

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра механіки**

**Затверджено**

На засіданні кафедри механіки  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 31.08.2023 р.)



Завідувач кафедри:

*Александр Андрейків*  
Олександр АНДРЕЙКІВ

**Силабус з навчальної дисципліни**

**“Тензорний аналіз”,**

**що викладається в межах ОПП “Математичне моделювання та  
комп'ютерна механіка”**

**першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з  
спеціальності 113 Прикладна математика**

Львів 2023 р.

<b>Назва дисципліни</b>	Тензорний аналіз
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Головний корпус Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська 1, 79000
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра механіки
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	11 – Математика та статистика 113 – Прикладна математика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Кузь Ігор Степанович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри механіки Василишин Андрій Володимирович, доктор філософії, асистент кафедри механіки
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:ihor.kuz@lnu.edu.ua">ihor.kuz@lnu.edu.ua</a> ; <a href="http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kuz-i-s">http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kuz-i-s</a> ; <a href="mailto:andrii.vasylyshyn@lnu.edu.ua">andrii.vasylyshyn@lnu.edu.ua</a> ; <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/vasylyshyn-a-v">https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/vasylyshyn-a-v</a> ; Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 148. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю). Головний корпус Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська, 1. Кафедра механіки, каб. 148.
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/tenzorny-analiz-osvitnia-prohrama-matematychno-modeliuvannia-ta-komp-iuterna-mekhanika">https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/tenzorny-analiz-osvitnia-prohrama-matematychno-modeliuvannia-ta-komp-iuterna-mekhanika</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Навчальна дисципліна “Тензорний аналіз” є нормативною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки зі спеціальності 113 – Прикладна математика для освітньої програми “Математичне моделювання та комп'ютерна механіка”, яка викладається в 4-му семестрі обсягом 5-ть кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Курс розроблено таким чином, щоб подати студентам основні поняття і висвітлити сучасний стан досліджень з тензорних алгебри та аналізу, а також показати можливості використання цього апарату у подальших механічних курсах, а саме у механіці суцільного середовища, теорії пружності та пластичності, біомеханіці та ін. При викладанні цього курсу використовується курси математичного аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	<i>Мета:</i> засвоєння студентами апарату тензорного аналізу для ефективного використання у наступних механічних курсах <i>Цілі:</i> викласти основні поняття тензорного аналізу та тензорної алгебри, сформулювати вміння проводити операції з тензорами довільного рангу в індексній та безіндексній формах
<b>Література для вивчення</b>	1. Кузь І.С. Методичні вказівки до вивчення основних понять тензорного

<p><b>дисципліни</b></p>	<p>аналізу / Кузь І.С., Юрчишин А.С. // – Львів : Вид. центр ЛДУ, 1999.- 48 с.  2. Божидарник В.В. Елементи теорії пружності. / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. // Львів: Світ, 1994. - 560 с.  3. Разумова М. А. Основи векторного і тензорного аналіз /Разумова М. А., Хотяїнцев В. М. // — К. : ВПЦ «Київський університет», 2011.  4. Наказной П.О. Тензорний аналіз. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / П. О. Наказной; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 225 кБ). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 35 с.  5. Irgens F. Tensor Analysis. — Springer, 2019.</p>
<p><b>Обсяг курсу</b></p>	<p>Загальний обсяг: 150 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 год. лабораторних занять. Самостійної роботи: 86 год.</p>
<p><b>Очікувані результати навчання</b></p>	<p>Після завершення цього курсу студент буде:</p> <p><b>знати:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- коваріантні та контраваріантні координати вектора;</li> <li>- перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат;</li> <li>- коваріантну похідну вектора, символи Крістоффеля I-го і II-го роду;</li> <li>- поняття діади, тензорного добутку та тензора;</li> <li>- алгебраїчні операції над тензорами;</li> <li>- обернену тензорну ознаку та абсолютний диференціал і коваріантну похідну тензора;</li> <li>- фізичні компоненти тензорів;</li> <li>- форми запису тензорів;</li> <li>- формулу Гамільтона-Келі, інваріанти тензора II-го рангу,</li> <li>- власні вектори та власні значення тензора II-го рангу, поверхню Коші, кульовий тензор та девіатор;</li> <li>- формули для обчислення площ та об'ємів, диференціальні оператори та інтегральні теореми;</li> </ul> <p><b>вміти:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- знаходити коваріантну похідну тензора довільного рангу;</li> <li>- визначати тензоріальність будь-якого об'єкту;</li> <li>- знаходити інваріанти тензора II-го рангу;</li> <li>- застосовувати диференціальні оператори <i>div</i>, <i>rot</i>, <i>grad</i>, <math>\Delta</math> над тензорами.</li> </ul> <p><b>У результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і фахових (ФК) компетентностей:</b>  ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.  ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.  ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.  ФК17. Здатність формулювати та розв'язувати задачі механіки.</p> <p><b>і здобуде такі результати навчання (РН):</b>  РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема</p>

	<p>рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.</p> <p>PH03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.</p> <p>PH21. Знати основні поняття механіки та володіти методами розв'язування задач механіки.</p>
<b>Ключові слова</b>	Коваріантні та контраваріантні координати, криволінійні координати, тензор, діада, тензорний добуток, згортка тензора, коваріантна похідна, інваріанти тензора, девіатор
<b>Формат курсу</b>	Очний.
<b>Теми</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Коваріантні та контраваріантні координати вектора.</li> <li>2. Перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат.</li> <li>3. Коваріантна похідна вектора. Символи Крістоффеля I-го і II-го роду.</li> <li>4. Поняття діади та тензорного добутку. Означення тензора.</li> <li>5. Алгебраїчні операції над тензорами.</li> <li>6. Обернена тензорна ознака.</li> <li>7. Абсолютний диференціал та коваріантна похідна тензора.</li> <li>8. Фізичні компоненти тензорів.</li> <li>9. Форми запису тензорів.</li> <li>10. Формула Гамільтона-Келі,</li> <li>11. Інваріанти тензора II-го рангу</li> <li>12. Власні вектори та власні значення тензора II-го рангу.</li> <li>13. Поверхня Коші, кульовий тензор та девіатор.</li> <li>14. Обчислення площ та об'ємів.</li> <li>15. Диференціальні оператори та інтегральні теореми .</li> </ol>
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Іспит у кінці семестру.
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення даного курсу студенти потрібні базові знання з: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Математичного аналізу;</li> <li>- Алгебри і геометрії.</li> </ul>
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Інформаційні методи (лекція, бесіда, ілюстрація, демонстрація); дедуктивні методи на основі узагальнень; евристичні методи (проблемна лекція); інтерактивні методи (дискусія).
<b>Необхідне обладнання</b>	Для проведення лекційних занять: комп'ютер (мінімальні характеристики: процесор Intel Core i3, 4ГБ оперативної пам'яті), доступ до мережі Internet, засоби мультимедіа (в т.ч. проектор). Для проведення практичних/лабораторних занять: комп'ютер (мінімальні характеристики: процесор Intel Core i3, 4ГБ оперативної пам'яті), доступ до мережі Internet. Необхідне програмне забезпечення включає в себе ОС Windows 10,

<p><b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b></p>	<p>програми додатки (MS Teams, Zoom)</p> <p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• написання двох контрольних робіт: по 15 балів (три завдання по 5 балів) кожна; максимальна кількість балів 30.</li> <li>• виконання 10 домашніх завдань: по 2 бали кожне, максимальна кількість балів 20.</li> <li>• іспит: два завдання по 25 балів, максимальна кількість балів 50.</li> </ul> <p>Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p><b>Оцінювання завдань на іспиті та на контрольних роботах</b> відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені завдання. Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне завдання нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <p>80-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обгрунтовано, логічно;</p> <p>60-80% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні деякі неточності та/або невідповідності;</p> <p>40-60% – виявлено неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові;</p> <p>20-40% – виявлено значні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи помилкові;</p> <p>0-20% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи.</p> <p><b>Оцінювання домашньої роботи</b> відбувається шляхом захисту написаної студентом вдома практичної роботи (0-2 балів за одну роботу).</p> <p><b>Бали оцінювання написаної студентом вдома практичної роботи та наданого звіту нараховуються за наступним співвідношенням:</b></p> <p>2 – звіт цілком і повністю відображає завдання студента, містить правильні висновки, студент має повне розуміння розглянутої теми, надає правильні відповіді на запитання по темі;</p> <p>1 – звіт містить загальні формулювання завдання, висновки нечіткі, студент не досить добре розуміє розглянутий матеріал, надає неточні/не конкретні відповіді на запитання по темі;</p> <p>0 – звіт відсутній/не відповідає темі, студент зовсім не засвоїв розглянутий матеріал.</p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні/лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно,</p>
---	--

	<p>буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p>
<b>Питання до екзамену</b>	<p>Коваріантні та контраваріантні координати вектора.  Перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат.  Коваріантна похідна вектора.  Символи Крістоффеля I-го і II-го роду.  Поняття діади та тензорного добутку. Означення тензора.  Алгебраїчні операції над тензорами.  Обернена тензорна ознака.  Коваріантна похідна та абсолютний диференціал тензора.  Форми запису тензорів.  Фізичні компоненти тензорів.  Форми запису тензорів.  Формула Гамільтона-Келі, інваріанти тензора II-го рангу.  Власні вектори та власні значення тензора II-го рангу.  Поверхня Коші, кульовий тензор та девіатор.  Обчислення площ та об'ємів.  Диференціальні оператори та інтегральні теореми</p>
<b>Опитування</b>	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

**Схема курсу “Тензорний аналіз”  
для студентів спеціальності 113 – Прикладна математика**

<b>Тиж.</b>	<b>Тема, план, короткі тези</b>	<b>Форма діяльності (заняття)</b>	<b>Література. Ресурси в інтернеті</b>	<b>Завдання, год.</b>	<b>Термін виконання</b>
1	<b>Тема 1.</b> Коваріантні та контраваріантні координати вектора.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
2	<b>Тема 2.</b> Перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
3	<b>Тема 3.</b> Коваріантна похідна вектора.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
4	<b>Тема 4.</b> Символи Крістоффеля I-го і II-го роду.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
5	<b>Тема 5.</b> Поняття діади та тензорного добутку. Означення тензора.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
6	<b>Тема 6.</b> Алгебраїчні операції над тензорами.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
7	<b>Тема 7.</b> Обернена тензорна ознака.	лек., лаб.	[1-4, 7] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
8	<b>Тема 8.</b> Коваріантна похідна та абсолютний диференціал тензора.	лек.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
9	Проведення контрольної роботи № 1	лаб.	–	–	–
10	<b>Тема 8.</b> Коваріантна похідна та абсолютний диференціал тензора.	лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
11	<b>Тема 9.</b> Форми запису тензорів.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	4 год.	1 тиждень
12	<b>Тема 10.</b> Фізичні компоненти тензорів.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	4 год.	1 тиждень
13	<b>Тема 11.</b> Формула Гамільтона-Келі, інваріанти тензора II-го рангу.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
14	<b>Тема 12.</b> Власні вектори та власні значення тензора II-го рангу.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
15	<b>Тема 13.</b> Поверхня Коші, кульовий тензор та девіатор. Обчислення площ та об'ємів.	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень

16	<b>Тема 14.</b> Диференціальні оператори та інтегральні теореми Проведення контрольної роботи № 2	лек., лаб.	[1-5] Сайт курсу	6 год.	1 тиждень
Разом:				86	–