Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 13.02.2024

I–II курси

1. Нехай A — невироджена квадратна матриця така, що невироджена також матриця $E+A$, де E — одинична матриця. Довести, що у випадку коли матриця $(E+A)^{-1}A$ — діагональна, то і A — діагональна.

Розв'язок. Позначимо $D=(E+A)^{-1}A$. Звідси, $A(E-D)=D$ і матриця $E-D$ — невироджена. Тому $A=D(E-D)^{-1}$ є добутком діагональних матриць, а, отже, A діагональна матриця.

2. Відомо, що $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\mathcal{C}+\gamma_n$, де $\gamma_n\to 0$ $(n\to+\infty)$, а $\mathcal{C}$ — стала, що називається *сталою Ейлера.* Довести, що $\mathcal{C}<1$.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$\sum_{k=1}^{n}1/k-\ln n\le 1+1/2+\sum_{k=3}^{n}\int\limits_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}=1+1/2+\int\limits_{2}^{n}\frac{dt}{t}=1+1/2-\ln 2.$$

Але $e<4$, тому $1/2-\ln 2=(1-\ln 4)/2<(1-\ln e)/2=0$.

3. Чи залишиться площина лінійно зв'язною, якщо з неї викинути зліченну кількість точок.

Розв'язок. Залишається. Справді, нехай A зліченна підмножина $\mathbb{R}^2$ і $x,\ y\in\mathbb{R}^2\setminus A$. Тоді, очевидно, існує континуум неперервних відображень $\{f_\alpha:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^2:\ \alpha\in\mathbb{R}\}$, для яких $f_\alpha(0)=x,\ f_\alpha(1)=y$ для всіх α, причому $f_\alpha((0,1))\bigcap f_\beta((0,1))=\varnothing$ для всіх $\alpha\ne\beta$. (Образами відрізка при цих відображеннях можуть бути, наприклад, дуги різних кіл, що проходять через x і y.) Тоді за зліченністю A маємо, що $A\bigcap f_\alpha((0,1))=\varnothing$ для деякого α, а тому $f_\alpha([0,1])\subset\mathbb{R}^2\setminus A$.

4. Довести, що з того, що $f(x)+f'(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$, випливає, що $f(x)\to 0$ і $f'(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$f(x)+f'(x)=\frac{(f(x)e^x)'}{(e^x)'}\to 0,$$

тому за правилом Лопіталя $f(x)=(f(x)e^x)/e^x\to 0$, а з огляду на умову, і $f'(x)\to 0$.

5. Довести, що многочлен $x^5+\alpha x^4+\beta x^3+2006$, де $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, має принаймні два комплексних недійсних корені.

Розв'язок. Зауважимо, що $f'(x) = x^2(5x^2 + 4\alpha x + 3\beta) = x^2 g(x)$. Якщо $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) \geq 0$, то $f(x)$ зростає на всій прямій і має лише один дійсний корінь. Якщо ж існують $x_1 \neq x_2$ такі, що $g(x_1) = g(x_2) = 0$, то f має дві точки екстремума і, отже, не більше трьох дійсних коренів.

Олімпіада з математики, ЛНУ ім. І.Франка, 13.02.2024

III–VI курси

1. Нехай $A,\ B$ — квадратні матриці над полем $\mathcal{P}$. Довести, що добутки матриць AB і BA мають однакові характеристичні поліноми.

Розв'язок. Якщо одна з матриць $A,\ B$ невироджена (нехай A), то AB і BA подібні ($BA = A^{-1}(AB)A$), тому вони мають однакові характеристичні поліноми.

Припустимо, що $\det A = \det B = 0$. Розглянемо поліноміальну матрицю $A - tE$, E — одинична матриця. $A - tE$ невироджена над $\mathcal{P}(t)$, отже, $(A - tE)B$ і $B(A - tE)$ мають однакові характеристичні поліноми $\det((A - tE)B - \lambda E) = \det(B(A - tE) - \lambda E) = f(\lambda, t)$. Залишається вибрати $t = 0$.

2. На кожній бінормалі кривої відкладено від точки кривої відрізок сталої довжини a. Обчислити кривину лінії — геометричного місця точок кінців цих відрізків.

Розв'язок. Розглянемо рівняння кривої (Γ) — геометричного місця точок кінців відрізків у векторній формі $\overline{R} = \overline{r} + a\overline{b}$. Диференціюючи по s, отримаємо $\overline{T}\frac{dS}{ds} = \overline{t} - a\tau\overline{n}$, де T — одиничний вектор дотичної до (Γ), S її дуга, τ — скрут кривої. Тоді $\frac{dS}{ds} = \sqrt{1 + a^2\tau^2}$ і $\overline{T} = \frac{\overline{t} - a\tau\overline{n}}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}$. Диференціюючи цю рівність по s і, замінюючи dS на $\sqrt{1 + a^2\tau^2}ds$, отримаємо

$$\overline{N}K\sqrt{1 + a^2\tau^2} = \frac{(k - a\tau')\overline{n} - a\tau^2\overline{b} + a\tau k\overline{t}}{\sqrt{1 + a^2\tau^2}} - \frac{(\overline{t} - a\tau\overline{n})a^2\tau\tau'}{(1 + a^2\tau^2)\sqrt{1 + a^2\tau^2}}.$$

Піднесемо до скалярного квадрату обидві частини останньої рівності. Отримаємо

$$K^2 = \frac{1}{1 + a^2\tau^2}\left(a^2\tau^4(1 + a^2\tau^2) + (k - ak' + a^2k\tau^2)^2\right).$$

3. Нехай $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — така послідовність вимірних за Лебегом множин інтервалу $(0, 1)$, що для довільного інтервала $(\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ виконується умова

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap (\alpha,\beta)) = \frac{\beta-\alpha}{3},$$

де μ — міра Лебега на прямій. Довести, що для функції $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ обмеженої варіації на $[0,1]$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 f\,d\mu.$$

Розв'язок. Легко бачити, що твердження справедливе, коли f — функція стрибків. Оскільки кожну монотонну функцію можна рівномірно наблизити функціями стрибків, то твердження справедливе і для монотонних функцій, а, отже, і для функцій обмеженої варіації.

4. Дійснозначна функція f на дійсній прямій є рівномірною границею на всій прямій послідовності многочленів. Чи f диференційовна у кожній точці?

Розв'язок. Так. Нехай послідовність P_n многочленів з умови, тоді з рівномірної збіжності випливає, що $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists n_0)$ $(\forall n \geq n_0)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$: $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$. Тоді $(\forall n \geq n_0) : f(x) - \varepsilon \leq P_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$. Звідки для $n \neq m$

$$-2\varepsilon = (f(x)-\varepsilon)-(f(x)+\varepsilon) \leq P_n(x)-P_m(x) \leq (f(x)+\varepsilon)-(f(x)-\varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Тобто, для $Q = P_n - P_m$ маємо $(\forall x \in \mathbb{R}) : |Q(x)| \leq 2\varepsilon$. Якщо $\deg Q = s$, то з останньої нерівності необхідно $s = 0$. Тому різниця $P_n - P_m$ є обмеженою на $\mathbb{R}$ $(\forall\ n, m \geq n_0)$. Отже, для всіх $n \geq n_0$ $\deg P_n = p$, $P_n(x) = a_p x^p + \cdots + a_1 x + a_0^{(n)}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_0^{(n)} = 0$. Але тоді $(\forall n \geq n_0)(\forall\ x)$: $|f(x) - (a_p x^p + \cdots + a_1 x)| \leq \varepsilon + a_0^{(n)}$. Звідси, $f(x) = a_p x^p + \cdots + a_1 x$.

5. Чи існує ціла функція f така, що $(\forall p \in (0,+\infty)) : f \in L_p(-\infty,+\infty)$, але $f(x) \nrightarrow 0$ $(x \to \pm\infty)$? Відповідь обгрунтувати.

Розв'язок. Відповідь: так, наприклад $f(x) = \exp\{-x^4 \sin^2 x\}$.