

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра кафедри алгебри, топології та основ математики

Затверджено

На засіданні кафедри алгебри,
топології та основ математики
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29.08. 2022 р.)

Завідувач кафедри проф. Т.О. Банах



Силабус з навчальної дисципліни
“Теорія кривих і поверхонь”,
що викладається в межах ОПП “Середня освіта (Математика)”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
зі спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Львів 2022 р.

Назва дисципліни	Теорія кривих і поверхонь
Адреса викладання дисципліни	м. Львів, вул. Університетська, 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	01 Освіта/Педагогіка 014.04 Середня освіта (Математика)
Викладачі дисципліни	Гуран Ігор Йосипович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики
Контактна інформація викладачів	ihor.huran@lnu.edu.ua ; https://new.mmf.lnu.edu.ua/employer/huran-i.-j. м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374; тел. 0322394218
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) за адресою: м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374. Також можливі он-лайн консультації на платформі Teams. Для погодження часу консультації слід писати на електронну пошту викладача.
Сторінка дисципліни	https://new.mmf.lnu.edu.ua/academics/bachelor/curriculum-education
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Теорія кривих і поверхонь” є вибірковою навчальною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки з спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”, яка викладається у 4-му семестрі в обсязі 4,5 кредити (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Навчальну дисципліну розроблено таким чином, щоб надати учасникам необхідні знання, обов'язкові для того, щоб ознайомити студентів з історичними відомостями про виникнення та розвиток диференціальної геометрії. Сформулювати вміння та навички розв'язувати практичні завдання та задачі з використанням отриманих теоретичних знань. Розвивати логічне і творче мислення, розширити науковий світогляд студентів.
Мета та цілі дисципліни	Надати основні теоретичні відомості та сформулювати практичні навички з курсу «Теорія кривих і поверхонь», який складає невід'ємну частину загально математичної освіти майбутнього вчителя математики; озброїти студентів конкретними знаннями та вміннями, які даватимуть їм можливість викладати геометрію у різних навчальних закладах та кваліфіковано керувати спецкурсами, факультативами та гуртками з геометрії, виховувати у своїх учнів допитливість, інтерес до знань.
Література для вивчення дисципліни	1. Гуран І.Й., Зарічний М.М., Диференціальна геометрія і топологія. – К. НВК ВО, 1991. 2. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х. Основа, 1995. 3. Бокало Б.М., Гуран І.Й., Зарічний М.М. Збірник задач з курсу диференціальної геометрії і топології. – К. ІСФО, 1994.

	<p>4. Пришляк О. Диференціальна геометрія. – К. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 68 с.</p> <p>5. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К. Вища школа, 1973. – 68с.</p> <p>6. Kobayashi, S., Nomiru.: Foundations of Differential Geometry, vols. I, II Wiely Classics Library Wiely, New Yourk, - 1996.</p> <p>7. Величко І.Г., Гургенідзе М.О., Стеганцева П.Г. Диференціальна геометрія кривих та поверхонь: Навчально-методичний посібник до індивідуальної та самостійної роботи для студентів II курсу математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2009. – 76с.</p> <p>8. Кованцов Н. И., Заржевская Г.М., Кочаровский В. Г. Диференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. – Киев; Вища школа. 1982. – 376с.</p> <p>9. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір - Геометрія 9 клас. – Харків, «Гімназія», 2021.</p> <p>10. А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов – Геометрія 10 клас, Ранок, 2018.</p> <p>11. М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З.О. Сердюк – Геометрія 11 клас. – Київ, Оріон, 2019.</p> <p>12. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Геометрія 10 клас. – Харків, Гімназія, 2018.</p> <p>13. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський – Геометрія 11 клас. – Харків, Гімназія, 2019.</p> <p>14. І. Й. Гуран, О. В. Гутік – Методичка з теорії кривих і поверхонь.</p> <p style="text-align: center;">ДОПОМІЖНА</p> <p>1. Никифорчин О.Р.: Елементи загальної топології. Івано-Франківськ – 2015 – 240с.</p> <p>2. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Space. Graduate Studies in Mathematics. vol. 34. A. Math. Soc. Providewe 2012.</p> <p>3. Pedro M. Gadea, Jaime Muñoz Masqué, Ihor V. Mykytyuk. Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds. A Workbook for Students and Teachers. - Springer , 2nd ed. 2013 – 644p.</p> <p>4. T. Banakh, I. Guran, A. Ravsky: Manifolds Admitting a Continuous Cancellative Binary Operation are Orientable. - Journal of Lie Theory v. 16 (2016), - 1177-1185pp.</p> <p>5. Igor Guran, Yaroslav Prytula: Sala Weinklös, the first female doctor of philosophy in Mathematics in Lviv university: Current Research in Mathematical and Computer Sciences // Publisher UWM, Olsztyn, 2018 pp. 27 – 39.</p>
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 135 год., з них – 32 год., лекцій, 32 год. практичних занять. Самостійна робота: 71 год.

<p>Очікувані результати навчання</p>	<p>У результаті вивчення курсу «Теорія кривих і поверхонь» відповідно до освітньої програми формуються програмні компетентності:</p> <p>Загальні компетентності:</p> <p>ЗК 5: Здатність до генерування нових ідей, виявлення та вирішення проблем.</p> <p>ЗК 7: Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.</p> <p>ЗК 9: Здатність навчатися та засвоювати новітні інформацію та знання.</p> <p>Фахові компетентності спеціальності:</p> <p>ФК 1: Здатність використовувати систематизовані та інноваційні теоретико-практичні знання з математики та методики і методології навчання та викладання математики під час розв'язування професійних завдань.</p> <p>ФК 4: Здатність до формування мотивації та організації пізнавальної діяльності учнів.</p> <p>ФК 8: Здатність до формування в учнів ключових і предметних компетентностей та здійснення міжпредметних зв'язків.</p> <p>ФК 11: Здатність до прийняття плідних та ефективних розв'язків у складних неочікуваних ситуаціях, вміння адаптуватися до нових ситуацій в освітницькій діяльності.</p> <p>Програмні результати навчання:</p> <p>ПРН 1: Знати та розуміти основні поняття, закони, теорії, загальну структуру, предмет і методи дослідження математики та методики її навчання, місце і зв'язки в системі наук, етапи історії її розвитку.</p> <p>ПРН 10: Уміти розв'язувати задачі різних рівнів складності курсу математики в закладах загальної середньої освіти, чітко й раціонально пояснювати розв'язання учням.</p> <p>ПРН 14: Розробляти і пропонувати різні форми та прийоми виховання позитивного ставлення до математики, мотивації учнів до засвоєння її основ та методів.</p>
<p>Ключові слова</p>	<p>Гладкі криві, плоскі та просторові криві, кривина, скрут, гладкі поверхні, перша квадратична форма поверхні, геодезійні.</p>
<p>Формат курсу</p>	<p>Очний.</p>
<p>Теми</p>	<p>Перелік тем подано в додатку у формі схеми курсу.</p>
<p>Підсумковий контроль, форма</p>	<p>Залік в кінці семестру в письмовій формі.</p>
<p>Пререквізити</p>	<p>Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з лінійної алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії, елементарної математики в обсязі програми загальноосвітньої школи, диференціальних рівнянь.</p>
<p>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</p>	<p>Лекції, презентації, спільні розробки, робота у групах, дискусія, підготовка індивідуальних завдань.</p>

<p>Необхідне обладнання</p>	<p>Дошка, комп'ютер, проектор, доступ до Internet мережі. Для вивчення курсу достатньо володіти загально вживаними програми такими як Microsoft Office Word, Microsoft Office, Excel, Microsoft Teams.</p>
<p>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</p>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • робота під час практичних занять: 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10. • підготовка індивідуальних завдань: 40% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 40. • залік: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50. <p>Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p>Залік проходить у письмовій формі. У кожному білеті міститься по два теоретичних питання із теорії кривих і поверхонь, а також набір задач, вибраних зі шкільного поглибленого курсу математики. Оцінка за семестр у випадку складання заліку є сумою балів поточного контролю та балів, отриманих під час заліку.</p> <p>Письмові роботи: Очікується, що студенти протягом семестру виконають індивідуальні завдання з використанням додаткової літератури у вигляді реферату, презентації з подальшим захистом в кінці курсу.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми недоброчесності не толеруються.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового</p>

	<p>тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p>
<p>Питання до заліку чи екзамену.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Основні властивості вектор-функції скалярного аргументу. Довести лему про похідну вектор-функції постійного модуля • Параметричні, загальні і векторні рівняння ліній • Довести теорему про дотичну до кривої • Вивести рівняння дотичної і нормальної площин до гладкої кривої • Поняття стичної площини до кривої та вивести її рівняння • Вивести рівняння головної нормалі і бінормалі • Поняття довжини дуги кривої і вивести формулу для її визначення • Поняття натурального параметра. Довести теорему про натуральну параметризацію довільної регулярної кривої • Кривина кривої, радіус кривини кривої • Поняття про скрут просторової кривої • Вивести формулу Френе • Вивести формулу кривини та скруту при довільній параметризації кривої • Довести основну теорему для просторових і плоских кривих. Натуральні рівняння кривої • Поняття гладкої параметризованої поверхні. Локальна еквівалентність різних форм поверхні: явне, неявне параметричне задання поверхні • Координатні лінії на поверхні. Дотична площина та нормаль до поверхні • Перша квадратична форма поверхні та її обчислення • Елементи внутрішньої геометрії: довжина дуги кривої на поверхні, кут між кривими на поверхні, площа поверхні • Друга квадратична форма поверхні та формули для її обчислення. • Нормальні та похилі перерізи • Гауссова та середня кривини поверхні • Головні кривини поверхні. Індикатриса Дюпена • Класифікація точок поверхні • Дериваційні формули Вейнгартена-Гаусса • Довести теорему Гаусса • Геодезійні криві на поверхні. Обчислення геодезійної кривини • Геодезійні криві на сфері, циліндрі, конусі • Геодезійні на поверхнях обертання • Геодезійні та їх екстремальні властивості
<p>Опитування</p>	<p>Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.</p>

Схема курсу

Тиж день, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності(заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконан ня
Перший тиждень, 2 год.	Поняття вектор-функції скалярного аргумента.	лекція	[2, 4, 5, 9, 14]	Задання географів кривих, заданих їх механічними властивостями. Циклоїди, епіциклоїди, кардіоїда, спіралі. (2 год.)	Один тиждень
Перший тиждень, 2 год.	Приклади вектор-функції скалярного аргумента.	практичне	[2, 4, 8]	Вектор-функція, як узагальнення поняття функції в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Другий тиждень, 2 год.	Границя вектор- функції. Неперервність. Диференційова ність.	лекція	[2, 5, 14]	Похідні вектор- функції постійного модуля, постійного напрямку. Похідні вищих порядків, їх геометричний та механічний зміст. (2 год.)	Один тиждень
Другий тиждень, 2 год.	Приклади неперервних, диференційова них вектор- функцій.	практичне	[8, 4, 9]	Похідна вектор- функції, як розширення поняття похідної в шкільному курсі «Алгебра і початки аналізу» (2 год.)	Один тиждень
Третій тиждень, 2 год.	Поняття параметризації кривої в \mathbb{R}^3. Просторові криві; вектор швидкості.	лекція	[2, 4, 5, 7, 14]	Дотична та нормаль до кривої. Доведення теореми про напрямок дотичної до кривої. Рівняння головної нормалі та	Один тиждень

	Гладкі криві.			бінормалі до просторової кривої (2 год.)	
Третій тиждень, 2 год.	Приклади параметризації кривих.	практичне	[2, 5, 10, 11, 14]	Дотичний вектор до просторової кривої (лінії). Крива, як узагальнення графіка функції в шкільному курсі «Алгебра і початки аналізу» (10 клас) (2 год.)	Один тиждень
Четвертий тиждень, 2 год.	Знаходження елементів супровідного тригранника Френе.	лекція	[2, 4, 5, 8]	Основний тригранник Френе: стична, спрямна та нормальна площини та їх рівняння. (2 год.)	Один тиждень
Четвертий тиждень, 2 год.	Виведення та обчислення елементів тригранника Френе.	практичне	[2, 4, 5, 9]	Зв'язок понять дотичної площини до кривої, нормалі як узагальнення поняття дотичної до кола в шкільному курсі геометрії (9 клас). (2 год.)	Один тиждень
П'ятий тиждень, 2 год.	Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація гладкої просторової кривої.	лекція	[2, 5, 14]	Поняття довжини кривої. Криві Пеано. Франтали. Предмет фрактальної геометрії (2 год.)	Один тиждень
П'ятий тиждень, 2 год.	Обчислення довжини класичних кривих.	практичне	[2, 4, 5, 9, 14]	Узагальнення поняття довжини дуги кола, яке розглядається у програмі 9-го класу геометрії. Число \mathcal{L} . (2 год.)	Один тиждень

Шостий тиждень, 2 год.	Кривина і скрут при натуральній параметризації. Формули Серре-Френе.	лекція	[2, 3, 5, 14]	Диференціальні рівняння руху реперу Френе. Інваріанти кривої. Знаходження натуральних рівнянь кривої. (2 год.)	Один тиждень
Шостий тиждень, 2 год.	Обчислення кривини і скриту.	практичне	[2, 4, 9, 14]	Чудові криві та їх кривина. Зв'язок кривини і радіуса кривини. Пряма, як єдина крива нульової кривини. Коло, як частковий випадок кривої постійної кривини (2 год.)	Один тиждень
Сьомий тиждень, 2 год.	Кривина та скрут кривої при довільній параметризації кривої.	лекція	[1, 2, 5, 14]	Обчислення кривини і скриту класичних просторових кривих. Спіралі. (2 год.)	Один тиждень
Сьомий тиждень, 2 год.	Обчислення інваріантів кривих.	практичне	[2, 5, 8, 9]	Криві другого порядку, які вивчаються в поглибленому курсі шкільної математики. Обчислення їх кривини для поглибленого дослідження властивостей цих кривих. (2 год.)	Один тиждень
Восьмий тиждень, 2 год.	Доведення основної теореми теорії плоских і просторових кривих.	лекція	[1, 2, 3, 14]	Дослідження класу кривих, для яких кривина і скрут збігаються (2 год.)	Один тиждень
Восьмий тиждень, 2 год.	Натуральні	практичне	[2, 4, 5, 8, 14]	Побудова кривої за	Один

тиждень, 2 год.	рівняння плоских і просторових кривих.			її натуральним рівнянням. (2 год.)	тиждень
Дев'ятий тиждень, 2 год.	Поняття параметризованої поверхні та способи її задання.	лекція	[1, 2, 4, 5]	Координатна сітка на поверхні. Виведення рівнянь дотичної площини та нормаль до поверхні для різних форм задання поверхні. (2год.)	Один тиждень
Дев'ятий тиждень, 2 год.	Параметризація поверхонь. Канонічна параметризація поверхонь обертання.	практичне	[4, 7, 8, 10]	Параметризована поверхня, як узагальнення понять циліндра, конуса, сфери та їх частин, які вивчаються в шкільному курсі стереометрії (10-й клас) (2 год.)	Один тиждень
Десятий тиждень, 2 год.	Поверхні, задані у різних формах. Дотична та нормаль до поверхні.	лекція	[2, 5, 6, 7]	Побудова годографів класичних поверхонь за їх заданням. Явні рівняння поверхонь обертання. (2 год.)	Один тиждень
Десятий тиждень, 2 год.	Приклади поверхонь заданих параметрично.	практичне	[2, 5, 8, 9, 10, 14]	Узагальнення понять шкільного курсу розділу «Стереометрія» дотичної площини до сфери, циліндра, конуса та побудови до поверхні нормалі в точці дотику до дотичної площини. (2 год.)	Один тиждень

Одинадцятий тиждень, 2 год.	Поняття метрики на поверхні. Перша квадратична форма поверхні та її обчислення.	лекція	[2, 5]	Обчислення коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні. Геометричний зміст першої квадратичної форми. Евклідові та псевдоевклідові простори. (2 год.)	Один тиждень
Одинадцятий тиждень, 2 год.	Метрики на класичних поверхнях.	практичне	[7, 8, 11, 12]	Метричні властивості геометричних фігур та типи симетрії в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Дванадцятий тиждень, 2 год.	Довжина дуги кривої на поверхні, кут між кривими на поверхні, площа області на поверхні.	лекція	[2, 5, 6]	Поняття площі поверхні. Чобіт Шварца. Сферичне відображення Гауса. Сума кутів трикутника на поверхні. (2 год.)	Один тиждень
Дванадцятий, тринадцятий тиждень, 2 год.	Друга квадратична форма. Обчислення коефіцієнтів другої квадратичної форми для різних форм задання поверхні.	практичне	[1, 2, 4, 5, 8, 10]	Обчислення другої квадратичної форми для поверхонь, які вивчаються в шкільному курсі геометрії сфера, циліндр, конус; поверхні обертання. (3 год.)	Два тижні
Тринадцятий тиждень, 2 год.	Гаусова та середня кривини поверхні.	лекція	[2, 4, 5, 14]	Інваріанти ізометрії поверхні. (3 год.)	Один тиждень
Чотирнадцятий тиждень, 2 год.	Головні кривини та головні напрямки.	лекція	[2, 4, 5, 8, 14]	Екстремальні властивості головних кривин. (3 год.)	Один тиждень
Чотирнадцятий тиждень	Обчислення головних кривих. Лінії	практичне	[2, 4, 5, 8, 14]	Формули Ейлера. Локальна класифікація	Один тиждень

тиждень, 2 год.	кривини, асимптотичні кривини.			поверхонь за гаусовою кривиною. (3 год.)	
П'ятна- дцятий тиждень, 2 год.	Геодезійні кривини. Геодезійні криві на поверхнях.	лекція	[2, 8]	Знаходження геодезійної кривини. Геодезійні на поверхнях обертання (3 год.)	Один тиждень
П'ятна- дцятий тиждень, 2 год.	Мінімальні поверхні. Класичні поверхні: катеноїд і гелікоїд.	практичне	[2, 6, 8]	Мінімальні поверхні обертання. Ізометричність катеноїда та гелікоїда. (3 год.)	Один тиждень
Шістна- дцятий тиждень, 2 год.	Екстремальні властивості геодезійних.	лекція	[2, 5, 7, 8, 11]	Геодезійні на сфері, циліндрі, конусі, які вивчаються в шкільному курсі. (3 год.)	Один тиждень
Шістна- дцятий тиждень, 2 год.	Гіперболічна та сферична геометрії. Модель Пуанкаре. Поверхня Бельтрамі.	практичне	[2, 3, 6, 12, 13]	Аксиомати геометрії в шкільному курсі геометрії. Неевклідові геометрії. (2 год.)	