

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра алгебри, топології та основ математики**

**Затверджено**

На засіданні  
кафедри алгебри, топології та  
основ математики  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 29.08.2023 р.)



Завідувач кафедри: Тарас Банах

---

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**“Методи лінійної алгебри”,**  
**що викладається в межах ОПШ**  
**“ Статистичний аналіз даних ”**  
**другого (магістерського) рівня вищої освіти для здобувачів з**  
**спеціальності 112 - Статистика**

Львів 2023 р.

<b>Назва дисципліни</b>	<b>Методи лінійної алгебри</b>
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Львівський національний факультет імені Івана Франка, Механіко-математичний факультет, вул. Університетська 1, м. Львів
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичного факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 112 Статистика
<b>Викладачі дисципліни</b>	Романів Олег Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:oleh.romaniv@lnu.edu.ua">oleh.romaniv@lnu.edu.ua</a> , <a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstaff/1443">http://mmf.lnu.edu.ua/algstaff/1443</a> ;  м. Львів, вул. Університетська, 1, каб. 375
<b>Консультації</b>	Консультацію з теоретичної чи практичної частини курсу можна отримати в чаті <b>MS Teams</b> , групі курсу в <b>Telegram</b> у будь-який зручний для студентів та викладача час, а також в ауд. 375 в день проведення лекцій чи практичних занять за попередньою домовленістю.
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/2016">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/2016</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Методи лінійної алгебри” є нормативною дисципліною з спеціальності 112 – статистика для освітньої програми “Статистичний аналіз даних”, яка викладається в 1 семестрі магістратури в обсязі 4-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	В курсі «Методи лінійної алгебри» ми розглянемо деякі теоретичні і практичні поняття за межами стандартного курсу лінійної алгебри, які надзвичайно важливі для прикладних програм. Переважно це теми, які мають застосування для статистичного аналізу даних і машинного навчання, а також для економіки та статистики. Ми розпочнемо з оборотності прямокутних матриць, тобто ми обговоримо псевдообернені матриці (та їхні зв'язки з моделлю лінійної регресії). Серед іншого, ми обговоримо ітераційні методи (та їх використання в моделях теорії графів, застосованих до Інтернет-пошуку, наприклад, алгоритм PageRank), матричні декомпозиції (такі як SVD) і методи зменшення розмірності (з їх зв'язком з деякими алгоритмами стиснення зображень), а також теорію матричних норм і теорію збурень (для оцінок похибок у матричних обчисленнях)
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	<b>Мета дисципліни:</b> ознайомити студентів з парадигмами сучасних методів лінійної алгебри, їх застосуванням до прикладних задач. <b>Цілі дисципліни:</b> надати магістрам широкий спектр сучасних методів лінійної алгебри, навчити застосовувати їх до конкретних практичних задач і проектів, у моделюванні реальних складних систем.

<p><b>Література для вивчення дисципліни</b></p>	<p><b>Методичні матеріали</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Романів О.М. Електронний навчальний курс “Методи лінійної алгебри”, 2022 <a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/2016">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/2016</a>.</li> <li>2. Романів О.М. Електронний навчальний курс “Лінійна алгебра. Частина 1”, 2022 <a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/446">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/446</a>.</li> <li>3. Романів О.М. Електронний навчальний курс “Лінійна алгебра. Частина 2”, 2022 <a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/301">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/301</a>.</li> </ol> <p><b>Рекомендована література</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>4. Charu C. Aggarwal, Linear Algebra and Optimization for Machine Learning, Springer Nature Switzerland AG, 2020.</li> <li>5. Nathaniel Johnston, Advanced Linear and Matrix Algebra, Springer Cham, 2021.</li> <li>6. Ferrante Neri, Linear Algebra for Computational Sciences and Engineering, Springer Cham, 2019.</li> </ol> <p><b>Додаткова література та інтернет-ресурси</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>7. Tom Lychе, Numerical Linear Algebra and Matrix Factorizations, Springer Cham, 2021.</li> <li>8. Онлайн-курс «Mathematics for Machine Learning: Linear Algebra» на Coursera: <a href="https://www.coursera.org/learn/linear-algebra-machine-learning">https://www.coursera.org/learn/linear-algebra-machine-learning</a></li> <li>9. Онлайн-курс «Essential Linear Algebra for Data» на Coursera:: <a href="https://www.coursera.org/learn/essential-linear-algebra-for-data-science">https://www.coursera.org/learn/essential-linear-algebra-for-data-science</a>.</li> </ol>
<p><b>Обсяг курсу</b></p>	<p>Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 48 год., з них 16 год. лекційних та 32 годин практичних робіт. Самостійна робота: 72 год.</p>
<p><b>Очікувані результати навчання</b></p>	<p>У результаті вивчення навчальної дисципліни відповідно до освітньої програми формуються <b>програмні компетентності</b>:</p> <p><b>Загальні компетентності:</b></p> <p>ЗК-1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.</p> <p>ЗК-2. Здатність застосувати знання у практичних ситуаціях, генерувати нові ідеї, розробляти проекти та управляти ними.</p> <p>ЗК-3. Знання та розуміння предметної області та застосування у професійної діяльності.</p> <p>ЗК-7. Розуміння сучасних інформаційних і комунікаційних технологій, їхнього ефективного використання при аналізі даних.</p> <p><b>Спеціальні (фахові, предметні) компетентності:</b></p> <p>СК-2. Здатність будувати математичні моделі реальних явищ і процесів в різних предметних галузях, досліджувати їх засобами математики та статистики.</p> <p>СК-3. Здатність застосовувати методи прикладної статистики до аналіз конкретних датасетів економічної, фінансової, соціальної природи.</p> <p>СК-6. Володіти специфічними статистичними методами для візуалізації та аналізу великих даних, а також даних в мережах складної структури.</p> <p><b>Програмні результати навчання:</b></p> <p>РН-1. Володіти знаннями й розумінням основних принципів математичної науки.</p>

	<p>PH-4. Знати методи математичного і статистичного моделювання складних явищ та систем.</p> <p>PH-6. Розв'язувати практичні задачі аналізу даних, перевіряти статистичні гіпотези, працювати з реальними великими наборами даних.</p>
<b>Ключові слова</b>	Лінійна алгебра, числові методи, оптимізація, машинне навчання, глибоке навчання, нейронні мережі, динамічне програмування, лінійна регресія, матрична алгебра, числова алгебра, градієнтний спуск, теорія матриць
<b>Формат курсу</b>	Очний
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Іспит у першому семестрі в письмовій формі.
<b>Пререквізити</b>	<p>Для вивчення цього курсу студенти повинні мати базові знання з</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ лінійної алгебри,</li> <li>✓ теорії матриць,</li> <li>✓ теорії чисел.</li> </ul>
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	<p>Основними методами навчання, що використовуються в процесі викладання навчальної дисципліни «Методи лінійної алгебри» є:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• метод передачі і сприйняття навчальної інформації, пробудження наукового інтересу (розповідь, пояснення, бесіда, лекція, презентація, демонстрація, спостереження, аналіз);</li> <li>• метод практично-орієнтованого засвоєння курсу з допомогою розв'язування задач за темами курсу для набуття умінь і практичних навичок (практичні заняття);</li> <li>• метод контролю з допомогою періодичного складання колоквиумів та контрольних робіт за тематикою лекційних та практичних занять;</li> <li>• метод самостійного засвоєння студентами навчального матеріалу у вигляді виконання домашніх завдань та розв'язування задач підвищеної складності, зокрема на доведення, з визначених тем курсу на підставі самостійно опрацьованої базової літератури та додаткових джерел інформації, інтернет-ресурсів з метою конкретизації й поглиблення базових знань, необхідних умінь та практичних навичок (самостійна робота);</li> <li>• інтерактивні методи (демонстраційні вправи, мозковий штурм, дискусії, діалогова форма набуття знань, обговорення складних дискусійних питань і проблем тощо) на лекціях, практичних заняттях та консультаціях.</li> </ul> <p>Під час навчання застосовуватимуться лекції, презентації, комплексні завдання, електронні матеріали з навчального курсу, спільні розробки, практично-орієнтоване навчання, інтерактивні методи, виконання індивідуальних завдань.</p>
<b>Необхідне обладнання</b>	Для вивчення навчальної дисципліни «Методи лінійної алгебри» потрібно: дошка, крейда, навчальні посібники, мультимедійний проектор, комп'ютер, доступ до мережі «Інтернет», доступ до платформ Microsoft Teams, Zoom, Telegram, електронна пошта.
<b>Критерії оцінювання (ок-</b>	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за схемою:

<p><b>ремо для кожного виду навчальної діяльності)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ два тести з теорії та практики: 20% семестрової оцінки, максимальна кількість – 20 балів.</li> <li>○ дві контрольні роботи: 30% семестрової оцінки, максимальна кількість – 30 балів.</li> <li>○ Екзамен: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість – 50 балів.</li> </ul> <p>Підсумкова максимальна кількість балів за семестр – 100. Семестр завершується екзаменом.</p> <p><b>Академічна доброчесність.</b> На початку курсу викладач повинен чітко і детально пояснити студентам систему оцінювання та форми тестування. Викладач обіцяє об'єктивно оцінювати знання студентів, готувати якісні навчальні матеріали та завдання, рівномірно розподіляти для студентів навантаження курсу протягом семестру, вчасно перевіряти контрольні роботи та інформувати студентів про їхні результати. Викладач очікує, що роботи студентів будуть самостійними, без списування та втручання в роботу інших студентів чи сторонніх осіб. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні студентської роботи є підставою для її незарахування, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p>
<p><b>Питання до заліку чи екзамену</b></p>	<p>Колоквіум №1.</p> <p>Лінійні системи. Матриці. Ранг матриці та властивості рангів. Теорема Кронекера-Капеллі. Лінійна залежність векторів. Лінійні простори. Лінійні оператори. Матриці лінійного оператора у різних базах. Векторні простори. Скалярний добуток. Норма. Відстань. Ортогональна проекція. Ортогональні суми та проектори. Теорема про чотири підпростори лінійного відображення. Пошук найкоротшої відстані та ортогональність. Наближені розв'язки лінійних систем. Метод найменших квадратів і застосування до лінійних регресій. Псевдообернені матриці.</p> <p>Колоквіум №2.</p> <p>Спектральні властивості відображень (матриць). Роль власних значень і власних векторів. Приклади моделі Леонтьєва та рейтингування сайтів Google.</p> <p>Спектральна теорія прямокутних матриць – SVD. Сингулярні числа, ліві та праві власні вектори. Різні декомпозиції матриць – LU, QR, Cholesky та ін.</p> <p>Застосування SVD до стиску зображень, аналізу природної мови, рекомендаційних систем (Netflix), а також кластеризація за невідомими ознаками. Класичні та сучасні ітераційні методи для розв'язання лінійних систем великих розмірів із застосуванням ІТ. Ітераційні методи знаходження власних елементів.</p> <p><i>Додаткові завдання розміщені на сторінці курсу-</i></p>
<p><b>Опитування</b></p>	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

### Схема курсу

Тижні	Лекційний курс		Практичні заняття		Література	Завдання	Термін виконання
	Назва теми	Години	Назва теми	Години			
1	2	3	4	5	6	1	2
1	Системи лінійних рівнянь. Матриці. Ранг матриці та властивості рангів.	2	Системи лінійних рівнянь. Їх типи. Способи розв'язання. Матриці. Їх типи, властивості і застосування.	2	[1, 2, 4, 5]	Різні способи розв'язання різних типів систем лінійних рівнянь. Практичні застосування теорії матриць	1 тиж-день
2			Ранг матриці. Властивості рангів. Застосування. Визначення сумісності систем рівнянь.	2	[1, 2, 4, 5]	Ранг матриці та його властивості. Застосування рангу матриці до розв'язування практичних задач.	1 тиж-день
3	Лінійні простори. Лінійна залежність векторів. Лінійні оператори. Матриці лінійного оператора у різних базах.	2	Вектори. Векторні числові простори. Бази. Лінійна залежність векторів.	2	[1, 3, 4, 5]	Векторні числові простори. Бази просторів. Лінійна залежність векторів. Використання поняття вектора у практичних задачах	1 тиж-день
4			Лінійні простори. Лінійні оператори. Матриці лінійного оператора у різних базах.	2	[1, 3, 4, 5]	Типи лінійних операторів. Обчислення матриці лінійного оператора у різних базах.	1 тиж-день
5	Скалярний добуток векторів. Відстань. Ортогональна проекція. Ортогональні суми та проектори. Теорема про чотири підпростори	2	Типи лінійних просторів. Скалярний добуток векторів. Норма. Відстань.	2	[1, 3, 4, 5]	Визначення скалярного добутку векторів. Норма вектора. Відстань. Використання у практичних задачах.	1 тиж-день

	лінійного відображення. Пошук найкоротшої відстані та ортогональність						
6			Ортогоналізація. Ортогональна проекція. Пошук найкоротшої відстані та ортогональність	2	[1, 3, 4, 5]	Способи ортогоналізації системи векторів. Ортогональна проекція. Пошук найкоротшої відстані. Використання у практичних задачах	1 тиждень
7	Наближені розв'язки лінійних систем. Метод найменших квадратів і застосування до лінійних регресій.	2	Наближені розв'язки систем лінійних рівнянь.	2	[1, 4, 5]	Вироджені системи лінійних рівнянь. Наближені розв'язки систем лінійних рівнянь.	1 тиждень
8			Метод найменших квадратів і застосування до лінійних регресій.	2	[1, 4, 5]	Метод найменших квадратів. Застосування методу найменших квадратів до лінійних регресій.	1 тиждень
9	Напівобернені матриці. Псевдообернені матриці. Способи обчислення та застосувань.	2	Напівобернені матриці. Способи обчислення та застосувань.	2	[1, 4, 5]	Напівобернені матриці. Способи обчислення напівобернених матриць. Їх застосування.	1 тиждень
10			Псевдообернені матриці. Способи обчислення та застосувань.	2	[1, 4, 5]	Псевдообернені матриці. Способи обчислення псевдообернених матриць. Їх застосування на практиці.	1 тиждень

11	Спектральні властивості відображень (матриць). Роль власних значень і власних векторів. Приклади моделі Леонтєва та рейтингування сайтів Google. Спектральна теорія прямокутних матриць – SVD. Сингулярні числа, ліві та праві власні вектори	2	Спектральні властивості відображень (матриць). Власні значення та власні вектори. Роль власних значень і власних векторів.	2	[1, 3, 4, 5]	Обчислення власних значень та власних векторів. Роль власних значень і власних векторів у практичних задачах.	1 тиждень
12			Спектральна теорія прямокутних матриць – SVD. Сингулярні числа, ліві та праві власні вектори	2	[1, 3, 4, 5]	SVD - розклади. Сингулярні числа, ліві та праві власні вектори	1 тиждень
13	Різні декомпозиції матриць – LU, QR, Cholesky та ін. Застосування SVD до стиску зображень, аналізу природної мови, рекомендаційних систем (Netflix), а також кластеризація за невідомими ознаками.	2	Декомпозиції матриць – LU, QR, Cholesky та ін.	2	[1, 4, 5]	Декомпозиції матриць – LU, QR, Cholesky та ін. Використання у практичних задачах.	1 тиждень
14			Застосування SVD-розкладу матриць.	2	[1, 4, 5]	Застосування SVD до стиску зображень, аналізу природної мови, рекомендаційних систем (Netflix), а також кластеризація за невідомими ознаками.	1 тиждень



15	Ітераційні методи знаходження власних елементів. Класичні та сучасні ітераційні методи для розв'язання лінійних систем великих розмірів із застосуванням ІТ.	2	Ітераційні методи знаходження власних елементів.	2	[1, 4, 5]	Різні типи ітераційних методів знаходження власних елементів.	1 тиж-день
16			Класичні та сучасні ітераційні методи для розв'язання лінійних систем великих розмірів із застосуванням ІТ.	2	[1, 4, 5]	Різні типи ітераційних методів для розв'язання лінійних систем великих розмірів із застосуванням комп'ютерів.	1 тиж-день
	Разом	16		32			
	Лектор: Олег Романів		Викладач: Олег Романів				