

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Затверджено

На засіданні кафедри теорії функцій і
функціонального аналізу
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 28 серпня 2023 р.)



Завідувач кафедри Скасків О.Б.

Силабус з навчальної дисципліни
“Функціональний аналіз”,
що викладається в межах ОПП “Математичне моделювання та
комп'ютерна механіка”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів зі
спеціальності 113 “Прикладна математика”

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Функціональний аналіз
Адреса викладання дисципліни	Головний корпус Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська 1, 79000
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – Математика та статистика 113 – Прикладна математика
Викладачі дисципліни	Скасків Олег Богданович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теорії функцій і функціонального аналізу Кудрик Тарас Степанович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Контактна інформація викладачів	oleh.skaskiv@lnu.edu.ua https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/skaskiv-o-b taras.kudryk@lnu.edu.ua https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kudryk-t-s
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю). Головний корпус Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська, 1. Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу, каб. 373.
Сторінка курсу	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/funktsionalnyy-analiz-osvitnia-prohrama-matematychne-modeliuvannia-ta-komp-iuterna-mekhanika
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Функціональний аналіз” є нормативною дисципліною з спеціальності 113 – Прикладна математика для освітньої програми “Математичне моделювання та комп'ютерна механіка”, яка викладається в 4-му семестрі в обсязі 4 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс розроблено таким чином, щоб надати студентам знання та практичні навички використання теоретичних знань функціонального аналізу та застосування до розв'язування інтегральних рівнянь.
Мета та цілі дисципліни	Мета: оволодіти класичними методами функціонального аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями функціонального аналізу в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної математики. Цілі: навчити студентів застосовувати знання основних методів лінійного функціонального аналізу до знаходження спектру операторів та розв'язування інтегральних рівнянь.
Література для вивчення дисципліни	1. <i>Сторож О. Г.</i> Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу. – Л.: Видавничий центр ЛНУ ім.І.Франка, 2008. 2. <i>Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Ф.</i> Функціональний аналіз. – Л.: Видавець І.Е.Чижиков, 2014. 3. <i>Кадець В.М.</i> Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Л.: Видавець І.Е.Чижиков, 2012. 4. <i>Колмогоров А.М., Фомін С.В.</i> Елементи теорії функцій та функціонального аналізу. – К.: Наука, 1972. 5. <i>Zeider E.</i> Applied Functional Analysis. Main principles and their applications. – Springer, 1995.

	<p>6. <i>Zeidler E.</i> Nonlinear Functional Analysis. – Springer, 1986.</p> <p>7. <i>Junge, M., Scheckter, T. T., & Sukochev, F.</i> A noncommutative generalisation of a problem of Steinhaus//Journal of Functional Analysis, 280 (2), 2021. – https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108782</p> <p>8. <i>Shuang Liu, Juan Lou.</i> Classifying the level set of principal eigenvalue for time-periodic parabolic operators and applications//Journal of Functional Analysis, 282 (4), 2022. – https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109338.</p>
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 годин практичних робіт. Самостійної роботи: 56 год.
Очікувані результати навчання	<p>У результаті вивчення даного курсу студент повинен</p> <p>знати: основні поняття і методи лінійного функціонального аналізу: метричні простори, нормовані простори, простори сумовних функцій, лінійні оператори і функціонали, теореми Банаха, спектр оператора, компактні оператори, теореми Фредгольма;</p> <p>вміти: знаходити резольвенту і спектр лінійних операторів, досліджувати оператори на компактність, застосовувати набуті знання для розв'язування основних типів інтегральних рівнянь.</p> <p>У результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і фахових (ФК) компетентностей:</p> <p>ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</p> <p>ЗК08. Знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності.</p> <p>ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем.</p> <p>ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі.</p> <p>ФК13. Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі, здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних.</p> <p>ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату.</p> <p>і здобуде такі результати навчання (РН):</p> <p>РН01. Демонструвати знання й розуміння основних концепцій, принципів, теорій прикладної математики і використовувати їх на практиці.</p> <p>РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами.</p> <p>РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.</p>
Ключові слова	Метричний простір, нормований простір, простір сумовних функцій, лінійний неперервний оператор, функціонал, теорема Ріса, теорема Гана-Банаха, теорема Банаха-Штейнгауза, спектр оператора, компактні оператори, теореми Фредгольма, теорема Гільберта-Шмідта.
Формат курсу	Очний.

Теми	<p>Тема 1. Задачі, що приводять до інтегральних рівнянь. Основні класи інтегральних рівнянь. Рівняння Фредгольма та Вольтера першого і другого роду.</p> <p>Тема 2. Нелінійні рівняння. Рівняння інтегральних перетворень та їх розв'язки.</p> <p>Тема 3. Метричні простори. Означення та приклади. Збіжність у метричних просторах. Відкриті й замкнені множини. Повнота метричного простору. Поповнення. Принцип вкладених куль.</p> <p>Тема 4. Теорема Бера про категорії. Принцип стискаючих відображень. Нормовані простори. Еквівалентні норми. Банахові простори.</p> <p>Тема 5. Простори зі скалярним добутком. Ортогональне проектування у гільбертовому просторі. Ортогоналізація системи функцій.</p> <p>Тема 6. Про теорію міри й інтеграла Лебега. Простори інтегровних функцій.</p> <p>Тема 7. Лінійні неперервні оператори та функціонали. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на гільбертовому просторі.</p> <p>Тема 8. Теорема С.Банаха. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного неперервного функціонала. Простір лінійних неперервних операторів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха про обернений оператор.</p> <p>Тема 9. Ряд Неймана оператора. Рівняння вигляду $u - \lambda Au = v$. Спряжені оператори.</p> <p>Тема 10. Резольвента і спектр оператора. Означення та основні властивості.</p> <p>Тема 11. Компактні множини і компактні оператори. Означення. Теорема Гаусдорфа.</p> <p>Тема 12. Теорема Фредгольма. Три теореми Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.</p> <p>Тема 13. Спектр компактного оператора. Теорема Гільберта-Шмідта для компактних самоспряжених операторів.</p> <p>Тема 14. Застосування до інтегральних рівнянь. Приклади розв'язування інтегральних рівнянь.</p> <p>Тема 15. Застосування інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа до розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь.</p> <p>Тема 16. Про інші застосування функціонального аналізу.</p>
Підсумковий контроль, форма	Іспит у кінці семестру.
Пререквізити	Для вивчення даного курсу студентам потрібні базові знання з: <ul style="list-style-type: none"> - Алгебри та геометрії; - Математичного аналізу; - Диференціальних рівнянь.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Інформаційні методи (лекція, бесіда, ілюстрація, демонстрація); дедуктивні методи на основі узагальнень; евристичні методи (проблемна лекція); інтерактивні методи (дискусія).
Необхідне обладнання	Для проведення лекційних занять: проектор і екран в аудиторії, комп'ютер (мінімальні характеристики: процесор Intel Core i3, 4ГБ оперативної пам'яті), доступ до мережі Internet, засоби мультимедіа (в т.ч. проектор). Для проведення практичних/лабораторних занять: комп'ютер (мінімальні

	<p>характеристики: процесор Intel Core i3, 4ГБ оперативної пам'яті), доступ до мережі Internet.</p> <p>Необхідне програмне забезпечення включає в себе ОС Windows 10, програмні додатки (MS Teams, ZOOM).</p>
<p>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</p>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • написання двох тестових модулів: по 20% семестрової оцінки кожен; максимальна кількість балів за два модулі 40; • колоквіум: 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10. • іспит: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 50. <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що виконання модульних завдань студентів будуть проведені без сторонньої допомоги. Списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні контрольних робіт є підставою для їх незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p>Відвідування занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів, визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали, набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються: присутність на заняттях та активність студента під час практичних занять; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття з метою, не пов'язаною з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> <p>Оцінювання колоквіуму та іспиту відбувається шляхом оцінки письмових відповідей студента на поставлені запитання.</p> <p>Відсотки нарахування балів оцінювання відповіді на кожне запитання нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> 75-100% – тема відтворюється в повному обсязі, правильно, обґрунтовано, логічно; 50-75% – відтворюється значна частина розглянутої теми, проте присутні неточності та/або невідповідності; 25-50% – виявлено множинні неточності та невідповідності, пояснення відсутні чи частково помилкові; 0-25% – тему майже не розкрито, кількість викладеного матеріалу не відповідає загальним нормам обраного виду роботи.
<p>Питання до колоквіуму та іспиту.</p>	<p>Задачі, які приводять до інтегральних рівнянь.</p> <p>Рівняння Фредгольма та Вольтера першого і другого роду.</p> <p>Метричні простори. Збіжність у метричних просторах.</p> <p>Відкриті й замкнені множини.</p> <p>Повнота метричного простору.</p>

	<p> Поповнення. Принцип вкладених куль. Теорема Бера про категорії. Принцип стискаючих відображень. Нормовані простори. Еквівалентні норми. Банахові простори. Простори зі скалярним добутком. Ортогональне проектування у гільбертовому просторі. Ортогоналізація системи функцій. Лінійні неперервні оператори та функціонали. Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на гільбертовому просторі. Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного неперервного функціонала. Простір лінійних неперервних операторів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Ряд Неймана оператора. Рівняння вигляду $u - \lambda Au = v$. Спряжені оператори. Резольвента і спектр оператора. Компактні множини і компактні оператори. Теорема Гаусдорфа. Теореми Фредгольма. Спектр компактного оператора. Теорема Гільберта-Шмідта для компактних самоспряжених операторів. Застосування до інтегральних рівнянь. Приклади розв'язування інтегральних рівнянь. </p>
Опитування	<p> Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу та порівняння з іншими курсами буде надано наприкінці семестру. </p>

Схема курсу

№п/п	Лекції	К-сть годин	Практичні заняття	К-сть годин
1	Задачі, що приводять до інтегральних рівнянь. <i>Основні класи інтегральних рівнянь. Рівняння Фредгольма та Вольтера першого і другого роду.</i>	2 год. лек., 1 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою метричні простори.	2 год. пр., 1 год. сам. роб.
2	Нелінійні рівняння. Рівняння інтегральних перетворень та їх розв'язки.	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою збіжність, відкриті множини, повнота.	2 год. пр., 1 год. сам. роб.
3	Метричні простори. <i>Означення та приклади. Збіжність у метричних просторах. Відкриті й замкнені множини. Повнота метричного простору. Поповнення. Принцип вкладених куль.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою стискаючі відображення, норма.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
4	Теорема Бера про категорії. Принцип стискаючих відображень. Нормовані простори. <i>Еквівалентні норми. Банахові простори.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою простори зі скалярним добутком.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
5	Простори зі скалярним добутком. <i>Ортогональне проектування у гільбертовому просторі. Ортогоналізація системи функцій.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою теорія міри й інтеграла Лебега.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
6	Про теорію міри й інтеграла Лебега. <i>Простори інтегровних функцій.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою лінійні неперервні оператори та функціонали	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
7	Лінійні неперервні оператори та функціонали. <i>Теорема Ріса про загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на гільбертовому просторі.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою продовження лінійних функціоналів.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
8	Теореми С.Банаха. <i>Теорема Гана-Банаха про продовження лінійного неперервного функціонала. Простір лінійних неперервних операторів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха про обернений оператор.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою теореми С.Банаха. Тестовий модуль № 1.	2 год. пр., 1 год. сам. роб.
9	Ряд Неймана оператора. <i>Рівняння вигляду $u-\lambda Au=v$. Спряжені оператори.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою ряд Неймана оператора.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.

10	Резольвента і спектр оператора. <i>Означення та основні властивості.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою резольвента і спектр оператора.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
11	Компактні множини і компактні оператори. <i>Означення. Теорема Гаусдорфа.</i> Колоквіум	2 год. лек., 1 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою резольвента і спектр оператора.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
12	Теорема Фредгольма. <i>Три теореми Фредгольма.</i> <i>Альтернатива Фредгольма</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою компактні множини і оператори.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
13	Спектр компактного оператора. <i>Теорема Гільберта-Шмідта для компактних самоспряжених операторів.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою компактні множини і оператори.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
14	Застосування до інтегральних рівнянь. <i>Приклади розв'язування інтегральних рівнянь.</i>	2 год. лек., 2 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою теореми Фредгольма.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
15	Застосування інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа до розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь.	2 год. лек., 1 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою Приклади розв'язування інтегральних рівнянь.	2 год. пр., 2 год. сам. роб.
16	Про інші застосування функціонального аналізу.	2 год. лек., 1 год. сам. роб.	Розв'язування задач за темою Приклади розв'язування інтегральних рівнянь. Тестовий модуль № 2.	2 год. пр., 1 год. сам. роб.
	Разом:	32 год. лек., 28 год. сам. роб.		32 год. пр., 28 год. сам. роб.