ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Механіко-математичний факультет

Кафедра механіки

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної (дипломної) роботи

бакалавр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

Згин пластини з двома тріщинами, одна з яких паралельна, а інша перпендикулярна до межі поділу матеріалів за контакту їх берегів

Виконав: студент IV курсу,
група МТП-41,
спеціальність 113 Прикладна математика
спеціалізація Математичне моделювання
та комп'ютерна механіка

Гунька В.В.

Керівник *доц. Звізло І.С*

Рецензент доц., к.ф.-м.н. Селіверстов Р.П.
Каф. програмування
ЛНУ ім. І. Франка

Львів - 2023

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

Факультет механіко-математичний
Кафедра механіки
Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Спеціальність **113 прикладна математика**
(шифр і назва)
Спеціалізація Математичне моделювання та комп'ютерна механіка

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри механіки
_____ проф. Андрейків О.Є.
"23" лютого 2023 року

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ (ДИПЛОМНУ) РОБОТУ СТУДЕНТУ

Гуньки Валентина Віталійовича
(прізвище, ім'я, по батькові)

1.Тема роботи згин пластини з двома тріщинами, одна з яких паралельна, а інша перпендикулярна до лінії поділу матеріалів за контакту їх берегів
керівник роботи Доц. Звізло Т.С.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені Вченою радою факультету від "22" лютого 2023 року № 7
2. Строк подання студентом роботи 12 червня 2023 року
3. Вихідні дані до роботи 1. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / Шацький І.П. // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – №7. – с 49-51; 2. Опанасович В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урах. ширини обл. контакту її поверхонь / В.К. Опанасович //
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) 1. Вступ; 2. Постановка задачі; 3. Побудова розв'язку задачі; 4. Чисельний аналіз; 5. Висновки; 6. Список викор. літератури.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної (дипломної) роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка

Студент _____ (підпис) Гунька В.В. (прізвище та ініціали)

Керівник роботи _____ (підпис) Звізло Т.С. (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

Пластинні елементи конструкцій широко використовуються у машинобудуванні, будівельній промисловості, та багатьох інших галузях виробництва. Перевагою цих елементів є їхня легкість і зручність у використанні. Під дією зовнішнього навантаження у них можуть виникати високі концентрації напружень, і як наслідок, тріщиноподібні дефекти. Важливо знати, як останні, будуть впливати на напружено-деформований стан та на міцність пластин при згині.

Початком вивчення задач згину пластин з тріщинами можна вважати роботу M. L. Williams. У ній автор розглянув згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною, береги якої не контактують.

Так як задача згину є трьохвимірною, розв’язок її є дуже складним завданням. Використання класичної теорії згину пластин та плоскої задачі, дозволяє звести її до двохвимірної, що значно полегшує спосіб її розв’язання.

Сформульована задача про згин пластини з двома тріщинами, одна з яких паралельна, а інша перпендикулярна до межі поділу матеріалів за контакту їх берегів. Розв’язання даної задачі зводиться до двох задач: задачі плоскої теорії пружності та задачі згину пластини. Подальший розв’язок зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Для перетворення даної системи у систему алгебраїчних рівнянь використовуємо метод механічних квадратур. Зроблено числовий аналіз даної задачі, і побудовано графіки для контактного зусилля між берегами тріщин.

Постановка задачі

Дослідимо задачу про згин кусково-однорідної ізотропної пластини завтовшки $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів розподіленими згинними моментами на нескінченності, коли в кожній із півплощин є по одній тріщині, одна з яких паралельна, а інша перпендикулярна до прямолінійної межі поділу матеріалів, береги яких контактують по всій довжині під дією зовнішнього навантаження (див. рис. 1).

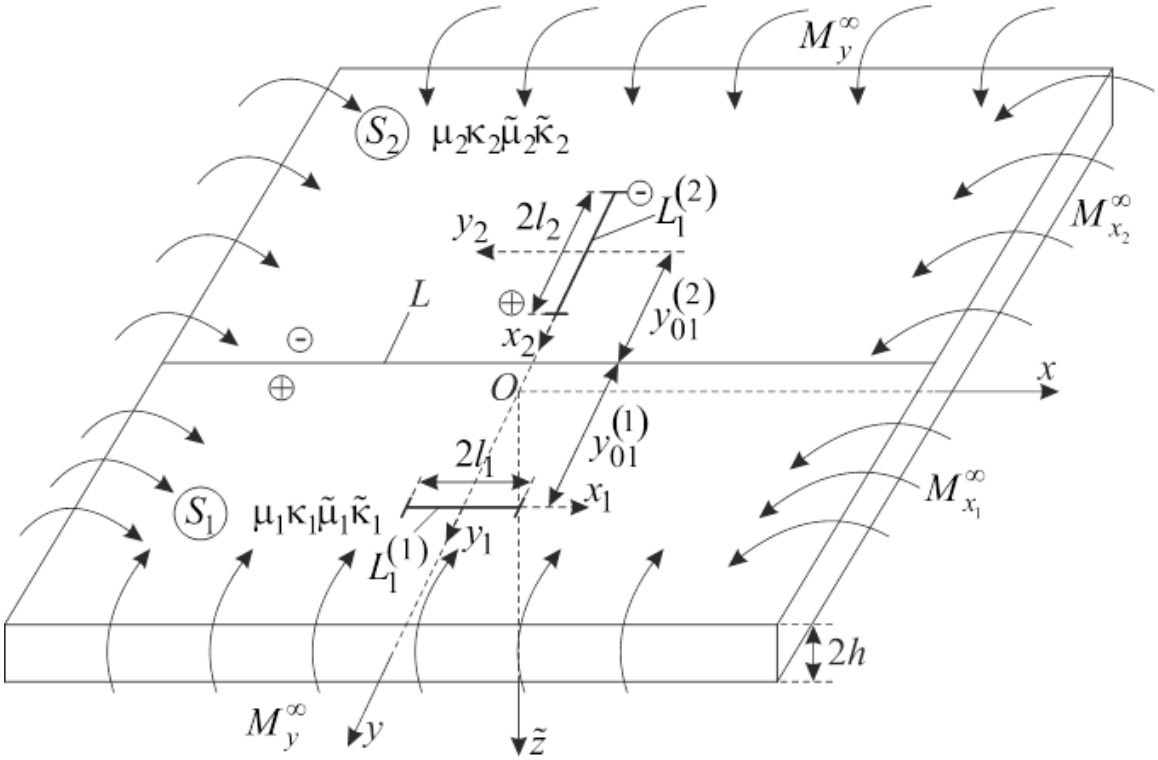

Рис. 1

Виберемо глобальну декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з координатною площиною Oxy у серединній площині пластини, спрямувавши вісь Ox вздовж лінії поділу матеріалів, яку позначимо через L. Півплощину, для якої $y > 0$ $(y < 0)$, позначимо через S_1 (S_2). Величинам, які відносяться до S_j півплощини, будемо приписувати індекс j. З тріщиною завдовжки $2l_j$ зв'яжемо локальну систему координат $O_j x_j y_j$ з початком координат O_j у центрі тріщини, направивши вісь $O_j x_j$ по тріщині. Відрізок дійсної осі $O_j x_j$, для якого $|x_j| \le l_j$, позначимо через L_j. y_{0j} – ордината центру тріщини у

глобальній системі координат, а $z_{0j} = iy_{0j}$ – комплексна координата цього центру. Граничним значенням відповідних величин при $y_j \to \pm 0$ будемо приписувати значки «$\pm$». Позначимо контактне зусилля між берегами тріщини через N_j, а розподілені згинальні моменти на нескінченності – через $M_{x_1}^{\infty}, M_{x_2}^{\infty}, M_y^{\infty}$. Вважаємо, що до деформування пластини береги тріщини були вільними від зовнішнього навантаження.

В подальшому використовуємо такі позначення: $\partial_x = \partial/\partial x$, μ_j – модуль зсуву, E_j – модуль Юнга, ν_j – коефіцієнт Пуассона, $\kappa_j = (3-\nu_j)/(1+\nu_j)$, $\tilde{\kappa}_j = (3+\nu_j)/(1-\nu_j)$, $\tilde{\mu}_j = \left[2D_j(1-\nu_j)\right]^{-1}$, $D_j = 2E_j h^3 \Big/ \left(3(1-\nu_j^2)\right)$, σ_{yy}, σ_{xy} – компоненти тензора напружень, u_{Π}, v_{Π} – компоненти вектора переміщень у плоскій задачі, $P = N_y + \partial_x H_{xy}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила, M_y – згинальний момент; w – прогин пластини.

Контакт берегів тріщини розуміємо в сенсі роботи [1]. За рахунок контакту берегів тріщини задачу розбиваємо на дві задачі: плоску задачу теорії пружності і задачу згину пластини, при чому користуємося класичною теорією згину пластини.

Згідно постановки задачі на берегах тріщини маємо такі крайові умови

$$\sigma_{y_j y_j}^{\pm} = -N_j/(2h), \quad \sigma_{x_j y_j}^{\pm} = 0, \quad x_j \in L_j \tag{1}$$

$$P_j^{\pm} = 0, \quad M_{y_j}^{\pm} = hN_j, \quad x_j \in L_j, \tag{2}$$

$$\left[\partial_{x_j} v_{\Pi j}\right] + h\left[\partial_{x_j y_j}^2 w\right] = 0, \quad x_j \in L_j, \tag{3}$$

де індекс j вказує на прив'язку до системи координат $O_j x_j y_j$; квадратні дужки у формулі (3) означають стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

На межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Побудова розв'язку задачі

При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали $\Phi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z)$ і $\Psi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z)$.

Мають місце залежності:

$$\sigma_{yy}^{(j)} - i\sigma_{xy}^{(j)} = \Phi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z) + \overline{\Phi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z)} + z\overline{\Phi'^{(\text{j})}_{\text{Р}}(z)} + \overline{\Psi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z)},$$

$$2\mu_j(u'_x + iv'_x) = \kappa_j\Phi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z) - \overline{\Phi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z)} - z\overline{\Phi'^{(\text{j})}_{\text{Р}}(z)} - \overline{\Psi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z)}. \qquad (4)$$

Комплексні потенціали подамо у вигляді

$$\Phi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z) = \Phi_{\Pi}^{(\text{j})}(z) + \Phi_{\text{Т}}^{(\text{j})}(z), \quad \Psi_{\text{Р}}^{(\text{j})}(z) = \Psi_{\Pi}^{(\text{j})}(z) + \Psi_{\text{Т}}^{(\text{j})}(z), \qquad (5)$$

де комплексні потенціали $\Phi_{\Pi}^{(\text{j})}(z)$ і $\Psi_{\Pi}^{(\text{j})}(z)$ пов'язані з прямолінійною межею, а $\Phi_{\text{Т}}^{(\text{j})}(z)$ і $\Psi_{\text{Т}}^{(\text{j})}(z)$ – з тріщинами.

Ввівши аналітичне продовження функції $\Phi_{\Pi}^{(\text{j})}(z)$ із області S_j у область S_{3-j}, переписавши (4) та задовольнивши умови ідеального механічного контакту на межі поділу матеріалів, отримаємо задачі лінійного спряження, розв'язавши які, знаходимо явний вигляд для функцій $\Phi_{\Pi}^{(\text{j})}(z)$ і $\Psi_{\Pi}^{(\text{j})}(z)$.

Перейшовши у систему координат $O_j x_j y_j$, з першої крайової умови (1) отримаємо

$$-N_j(x_j)/(2h) = \int_{L_j}\left[\text{L}^{(j)}(t, x_j)\text{g}'(t) + \text{M}^{(j)}(t, x_j)\overline{\text{g}'(t)}\right]dt +$$

$$+ \int_{L_{3-j}}\left[\text{LL}^{(j)}(t, x_j)\text{g}'(t) + \text{MM}^{(j)}(t, x_j)\overline{\text{g}'(t)}\right]dt\,. \qquad (6)$$

При дослідженні напруженого стану, пов'язаного із згином пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_{\text{з}}^{(\text{j})}(z)$ і $\Psi_{\text{з}}^{(\text{j})}(z)$, для яких мають місце залежності [2]

$$\Phi_{\text{з}}^{(\text{j})}(z) + \overline{\Phi_{\text{з}}^{(\text{j})}(z)} + z\overline{\Phi'^{(\text{j})}_{\text{з}}(z)} + \overline{\Psi_{\text{з}}^{(\text{j})}(z)} = \partial_x\,\text{g}_{\text{j}},$$

$$\tilde{\kappa}_j \Phi_з^{(j)}(z) - \overline{\Phi_з^{(j)}(z)} - z\overline{\Phi_з'^{(j)}(z)} - \overline{\Psi_з^{(j)}(z)} = \mathrm{f}_j, \tag{7}$$

де

$$\mathrm{g}_j = i\left(\partial_y w - i\partial_x w\right), \quad \mathrm{f}_j = m_j\left[M_y + iC_0' + i\int_{-a}^{t} N_y d\tau + iH_{xy}\right], \quad m_j = -2\tilde{\mu}_j. \tag{8}$$

Комплексні потенціали подамо у вигляді

$$\Phi_з^{(j)}(z) = \Phi_{зj}(z) + \Gamma_j + \Phi_{зT}^{(j)}(z), \quad \Psi_з^{(j)}(z) = \Psi_{зj}(z) + \Gamma_j' + \Psi_{зT}^{(j)}(z). \tag{9}$$

Зробивши викладки, аналогічні тим, що у плоскій задачі, отримаємо

$$M_{y_j}\left(x_j\right) + iC_j' = \int_{L_j}\left[\mathrm{L}_з^{(j)}\left(t, x_j\right)\mathrm{Q}(t) + \mathrm{M}_з^{(j)}\left(t, x_j\right)\overline{\mathrm{Q}(t)}\right]dt +$$

$$+\int_{L_{3-j}}\left[\mathrm{LL}_з^{(j)}\left(t, x_j\right)\mathrm{Q}(t) + \mathrm{MM}_з^{(j)}\left(t, x_j\right)\overline{\mathrm{Q}(t)}\right]dt + KP_j\ . \tag{10}$$

Введемо позначення

$$\mathrm{Q}_1(t) = \left[\partial_{xy}^2 w\right]/\left(1 + \tilde{\kappa}_j\right) = \mathrm{ReQ},\ \mathrm{Q}_2(t) = -\left[\partial_{xx}^2 w\right]/\left(1 + \tilde{\kappa}_j\right) = \mathrm{ImQ}, \quad \mathrm{g}'(t) = \mathrm{g}_1'(t) + i\,\mathrm{g}_2'(t).$$

З крайової умови (3) одержимо

$$\mathrm{g}_1'(t) = \beta_j\,\mathrm{Q}_1(t), \quad \beta_j = -hE_j/\left(1 - \nu_j\right). \tag{11}$$

Використавши (11), виділивши у (6) і (10) дійсну й уявну частини та підставивши одержані вирази у крайову умову (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь, яку доповнюємо додатковими умовами $\int_{L_k}\mathrm{g}_j'(t)dt = 0$, $\int_{L_k}\mathrm{Q}_j(t)dt = 0$, $\int_{L_k} t\,\mathrm{Q}_2(t)dt = 0$, $j,k = \overline{1,2}$, які виражають собою однозначність переміщень, кутів повороту та прогину при обході контуру тріщини. Кінцевий результат: знаходимо обезрозмірені коефіцієнти інтенсивності напружень K_j^* і моментів $K_{jз}^*$

$$K_{1з}^{*\pm} = \pm 2/3\left(3 + \nu_1\right)/\left(1 - \nu_1^2\right)\lim_{t \to c_j}\sqrt{2\left(c_j - t\right)}\,\mathrm{Q}_1^*(t),$$

$$K_{2з}^{*\pm} = \mp 2/3(3+\nu_1)/(1-\nu_1^2)\lim_{t\to c_j}\sqrt{2(c_j-t)}\,\mathrm{Q}_2^*(t) = \mp G\lim_{t\to c_j}\sqrt{2(c_j-t)}\,\mathrm{Q}_2^*(t)$$

$$K_1^{*\pm} - iK_2^{*\pm} = \mp \lim_{t\to c_j}\sqrt{2(c_j-t)}\,\mathrm{g}'^*(t), \qquad (12)$$

де

$$\mathrm{Q}^*(t) = E_1 h^3 / M_y^\infty\,\mathrm{Q}(t). \qquad (13)$$

Отриману систему розв’язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур.

Числовий аналіз

Був проведений числовий аналіз задачі при $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0.3$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90^\circ$, $\rho = M_{x_1}^{\infty} \big/ M_y^{\infty} = 1$, $\beta = \lg(E_2/E_1)$, $\tilde{l} = l_2/l_1$, $\tilde{y}_i = y_{01}^{(i)} \big/ l_1$, $i = 1,2$.

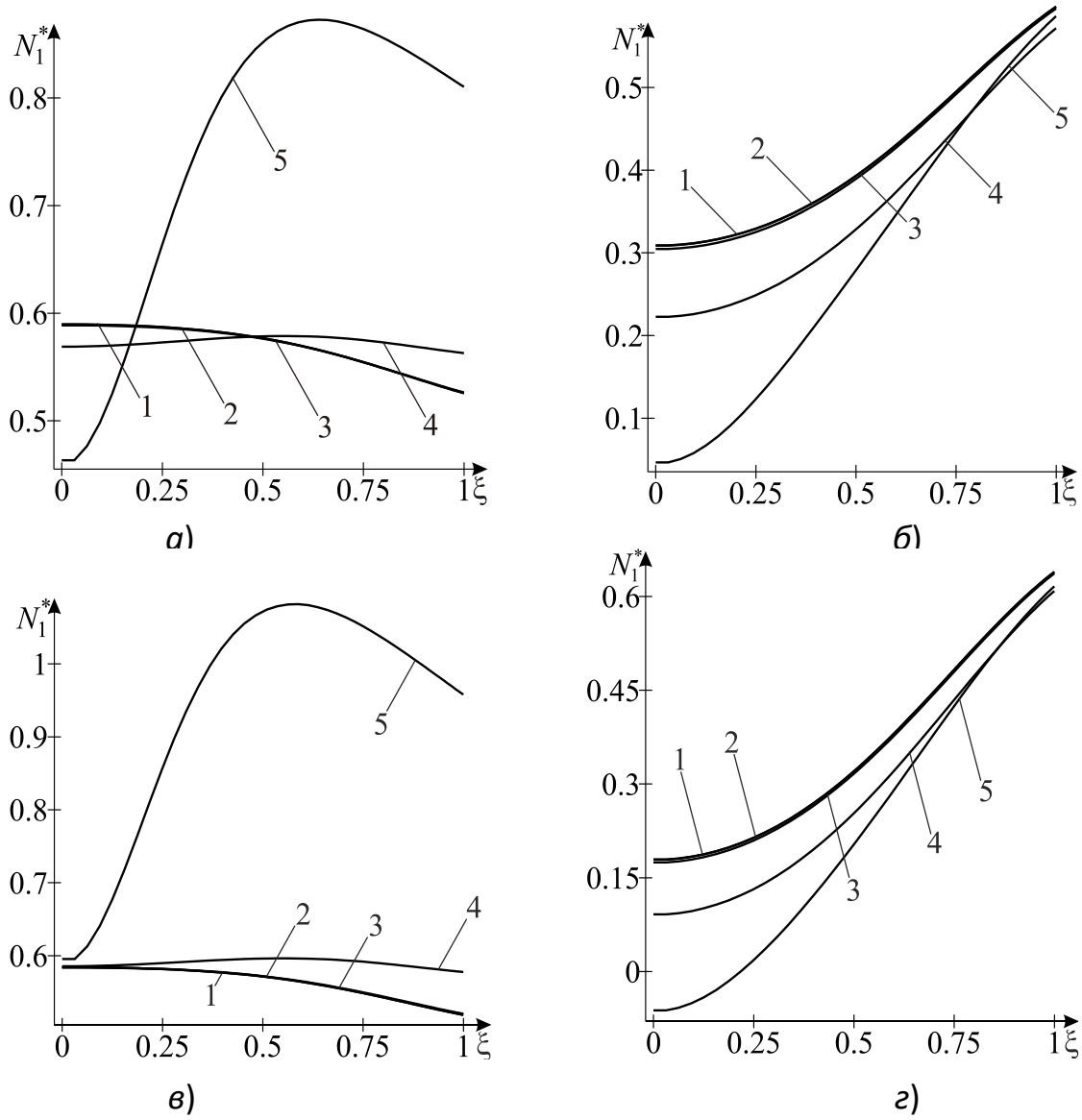

Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля для першої тріщини при різних значеннях β і $\tilde{l}$.

На рис. 2 і 3 зображено контактні зусилля $N_i^*(\xi) = hN_i \big/ M_y^{\infty}$ відповідно між берегами i-ї тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_i / l_i$, $i = 1,2$ при $\tilde{y}_1 = 0.5$, $\tilde{y}_2 = 3$. Рис. *а)* побудовано при $\beta = 1$, рис. *б)* – при $\beta = -1$, рис. *в)* – при $\beta = 2$,

рис. *г)* – при $\beta = -2$. Кривій 1 відповідає значення $\tilde{l} = 0.01$, кривій 2 – $\tilde{l} = 0.1$, кривій 3 – $\tilde{l} = 0.5$, кривій 4 – $\tilde{l} = 2$, кривій 5 – $\tilde{l} = 2.99$. Оскільки криві для N_1^* є симетричними відносно прямої $\xi = 0$, то ми наводимо лише частину графіків, коли $0 \le \xi \le 1$.

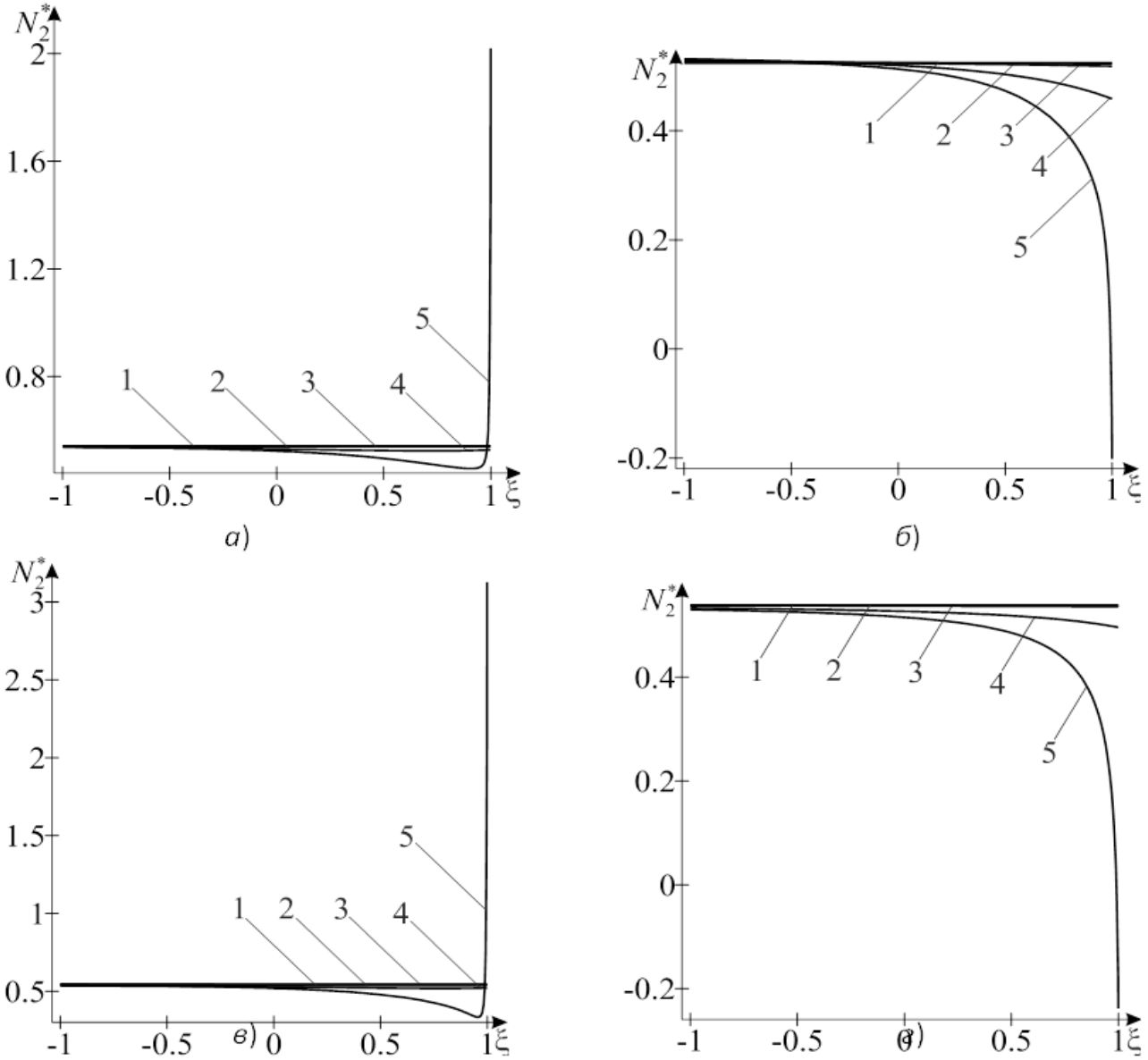

Рис. 3. Графічна залежність зведеного контактного зусилля для другої тріщини при різних значеннях β і $\tilde{l}$.

Як бачимо з цих рисунків, при збільшенні $\tilde{l}$ контактне зусилля на кінцях першої тріщини зростає, коли тріщина знаходиться у площині з більшим модулем пружності ($\beta > 0$), і зменшується всередині тріщини, – коли $\beta < 0$. Як

видно з рис. 2, друга тріщина не впливає на розподіл контактного зусилля на першій тріщині, якщо $l_2 < 0.5l_1$. Якщо $\beta > 0$, то при $l_2 = 2.99l_1$ максимум контактного зусилля досягається на першій тріщині поблизу кінців тріщини.

Щодо другої тріщини, то контактне зусилля є більшим у її вершині, що є ближчою до лінії поділу матеріалів L, ніж всередині, при $\beta > 0$ і меншим – при $\beta < 0$.

Висновки

- Сформульована та розв’язана задача про згин пластини з двома тріщинами, одна з яких паралельна, а інша перпендикулярна до межі поділу матеріалів за контакту їх берегів.
- На основі отриманих результатів та проведеного аналізу побудовані графіки для контактного зусилля між берегами тріщин при різних параметрах.
- З отриманих графіків можна зробити наступні висновки
    1. При віддаленні однієї тріщини від іншої контактне зусилля на кінцях першої зростає, коли вона знаходиться у площині з більшим модулем пружності, і зменшується всередині тріщини, коли модуль пружності менший.
    2. Друга не впливає на розподіл контактного зусилля на першій тріщині, якщо $l_2 < 0{,}5\ l_1$.
    3. Якщо жорсткість півплощини де знаходиться друга тріщина є більшою, то при $l_2 = 2{,}99 l_1$ контактне зусилля досягає максимуму на першій тріщині поблизу кінців.
    4. Контактне зусилля на другій тріщині є більшим у її вершині, яка є ближчою до межі поділу матеріалів ніж всередині, якщо $\beta > 0$ і меншим при $\beta < 0$.

Список використаної літератури

1. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / Шацький І. П. // Доповіді АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – №7. – с. 49-51.
2. Шацький І. Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин / І. Шацький, Т. Даляк // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27-30.
3. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Сулим Г.Т. // Дослідно-видавничий центр НТШ – Львів:, 2007. – 716 с.
4. Саврук М.П. Двовимірні задачі пружності для тіл із тріщинами / Саврук М.П. // Наук. думка – Київ:, 1981. – 324 с.
5. Joseph P.F. Bending of thin Reissner plate with a through crack / P.F. Joseph, F. Erdogan // Journal of Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 58. – P. 842-846.
6. Божидарнік В.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів: Проблемы прочности / В.В. Божидарнік, В.К. Опанасович, П.В. Герасимчук. – 2006, № 5 (383). – С. 135-141.
7. Опанасович В. К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
8. Williams M. L. The bending stress distribution on the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. – 1961. – Vol. 28.- №1.- P. 78-82.