МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ЗАТВЕРДЖЕНО
Радою механіко-математичного факультету
Протокол № 12 від 23.06.2023 р.

ПРОГРАМА ВСТУПНОГО ІСПИТУ В АСПІРАНТУРУ ЗА СПЕЦІАЛЬНІСТЮ 111 «МАТЕМАТИКА»

1. Найпростіші поняття логіки та теорії множин.

Висловлення та його істинносне значення. Дії над висловленнями. Предикат. Квантори, заперечення предикатів з кванторами. Основні операції над множинами та їх властивості. Декартів добуток множин, зліченні множини, потужність континуума. Відношення. Відношення еквівалентності.

2. Математичний аналіз.

Дійсні числа. Аксіоматичне означення лінійно впорядкованого поля дійсних чисел.

Леми про супремум, про вкладені відрізки, про скінченне покриття. Послідовності. Збіжні послідовності. Фундаментальна послідовність. Критерій Коші. Принцип Больцано-Вейєрштрасса.

Поняття функції, границя функції, неперервність. Існування та неперервність оберненої функції однієї змінної. Властивості функцій, неперервних на компактах з $\mathbb{R}$. Диференціал та похідна функції однієї змінної, їх геометрична інтерпритація. Основні правила диференціювання. Теореми Ферма, Ролля, Лаґранджа та Коші. Формула Тейлора. Диференційовність функцій багатьох змінних. Похідна за напрямком. Ґрадієнт. Екстремум функції однієї та багатьох змінних. Дослідження функцій однієї змінної та побудова їх графіків.

Визначений інтеграл. Інтегровність за Ріманом неперервної функції. Існування первісної неперервної функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Застосування визначеного інтеграла: площа, довжина дуги, об’єм. Невластиві інтеграли, інтеграли, що залежать від параметра, неперервність, інтегрування та диференціювання за параметром.

Кратні інтеграли, криволінійні інтеграли, їх застосування. Формули Ґріна, Ґауса-Остроградського, їх застосування.

Числові ряди. Найпростіші ознаки збіжності (ознака порівняння, Даламбера, Коші, інтегральна ознака). Абсолютна та умовна збіжність, ознака Лейбніца. Функціональні послідовності і ряди. Рівномірна збіжність, почленне інтегрування та диференціювання.

3. Алгебра і теорія чисел.

Матриці і їх визначники. Властивості визначників. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Обернена матриця. Структура загального розв’язку системи лінійних рівнянь. Розклад многочленів з комплексними (дійсними) коефіцієнтами на незвідні множники. Порівняння першого степеня з одним невідомим.

Означення та приклади лінійного простору. Лінійні оператори і їх матриці. Власні значення і власні вектори. Оператори простої структури. Лінійні оператори в евклідових і унітарних просторах. Унітарні, ортогональні і самоспряжені оператори. Зведення квадратичної форми до головних осей. Закон інерції.

Групи і підгрупи. Поняття фактор-групи. Теорема Лаґранджа. Поняття кільця і поля. Ідеали. Фактор-кільця. Кільця з однозначним розкладом на прості множники.

4. Аналітична та диференціальна геометрія, топологія.

Основи векторної алгебри. Векторно-координатний метод та його застосування. Пряма на площині. Пряма і площина в просторі. Афінні перетворення та афінна класифікація кривих та поверхонь другого порядку.

Кривина та скрут кривої. Формули Френе. Поняття поверхні. Перша та друга квадратичні форми поверхні.

Поняття топологічного простору. Відкриті та замкнені підмножини в топологічних просторах. Неперервні відображення топологічних просторів. Гомеоморфні простори. Приклади. Компактність. Зв’язність. Компактність у метричних просторах. Класифікація компактних поверхонь.

5. Диференціальні рівняння.

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Теорема існування та єдиності розв'язку. Методи розв'язування однорідних та лінійних рівнянь першого порядку. Нормальні лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь. Задача Коші. Умови існування єдиного розв'язку. Нормальні лінійні однорідні системи. Фундаментальна система розв'язків та її існування. Структура загального розв'язку. Метод варіації сталих. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Методи розв'язування (метод варіації сталих, метод неозначених коефіцієнтів).

6. Рівняння в частинних похідних.

Класифікація і зведення до канонічного вигляду рівнянь в частинних похідних другого порядку. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння коливань струни. Існування розв'язку задачі Коші для однорідного хвильового рівняння. Єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння. Вільні коливання закріпленої струни. Метод Фур'є. Існування розв'язку. Принцип максимуму для розв'язку рівняння теплопровідності. Існування розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності.

7. Функціональний аналіз.

Метричні простори, приклади. Збіжність послідовностей в метричних просторах, приклади. Фундаментальні послідовності. Повні метричні простори, приклади. Неперервність відображень метричних просторів.

Принцип стискуючих відображень і приклади його застосування. Означення та основні властивості інтеграла Лебега. Теорема про перехід до границі під знаком інтеграла. Означення та приклади лінійних операторів і функціоналів у нормованих просторах. Теорема Гана-Банаха. Норма оператора.

Простори зі скалярним добутком (означення та приклади). Теорема Піфагора. Нерівність Буняковського. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля. Приклади ортонормованих систем. Тригонометричні ряди Фур'є. Теорема Ріса про зображення неперервного функціонала у гільбертовому просторі. Теорема про ортогональну проєкцію. Теорема Гільберта про повноту системи власних функцій самоспряженого компактного оператора. Поняття узагальненої функції, приклади.

8. Теорія функції комплексної змінної.

Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична та показникова форма запису комплексного числа. Означення аналітичної функції. Умови Коші-Рімана. Означення та основні властивості елементарних аналітичних функцій (ціла лінійна функція, степенева, показникова, тригонометрична функції, корінь натурального степеня, логарифми). Означення інтеграла по кривій. Дві інтегральні теореми Коші. Степеневі ряди. Теорема Тейлора про розвинення у степеневий ряд. Теорема Лувіля. Основна теорема алгебри.

9. Класичне означення ймовірності.

Аксіоматика Колмогорова теорії ймовірностей. Умовні ймовірності. Теорема додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Функція розподілу і її властивості. Числові характеристики випадкових величин.

Закон великих чисел для незалежних випробувань. Лема Бореля-Кантелі. Центральна гранична теорема.

10. Варіаційне числення.

Найпростіша задача класичного варіаційного числення. Необхідні умови екстремуму. Задача про брахістохрону. Постановка задачі опуклого програмування. Теорема Куна-Такера. Задача лінійного програмування. Основні факти теорії двоїстості.

Декан
механіко-математичного факультету Ігор ГУРАН