МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет імені Івана Франка

Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Затверджено

На засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Львівського національного університету імені Івана Франка

(протокол № 1 від 30.08.2023 р.)

Завідувач кафедри

_______________ Кирилич В.М.

Силабус із навчальної дисципліни

"Математичний аналіз",

що викладається в межах ОПП "Математичне моделювання та комп'ютерна механіка"

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів

зі спеціальності 113 "Прикладна математика"

Львів – 2023

Назва дисципліни	Математичний аналіз
Адреса викладання дисципліни	Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, м. Львів, Україна, 79000
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 113 Прикладна математика
Викладачі дисципліни	Червінка Костянтин Андрійович, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики Вус Андрій Ярославович, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики Сидоренко Юрій Миколайович, к. ф.-м. н., доцент, доцент кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
Контактна інформація викладачів	Електронна пошта: kostiantyn.tchervinka@lnu.edu.ua, andriy.vus@lnu.edu.ua, yuriy.sydorenko@lnu.edu.ua, Веб-сторінка: https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/chervinka-k-a, https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/vus-a-ya https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/sydorenko-yu-m
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій і практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/matematychnyy-analiz-osvitnia-prohrama-matematychne-modeliuvannia-ta-komp-iuterna-mekhanika
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Математичний аналіз» є нормативною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки зі спеціальності 113 Прикладна математика для освітньо-професійної програми «Математичне моделювання та комп’ютерна механіка», яку викладають протягом перших двох років навчання в першому, другому та третьому семестрах в обсязі 16 (6+6+4) кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс розроблено, щоб надати студентам необхідні теоретичні знання й практичні навики вирішення задач з теорії множин та дійсних чисел, границь числових послідовностей та функцій, теорії диференціального та інтегрального числення функції однієї та багатьох змінних, числових й функціональних рядів та послідовностей. Курс охоплює теорію кратних, криволінійних і поверхневих інтегралів, теорії рядів Фур’є та перетворення Фур’є, теорії поля та векторного аналізу, які є необхідними для розуміння подальших дисциплін спеціальності.
Мета та цілі дисципліни	Метою цієї нормативної навчальної дисципліни є оволодіння класичними методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної математики, їх використання в подальших курсах з математики та статистики, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

	Цілі дисципліни передбачають формування розуміння принципів застосування методів класичного аналізу, основ застосування прийомів диференціального й інтегрального числень, вміння поєднувати у математичній моделі практичних вимог та наукових меторів вирішення проблем і задач.
Література для вивчення дисципліни	*Основна література:* 1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.В. Математичний аналіз. Київ: Знання, 2008. – 416 с. 2. Заболоцький М.В., Фединяк С.І., Філевич П.В., Червінка К.А. Практикум з математичного аналізу: Навчальний посібник. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. – 312 с. *Додаткова література* 3. Математичний аналіз : навчальний посібник / А. І. Щерба, А. М. Нестеренко, І. В. Мірошкіна; В. О. Щерба; М-во освіти і науки України, Черкас. держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2023. – 513 с. 4. Бохонов, Ю. Є. (2023). Математичний аналіз. Частина 2. Диференціальне числення функцій кількох дійсних змінних. Інтеграли, що залежать від параметра. – Електронне мережне навчальне видання – ela.kpi.ua/bit stream/1234 56789/56825/1/Bokhonov_many_variables_02-06-23.pdf 5. Підкуйко С.І. Ряди Фур'є : навчальний посібник. – Львів: 2013. – 160 с. 6. Жерновникова О. А. Математичний аналіз : практикум для здобувачів бакала-врського рівня вищої освіти спец. «014 Середня освіта (матем.)» / О.А. Жерно-вникова, Т.І. Дейніченко, О.Д. Чібісов; Харк. нац. пед. ун-т імені Г.С. Сковороди. – Харків: ХНПУ, 2021. – 96 с. 7. Математичний аналіз 3: Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли. Збірник задач для самостійної роботи та розрахункових робіт [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів. спеціальності 124 «Системний аналіз»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Г.Бондаренко, А.Ю.Мальцев, Г.Б.Подколзін.– Електронні текстові дані (1 файл: 1,60 Мб). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 52 с. 8. Підкуйко С.І. Інтеграли, залежні від параметра. – Львів: 2013. – 152 с. 9. Taylor, M. E. (2020). *Introduction to Analysis in Several Variables: Advanced Calculus* (Vol. 46). American Mathematical Soc. 10. Salas, S. L., Hille, E., & Etgen, G. J. (2021). *Calculus: One and several variables.* John Wiley & Sons.
Обсяг курсу	**1 семестр:** Загальний обсяг: 192 годин. Аудиторних занять: 96 год., з них 48 год лекційних та 48 год практичних занять. Самостійної роботи: 96 год. **2 семестр:** Загальний обсяг: 160 годин. Аудиторних занять: 80 год., з них 32 год лекційних та 48 год практичних занять. Самостійної роботи: 80 год. **3 семестр:** Загальний обсяг: 128 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год лекційних та 32 год практичних занять. Самостійної роботи: 64 год. **Протягом 1-3 семестрів:** 240 (96 + 80 + 64) години аудиторних занять. З них 112 (48 + 32 + 32) годин лекційних занять, 128 (48 + 48 + 32) годин лабораторних занять. Також 240 (84 + 100 + 56) годин самостійної роботи.
Очікувані результати навчання	Після завершення цього курсу студент буде : - Знати основні поняття математичного аналізу, зокрема: множини і дії над ними, загальне поняття відображення, потужності множин, означення дійсного числа, означення точної верхньої і точної нижньої межі числової множини, означення та властивості границі послідовності та функції, означення та властивості неперервної функції в точці і на множині, означення похідної, геометричну інтерпретацію похідної, правила обчислення та властивості похідних, застосування похідних до побудови графіків функцій; означення і властивості неозначеного та означеного інтегралів Рімана, означення збіжності числових та функціональних рядів, їх властивості, ознаки збіжності та рівномірної збіжності; розвинення елементарних функцій в

	степеневі ряди та ряди Фур'є; диференціювання функцій багатьох змінних та їх властивості, дослідження функцій на екстремум і умовний екстремум, означення і властивості кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів, їх зв'язок, властивості інтегралів залежних від параметру, означення та властивості перетворення Фур'є; - Вміти виконувати операції над множинами, обчислювати границі послідовностей і функцій в точці, досліджувати функції на неперервність, обчислювати похідну функції, досліджувати функції за допомогою похідних і будувати їх графіки, обчислювати неозначені інтеграли та застосовувати означені інтеграли для обчислення площ, довжин кривих, об'ємів тіл, досліджувати на збіжність невластиві інтеграли, числові і функціональні ряди, знаходити радіус збіжності степеневих рядів; розвивати функції в степеневі ряди та ряди Фур'є, досліджувати функції багатьох змінних на диференційованість, екстремум, умовний екстремум, обчислювати кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, досліджувати на збіжність невластиві інтеграли залежні від параметру, знаходити основні характеристики скалярних та векторних полів. **У результаті засвоєння матеріалу даного курсу студент набуде таких загальних (ЗК) і фахових (ФК) компетентностей:** ЗК06. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. ФК01. Здатність використовувати й адаптувати математичні теорії, методи та прийоми для доведення математичних тверджень і теорем. ФК02. Здатність виконувати завдання, сформульовані у математичній формі. ФК13. Здатність зрозуміти постановку завдання, сформульовану мовою певної предметної галузі, здійснювати пошук та збір необхідних вихідних даних. ФК14. Здатність сформулювати математичну постановку задачі, спираючись на постановку мовою предметної галузі, та обирати метод її розв'язання, що забезпечує потрібні точність і надійність результату. **і здобуде такі результати навчання (РН):** РН02. Володіти основними положеннями та методами математичного, комплексного та функціонального аналізу, лінійної алгебри та теорії чисел, аналітичної геометрії, теорії диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь у частинних похідних, теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів, чисельними методами. РН03. Формалізувати задачі, сформульовані мовою певної предметної галузі; формулювати їх математичну постановку та обирати раціональний метод вирішення; розв'язувати отримані задачі аналітичними та чисельними методами, оцінювати точність та достовірність отриманих результатів.
Ключові слова	Множина, відображення, послідовність, границя, числова функція однієї змінної, похідна, диференціал, первісна, методи інтегрування, інтеграл Рімана, невластивий інтеграл, числовий ряд, функціональний ряд, степеневий ряд, ряд Тейлора, ряд Фур'є, функція багатьох змінних, частинна похідна, градієнт, дивіргенція, ротор, крива, криволінійні інтеграли, поверхні, поверхневі інтеграли, інтеграли залежні від параметру, спеціальні функції, перетворення Фур'є
Формат курсу	Очний
Теми	***<u>I-й семестр.</u>*** **Вступ** Множини та операції над ними. Поняття множини. Відношення включення. Операції об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця. Правило де Моргана. Логічна символіка та її використання. **Функція (відображення).**

Поняття функції. Класифікація відображень: ін'єкція, сюр'єкція, біекція. Поняття образу та прообразу множини при відображенні. Композиція відображень, взаємообернені відображення. Функція як відношення. Графік функції.

Потужність множини.

Поняття рівнопотужності множин. Кардинальне число множин. Неіснування множини найбільшої потужності. Теорема Кантора-Бернштейна.

Дійсні числа.

Аксіоматичне визначення множини дійсних чисел. Реалізація множини дійсних чисел за допомогою перерізів Дедекінда. Поняття групи комутативної, адитивної абелевої, мультиплікативної абелевої, аксіома повноти. Єдиність(з точністю до ізоморфізму) множини дійсних чисел. Властивості множини дійсних чисел.

Лема про верхню грань та її наслідки. Лема про скінчене покриття. Лема про граничну точку Лема про вкладені відрізки. Зв'язок тих лем з аксіоматикою повноти.

Злічені множини потужності континууму. Поняття зліченої множини. Властивості злічених множин. Зліченність множини раціональних чисел. Поняття множини потужності континууму. Незліченність множини точок відрізку. Множина всіх підмножин множини натуральних чисел має потужність континууму.

Границя числової послідовності.

Властивості числової послідовності. Загальні властивості. Границя послідовності і відношення нерівності. Арифметичні властивості границі послідовності. Питання існування границі послідовності.

Границя монотонної послідовності. Число Ейлера. Фундаментальність послідовності. Критерій Коші збіжності послідовності. Підпослідовність, часткова границя послідовності. Лема Больцано-Вейєрштраса. Верхня та нижня границі послідовності, як найбільша та найменша часткові границі послідовності. Критерій існування границі послідовності через рівність верхньої та нижньої границь послідовності.

Границя функції при $x \to a$.

Властивості границі функції.

Загальні властивості границі функції і відношення нерівності. Арифметичні властивості границі функції. Границя функції $(\sin x) / x$ при $x \to 0$. Критерій границі функції через послідовність. Визначення показникової, степеневої та логарифмічної функцій.

Границя функцій по базі.

.

Поняття бази. Приклади стандартних баз.

Два означення границі функції по базі. Еквівалентність цих означень. Приклади границь функцій по 18 стандартним базам, довжина дуги. Інтеграл Рімана.

Властивості границі функції по базі. Загальні властивості. Границя функції і відношення нерівності. Арифметичні властивості границь.

Коливання функції на множині. Критерій Коші існування границі функції по базі. Границя композиції функцій. Границя функції $(1 + 1/x)^x$ при $x \to \infty$. Границя монотонної функції. Порівняння асимптотичної поведінки функцій. Поняття $o(f)$, $O(f)$. Властивості $o(f)$, $O(f)$. Еквівалентність функцій.

Неперервні функції.

Неперервність функції в точці. Сім означень неперервності функції в точці. Еквівалентність цих означень. Приклади неперервних функцій. Точки розриву функції (1-го і 2-го роду). Функції Рімана і Діріхле.

Властивості неперервних функцій. Локальні властивості неперервних функцій. Теорема Больцано-Коші про проміжне значення. Теорема Вейєрштраса про

	обмеженість та максимальне і мінімальне значення неперервної на відрізку функції. Поняття рівномірної неперервності функції. Теорема Кантора. Точки розриву монотонної функції. Їх рід та зліченність. Критерій неперервності монотонної функції. Неперервність оберненої функції. **Диференціальне числення функції однієї змінної.** ***Диференційовність функції в точці.*** Лінійне відображення **R** в **R**. Означення диференційовності функції в точці. Диференціал відображення. Похідна функції в точці, зв'язок її з диференціалом. Два означення дотичної до графіка функції в точці. Зв'язок існування дотичної до графіка функції з диференційовністю функції в точці. ***Основні правила диференціювання.*** Арифметичні властивості диференціала. Диференціал композиції функцій. Диференціали оберненого відображення. Похідні основних елементарних функцій. Вищі похідні. Формула Лейбніца. ***Основні теореми диференціального числення.*** Поняття локального екстремуму. Лема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа про середнє значення. Теорема Коші. Формула Тейлора із залишковими членами у формі Лагранжа, Коші, Пеано. Формули Тейлора для основних елементарних функцій. Правило Лопіталя. ***Дослідження функцій методами диференціального числення.*** Зв'язок між монотонністю функції і знаком похідної. Необхідна умова екстремуму функції у термінах першої похідної. Достатня умова екстремуму функції у термінах першої похідної. Достатня умова екстремуму функції у термінах вищих похідних. Зв'язок між опуклістю функції і монотонністю першої похідної функції. Зв'язок між опуклістю функції і розташуванням графіка функції відносно дотичної. ***<u>ІІ-й семестр.</u>*** **Первісна і неозначений інтеграл.** ***Первісна і неозначений інтеграл.*** Означення первісної і неозначеного інтегралу. Властивості неозначеного інтегралу. Таблиця первісних основних елементарних функцій. Первісна від раціональної функції. **Інтеграл Рімана.** ***Означення інтегралу Рімана.*** Розбиття відрізку з відміченими точками. База у множині розбиттів з відміченими точками. Інтегральна сума Рімана. Питання існування інтегралу Рімана. Критерій Коші. Необхідна умова. Достатня умова. Інтегровність неперервних, монотонних функцій і обмежених функцій, що мають скінчену кількість точок розриву. Верхня та нижня суми Дарбу. Властивості сум Дарбу. Інтеграл Дарбу. Критерій Дарбу. Необхідність достатньої умови інтегровності функції. Властивості простору **R[a,b]**. Множина Лебегової міри нуль. Критерій Лебега інтегровності функції за Ріманом. Властивості інтеграла Рімана. Інтеграл Рімана як адитивна функція орієнтованого проміжку. Монотонність інтеграла Рімана. Перша теорема про середнє. Друга теорема про середнє. Інтеграл і похідна. Диференційовність інтеграла із змінною верхнею межею. Первісна неперервної функції на відрізку, поняття узагальненої первісної. Формула Ньютона - Лейбніца. Формула інтегрування частинами. Формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі. Заміна змінної в інтегралі. Застосування інтегралу Рімана. Довжина шляху. Площа криволінійної трапеції. Об'єм тіла обертання.

	Невластиві інтеграли. Означення та властивості невластивого інтеграла. Критерій Коші збіжності невластивого інтеграла. Абсолютна та умовна збіжність. Ознаки порівняння. Ознаки Абеля та Діріхле. **Числові ряди.** Питання збіжності числового ряду. Означення збіжності числового ряду. Критерій Коші збіжності числового ряду. Залишок числового ряду. Ряди з невід'ємними членами. Інтегральна ознака збіжності числового ряду. Теорема порівняння. Стала Ейлера. Ознака Даламбера. Ознака Коші. Узагальнена ознака Коші. Ознака Раабе. Ознака Гаусса. Ознака Коші для монотонних рядів. Не існування універсальних збіжного та розбіжного рядів. Ряди з довільними членами. Абсолютно збіжний та умовно збіжний числові ряди. Ознаки Даламбера та Коші абсолютної збіжності числових рядів. Теорема про збіжність абсолютно збіжного ряду з переставленими членами. Збіжність добутку двох абсолютно збіжних рядів. Ознака Лейбніца збіжності знакопочережного ряду. Перетворення Абеля. Ознака Діріхле. Ознака Абеля. Теорема Рімана про умовно збіжні ряди. **Функціональні послідовності і ряди.** Поточкова та рівномірна збіжність на множині. Поняття функціональної послідовності та функціонального ряду. Збіжність поточкова на множині. Рівномірна збіжність функціональної послідовності і функціонального ряду на множині. Критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності і функціонального ряду. Достатня умова рівномірної збіжності функціональної послідовності і функціонального ряду. Ознаки рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштраса. Ознака Діріхле. Ознака Абеля. Ознака Діні. Перестановка границь. Неперервність граничної функції і суми ряду. Інтегровність граничної функції і суми ряду і почленне інтегрування функціонального ряду. Диференційовність граничної функції і суми ряду і почленне диференцювання. **Степеневі ряди.** Перша теорема Абеля. Радіус збіжності степеневого ряду. Неперервність суми степеневого ряду. Формула Коші - Адамара. Друга теорема Абеля. Почленне диференціювання та інтегрування дійсного степеневого ряду. Аналітичні функції Єдинність розкладу функції в степеневий ряд. Вигляд коефіцієнтів розкладу дійсної аналітичної функції в степеневий ряд. Ряд Тейлора. Достатня умова розвинення функції в ряд Тейлора. Розвинення деяких елементарних функцій в ряд Тейлора. Теорема Вейєрштраса про рівномірне наближення неперервної функції многочленами. **Ряди Фур’є.** ***Загальне поняття ряду Фур’є.*** Ортогональні системи функцій. Теорема про екстремальну властивість коефіцієнтів Фур’є. Нерівність Беселя. Повні системи функцій. База векторів в нормованому просторі. Критерій повноти системи векторів в гільбертовому просторі. ***Тригонометричний ряд Фур'є.*** Означення тригонометричного ряду Фур’є. Лема Рімана. Ядро Діріхле. Принцип локалізації. Достатні умови збіжності ряда Фур’є в точці (умова Діні). Ядро Фейєра. Терема Вейєрштраса про апроксимацію. Зв'язок між гладкістю функцій та наявністю спадання її коефіцієнтів Фур’є. Теорема про повноту тригонометричної системи. Рівність Парсеваля. Теорема про єдиність ряду Фур’є.

	<u>***ІІІ-й семестр.***</u> **Диференціальне числення функцій багатьох змінних.** ***Метричні та топологічні простори.*** Поняття метричного простору. Відкриті і замкнені підмножини метричного простору. Поняття топологічного простору. Компактність. Абсолютна власти-вість множини бути компактом. Властивості компактів в $\mathbf{R^n}$. Повні метричні простори. Неперервні відображення метричних та топологічних просторів. Границя відображення. Лінійні відображення $\mathbf{R^m}$ в $\mathbf{R^n}$. Лінійна структура в $\mathbf{R^m}$. Норма в $\mathbf{R^m}$. Евклідова структура в $\mathbf{R^m}$. Диференційовність відображення в точці. Зв'язок між диференціалом і частинними похідними відображення в точці. Матриця Якобі. Лінійність операції диференцювання та арифметичні властивості диференціалу. Диференціал композиції відображень. Диференціал оберненого відображення. Теорема про середнє. Достатня умова диференційовності функції в точці. Частинні похідні вищих порядків. Формули Тейлора із залишковими членами у формах Лагранжа, Пеано, інтегральній формі. Необхідна та достатня умова точки екстремуму. Критерій Сильвестра. **Неявно задані функції та умовний екстремум** Необхідна умова локального екстремуму. Дотична площина і дотичний вектор до графіка функції. Теорема про неявну функцію. Функціональна залежність функцій. Розклад дифеоморфізму в композицію найпростіших. **Кратні інтеграли.** ***Інтеграл Рімана на n-вимірному проміжку.*** Властивості мір *n*-вимірних проміжків. Означення інтеграла Рімана. Критерій Коші інтегрованості функції за Ріманом. Необхідна умова інтегровності функції за Ріманом. Достатня умова інтегровності функції. Нижня і верхня суми Дарбу. Інтеграл Дарбу. Теорема Дарбу. Критерій Дарбу інтегровності функції. Множини Лебегової міри нуль. Критерій Лебега інтегровності функції за Ріманом. ***Інтеграл функції по множині.*** Допустимі множини. Означення інтеграла по множині. Міра Жордана множини. Множини вимірні за Жорданом. Критерій Лебега існування інтеграла по допустимій множині. Лінійність інтеграла. Адитивність інтеграла. Теорема про середнє для інтеграла. Теорема Фубіні. Теорема про заміну змінної в кратному інтегралі. ***Невластиві кратні інтеграли.*** Вичерпання множини. Означення збіжності невластивого інтегралу. **Криволінійні інтеграли.** Означення та теореми існування криволінійних інтегралів І та ІІ родів. Фізичний зміст та властивості. Формула Гріна. Критерій незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування в довільній та однозв'язній областях. **Поверхневі інтеграли.** Означення поверхні. Гладкі поверхні. Дотична площина та нормаль. Орієнтація гладких поверхонь. Формула для обчислення площі поверхні. Означення та властивості поверхневих інтегралів першого та другого родів. Фізичний зміст. Формули Гауса-Остроградського та Стокса. **Елементи векторного аналізу і теорії поля.** Диференціальні оператори **grad, rot, div.** Векторний запис класичних інтегра-льних формул. Поняття потенціального і соленоїдального полів. Критерій потенціальності і соленоїдальності поля
Підсумковий	екзамен в кінці кожного семестру

контроль, форма	
Пререквізити	Для вивчення даного курсу студенти потрібні базові знання з шкільної математики. Для опанування тем третього семестру (кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли) рекомендовано знання аналітичної геометрії
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Інформаційні методи (лекція, бесіда, ілюстрація, демонстрація); дедуктивні методи на основі узагальнень; евристичні методи (проблемна лекція); інтерактивні методи (дискусія)
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання у кожному семестрі проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співідношенням: Протягом кожного семестру відбувається 3 контрольні роботи, кожна з яких оцінюється в 10 балів, та письмовий колоквіум – 20 балів. Разом за семестр студент може отримати 50 балів. Іспит оцінюється в 50 балів. Максимальна кількість балів 100 **Академічна доброчесність**: Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можли-вої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недобро-чесності в написанні завдань є підставою для її незарахуванння викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються. **Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні/лабораторні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов’язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом. **Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих. **Політика виставлення балів.** Враховуються бали, набрані при поточ-ному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов’язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов’язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. **Оцінювання колоквіуму** відбувається шляхом перевірки написаної студентом в аудиторії письмової роботи, яка складаються з 10 запитань (0-2 балів за одне запитання). Перелік теоретичних питань вибирають із переліку питань на екзамен (див. нижче) **Бали оцінювання відповіді на запитання колоквіуму:** 2 – відповідь на запитання написана повністю правильна, містить відповідні формули, рисунки та формулювання означень, теорем чи тверджень;

	1 – відповідь на запитання написана частково правильна або є неповною, містить формули з помилками, рисунки зроблені неповністю, формулювання означень, теорем чи тверджень є неповним; 0 – відповідь відсутня/не відповідає сформульованому запитанні. **Критерії оцінювання результатів неформальної освіти:** Нарахування балів відбувається за публікацію студентом тез доповідей на конференціях, наукових статей, за участь студента у діяльності наукових гуртків, семінарів, круглих столів, конкурсів, участь у заходах неформальної освіти, за отримання сертифікатів про проходження навчання на різних освітніх платформах (Coursera, Prometheus тощо), курсах провідних IT компаній за тематикою навчальної дисципліни. Кількість балів визначається відсотком покриття результатів відповідної активності до вимог результатів навчання з навчальної дисципліни
Питання до екзамену	***<u>І-й семестр</u>*** ***І. Множини. Відображення. Аксіоматика дійсних чисел*** 1. Множини. Дії над множинами. 2. Відображення, їх класифікація. 3. Еквівалентні множини. Потужність множин. Властивості зліченних множин. 4. Потужність відрізку [0; 1]. 5. Аксіоми множини дійсних чисел та наслідки з них. 6. Обмежені та необмежені множини. Теореми про існування точної верхньої і точної нижньої граней. 7. Принцип вкладених відрізків. 8. Принцип Архімеда та наслідки з нього. 9. Зліченність множин раціональних точок. ***ІІ. Послідовність. Властивості границь послідовностей*** 10. Означення границі послідовності. Збіжні послідовності. 11. Теорема про єдність границі послідовності. 12. Властивості границі послідовності, що мажорується зі збіжними послідовностями. 13. Обмеженість збіжної послідовності. 14. Монотонні послідовності та їх границі. 15. Принцип Больцано-Вейєрштрасса. 16. Узагальнений принцип Больцано-Вейєрштрасса. 17. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності та їх властивості. 18. Границя послідовності та арифметичні операції. 19. Критерій Коші збіжності послідовності. 20. Верхня та нижня границі послідовності. Теореми існування. 21. Необхідна та достатня умови існування скінченної верхньої та нижньої границі послідовності. ***ІІІ. Функції. Границя функцій.*** 22. Означення границі функції в точці в розумінні Гейне та в розумінні Коші. їх еквівалентність. 23. Властивості границі функції в точці. 24. Односторонні границі. Теорема існування границі функції. 25. Нескінченно малі та нескінченно великі функції та їх властивості. Узагальнене поняття границі. 26. Границя монотонних функцій. 27. Критерій Коші існування скінченної границі функцій. 28. Границя функції вздовж множини. Означення бази та границі по базі.

29. Границя $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e$, $x \to \infty$.
30. Границя $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x \to 0$ та наслідки.
31. Інші чудові границі.
32. Верхня та нижня границі функції та їх властивості.

IV. Неперервність функцій.

33. Означення неперервності функції в точці. Точки розриву та їх класифікація.
34. Властивості функцій, неперервних у точці. Неперервність композиції функцій.
35. Неперервність функції вздовж множини. Множина неперервності.
36. Теорема Вейєрштрасса про обмеженість неперервних функцій.
37. Теорема Больцано-Коші про проміжне значення.
38. Неперервність оберненої функції.
39. Неперервність елементарних функцій.
40. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора.
41. Порівняння функцій. О-символіка. Головна частина функції.

V. Похідна. Властивості диференційованих функцій.

42. Означення похідної. Похідні елементарних функцій.
43. Означення диференційованості функції. Геометричний зміст диференціала та похідної.
44. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю.
45. Похідна суми, добутку, частки.
46. Похідна оберненої функції, геометричний зміст
47. Похідні та диференціали композиції функцій. Інваріантсть першого диференціалу.
48. Похідні вищих порядків. Правило Лейбніца.
49. Похідні вищих порядків від композиції функцій та оберненої функції.
50. Похідні функцій, заданих параметрично. Диференціали вищих порядків.
51. Теореми Ферма та Ролля.
52. Теорема Лагранжа та наслідки з неї.
53. Теорема Коші про середнє значення.
54. Правило Лопіталя.
55. Формула Тейлора.
56. Основні розвинення функцій за формулою Мак-Лорена.
57. Ознака монотонності диференційованих функцій.
58. Означення точки екстремуму. Необхідна умова.
59. Достатні ознаки точки екстремуму.
60. Опуклість. Достатня умова опуклості.
61. Точка перегину. Необхідні умови.
62. Достатні умови точки перегину.

<u>II-й семестр</u>

I. *Невизначений інтеграл.*

1. Первісна та невизначений інтеграл.
2. Заміна змінних та інтегрування частинами.
3. Інтегрування раціональних функцій.
4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.
5. Інтегрування тригонометричних функцій.

II. *Визначений інтеграл.*

6. Означення інтеграла за Ріманом. Обмеженість інтегрованої функції.
7. Суми Дарбу. Критерій інтегрованості.
8. Інтегровність неперервної функції.

	9. Інтегровність монотонної функції. 10. Інтегровність обмеженої функції зі скінченим числом точок розриву. 11. Властивості означеного інтегралу. 12. Теорема про середнє та наслідки з неї. 13. Неперервність та диференційовність інтегралу зі змінною верхнею межею. 14. Існування первісної для неперервної функції. 15. Заміна змінних та інтегрування частинами. 16. Проста крива. Довжина дуги кривої. Достатня умова спрямлюваності кривої. 17. Формула для обчислення довжини кривої. 18. Поняття плоскої фігури та її межі. Обчислення площі за Жорданом. 19. Критерій квадрованості фігури та наслідки з неї. 20. Площа криволінійної трапеції та сектору. 21. Поняття об'єму тіла. Формула для обчислення об'єму тіла обертання. 22. Площа поверхні тіла обертання. 23. Обчислення статичних моментів та центру ваги кривої. ***III. Невластиві інтеграли.*** 24. Означення та властивості невластивого інтеграла.. 25. Критерій Коші збіжності невластивого інтегралу. 26. Абсолютна та умовна збіжність. 27. Ознака порівняння. 28. Ознаки Діріхле та Абеля. ***IV. Числові ряди.*** 29. Означення ряду. Властивості збіжних числових рядів. Критерій Коші . Необхідна умова збіжності. 30. Ознаки порівняння для рядів з додатними членами. 31. Ознака Даламбера. 32. Ознака Коші. 33. Інтегральна ознака Коші збіжності ряду з додатними членами. 34. Абсолютна та умовна збіжність числових рядів. Теорема про перестановку членів в абсолютно збіжних рядах. 35. Теорема Рімана про перестановку членів в умовно збіжних рядах. 36. Нерівність Абеля. Ознака Діріхле збіжності ряду. 37. Ознака Абеля збіжності ряду. 38. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца. ***V. Функціональні ряди та функціональні послідовності.*** 39. Означення збіжності та рівномірної збіжності функціональних послідовностей та рядів. Критерій Коші рівномірної збіжності. 40. Ознака Вейєрштраса рівномірної збіжності. 41. Ознаки Абеля та Діріхле рівномірної збіжності. 42. Теорема про неперервність суми ряду. 43. Теорема про почленне інтегрування. 44. Теорема про почленне диференцювання. ***VI. Степеневі ряди.*** 45. Означення степеневого ряду та радіуса збіжності. Формула Коші-Адамара 46. Рівномірна збіжність степеневих рядів. 47. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів. 48. Ряд Тейлора. Аналітичні функції. 49. Розвинення в степеневі ряди елементарних функцій. 50. Достатня умова аналітичності нескінченнодиференційовних функцій. ***VII. Ряди Фур'є.*** 51. Нескінченновимірні лінійні евклідові простори. Нерівність Коші-

Буняковського. Приклади ортонормованих систем.

52. Означення ряду Фур’є.
53. Теорема про найменше відхилення часткових сум ряду Фур’є.
54. Замкнені системи. Рівність Парсеваля. Єдиність ряду Фур’є.
55. Збіжність в середньому. Зв’язок з рівномірною збіжністю.
56. Нерівність Бесселя для коефіцієнтів ряду Фур’є.
57. Означення повної системи. Зв’язок між повними та замкнутими системами.
58. Тригонометричний ряд Фур’є. Наслідки з замкненості тригонометричної системи.
59. Найпростіші достатні умови розвинення в тригонометричний ряд Фур’є
60. Теорема про почленне диференціювання тригонометричних рядів Фур’є.

<u>III-й семестр</u>

II. Функції багатьох змінних.

1. Простір $\mathbf{R}^n$.Границя послідовності точок, властивості границь.
2. Відкриті та замкнені множини в $\mathbf{R}^n$, властивості.
3. Компакт та його властивості.
4. Функції багатьох змінних, їх границі та властивості.
5. Неперервність функцій багатьох змінних, їх властивості.
6. Теорема Вейєрштраса про неперервність функцій на компакті.
7. Аналог теореми Больцано-Коші, теорема Кантора, рівномірна неперервність.
8. Часткові похідні та диференціал функції.
9. Зв’язок між неперервністю, диференційованістю та існуванням частинних похідних. Приклади.
10. Достатня умова диференційованості.
11. Теорема про часткові похідні від композиції функцій. Диференційованість складної функції.
12. Інваріантність 1-го диференціалу.
13. Похідна за напрямком. Терема існування. Градієнт.
14. Часткові похідні вищих порядків. Рівність мішаних похідних.
15. Диференціали вищих порядків.
16. Формула Тейлора для функцій багатьох змінних.
17. Означення точки локального екстремуму. Необхідна умова точки екстремуму.
18. Достатня умова точки екстремуму. Критерій Сильвестра.

III. Неявно задані функції.

19. Неявно задані функції, що визначаються одним рівнянням, їх існування.
20. Обчислення часткових похідних неявно заданих функцій. Похідна оберненої функції.
21. Теорема існування неявно заданих функцій , що задані системою.
22. Поняття умовного екстремуму, необхідна умова.
23. Достатня умова точки умовного екстремуму.

IV. Кратні інтеграли.

24. Означення подвійного інтегралу, необхідна умова інтегрованості.
25. Суми Дарбу. Критерій інтегрованості.
26. Класи інтегрованих функцій.
27. Зведення подвійного інтегралу до повторного.
28. Основні властивості подвійних інтегралів.
29. Заміна змінних. Геометричний зміст модуля і знаку якобіану.
30. Потрійні інтеграли, сферична та циліндрична системи координат.
31. Невластиві кратні інтеграли. Критерій збіжності для невід’ємних функцій. Ознака порівняння.

	32. Невластивий кратний інтеграл від довільних функцій. Еквівалентність збіжності та абсолютної збіжності. 33. Статичні моменти фігури. Центр ваги. ***V. Метричні простори.*** 34. Означення меторичного простору, приклади. Означення кулі, околу, внутрішньої точки. 35. Відкриті та замкнені множини, їх властивості. 36. Збіжність в метричних просторах. Компакти. Необхідна та достатня умови компакту. 37. Неперервні відображення в метричних просторах. Теорема Вейєрштраса. 38. Повні метричні простори. Критерій повноти. 39. Лінійні нормовані простори. Банахів простір. Приклади. 40. Лінійні оператори в нормованих просторах. Норма лінійного оператора. Необхідна та достатня умови неперервності. 41. Лінійні відображення з R^n в R^m. Диференційовність. 42. Відображення з ненульовим якобіаном (принцип збереження області, теорема про обернену функцію). ***VI. Криволінійний інтеграл*** 43. Означення та теореми існування криволінійного інтегралу першого роду. 44. Означення та теорема існування криволінійного інтегралу другого роду. Фізичний зміст та властивості. 45. Формула Гріна. 46. Критерій незалежності криволінійного інтегралу другого роду від шляху інтегрування. 47. Критерій незалежності криволінійного інтегралу 2-го роду від шляху інтегрування в однозв'язній області. ***VII. Поверхневі інтеграли*** 48. Означення поверхні, гладкі поверхні. 49. Дотична площина та нормаль. 50. Площа поверхні. Формула до обчислення площ. 51. Орієнтація гладких поверхонь. Операція склеювання поверхонь. 52. Поверхневий інтеграл 1-го роду 53. Поверхневий інтеграл 2-го роду ***VIII. Елементи теорії поля*** 54. Основні характеристики векторних полів. 55. Плоско-паралельне векторне поле. Необхідна і достатня умови потенціальності. 56. Теорема Гауса-Остроградского. Геометричний зміст дивергенції. 57. Формула Стокса. Геометричний зміст ротора. 58. Соленоїдальні векторні поля. 59. Потенціальні векторні поля.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу "Математичний аналіз"
для студентів спеціальності 113 – Прикладна математика

Тиж-день	Лекційний курс		Практичні заняття		к-сть год СР	Літе-ра-ту-ра
	Зміст теми	к-сть год	Зміст теми	к-сть год		
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	
	Семестр 1					
1/1	Логічні символи і операції, квантори. Множини і операції з ними. Відображення. Потужність множин	4	Метод математичної індукції	2	5	[1, 2, 6, 9]
2/1	Аксіоми дійсних чисел. Найважливіші класи дійсних чисел. Метод математичної індукції.	2	Висловлювання. Операції з множинами	4	5	[1, 2, 3, 9]
3/1	Принцип точних меж числових множин. Континуум. Поняття і загальні властивості границі послідовності.	4	Відображення, класифікація.	2	5	[1, 2, 3, 9]
4/1	Нескінченно малі та великі послідовності. Арифметичні властивості границі послідовності. Невизначеності	2	Мінімум, максимум та точні грані множини	4	5	[1, 2, 3, 9]
5/1	Монотонні послідовності. Число Ейлера. Підпослідовності. Критерій Коші	4	Контрольна робота № 1	2	5	[1, 2, 6, 10]
6/1	Границя функції, односторонні границі. Властивості границі функції.	2	Границя послідовності. Обчислення границь	4	5	[1, 2, 3, 9]
7/1	Нескінченно малі та нескінченно великі функції, розкриття невизначеностей. Важливі границі	4	Границя послідовності. Часткові границі	2	5	[1, 2, 3, 9]
8/1	Неперервні функції. Точки розриву. Властивості неперервних на відрізку функцій. Обернені функції	2	Функції, область визначення і область значення. Границя функції. Обчислення границь	4	5	[1, 2, 3, 9]
9/1	Неперервність елементарних функцій. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора	4	Обчислення границь з використанням чудових границь. Розкриття невизначеностей	2	5	[1, 2, 6, 9]
10/1	Означення і зміст похідної. Диференціал. Правила диференціювання.	2	Дослідження функцій на неперервність та рівномірну неперервність	4	5	[1, 2, 3, 9]
11/1	Контрольна робота 2. Похідні елементарних функцій. Похідні оберненої функції. Похідна неявної та параметрично заданої функції	4	Обчислення похідних. Табличні похідні. Основні правила диференціювання	2	5	[1, 2, 3, 6, 9, 10]
12/1	Похідні та диференціали вищих порядків. Поняття екстремуму функції однієї змінної. Лема Ферма	2	Обчислення похідних. Похідні складеної функції. Похідні оберненої, параметрично та неявно заданої функції	4	5	[1, 2, 3, 9]
13/1	Основні теореми диференціального числення. Правило Лопіталя. Формула Тейлора	4	Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Лейбніца.	2	6	[1, 2, 3, 9]
14/1	Застосування похідної до дослідження функцій. Зростання, опуклість та асимптотична поведінка.	2	Застосування похідної. Правило Лопіталя. Формула Тейлора та Маклорена. Монотонність і похідна. Опуклість і похідна.	4	6	[1, 2, 3, 9]
15/1	Умовний та безумовний екстремуми	4	Екстремуми функцій однієї змінної.	2	6	[1, 2, 6, 9]
16/1	Колоквіум	2	Асимптоти. Побудова графіків. Контрольна робота 3	4	6	[1, 2, 6, 10]
	Усього за семестр	**48**		**48**	**84**	

1	2	3	4	5	6	7
Семестр 2						
1/2	Невизначений інтеграл та первісна	2	Інтегрування за таблицею інтегралів	4	7	[1, 2, 3, 9]
2/2	Основні методи інтегрування. Інтегрування раціональних функцій	2	Основні методи інтегрування. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен, підстановки Ейлера	2	7	[1, 2, 3, 9]
3/2	Інтегрування ірраціональних виразів. Інтегрування тригонометричних виразів.	2	Інтегрування дробово-раціональних функцій. Метод Гауса-Остроградського	4	7	[1, 2, 3, 9]
4/2	Визначений інтеграл. Інтегровність за Ріманом	2	Інтегрування ірраціональних функцій. Підстановки Чебишева	2	7	[1, 2, 3, 9]
5/2	Інтеграл із змінною межею. Формула Ньютона-Лейбніца.	2	Інтегрування тригонометричних функцій. Контрольна робота 1	4	6	[1, 2, 6, 9]
6/2	Обчислення інтегралів. Теореми про середнє. Застосування	2	Визначений інтеграл, обчислення. Формула Ньютона-Лейбніца.	2	6	[1, 2, 3, 9]
7/2	Методи інтегрування. Застосування інтегралу	2	Обчислення інтегралів. Теорема про середнє. Обчислення площ, довжини дуги, об'ємів.	4	6	[1, 2, 3, 9]
8/2	Невластиві інтеграли. Ознаки збіжності. Абсолютна збіжність	2	Невластиві інтеграли.	2	6	[1, 2, 3, 9]
9/2	Числові ряди. Абсолютна та умовна збіжність числових рядів	2	Числові ряди. Знаходження суми. Ознаки збіжності Даламбера і Коші	4	6	[1, 2, 3, 9]
10/2	Ознаки збіжності рядів із невідємними та різними членами	2	Ознаки збіжності знакозмінних рядів.	2	6	[1, 2, 3, 9]
11/2	Функціональні послідовності й ряди. Поточкова і рівномірна збіжність	2	Функціональні послідовності та ряди. Область збіжності. Контрольна 2	4	6	[1, 2, 6, 8, 10]
12/2	Властивості і застосування рівномірно збіжних рядів	2	Рівномірна збіжність. Неперервність, інтегровність та диференційовність ряду	2	6	[1, 2, 3, 9]
13/2	Степеневі ряди. Збіжність. Ряд Тейлора	2	Степеневі ряди: проміжок збіж-ності. Розвинення у ряд	4	6	[1, 2, 3, 9]
14/2	Ряди Фур'є по ортонормованих системах. Ортогональні поліноми	2	Ряд Тейлора функції. Застосування рядів для розв'язування задач	2	6	[1, 2, 5, 9]
15/2	Тригонометричний ряд Фур'є	2	Розвинення функції у тригонометричний ряд Фур'є	4	6	[1, 2, 5, 9]
16/2	Колоквіум	2	Контрольна 3	2	6	[1, 2, 6, 9]
	Усього за семестр	**32**		**48**	**100**	

1	2	3	4	5	6	7
Семестр 3						
1/3	Функції багатьох змінних. Метрика. Границя функції багатьох змінних.	2	Область визначення, повторні та подвійні границі функції багатьох змінних.	2	4	[1, 2, 3, 9]
2/3	Неперервність функції багатьох змінних. Часткові похідні	2	Частинні похідні. Диференціал.	2	4	[1, 2, 3, 9]
3/3	Диференційовність та повний диференціал функції багатьох змінних.	2	Обчислення похідних різним способом заданих функцій	2	4	[1, 2, 3, 9]
4/3	Похідні та диференціали вищих порядків. Диференціювання неявно заданих функцій багатьох змінних.	2	Формула Тейлора. Наближені обчислення	2	4	[1, 2, 3, 9]
5/3	Формула Тейлора для функції багатьох змінних. Безумовний екстремум. Умовний екстремум.	2	Екстремум. Умовний екстремум. Неявні функції.	2	4	[1, 2, 3, 9, 10]
6/3	Подвійний і кратний інтеграл Рімана. Зведення до повторного.	2	Контрольна робота 1	2	4	[1, 2, 6, 9]
7/3	Заміна змінних у кратному інтегралі. Полярна система координат. Геометричні застосування	2	Подвійні інтеграли.	2	4	[1, 2, 3, 9, 10]
8/3	Криволінійний інтеграл 1-го роду. Властивості.	2	Застосування подвійних інтегралів.	2	4	[1, 2, 7, 9]
9/3	Криволінійний інтеграл 2-го роду. Залежність від напрямку обходу кривої	2	Потрійні інтеграли. Обчислення обємів.	2	3	[1, 2, 7, 9]
10/3	Контрольна робота 2	2	Криволінійні інтеграли 1 роду.	2	3	[1, 2, 7, 9]
11/3	Інтеграл по замкненому контуру. Формула Гріна. Однозв'язність області. Незалежність від шляху інтегрування.	2	Криволінійні інтеграли 2 роду. Формула Гріна.	2	3	[1, 2, 7, 10]
12/3	Поняття поверхні. Способи задання. Дотична і нормаль. Орієнтація	2	Криволінійні інтеграли від повного диференціала.	2	3	[1, 2, 7, 9]
13/3	Означення площі поверхні. Теорема про обчислення площі поверхні. Поверхневий інтеграл 1-го роду	2	Поверхневі інтеграли першого та другого род.	2	3	[1, 2, 7, 9]
14/3	Узгодженість орієнтації межі. Поверхневий інтеграл 2-го роду	2	Елементи теорії векторних полів.	2	3	[1, 2, 7, 9]
15/3	Формула Гауса-Остроградського та її застосування. Формула Стокса.	2	Формули Гаусса та Стокса.	2	3	[1, 2, 7, 9]
16/3	Колоквіум	2	Контрольна робота 3	2	3	[1-10]
	Усього за семестр	**32**		**32**	**56**	
	Усього за дисципліну	**112**		**128**	**240**	