

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра механіки**

**Затверджено**

На засіданні кафедри механіки  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 31.08.2023 р.)



Завідувач кафедри:

*Александр Андрейків*  
Олександр АНДРЕЙКІВ

**Силабус з навчальної дисципліни**

**“Тензорний аналіз”,**

**що викладається в межах ОПП “Математичне моделювання та  
комп'ютерна механіка”**

**першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів з  
спеціальності 113 Прикладна математика**

Львів 2023 р.

|  |   |
|--|---|
| <b>Назва дисципліни</b>  | Тензорний аналіз  |
| <b>Адреса викладання дисципліни</b>                              | Головний корпус Львівського національного університету імені Івана Франка,<br>м. Львів, вул. Університетська 1, 79000   |
| <b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>       | Механіко-математичний факультет<br>Кафедра механіки   |
| <b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>                 | 11 – Математика та статистика<br>113 – Прикладна математика   |
| <b>Викладачі дисципліни</b>                                      | Кузь Ігор Степанович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри механіки<br>Василишин Андрій Володимирович, доктор філософії, асистент кафедри механіки   |
| <b>Контактна інформація викладачів</b>                           | <a href="mailto:ihor.kuz@lnu.edu.ua">ihor.kuz@lnu.edu.ua</a> ;<br><a href="http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kuz-i-s">http://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kuz-i-s</a> ;<br><a href="mailto:andrii.vasylyshyn@lnu.edu.ua">andrii.vasylyshyn@lnu.edu.ua</a> ;<br><a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/vasylyshyn-a-v">https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/vasylyshyn-a-v</a> ;<br>Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 148.<br>м. Львів, вул. Університетська, 1 |
| <b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b> | Консультації в день проведення лекцій/лабораторних занять (за попередньою домовленістю).<br>Головний корпус Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська, 1.<br>Кафедра механіки, каб. 148.  |
| <b>Сторінка курсу</b>  | <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/tenzornyy-analiz-osvitnia-prohrama-matematychno-modeliuvannia-ta-komp-iuterna-mekhanika">https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/tenzornyy-analiz-osvitnia-prohrama-matematychno-modeliuvannia-ta-komp-iuterna-mekhanika</a>   |
| <b>Інформація про дисципліну</b>                                 | Навчальна дисципліна “Тензорний аналіз” є нормативною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки зі спеціальності 113 – Прикладна математика для освітньої програми “Математичне моделювання та комп'ютерна механіка”, яка викладається в 4-му семестрі обсягом 5-ть кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).   |
| <b>Коротка анотація дисципліни</b>                               | Курс розроблено таким чином, щоб подати студентам основні поняття і висвітлити сучасний стан досліджень з тензорних алгебри та аналізу, а також показати можливості використання цього апарату у подальших механічних курсах, а саме у механіці суцільного середовища, теорії пружності та пластичності, біомеханіці та ін. При викладанні цього курсу використовується курси математичного аналізу, лінійної алгебри та аналітичної геометрії.                           |
| <b>Мета та цілі дисципліни</b>                                   | <i>Мета:</i> засвоєння студентами апарату тензорного аналізу для ефективного використання у наступних механічних курсах<br><i>Цілі:</i> викласти основні поняття тензорного аналізу та тензорної алгебри, сформулювати вміння проводити операції з тензорами довільного рангу в індексній та безіндексній формах  |
| <b>Література для вивчення</b>                                   | 1. Кузь І.С. Методичні вказівки до вивчення основних понять тензорного  |

|   |   |
|---|---|
| <p><b>дисципліни</b></p>                    | <p>аналізу / Кузь І.С., Юрчишин А.С. // – Львів : Вид. центр ЛДУ, 1999.- 48 с.<br/> 2. Божидарник В.В. Елементи теорії пружності. / Божидарник В.В., Сулим Г.Т. // Львів: Світ, 1994. - 560 с.<br/> 3. Разумова М. А. Основи векторного і тензорного аналіз /Разумова М. А., Хотяїнцев В. М. // — К. : ВПЦ «Київський університет», 2011.<br/> 4. Наказной П.О. Тензорний аналіз. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / П. О. Наказной; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 225 кБ). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 35 с.<br/> 5. Irgens F. Tensor Analysis. — Springer, 2019.</p>  |
| <p><b>Обсяг курсу</b></p>                   | <p>Загальний обсяг: 150 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 год. лабораторних занять. Самостійної роботи: 86 год.</p>  |
| <p><b>Очікувані результати навчання</b></p> | <p>Після завершення цього курсу студент буде:</p> <p><b>знати:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- коваріантні та контраваріантні координати вектора;</li> <li>- перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат;</li> <li>- коваріантну похідну вектора, символи Крістоффеля I-го і II-го роду;</li> <li>- поняття діади, тензорного добутку та тензора;</li> <li>- алгебраїчні операції над тензорами;</li> <li>- обернену тензорну ознаку та абсолютний диференціал і коваріантну похідну тензора;</li> <li>- фізичні компоненти тензорів;</li> <li>- форми запису тензорів;</li> <li>- формулу Гамільтона-Келі, інваріанти тензора II-го рангу,</li> <li>- власні вектори та власні значення тензора II-го рангу, поверхню Коші, кульовий тензор та девіатор;</li> <li>- формули для обчислення площ та об'ємів, диференціальні оператори та інтегральні теореми;</li> </ul> <p><b>вміти:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- знаходити коваріантну похідну тензора довільного рангу;</li> <li>- визначати тензоріальність будь-якого об'єкту;</li> <li>- знаходити інваріанти тензора II-го рангу;</li> <li>- застосовувати диференціальні оператори <i>div</i>, <i>rot</i>, <i>grad</i>, <math>\Delta</math> над тензорами.</li> </ul> <p><b>У результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і фахових (ФК) компетентностей:</b><br/> ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.<br/> ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.<br/> ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.<br/> ФК17. Здатність формулювати та розв'язувати задачі механіки.</p> <p><b>і здобуде такі результати навчання (РН):</b><br/> РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема</p> |

|   |   |
|---|---|
|   | <p>рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.</p> <p>PH03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.</p> <p>PH21. Знати основні поняття механіки та володіти методами розв'язування задач механіки.</p>  |
| <b>Ключові слова</b>  | Коваріантні та контраваріантні координати, криволінійні координати, тензор, діада, тензорний добуток, згортка тензора, коваріантна похідна, інваріанти тензора, девіатор  |
| <b>Формат курсу</b>   | Очний.  |
| <b>Теми</b>   | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Коваріантні та контраваріантні координати вектора.</li> <li>2. Перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат.</li> <li>3. Коваріантна похідна вектора. Символи Крістоффеля I-го і II-го роду.</li> <li>4. Поняття діади та тензорного добутку. Означення тензора.</li> <li>5. Алгебраїчні операції над тензорами.</li> <li>6. Обернена тензорна ознака.</li> <li>7. Абсолютний диференціал та коваріантна похідна тензора.</li> <li>8. Фізичні компоненти тензорів.</li> <li>9. Форми запису тензорів.</li> <li>10. Формула Гамільтона-Келі,</li> <li>11. Інваріанти тензора II-го рангу</li> <li>12. Власні вектори та власні значення тензора II-го рангу.</li> <li>13. Поверхня Коші, кульовий тензор та девіатор.</li> <li>14. Обчислення площ та об'ємів.</li> <li>15. Диференціальні оператори та інтегральні теореми .</li> </ol> |
| <b>Підсумковий контроль, форма</b>  | Іспит у кінці семестру.   |
| <b>Пререквізити</b>   | Для вивчення даного курсу студенти потрібні базові знання з: <ul style="list-style-type: none"> <li>- Математичного аналізу;</li> <li>- Алгебри і геометрії.</li> </ul>   |
| <b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b> | Інформаційні методи (лекція, бесіда, ілюстрація, демонстрація); дедуктивні методи на основі узагальнень; евристичні методи (проблемна лекція); інтерактивні методи (дискусія).  |
| <b>Необхідне обладнання</b>   | Для проведення лекційних занять: комп'ютер (мінімальні характеристики: процесор Intel Core i3, 4ГБ оперативної пам'яті), доступ до мережі Internet, засоби мультимедіа (в т.ч. проектор).<br>Для проведення практичних/лабораторних занять: комп'ютер (мінімальні характеристики: процесор Intel Core i3, 4ГБ оперативної пам'яті), доступ до мережі Internet.<br>Необхідне програмне забезпечення включає в себе ОС Windows 10,  |

|   |  |
|---|--|
| <p><b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b></p> | <p>програми додатки (MS Teams, Zoom)</p> <p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• написання двох контрольних робіт: по 15 балів (три завдання по 5 балів) кожна; максимальна кількість балів 30.</li> <li>• виконання 10 домашніх завдань: по 2 бали кожне, максимальна кількість балів 20.</li> <li>• іспит: два завдання по 25 балів, максимальна кількість балів 50.</li> </ul> <p>Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p><b>Оцінювання завдань на іспиті та на контрольних роботах</b> відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені завдання. Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне завдання нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <p>80-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обґрунтовано, логічно;</p> <p>60-80% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні деякі неточності та/або невідповідності;</p> <p>40-60% – виявлено неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові;</p> <p>20-40% – виявлено значні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи помилкові;</p> <p>0-20% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи.</p> <p><b>Оцінювання домашньої роботи</b> відбувається шляхом захисту написаної студентом вдома практичної роботи (0-2 балів за одну роботу).</p> <p><b>Бали оцінювання написаної студентом вдома практичної роботи та наданого звіту нараховуються за наступним співвідношенням:</b></p> <p>2 – звіт цілком і повністю відображає завдання студента, містить правильні висновки, студент має повне розуміння розглянутої теми, надає правильні відповіді на запитання по темі;</p> <p>1 – звіт містить загальні формулювання завдання, висновки нечіткі, студент не досить добре розуміє розглянутий матеріал, надає неточні/не конкретні відповіді на запитання по темі;</p> <p>0 – звіт відсутній/не відповідає темі, студент зовсім не засвоїв розглянутий матеріал.</p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні/лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно,</p> |
|---|--|

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <p>буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p>   |
| <b>Питання до екзамену</b> | <p>Коваріантні та контраваріантні координати вектора.<br/> Перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат.<br/> Коваріантна похідна вектора.<br/> Символи Крістоффеля I-го і II-го роду.<br/> Поняття діади та тензорного добутку. Означення тензора.<br/> Алгебраїчні операції над тензорами.<br/> Обернена тензорна ознака.<br/> Коваріантна похідна та абсолютний диференціал тензора.<br/> Форми запису тензорів.<br/> Фізичні компоненти тензорів.<br/> Форми запису тензорів.<br/> Формула Гамільтона-Келі, інваріанти тензора II-го рангу.<br/> Власні вектори та власні значення тензора II-го рангу.<br/> Поверхня Коші, кульовий тензор та девіатор.<br/> Обчислення площ та об'ємів.<br/> Диференціальні оператори та інтегральні теореми</p> |
| <b>Опитування</b>          | <p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>  |

**Схема курсу “Тензорний аналіз”  
для студентів спеціальності 113 – Прикладна математика**

| <b>Тиж.</b> | <b>Тема, план, короткі тези</b>  | <b>Форма діяльності (заняття)</b> | <b>Література. Ресурси в інтернеті</b> | <b>Завдання, год.</b> | <b>Термін виконання</b> |
|-------------|--|-----------------------------------|--|-----------------------|-------------------------|
| 1           | <b>Тема 1.</b> Коваріантні та контраваріантні координати вектора.                                      | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 2           | <b>Тема 2.</b> Перетворення компонент вектора і векторів бази при переході до іншої системи координат. | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 3           | <b>Тема 3.</b> Коваріантна похідна вектора.  | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 4           | <b>Тема 4.</b> Символи Крістоффеля I-го і II-го роду.  | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 5           | <b>Тема 5.</b> Поняття діади та тензорного добутку. Означення тензора.                                 | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 6           | <b>Тема 6.</b> Алгебраїчні операції над тензорами.   | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 7           | <b>Тема 7.</b> Обернена тензорна ознака.   | лек.,<br>лаб.                     | [1-4, 7]<br>Сайт курсу                 | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 8           | <b>Тема 8.</b> Коваріантна похідна та абсолютний диференціал тензора.                                  | лек.                              | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 9           | Проведення контрольної роботи № 1  | лаб.                              | –                                      | –                     | –                       |
| 10          | <b>Тема 8.</b> Коваріантна похідна та абсолютний диференціал тензора.                                  | лаб.                              | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 11          | <b>Тема 9.</b> Форми запису тензорів.  | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 4 год.                | 1 тиждень               |
| 12          | <b>Тема 10.</b> Фізичні компоненти тензорів.   | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 4 год.                | 1 тиждень               |
| 13          | <b>Тема 11.</b> Формула Гамільтона-Келі, інваріанти тензора II-го рангу.                               | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 14          | <b>Тема 12.</b> Власні вектори та власні значення тензора II-го рангу.                                 | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |
| 15          | <b>Тема 13.</b> Поверхня Коші, кульовий тензор та девіатор. Обчислення площ та об'ємів.                | лек.,<br>лаб.                     | [1-5]<br>Сайт курсу                    | 6 год.                | 1 тиждень               |

|        |  |               |                     |        |           |
|--------|--|---------------|---------------------|--------|-----------|
| 16     | <b>Тема 14.</b> Диференціальні оператори та інтегральні теореми<br>Проведення контрольної роботи № 2 | лек.,<br>лаб. | [1-5]<br>Сайт курсу | 6 год. | 1 тиждень |
| Разом: |  |               |                     | 86     | –         |