

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра математичної економіки, економетрії,**  
**фінансової та страхової математики**

**Затверджено**  
на засіданні кафедри математичної  
економіки, економетрії, фінансової та  
страхової математики  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 12 від 30 серпня 2022 р.)



Забідувач кафедри

*Кирилич В. М.*  
проф. Кирилич В. М.

**Силабус з навчальної дисципліни**  
**«Динамічна оптимізація»,**  
що викладається в межах ОПШ Математика. Математична економіка та економетрика  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів із спеціальності  
111 – математика

|  |   |
|--|---|
| <b>Назва дисципліни</b>  | Динамічна оптимізація   |
| <b>Адреса викладання дисципліни</b>                              | вул. Університетська, 1, 79-000, м. Львів, Механіко-математичний факультет ЛНУ ім. Івана Франка   |
| <b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>       | Механіко-математичний факультет, кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики  |
| <b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>                 | 11 – математика і статистика; 111 – математика  |
| <b>Викладачі дисципліни</b>                                      | Кирилич Володимир Михайлович, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики  |
| <b>Контактна інформація викладачів</b>                           | Електронна пошта: <a href="mailto:volodymyr.kyrylych@lnu.edu.ua">volodymyr.kyrylych@lnu.edu.ua</a> , веб-сторінка: <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kyrylych-v-m">https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/kyrylych-v-m</a>  |
| <b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b> | Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики, ауд. 354, в день проведення практичних занять (година за попередньою домовленістю).<br>Он-лайн консультації через Zoom чи MSTeams; для погодження часу слід писати на електронну пошту <a href="mailto:volodymyr.kyrylych@lnu.edu.ua">volodymyr.kyrylych@lnu.edu.ua</a> чи дзвонити  |
| <b>Сторінка дисципліни</b>                                       | <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/">https://new.mmf.lnu.edu.ua/</a>   |
| <b>Інформація про дисципліну</b>                                 | Дисципліна «Динамічна оптимізація» є вибірковою дисципліною освітньої програми «Математика. Математична економіка та економетрика» спеціальності 111 – Математика для підготовки бакалавра, яка викладається в 8 семестрі в обсязі 4 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS)  |
| <b>Коротка анотація дисципліни</b>                               | Навчальну дисципліну розроблено так, щоб надати учасникам необхідні знання з теорії динамічної оптимізації, необхідні для того, щоб розв'язувати математичні моделі соціально-економічної динаміки. Тому в дисципліні представлено як огляд концепцій побудови відповідних моделей, так і процесів та інструментів, які потрібні для моделювання та числового розв'язування і аналізу одержаних результатів.  |
| <b>Мета та цілі дисципліни</b>                                   | Метою вивчення вибіркової дисципліни «Динамічна оптимізація» є ознайомлення студентів із сучасними методами розв'язування задач динамічного програмування, підходами та інструментами для моделювання соціально-економічних систем, їхнього аналізу, одержання числових результатів та їх верифікація.  |
| <b>Література для вивчення дисципліни</b>                        | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Головатий Ю. Д. Диференціальні рівняння: навч. посібник / Ю. Д. Головатий, В. М. Кирилич, С. П. Лавренюк. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. – 470 с.</li> <li>2. Козицький В. А. Опуклі структури, методи оптимізації та їхнє застосування в економічному аналізі. – Львів: ВЦ ЛНУ, 2008. – 450 с.</li> <li>3. Моклячук М. П. Негладкий аналіз та оптимізація. Навч. посібник. – К.: Київський університет, 2008. – 400 с.</li> <li>4. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. – К.: Київський університет, 2004. – 384 с.</li> <li>5. Кирилич В. М., Терещук О. В., Флюд В. М. Оптимальне керування соціально-економічними системами в середовищі Matlab. Навч. посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2021. – 412 с.</li> <li>6. Lawrence C. Evans. An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. – University of California, Berkeley, 2017. – 300 p.</li> <li>7. Lewis P., Draguna L., Vrabie L., Vassilis L., Syrmos L. Optimal Control: Willey&amp;Sons, Inc., 2012. – 540 p.</li> </ol> |

|  |  |
|--|--|
|  | <p>8. Sethi S. P., Tomson G. L. Optimal Control Theory. Applications to Management and Economics.– Springer, 2002.– 414p.</p> <p>9. Bellman R., Dreyfus S. Applied Dynamic Programming.– Princeton University Press, December 8, 2015.– 390 p.</p>   |
| <b>Обсяг курсу</b>   | 120 годин. З них: 48 годин аудиторних занять (24 години лекцій і 24 години практичних занять) та 72 год. самостійної роботи.   |
| <b>Очікувані результати навчання</b>                             | <p>Після завершення цього курсу студент буде:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Знати теоретичні аспекти динамічної оптимізації.</li> <li>– Вміти застосовувати основні методи динамічної оптимізації для розв’язування конкретних математичних моделей економічного та соціального характеру.</li> </ul> <p>Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання: ЗК1, ЗК2, ЗК4, ЗК5, ЗК8, СК1, СК4, СК5, СК8, СК9, СК10, РН1, РН2, РН9, РН11, РН14, РН15, РН16, РН17, РН18, РН20.</p>   |
| <b>Ключові слова</b>   | Динамічне програмування, оптимальне керування, динамічна оптимізація, опуклий аналіз, увігнута оптимізація, рівняння Ейлера, принцип максимуму Понтрягіна, математична модель, рівняння Беллмана, функція Беллмана.  |
| <b>Формат курсу</b>  | Очний  |
|  | Проведення лекцій, лабораторних робіт та консультації для кращого розуміння тем  |
| <b>Теми</b>  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Задачі, що приводять до оптимального керування.</li> <li>2. Поняття функціоналу.</li> <li>3. Функціональні простори.</li> <li>4. Варіація функціоналу.</li> <li>5. Необхідна умова екстремуму функціоналу. Рівняння Ейлера</li> <li>6. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку.</li> <li>7. Функціонали від декількох функцій.</li> <li>8. Функціонали, залежні від декількох змінних.</li> <li>9. Основні поняття теорії оптимізації.</li> <li>10. Методи безумовної багатовимірної оптимізації нульового порядку.</li> <li>11. Алгоритм циклічного покоординатного спуску.</li> <li>12. Градієнтні методи. Метод Флетчера-Рівса.</li> <li>13. Методи змінної метрики.</li> <li>14. Знаходження екстремуму цільових функцій.</li> <li>15. Дискретне програмування у загальному вигляді.</li> <li>16. Задачі нелінійного програмування при обмеженнях-нерівностях.</li> <li>17. Квадратичне програмування.</li> <li>18. Багатовимірні задачі динамічного програмування.</li> <li>19. Нескінченнокрокові процеси динамічного програмування.</li> <li>20. Одноетапні задачі стохастичного програмування.</li> <li>21. Задачі увігнутої оптимізації.</li> <li>22. Задачі квазіувігнутого програмування.</li> </ol> |
| <b>Підсумковий контроль, форма</b>                               | Залік в кінці семестра<br>Залік – письмовий  |
| <b>Пререквізити</b>  | Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з математичного аналізу, лінійної алгебри, диференціальних рівнянь тощо, достатніх для сприйняття категоріального апарату оптимального керування, розуміння джерел чисельних методів розв’язування практичних задач.  |
| <b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися</b> | Презентації, лекції, дискусії.   |

|   |   |
|---|---|
| під час викладання курсу  |   |
| Необхідне обладнання  | використання програмного забезпечення і операційних систем, комп'ютерне обладнання.   |
| Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності) | <p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• практичні/самостійні тощо: 25% семестрової оцінки: максимальна кількість балів 25;</li> <li>• контрольні заміри (модулі): 25% семестрової оцінки: максимальна кількість балів 25;</li> <li>• залік: 50% семестрової оцінки: максимальна кількість балів 50.</li> </ul> <p>Загалом – 100 балів.</p> <p><b>Письмові роботи:</b> Очікується, що студенти виконають декілька видів письмових робіт.</p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть їхніми оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції і практичні заняття курсу. Студенти зобов'язані дотримуватися усіх строків, визначених для виконання усіх видів письмових робіт, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали, набрані на поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заніттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях, не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p> |
| Питання до заліку (чи питання до контрольної роботи)                | <p>Динамічна оптимізація</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Деякі необхідні відомості з теорії диференціальних рівнянь та функціонального аналізу.</li> <li>2. Функціональні простори.</li> <li>3. Задачі, що приводять до варіаційного числення.</li> <li>4. Поняття функціоналу та задачі оптимізації.</li> <li>5. Варіація функціоналу.</li> <li>6. Необхідна умова екстремуму функціоналу. Рівняння Ейлера</li> <li>7. Функціонали, що залежать від похідних вищого порядку.</li> <li>8. Функціонали від декількох функцій.</li> <li>9. Функціонали, залежні від декількох змінних.</li> <li>23. Основні поняття теорії оптимізації.</li> <li>24. Методи безумовної багатовимірної оптимізації нульового порядку.</li> </ol>   |

|                   |  |
|-------------------|--|
|                   | <p>25. Алгоритм циклічного покоординатного спуску.<br/> 26. Градієнтні методи. Метод Флетчера-Рівса.<br/> 27. Методи змінної метрики.<br/> 28. Знаходження екстремуму цільових функцій.<br/> 29. Дискретне програмування у загальному вигляді.<br/> 30. Задачі нелінійного програмування при обмеженнях-нерівностях.<br/> 31. Квадратичне програмування.<br/> 32. Багатовимірні задачі динамічного програмування.<br/> 33. Нескінченнокрокові процеси динамічного програмування.<br/> 34. Одноетапні задачі стохастичного програмування.<br/> 35. Задачі увігнутої оптимізації.<br/> 36. Задачі квазіувігнутого програмування.</p> <p>Література.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Кирилич В. М., Терещук О. В., Флюд В. М. Оптимальне керування соціально-економічними системами в середовищі Matlab. Навч. посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2021.– 412с.</li> <li>2. Дерев'янюк Т., Кирилич В., Мільченко О. Задачі оптимального керування гіперболічними системами / Т. Дерев'янюк, В. Кирилич, О. Мільченко.– Globe Edit. Chisinau, 2021.–142с.</li> <li>3. Козицький В. А. Опуклі структури, методи оптимізації та їхнє застосування в економічному аналізі.– Львів: ВЦ ЛНУ, 2008.– 450с.</li> <li>4. Моклячук М. П. Негладкий аналіз та оптимізація. Навч. посібник.– К.: Київський університет, 2008.– 400с.</li> <li>5. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник.– К.: Київський університет, 2004.–384с.</li> <li>6. Bellman R., Dreyfus S. Applied Dynamic Programming.– Princeton University Press, December 8, 2015.– 390 p.</li> <li>7. Lewis P., Draguna L., Vrabie L., Vassilis L., Syrmos L. Optimal Control: Willey&amp;Sons, Inc., 2012. – 540 p.</li> <li>8. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології.–К, 2002.– 203 с.</li> <li>9. Lawrence C. Evans. An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. – University of California, Berkeley, 2017. – 300 p.</li> <li>10. Sethi S. P., Tomson G. L. Optimal Control Theory. Applications to Manageent and Economics.– Springer, 2002.– 414p.</li> <li>11. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Mathematical Modeling in Economics, Ecology and the Environment: Springer, 2013.– 296p.</li> <li>12. Lachowicz M.-A. Teoria Sternowania.– UW: Warshawa, 2012.– 88p. <a href="http://www.mimuw.edu.pl/~lahowic">http://www.mimuw.edu.pl/~lahowic</a></li> </ol> |
| <b>Опитування</b> | Анкет-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенні курсу.  |

## Схема курсу

| Тиж. | Тема, план, короткі тези  | Форма діяльності (заняття)*<br>*лекція, самостійна, дискусія, групова робота | Література, ***<br>Ресурси в інтернеті  | Завдання, год.                               | Термін виконання |
|------|---|--|---|--|------------------|
| 1    | Деякі необхідні відомості з теорії диференціальних рівнянь та функціонального аналізу               | лекція, практична  | Кирилич В. М., Терещук О. В., Флюд В. М. Оптимальне керування соціально-економічними системами в середовищі Matlab. Навч. посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2021.– 412с. | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 2    | Поняття функціоналу та задачі оптимізації. Функціональні простори                                   | лекція, практична  | Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник.– К.: Київський університет, 2004.–384с.  | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 3    | Варіація функціоналу. Необхідна умова екстремуму функціоналу. Рівняння Ейлера                       | лекція, практична  | Lachowicz M.-A. Teoria Sternowania.– UW: Warszawa, 2012.– 88s.  | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 4    | Основні поняття теорії оптимізації. Методи безумовної багатовимірної оптимізації нульового порядку. | лекція, практична  | <a href="http://www.mim.uw.edu.pl/~lahowic">http://www.mim.uw.edu.pl/~lahowic</a>   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 5    | Алгоритм циклічного покоординатного спуску. Градієнтні методи.                                      | лекція, практична  | Bellman R., Dreyfus S. Applied Dynamic Programming.– Princeton University Press, December 8, 2015.– 390 p.  | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 6    | Метод Флетчера-Рівса. Методи змінної метрики.   | лекція, практична  |   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 7    | Задачі увігнутої оптимізації. Задачі квазіувігнутого програмування.                                 | лекція, практична  |   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 8    | Знаходження екстремуму цільових функцій. Дискретне програмування у загальному вигляді.              | лекція, практична  |   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 9    | Задачі нелінійного програмування при обмеженнях-нерівностях. Квадратичне програмування.             | лекція, практична  |   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 10   | Багатовимірні задачі динамічного програмування.   | лекція, практична  |   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |
| 11   | Нескінченнокрокові процеси динамічного програмування.   | лекція, практична  |   | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |                  |

|    |  |                      |  |  |  |
|----|--|----------------------|--|--|--|
|    |  |                      |  | тичної, 4 год                                |  |
| 12 | Одноетапні задачі стохастичного програмування. | лекція,<br>практична |  | Опрацювати питання лекції, практичної, 4 год |  |