

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра алгебри, топології та основ математики



Затверджено

на засіданні кафедри алгебри,
топології та основ математики
механіко-математичного факультету
Львівського національного
університету імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29 серпня 2022 р.)

Завідувач кафедри алгебри,
топології та основ математики

проф. Банах Т. О.

Силабус з навчальної дисципліни
«ФРАКТАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ»,

що викладається в межах ОПП «Комп'ютерна алгебра, криптологія
та теорія ігор»

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
для здобувачів зі спеціальності 111 – Математика

Назва дисципліни	Фрактальна геометрія
Адреса викладання дисципліни	Львівський національний університет імені Івана Франка, механіко-математичний факультет Україна, м. Львів, вул. Університетська, 1, 79000
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет, кафедра алгебри, топології та основ математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика та статистика, Спеціальність: 111 Математика
Викладачі дисципліни	Зарічний Михайло Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри, топології та основ математики
Контактна інформація викладачів	e-mail: mykhaylo.zarichnyi@lnu.edu.ua https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/zarichnyy-m-m м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 375 Роб. тел. (032) 239 41 72
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій або практичних занять (за попередньою домовленістю) за адресою: м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 375. Можливі консультації онлайн на платформі Zoom або Microsoft Teams (за попередньою домовленістю). Для погодження часу консультацій слід писати на електронну пошту викладача.
Сторінка дисципліни	https://new.mmf.lnu.edu.ua/department/atom-2
Інформація про дисципліну	Дисципліна «Фрактальна геометрія» є вибірковою навчальною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки зі спеціальності 111 «Математика» для освітньої програми «Комп'ютерна алгебра, криптологія та теорія ігор», яка викладається в п'ятому семестрі в обсязі 5 кредитів (за Європейською кредитно-трансферною системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс «Фрактальна геометрія» викладається для здобувачів першого (бакалаврського) рівня другого року навчання. Під час проходження курсу студенти вчаться застосовувати математичні інструменти для опису та аналізу різних характеристик фрактальних об'єктів, зокрема таких як різного роду виміри та самоподібність.
Мета та цілі дисципліни	Основною метою курсу «Фрактальна геометрія» є ознайомлення з фрактальними об'єктами з різних областей математики та їх властивостями, розвиток геометричної інтуїції та абстрактного мислення, збільшення математичної компетентності та підготовка до подальших математичних досліджень. Важливими завданнями є формування у студентів геометричної культури, сприяння розвитку їх логічного та абстрактного мислення, забезпечення інформацією щодо напрямків розвитку сучасної математики.
Література для вивчення дисципліни	1. Банах Т.О., Ардан Р.В., Радул Т.М. Детерміністичні фрактали. – Львів: ВЦ ЛНУ ім. І. Франка, 1997. – 20 с. 2. Bandt C., Hung N. V., Rao H. On the open set condition for self-similar fractals // Univ. of Greifswald, Germany, 2004. – P. 1–12. 3. Edgar Gerald A. Measure, Topology and Fractal Geometry. – New York:

	<p>Springer-Verlag, 1995. – 221 p.</p> <p>4. Falconer K. J. The Geometry of Fractal Sets. – Cambridge University Press, 1985. – 162 p.</p> <p>5. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – New York: W. H. Freeman Co., 2000. – 468 p.</p> <p>6. Barnsley M.F. Lecture Notes on Iterated Function Systems // Proc. Of Symposia in Applied Mathematics, 1989. – Vol. 39. – P. 127-143.</p> <p>7. Мазуренко Н.І. Фрактальна геометрія: навчальний посібник. – Івано-Франківськ, 2010. – 65с.</p>
Обсяг дисципліни	<p>Загальний обсяг: 150 год.</p> <p>Всього аудиторних занять: 48 годин. З них 32 години лекцій, 16 години практичних занять.</p> <p>Самостійна робота: 102 години. Кредитів: 5.</p>
Очікувані результати навчання	<p>Після завершення курсу «Фрактальна геометрія» студент буде володіти сучасними методами і теоретичними положеннями фрактальної геометрії, вміти застосовувати їх в подальшій професійній діяльності.</p> <p>У результаті вивчення курсу відповідно до освітньої програми формуються програмні компетентності.</p> <p>Загальні компетентності:</p> <p>ЗК 1: Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</p> <p>ЗК 2: Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;</p> <p>ЗК 3: Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;</p> <p>ЗК 7: Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;</p> <p>ЗК 9: Здатність приймати обґрунтовані рішення;</p> <p>Фахові компетентності спеціальності:</p> <p>СК-1: Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;</p> <p>СК-2: Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;</p> <p>СК-3: Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей технічних викладок;</p> <p>СК-4: Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;</p> <p>СК-6: Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем;</p> <p>СК-8: Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів;</p> <p>Програмні результати навчання:</p> <p>РН-1: Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;</p> <p>РН-3: Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;</p> <p>РН-4: Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;</p>

	<p>PH-7: Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефакхівців у галузі математики;</p> <p>PH-10: Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;</p> <p>PH-11: Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;</p> <p>PH-16: Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.</p>
Ключові слова	Фрактал, самоподібність, рекурсія, геометрична складність.
Формат дисципліни	Очний
Теми	<p>Тематика лекцій:</p> <p>Детерміністичні фрактали.</p> <p>1-2. Приклади фракталів: множина Кантора, трикутник Серпінського, крива Коха та властивості. Фрактали-дерева та фрактали-дракони як приклади рекурсивних множин.</p> <p>3-4. Метрика Гаусдорфа. Гіперпростір: властивості повноти та компактності.</p> <p>5. Самоподібність «простих» об'єктів. Самоподібність фракталів. Вимір по</p> <p>6-7. Міра та вимір Гаусдорфа: властивості та способи обчислення.</p> <p>8. Зв'язок між виміром подібності та виміром Гаусдорфа.</p> <p>9. Інші фрактальні виміри.</p> <p>Фрактали у динамічних системах.</p> <p>10. Множини Жюліа. Множини Жюліа квадратних многочленів. Множини Мандельброта.</p> <p>11. Алгоритм Ньютона та проблема Келлі.</p> <p>Тематика практичних занять:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Множина Кантора та її властивості. 2. Множини Серпінського та Коха та їх властивості. 3. Метрика Гаусдорфа: властивості та приклади обчислень. 4. Гіперпростори. Стискуючі відображення у гіперпросторах. 5. Означення фракталів як границь послідовностей у гіперпросторах. 6. Приклади ітерованих систем відображень та обчислення виміру по 7. Обчислення міри та виміру Гаусдорфа. 8. Динамічні системи: атрактори та репелери. 9. Множини Жюліа та Мандельброта. Означення та алгоритми генеру 10. Контрольна робота.
Підсумковий контроль, форма	Залік у письмовій формі.
Пререквізити	Для вивчення дисципліни студенти потребують знань з математичного аналізу, теорії ймовірностей, дискретної математики.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватись	Лекції, практичні заняття, консультації.

атися під час викладання дисципліни																													
Необхідне обладнання	Дошка, крейда, навчальні посібники, мультимедійний проектор, комп'ютер, доступ до мережі «Інтернет», доступ до платформ Microsoft Teams, Zoom, Telegram, електронна пошта.																												
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Контроль здійснюється у формі контрольних робіт. Бали нараховуються за таким співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • робота під час практичних занять (14 занять): 7% семестрової оцінки; максимальна кількість балів – 7; участь в кожному лабораторному занятті оцінюється в 0,5 бала, $0,5 \times 14 = 7$. • 2 контрольні роботи (практична частина курсу): 20% семестрової оцінки; дві контрольні роботи: контрольна робота №1 – 22 бали, контрольна робота №2 – 21 бал; максимальна кількість балів – 43; $22 + 21 = 43$. • залік: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів – 50. <p>Залік проходить у письмовій формі. Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p>Порядок вивчення та оцінювання дисципліни доводиться до відома студентів протягом семестру. Успішність навчання студентів оцінюється за шкалою «зараховано» / «не зараховано».</p> <p style="text-align: center;">Шкала оцінювання: Університету , національна та ECTS</p> <table border="1" data-bbox="373 954 1453 1688"> <thead> <tr> <th rowspan="2" style="text-align: center;"><i>Оцінка в балах</i></th> <th rowspan="2" style="text-align: center;"><i>Оцінка ECTS</i></th> <th colspan="2" style="text-align: center;"><i>За національною шкалою</i></th> </tr> <tr> <th style="text-align: center;"><i>Екзаменаційна оцінка, оцінка з диференційованого заліку</i></th> <th style="text-align: center;"><i>Залік</i></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">90 – 100</td> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">Відмінно</td> <td rowspan="5" style="text-align: center;">Зараховано</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">81-89</td> <td style="text-align: center;">B</td> <td style="text-align: center;">Добре</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">71-80</td> <td style="text-align: center;">C</td> <td style="text-align: center;">Добре</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">61-70</td> <td style="text-align: center;">D</td> <td style="text-align: center;">Задовільно</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">51-60</td> <td style="text-align: center;">E</td> <td style="text-align: center;">Задовільно</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0-50</td> <td style="text-align: center;">F/FX</td> <td style="text-align: center;">Незадовільно з можливістю повторного складання</td> <td style="text-align: center;">Не зараховано можливістю повторного складання</td> </tr> </tbody> </table> <p>Бали в діапазоні 90–100 означають, що студент виявив всебічні, систематизовані, глибокі знання програмного матеріалу, уміння вільно виконувати завдання передбачені програмою. Знання основної і ознайомлення з додатковою літературою, передбачених програмою на рівні творчого використання.</p> <p>Бали в діапазоні 71–89 означають, що студент виявив загалом добрі знання навчального матеріалу, але допустив ряд помітних помилок, показав систематичний характер знань з дисципліни, здатний їх використовувати та поповнювати в процесі подальшого навчання.</p> <p>Бали в діапазоні 61–70 означають, що студент виявив знання основного</p>			<i>Оцінка в балах</i>	<i>Оцінка ECTS</i>	<i>За національною шкалою</i>		<i>Екзаменаційна оцінка, оцінка з диференційованого заліку</i>	<i>Залік</i>	90 – 100	A	Відмінно	Зараховано	81-89	B	Добре	71-80	C	Добре	61-70	D	Задовільно	51-60	E	Задовільно	0-50	F/FX	Незадовільно з можливістю повторного складання	Не зараховано можливістю повторного складання
<i>Оцінка в балах</i>	<i>Оцінка ECTS</i>	<i>За національною шкалою</i>																											
		<i>Екзаменаційна оцінка, оцінка з диференційованого заліку</i>	<i>Залік</i>																										
90 – 100	A	Відмінно	Зараховано																										
81-89	B	Добре																											
71-80	C	Добре																											
61-70	D	Задовільно																											
51-60	E	Задовільно																											
0-50	F/FX	Незадовільно з можливістю повторного складання	Не зараховано можливістю повторного складання																										

	<p>навчального матеріалу, справився з виконанням завдань, передбачених програмою, ознайомився з основою літературою, рекомендованою програмою, допустив значну кількість помилок у відповідях на запитання, тестуванні, при виконанні завдань.</p> <p>Бали в діапазоні 51–60 свідчать про значні недоліки в знаннях основного навчального матеріалу, про принципові помилки при виконанні передбачених програмою завдань.</p> <p>Бали в діапазоні 1–50 означають, що студент не мав знань зі значної частини навчального матеріалу, допускав принципові помилки при виконанні більшості передбачених програмою завдань, неспроможний самостійно засвоїти програмний матеріал і потребує повторного вивчення дисципліни.</p> <p>Письмові роботи: Очікується, що студенти протягом семестру виконають дві контрольні роботи. Варіант контрольної роботи включає в себе задачі відповідного змістовного модуля різних типів та рівнів складності.</p> <p>Академічна доброчесність. Очікується, що студенти виконуватимуть навчальні завдання, завдання поточного та підсумкового контролю самостійно, не користуються недозволеними засобами, не видають за свої результати роботи інших людей або Штучного Інтелекту. При використанні чужих ідей і тверджень у власних роботах посилаються на використані джерела інформації. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми недоброчесності не толеруються.</p> <p>Відвідування занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття дисципліни. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. За згодою декана та викладача дозволяється перейти на індивідуальний графік занять. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів виконання усіх передбачених видів робіт.</p> <p>Література. Література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, може бути надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали поточного та підсумкового контролю, а також самостійної роботи. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т.ін.</p>
<p>Питання до заліку</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Приклади фракталів: множина Кантора, трикутник Серпінського, крива Коха – способи побудови та властивості. 2. Фрактали-дерева та фрактали-дракони як приклади рекурсивно означених множин.

	<ol style="list-style-type: none"> 3. Метрика Гаусдорфа. 4. Гіперпростір: властивості повноти та компактності. 5. Теорема Гатчінсона. 6. Самоподібність «простих» об'єктів. 7. Самоподібність фракталів. 8. Вимір подібності. 9. Міра та вимір Гаусдорфа: властивості та способи обчислення. 10. Зв'язок між виміром подібності та виміром Гаусдорфа. 11. Інші фрактальні виміри. 12. Множини Жюліа. Множини Жюліа квадратних многочленів. Множини Мандельброта. 13. Алгоритм Ньютона та проблема Келлі.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано після завершення курсу.

ДОДАТОК

Схема курсу

Тиж- день, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література. Ресурси в Інтернеті	Завдання, год.	Термін виконан- ня
1	2	3	4	5	6
Перший тиждень, 2 год.	Приклади фракталів: множина Кантора, трикутник Серпінського, крива Коха – способи побудови та властивості. Фрактали-дерева та фрактали-дракони як приклади рекурсивно означених множин.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Другий тиждень, 4 год.	Приклади фракталів: множина Кантора, трикутник Серпінського, крива Коха – способи побудови та властивості. Фрактали-дерева та фрактали-дракони як приклади рекурсивно означених множин.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Множина Кантора та її властивості. Множини Серпінського та Коха та їх властивості.	Практичне заняття, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	До наступного заняття
Третій тиждень, 2 год.	Метрика Гаусдорфа. Гіперпростір: властивості повноти та компактності. Теорема Гатчінсона.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Четвер- тий тиждень, 4 год.	Метрика Гаусдорфа. Гіперпростір: властивості повноти та компактності. Теорема Гатчінсона.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Метрика Гаусдорфа: властивості	Практичне	Див. Література	3 год.	До нас-

	та приклади обчислень.	заняття, 2 год.	для вивчення дисципліни		тупного заняття
П'ятий тиждень, 2 год.	Самоподібність «простих» об'єктів. Самоподібність фракталів. Вимір подібності.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Шостий тиждень, 4 год.	Самоподібність «простих» об'єктів. Самоподібність фракталів. Вимір подібності.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Гіперпростори. Стискуючі відображення у гіперпросторах. Означення фракталів як границь послідовностей у гіперпросторах.	Практичне заняття, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	До нас- тупного заняття
Сьомий тиждень, 2 год.	Міра та вимір Гаусдорфа: властивості та способи обчислення.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Восьмий тиждень, 4 год.	Міра та вимір Гаусдорфа: властивості та способи обчислення.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Приклади ітерованих систем відображень та обчислення виміру подібності.	Практичне заняття, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	До нас- тупного заняття
Дев'я- тий тиждень, 2 год.	Зв'язок між виміром подібності та виміром Гаусдорфа.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Десятий тиждень, 4 год.	Інші фрактальні виміри.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Обчислення міри та виміру Гаусдорфа.	Практичне заняття, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	До нас- тупного заняття
Одинад- цятий тиждень, 2 год.	Інші фрактальні виміри.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Дванад- цятий тиждень, 4 год.	Множини Жюліа. Множини Жюліа квадратних многочленів. Множини Мандельброта.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Динамічні системи: атрактори та репелери.	Практичне заняття, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	До нас- тупного заняття
Тринадц- ятий тиждень, 2 год.	Множини Жюліа. Множини Жюліа квадратних многочленів. Множини Мандельброта.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Чотирна- дцятий тиждень, 4 год.	Алгоритм Ньютона та проблема Келлі.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
	Множини Жюліа та Мандельброта. Означення та алгоритми генерування.	Практичне заняття, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	До нас- тупного заняття
П'ятнад- цятий тиждень, 2 год.	Алгоритм Ньютона та проблема Келлі.	Лекція, 2 год.	Див. Література для вивчення дисципліни	3 год.	Один тиждень
Шістнад- цятий тиждень, 4 год.	Контрольна робота №1	Лекція, 2 год.		3 год.	
		Практичне заняття,		3 год.	

		2 год.			
Разом		32 год. лекцій, 16 год. практичних занять			