ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Механіко-математичний факультет

Кафедра механіки

Пояснювальна записка

до кваліфікаційної (дипломної) роботи

бакалавр

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

Двовісний згин на нескінченності кусково-однорідної пластини з пружною шайбою та радіальною тріщиною у шайбі за контакту її берегів

Виконав: студент IV курсу,
група МТП-41,
спеціальність 113 Прикладна математика
спеціалізація Математичне моделювання та комп'ютерна механіка

Бариляк В.Р.

Керівник *доц. Звізло І.С*

Рецензент доц., к.т.н. Мельничин А.В.
Каф. теорії оптимальних процесів
ЛНУ ім. І. Франка

Львів - 2023

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ІВАНА ФРАНКА

Факультет механіко-математичний
Кафедра механіки
Освітньо-кваліфікаційний рівень бакалавр
Спеціальність **113 прикладна математика**
(шифр і назва)
Спеціалізація Математичне моделювання та комп'ютерна механіка

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедри механіки
проф. Андрейків О.Є.
"23" лютого 2023 року

З А В Д А Н Н Я

НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ (ДИПЛОМНУ) РОБОТУ СТУДЕНТУ

Бариляку Віталію Романовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1.Тема роботи Двовісний згин на нескінченності кусково-однорідної пластини з пружною шайбою та радіальною тріщиною у шайбі за контакту її берегів

керівник роботи Звізло І.С. доц.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені Вченою радою факультету від "22" лютого 2023 року № 7

2. Строк подання студентом роботи 12. 06. 2023

3. Вихідні дані до роботи Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7 – С. 49-51; Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81–93.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Вступ; Формулювання задачі; Побудова розв'язку задачі; Числовий аналіз задачі; Висновки; Список використаної літератури

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)

6. Консультанти розділів роботи

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв

7. Дата видачі завдання ______________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної (дипломної) роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка

Студент ______________ (підпис) Бурляк В. Р. (прізвище та ініціали)

Керівник роботи ______________ (підпис) Звізло Р. С. (прізвище та ініціали)

Зміст

Вступ

Конструктивні пластинчасті елементи широко застосовують у машинобудуванні та інших галузях техніки. З технологічних міркувань вони можуть містити кругові включення, де під час виготовлення чи в процесі експлуатації у них можуть виникнути тріщиноподібні дефекти. А тому дуже важливим є, вивчення та аналіз даної проблеми, та як під дією зовнішнього згинального навантаження поблизу цих дефектів виникає висока концентрація напружень, що зменшує їхню міцність, довговічність і може призвести до руйнування даної конструкції.

У більшість наукових праць, що стосуються даної проблематики, автори не враховували контакт берегів тріщини. Хоча зрозуміло, що під дією згинного навантаження береги контактують. Саме таку задачу вивчаємо у даній роботі.

В даній роботі розв’язана задача про двовісний згин кусково-однорідної пластини з пружною круговою шайбою та радіальною тріщиною у шайбі з урахуванням контакту її берегів. Задача зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь, після чого методом механічних квадратур перетворена у систему алгебраїчних рівнянь. На основі розв’язків даної системи, побудовано графічні залежності контактного зусилля між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів за різни значень геометричних і механічних параметрів.

Формулювання задачі

Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка складається з пластини з круговим отвором радіуса R, в який впаяна шайба того самого радіуса. Вважаємо, що пластина перебуває під дією розподілених згинальних моментів на нескінченості. Крім того, в шайбі наявна одна радіальна наскрізна прямолінійна тріщина, береги якої під дією зовнішнього навантаження приходять у гладкий контакт по лінії на одній з основ пластини, причому береги тріщин були вільні від зовнішнього навантаження. Потрібно визначити напружено-деформований стан пластини.

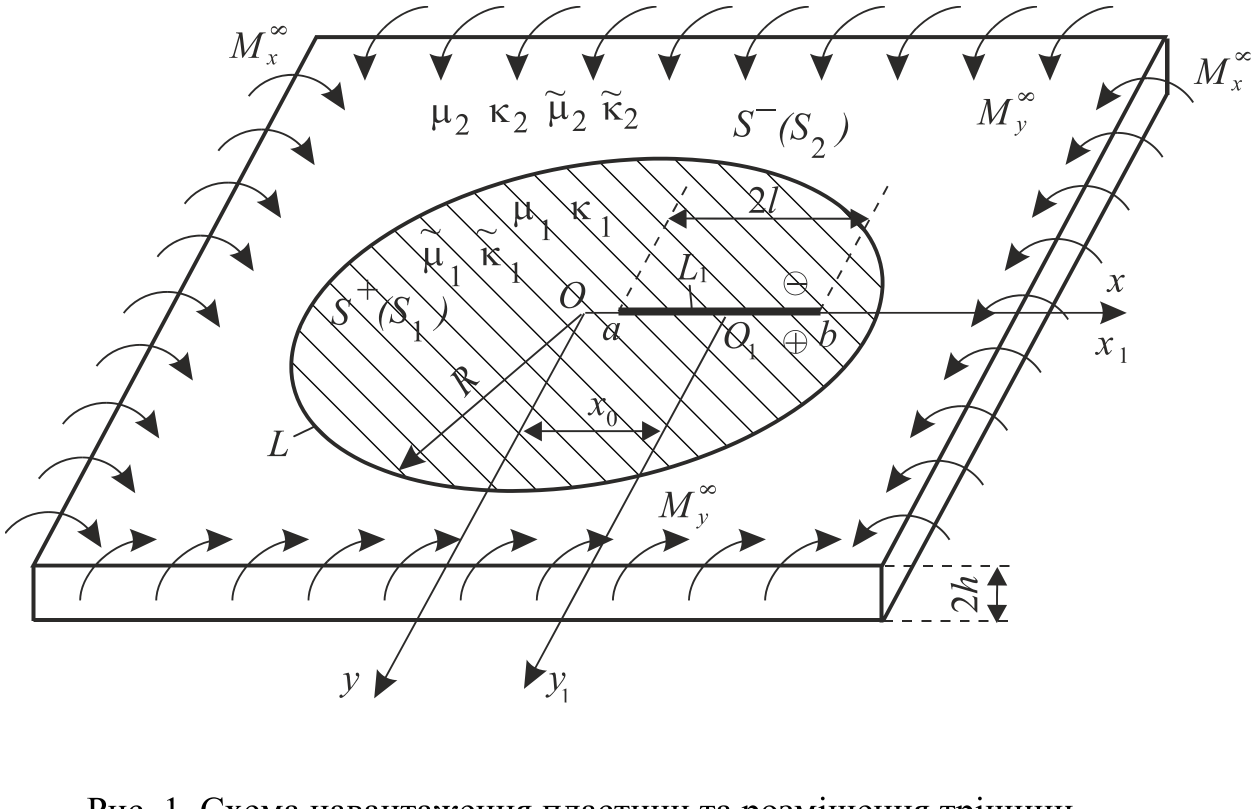

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

У середній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком координат у центрі кругової шайби, спрямувавши вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до серединної площини. З тріщиною завдовжки $2l$ зв'язуємо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат у центрі тріщини, спрямувавши вісь O_1x_1 по ній. Область у середині шайби позначимо через $S_1(S^+)$, зовні – $S_2(S^-)$. Будемо користуватись полярною системою координат r,θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox. Відрізок дійсної осі $O_1x_1y_1$ для якого $\left|x_1\right| < l$, позначимо L_1, x_{01}– координата центру тріщини у глобальній системі координат Oxy. Граничним значенням відповідних величин при $y_1 \to \pm 0$ або $r \to R \pm 0$ будемо приписувати значки "+" і "–", відповідно. Параметрам, пов'язаним із шайбою, будемо приписувати індекс "1", а для матриці – індекс "2". Надалі індекс j набуває значень 1 і 2.

Під дією згинальних моментів M_x^∞ і M_y^∞ береги тріщин контактуватимуть, то розв'язок задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу та задачу згину, де користуємось класичною теорію згину пластин.

Згідно з формулюванням задачі отримали такі крайові умови:

$$\sigma_{y_1y_1}^{(1)\pm} = -N/\left(2h\right),\ \sigma_{x_1y_1}^{(1)\pm} = 0,\ x_1 \in L_1, \tag{1}$$

$$P_{y_1}^{(1)\pm} = 0,\ M_{y_1}^{(1)\pm} = hN,\ \left[\partial_{x_1} v_P^{(1)}\right] + h\left[\partial_{x_1y_1}^2 w^{(1)}\right] = 0,\ x_1 \in L_1, \tag{2}$$

$$P_r^{(1)} = P_r^{(2)},\ M_r^{(1)} = M_r^{(2)},\ w^{(1)} = w^{(2)},\ \partial_r w^{(2)} = \partial_r w^{(2)}, \text{на } L, \tag{3}$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)},\ \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)},\ u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)},\ u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)}, \text{на } L, \tag{4}$$

де $N -$ контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{y_1y_1}^{(j)}$, $\sigma_{x_1y_1}^{(j)}$ і $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$– компоненти тензора напружень; а $u_P^{(j)}, v_P^{(j)}$ і $u_{rP}^{(j)}$, $u_{\theta P}^{(j)}$ – компоненти вектора переміщення точки у плоскій задачі; $P_{y_1}^{(j)}$ і $P_r^{(j)}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $M_{y_1}^{(j)}$ і $M_r^{(j)}$ – згинальний момент ; $w^{(j)}$– прогин пластини. Квадратні дужки у формулі (2) вказують на стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

Побудова розв’язку задачі

Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі і класичної теорії згину пластин, розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано системи сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини у задачі згину $Y(\eta)$ та стрибків переміщень на берегах тріщин у плоскій задачі $G(\eta)$

$$\int_{-1}^{1}\left\{K(\eta,\varepsilon)+L(\eta,\varepsilon)\right\}Y_1(\eta)d\eta=c',\ \int_{-1}^{1}\left\{R(\eta,\varepsilon)-S(\eta,\varepsilon)\right\}G_2(\eta)d\eta=0, \quad (5)$$

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(L(\eta,\varepsilon)-K(\eta,\varepsilon)\right)Y_2(\eta)+2\left(R(\eta,\varepsilon)+S(\eta,\varepsilon)\right)G_1(\eta)\right\}d\eta=P(\varepsilon), \quad (6)$$

де

$$K(\eta,\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi\tilde{\mu}_1}\left\{\frac{\eta}{2\lambda^2}\left(\tilde{D}_{21}\left(1-\tilde{\kappa}_1\right)+\tilde{D}_{61}\frac{\lambda^2}{X^2}\right)-\tilde{\kappa}_1\left(\frac{1}{T-X}+\frac{\tilde{A}_4\tilde{\kappa}_1T}{T_1}\right)-\right.$$

$$-\tilde{A}_4\left(\frac{\lambda^2}{T_1^2}\left(\frac{\lambda^2}{T}-T\right)-\frac{1}{T}\right)+\frac{2\lambda^2\tilde{A}_4TX}{T_1^3}\left(\frac{\lambda^2}{T}-T\right)+$$

$$\left.+\left(\frac{\lambda^2}{X^2}\left(\frac{\tilde{A}_3X}{T_1}-\tilde{A}_4\left(-\frac{1}{T}+\frac{\lambda^2\left(3TX-\lambda^2\right)}{T_1^3}\left(\frac{\lambda^2}{T}-T\right)\right)\right)\right)-\frac{\tilde{\kappa}_1}{T-X}\right\},$$

$$L(\eta,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi\tilde{\mu}_1}\left\{\frac{\lambda^2\tilde{A}_4\tilde{\kappa}_1}{T_1^2}\left(\frac{\lambda^2}{T}-T\right)-\frac{\tilde{A}_4\tilde{\kappa}_1}{T}+\left(T-X\right)+\right.$$

$$+\frac{\tilde{A}_4\tilde{\kappa}_1T}{T_1}+X\left(\frac{1}{\left(T-X\right)^2}-\frac{\tilde{A}_4\tilde{\kappa}_1T^2}{T_1^2}\right)-\frac{T}{\left(T-X\right)^2}+$$

$$\left.+\frac{\tilde{A}_4\tilde{\kappa}_1\lambda^2T}{X^2}\left(\frac{1}{T_1}+\frac{TX}{T_1^2}\right)+0.5\eta\lambda^2\left(\tilde{D}_{31}\left(1-\tilde{\kappa}_1\right)+\frac{\tilde{D}_{61}\lambda^2}{X^2}\right)\right\},$$

$$R(\eta,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{A_4\eta}{\lambda^2\left(1-A_4\right)}\left(2A_4+\left(A_4-1\right)\frac{\lambda^2}{X^2}\right)+\frac{A_4}{T}\left(1+\frac{\lambda^2}{X^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{2}{T-X}+\frac{A_3\lambda^2}{X\ T_1}-A_4\left(\frac{T}{T_1}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda^2}{T_1^2}\left(1+\frac{\lambda^2}{X^2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{T}-T\right)-2\lambda^2T\left(X-\frac{\lambda^2}{X}\right)\left(\frac{\lambda^2}{T}-T\right)\frac{1}{T_1^3}\right)\right\},$$

$$S\left(\eta,\varepsilon\right)=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{A_4}{T}+\frac{1}{T-X}-1-A_4\left(\frac{\lambda^2}{T_1^2}\left(\lambda^2T^{-1}-T\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1+\frac{\lambda^2}{X^2}\right)\frac{T}{T_1}-\frac{T^2}{T_1^2}\left(X-\frac{\lambda^2}{X}\right)\right)+A_4\eta\lambda^2\left(1-A_4\right)^{-1}\left(2A_4+\frac{\lambda^2}{X^2}\left(A_4-1\right)\right)\right\},$$

$$P\left(\varepsilon\right)=-\frac{\Gamma_2}{\tilde{\mu}_1}\left\{\frac{1-\tilde{g}^{-1}\tilde{A}_3}{1-\tilde{A}_4}\left(1-\tilde{\kappa}_1\right)+\left(1+\tilde{g}\tilde{A}_4\right)\right\},$$

$$T=X_0+\eta,\ X=X_0+\eta,\ X_0=x_0/l,\ \eta=x_1/l,\ \varepsilon=x_1/l,$$

$$\rho=\frac{M_x^\infty}{M_y^\infty},\ \tilde{n}=\frac{E_2}{E_1},\ \lambda=\frac{R}{l},\ T_1=\bar{X}T-\lambda^2,\ \mu_1=\frac{1}{2\left(1+\upsilon_1\right)},\ \mu_2=\frac{\tilde{n}}{2\left(1+\upsilon_2\right)},$$

$$\kappa_j=\frac{3-\upsilon_j}{1+\upsilon_j},\ \tilde{\kappa}_1=\frac{3+\upsilon_j}{1-\upsilon_j},\ \tilde{\mu}_j=\frac{1}{2D_j\left(1-\upsilon_j\right)},\ D_1=\frac{2}{3\left(1-\upsilon_1^2\right)},D_2=\frac{2\tilde{n}}{3\left(1-\upsilon_2^2\right)},$$

$$A_1=\mu_1+\mu_2\kappa_1,\ A_2=\mu_2+\mu_1\kappa_2,\ \tilde{A}_1=\tilde{\mu}_1+\tilde{\mu}_2\tilde{\kappa}_1,\ \tilde{A}_2=\tilde{\mu}_2+\tilde{\mu}_1\tilde{\kappa}_2,$$

$$g=-A_1/A_2,\ \tilde{g}=-\tilde{A}_1/\tilde{A}_2,\ A_4=\left(\mu_2-\mu_1\right)A_1^{-1},\ \tilde{A}_4=\left(\tilde{\mu}_2-\tilde{\mu}_1\right)\tilde{A}_1^{-1},$$

$$A_3=A_2^{-1}\left(\mu_1\kappa_2-\mu_2\kappa_1\right),\ \tilde{A}_3=\tilde{A}_2^{-1}\left(\tilde{\mu}_1\tilde{\kappa}_2-\tilde{\mu}_2\tilde{\kappa}_1\right),\ A_5=\mu_2A_1^{-1}\left(1+\kappa_1\right),$$

$$\Gamma_2=-\frac{1+\rho}{4D_2\left(1+\upsilon_2\right)},\ D_3=\frac{1-A_3g^{-1}}{1-A_4^2},\ \tilde{D}_{31}=\frac{\tilde{A}_4^2\left(1-\tilde{\kappa}_1\right)}{1-\tilde{A}_4},\ \tilde{D}_{61}=\tilde{A}_4\left(\tilde{\kappa}_1-1\right),$$

$$y\left(x\right)E_{\ 1}h^3/M_y^\infty=Y\left(x\right)=Y_1\left(x\right)+iY_2\left(x\right),$$

$$y\left(x\right)=\left(1+\tilde{\kappa}_1\right)^{-1}\left[\partial_{\ x}w^{(1)}+i\partial_{\ y}w^{(1)}\right],$$

$$\frac{h^2g'\left(x\right)}{M_y^\infty}=G\left(x\right)=G_1\left(x\right)+iG_2\left(x\right),\ g'\left(x_1\right)=\frac{2\mu_1}{i(1+\kappa_1)}\left[\partial_{x_1}\left(u_P+iv_P\right)\right].$$

З крайової умови (2) отримаємо

$$G_1(\eta)+\frac{1+\tilde{\kappa}_1}{(1+\tilde{\kappa}_1)(1+\upsilon_1)}Y_2(\eta)=0\,. \tag{7}$$

Систему рівнянь (5)-(7) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_1^1 Y(\eta)d\eta=0\,,\ \int_1^1 G(\eta)d\eta=0\,,\ \int_1^1 \eta Y_2(\eta)d\eta=0\,, \tag{8}$$

де перші дві умови виражають собою однозначність кутів повороту у задачі згину та однозначність переміщень у плоскій задачі, а остання - однозначність прогину при обході контура тріщини. Умови ідеального механічного контакту на коловій межі поділу матеріалів (3)-(4) вдалося задовольнити аналітично.

Зведене контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^*=\frac{hN}{M_y^\infty}=2\int_{-1}^1\left\{R(\eta,\varepsilon)+S(\eta,\varepsilon)\right\}G_1(\eta)d\eta\,.$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КІМ) $K=K_1-iK_2$ та зусиль (КІЗ) $k=k_1-ik_2$ можна обчислити за формулами

$$k=\mp h\lim_{x\to\pm l}\left(f(x)g'(x)\right),\ f(x\ \ )=\sqrt{\left(l^2-x^2\right)/l}\ ,$$

$$K\ \ =\mp 4E_1h^3\left(3+\upsilon_1\right)\left(3\left(1-\upsilon_1^2\right)\right)^{-1}\lim_{x\to\pm l}\left(f(x)y(x)\right).$$

Числовий аналіз задачі

Система сингулярних інтегральних рівнянь (5)-(8) розв'язана чисельно з використанням методу механічних квадратур при $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0.3$.

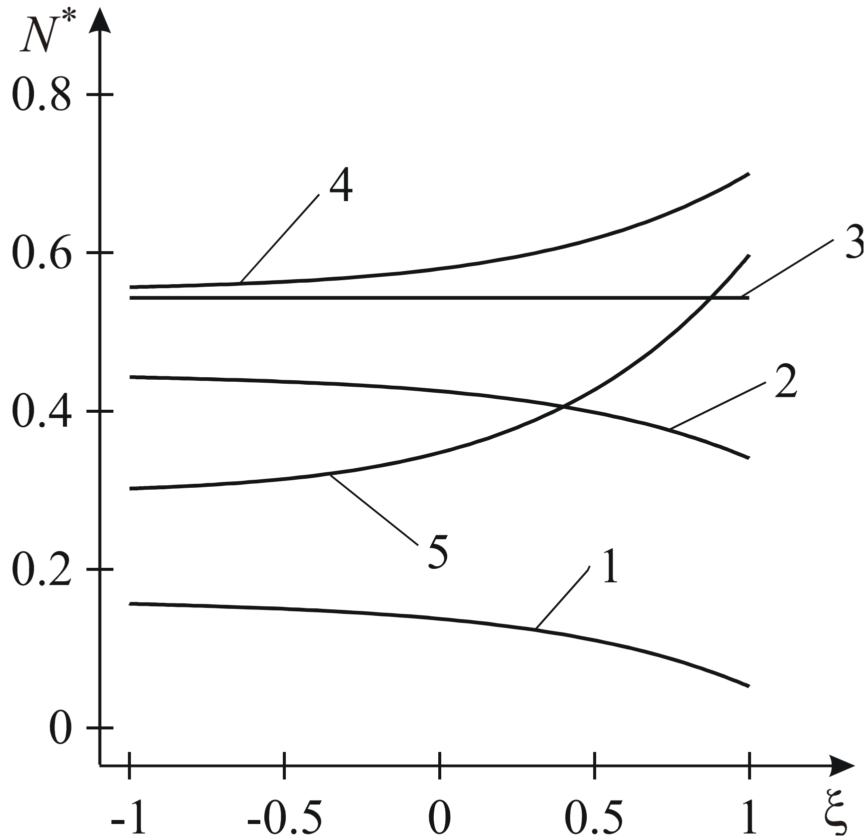

Рис. 2. Графічна залежність контактного зусилля N^* між берегами тріщини при різних $\beta = \lg\left(E_1 / E_2\right)$

На рис. 2 зображено графічну залежність приведеного контактного зусилля $N^* = hN / M_y^\infty$ між берегами тріщини від безрозмірної координати $\xi = x_1 / l$ при $\rho = 1$, $\lambda = 5$, $X_0 = 3$. Крива 1 побудована при $\beta = -1$, крива 2 – при $\beta = -0.3$, крива 3 – при $\beta = 0$, крива 4 – при $\beta = 0.3$, крива 5 – при $\beta = 1$. При $\beta < 0$ величина контактного зусилля є максимальною у вершині *a* $\left(\xi = -1\right)$, а при $\beta > 0$ – максимальна у вершині $b\left(\xi = 1\right)$, поблизу колової межі поділу матеріалів. При $\beta = 0$ отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини у пластині.

На рис. 3 побудовано графічну залежність КІМ $K_1^* = K_1 \Big/ \left(M_y^\infty \sqrt{l} \right)$ від $\beta = \lg \dfrac{E_1}{E_2}$ при $\lambda = 4$, $\rho = 1$. Криві 1 побудовані при $X_0 = 0$, криві 2 – при $X_0 = 0.3$, криві 3 – при $X_0 = 1.3$, криві 4 – при $X_0 = 2$. При $\beta < 0$ КІМ у вершинах тріщини *a* та *b* зростають із збільшенням β. При $\beta > 0$ величина КІМ у вершині тріщини *b* є більшою ніж у вершині *a*. Крім того, при наближенні вершини тріщини *b* до колової межі поділу матеріалів при $\beta > 0$ КІМ у ній збільшуються.

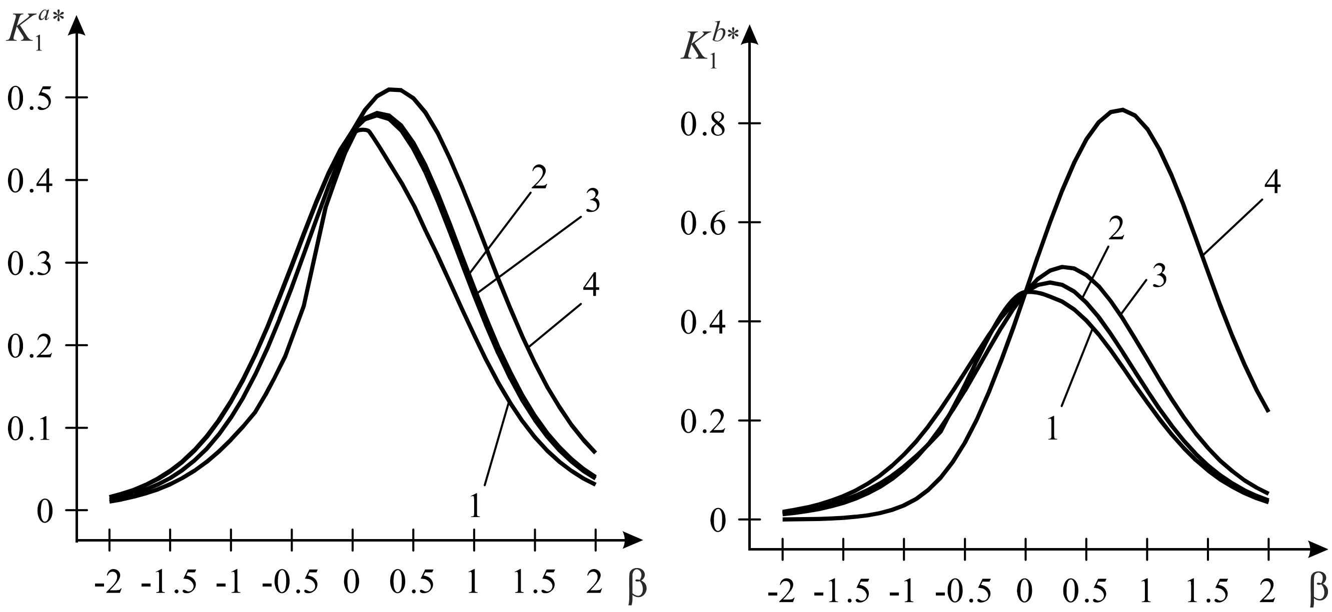

Рис. 3. Графічна залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів від β при різних значеннях $X_0 = x_0 \big/ l$

Зауважимо, що зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $k_1^* = h\,k_1 \Big/ \left(M_y^\infty \sqrt{l} \right)$ і моментів K_1^* пов’язані між собою залежністю $k_1^* \big/ K_1^* = 3\left(1 + \upsilon_1\right) \big/ \left(3 + \upsilon_1\right)$, тому графічні залежності для k_1^* не подаємо, а $k_2^* = 0$ і $K_2^* = 0$.

Висновки

- Сформульована та розв'язана задача про двовісний згин кусково-однорідної пластини з пружною круговою шайбою та радіальною тріщиною у шайбі з урахуванням контакту її берегів.
- Побудовані графічні залежності для контактного зусилля між берегами тріщини та коефіцієнтів інтенсивності моментів при різних значеннях механічних параметрів.
- Аналіз графічних залежностей показав:
  1. Якщо жорсткість шайби є меншою за жорсткість матриці то величина контактного зусилля є максимальною у вершині більш віддаленій від межі поділу матеріалів і якщо жорсткість шайби більша – то максимальні контактні зусилля більші у ближній до межі вершині тріщини.
  2. Якщо жорсткість шайби є такою ж як і матриці, то отримаємо випадок однієї ізольованої тріщини
  3. Якщо $\beta > 0$ то коефіцієнти інтенсивності моментів у вершині ближчій до межі поділу матеріалів є більшими ніж у дальній вершині.

Список використаної літератури

1. Alwar R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Engineering Fracture Mechanics. – 1983. – Vol. 17. – No. 4. – P. 323-333.
2. Шацький І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
3. Young M. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / M. Young, C. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
4. Опанасович В. Вплив контакту берегів двох співвісних тріщин на напружений стан трансверсально-ізотропної пластини в умовах чистого згину / В. Опанасович, Р. Селіверсов // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 152-157.
5. Heming F. S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate / F.S. Jr. Heming // International Journal of Fracture. – 1980. – Vol. 16. – No. 4. – P. 289-304.
6. Kwon Y.W. Finite element analysis of crack closure in plate bending / Y.W. Kwon// Computers and Structures. – 1989. – Vol. 32. – No. 6. – P. 1439-1445.
7. Murthy M. On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissner's theory / M. Murthy, K. Raju, S. Viswanath // International Journal of Fracture. –1981. – Vol. 17. – P. 537-552.
8. Шацький І.. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов’язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2. – С. 51-54.

9. Шацький І.П. Граничний стан напівнескінченної пластини з крайовою тріщиною за згину з розтягом / І.П. Шацький, В.В. Перепічка // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2004. – Т. 40. – № 2. – С. 73-77.

10. Опанасович В. К. Двосторонній згин пластини з круговим отвором та тріщиною з врахуванням контакту її берегів / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. – 2005. – Вип. 1. – С. 85-89.

11. Опанасович В.К. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.

12. Опанасович В. Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують/ В. Опанасович, М. Слободян // Вісник Львівського державного аграрного університету. – 2007. – № 8. – с. 75-87.

13. Dempsey J.P. Closure of a through crack in a plate under bending. / J.P. Dempsey, I.I. Shektman, L.L. Slepyan // International Journal or Solids and Structures. – 1998. – Vol.35. – P. 4077-4089.

14. Slepyan L.I. Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepyan, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.

15. Опанасович В. Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: наук. зб.; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів : Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155–160.

16. Опанасович В. Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло,

І.М. Яцик // Вісн. Дніпропетровського ун-ту, 2007. Механіка. Вип. 11, том 2. № 2/2. С.141-148.

17. Опанасович В. Двосторонній згин ізотропної кусково-однорідної пластини з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням контакту берегів / Віктор Опанасович, Іван Звізло // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. Львів: Каменяр. – 2009. – Вип. 8. – С. 63-78.
18. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів, 2007.