(m)-ksi_func(k)))+R1_hv(k,m)
    return r1
def S1(k,m):
    s1 = S1_hv(k,m)
    return s1
matrix = np.zeros((4*n+1, 4*n+1)) # ініціалізація матриці
```

```
#заповнення матриці
for i1 in range (1, n):
    for j in range (1, n+1):
        # третє рівняння
        matrix[i1-1][j-1] = (cmath.pi/n)*(K1(j,i1).real+L1(j,i1).real)
        matrix[i1-1][j+n-1] = (cmath.pi/n)*(L1(j,i1).imag-K1(j,i1).imag)
        matrix[i1-1][j+2*n-1] = (cmath.pi/n)*((q/2)*(R1(j,i1).real+S1(j,i1).real))
        matrix[i1-1][j+3*n-1] = (cmath.pi/n)*((q/2)*(S1(j,i1).imag-R1(j,i1).imag))
        # перше рівняння
        matrix[i1+n-2][j-1] = (cmath.pi/n)*(K1(j,i1).imag+L1(j,i1).imag)
        matrix[i1+n-2][j+n-1] = (cmath.pi/n)*(K1(j,i1).real-L1(j,i1).real)
        # друге рівняння
        matrix[i1+2*n-3][j+2*n-1] = (cmath.pi/n)*(R1(j,i1).imag+S1(j,i1).imag)
        matrix[i1+2*n-3][j+3*n-1] = (cmath.pi/n)*(R1(j,i1).real-S1(j,i1).real)
for i1 in range (1, n):
    matrix[i1+n-2][4*n] = -1
for i1 in range(1,n):
    # четверте рівняння
    matrix[i1+3*n-4][i1+n-2] = (1+K_hv)/((1+K)*(1+ny))
    matrix[i1+3*n-4][i1+2*n-2] = 1
for i1 in range(1,2):
    for j in range(1,n+1):
        # маленькі, по одне рівняння (5шт.)
        # сьоме рівняння
        matrix[i1+4*n-5][j-1] = ksi_func(j)
        matrix[i1+4*n-5][j+n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-5][j+2*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-5][j+3*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-5][j+4*n-n] = 0
        # п'яте рівняння
        matrix[i1+4*n-4][j-1] = 1
        matrix[i1+4*n-4][j+n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-4][j+2*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-4][j+3*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-4][j+4*n-n] = 0
        # шосте рівняння
        matrix[i1+4*n-3][j-1] = 0
        matrix[i1+4*n-3][j+n-1] = 1
        matrix[i1+4*n-3][j+2*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-3][j+3*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-3][j+4*n-n] = 0
```

```
        # восьме рівняння
        matrix[i1+4*n-2][j-1] = 0
        matrix[i1+4*n-2][j+n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-2][j+2*n-1] = 1
        matrix[i1+4*n-2][j+3*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-2][j+4*n-n] = 0
        # дев'яте рівняння
        matrix[i1+4*n-1][j-1] = 0
        matrix[i1+4*n-1][j+n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-1][j+2*n-1] = 0
        matrix[i1+4*n-1][j+3*n-1] = 1
        matrix[i1+4*n-1][j+4*n-n] = 0
b = np.zeros(4*n+1) # ініціалізація вектора вільних членів
for i1 in range (1, n):
    b[i1-1] = P1_hv(i1).real
    b[i1+n-2] = P1_hv(i1).imag
#запис матриці у файл
np.savetxt('matrix.txt', matrix, delimiter=' ')
def gaussian_elimination(matrix, b):
    n1 = len(b)
    # Gaussian elimination
    for i in range(n1):
        if matrix[i][i] == 0:
            # Search for a non-zero row for swapping
            for j in range(i + 1, n1):
                if matrix[j][i] != 0:
                    matrix[[i, j]] = matrix[[j, i]]
                    b[i], b[j] = b[j], b[i]
                    break
            else:
                raise ValueError("The system of equations has either infinitely many solutions or no solution.")
        pivot = matrix[i][i]
        for j in range(i + 1, n1):
            factor = matrix[j][i] / pivot
            matrix[j] -= factor * matrix[i]
            b[j] -= factor * b[i]
    # Back substitution
    x = np.zeros(n1)
    for i in range(n1 - 1, -1, -1):
        x[i] = b[i]
        for j in range(i + 1, n1):
```

```
            x[i] -= matrix[i][j] * x[j]
        x[i] /= matrix[i][i]
    return x
#Виклик методу Гауса
x = gaussian_elimination(matrix, b)
#ініціалізація векторів розв'язків
Y11 = np.zeros(n)
Y12 = np.zeros(n)
G11 = np.zeros(n)
G12 = np.zeros(n)
for i1 in range(n):
    Y11[i1] = x[i1]
for i1 in range(n, 2*n):
    Y12[i1-n] = x[i1]
for i1 in range(2*n, 3*n):
    G11[i1-2*n] = x[i1]
for i1 in range(3*n, 4*n):
    G12[i1-3*n] = x[i1]
for i1 in range(4*n, 4*n+1):
    c1_hv = x[i1]
N_star = np.zeros(n) #зведене контактне зусилля
ksi = np.zeros(n)
for i1 in range (1, n+1):
    ksi[i1-1] = ksi_func(i1)
    print("ksi(",i1,") =", ksi[i1-1])
for i1 in range (1, n+1):
    N_star[i1-1] = -2*(G11[i1-1]*(R1(i1, i1).real+S1(i1, i1).real)+G12[i1-1]*(S1(i1, i1).imag-R1(i1, i1).imag))
    print("N_star(",i1,") =", N_star[i1-1])
np.savetxt('N(ksi).txt', np.column_stack((ksi, N_star)), delimiter=', ')
# визначення КІН
for i1 in range(1, n+1):
    max = -1
    if ((i1+1) % 2) == 0:
        max = 1
    U11 = (max/n)*(-1)**i1*Y11[i1-1]*(1/(np.tan(((2*i1-1)/(4*n))*cmath.pi)))
    U12 = (max/n)*(-1)**i1*Y12[i1-1]*(1/(np.tan(((2*i1-1)/(4*n))*cmath.pi)))
    KI = U11/(z01.real)
    KII = U12/(z01.real)
    KIH = complex(KI, KII)
    print("KIH(",i1,") =",KIH)
```