

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра кафедри алгебри, топології та основ математики

Затверджено

На засіданні кафедри алгебри,
топології та основ математики
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29.08. 2022 р.)



Завідувач кафедри проф. Т.О. Банах

Силабус з навчальної дисципліни
“Теорія кривих і поверхонь”,
що викладається в межах ОПІ «Комп’ютерна алгебра,
криптологія та теорія ігор»
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
для здобувачів зі спеціальності 111 – Математика

Львів 2022 р.

Назва дисципліни	Теорія кривих і поверхонь
Адреса викладання дисципліни	м. Львів, вул. Університетська, 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика та статистика, Спеціальність: 111 Математика
Викладачі дисципліни	Гуран Ігор Йосипович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики
Контактна інформація викладачів	ihor.huran@lnu.edu.ua https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/huran-ihor-josypovych м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374; тел. 0322394218
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) за адресою: м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374. Також можливі он-лайн консультації на платформі Teams. Для погодження часу консультації слід писати на електронну пошту викладача.
Сторінка дисципліни	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/teoriia-kryvykh-i-poverkhon-opp-komp-iuterna-algebra-kryptolohiia-ta-teoriia-ihor
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Теорія кривих і поверхонь” є вибірковою навчальною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки з спеціальності 111 Математика для освітньої програми “ Комп’ютерна алгебра, криптологія та теорія ігор ”, яка викладається у 4-му семестрі в обсязі 5 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Навчальну дисципліну розроблено таким чином, щоб надати учасникам необхідні знання, обов'язкові для того, щоб ознайомити студентів з історичними відомостями про виникнення та розвиток диференціальної геометрії. Сформулювати вміння та навички розв'язувати практичні завдання та задачі з використанням отриманих теоретичних знань. Розвивати логічне і творче мислення, розширити науковий світогляд студентів.
Мета та цілі дисципліни	Надати основні теоретичні відомості та сформулювати практичні навички з курсу «Теорія кривих і поверхонь», який складає невід'ємну частину загально математичної освіти майбутнього вчителя математики; озброїти студентів конкретними знаннями та вміннями, які даватимуть їм можливість викладати геометрію у різних навчальних закладах та кваліфіковано керувати спецкурсами, факультативами та гуртками з геометрії, виховувати у своїх учнів допитливість, інтерес до знань.
Література для вивчення дисципліни	1. Гуран І.Й., Зарічний М.М., Диференціальна геометрія і топологія. – К. НВК ВО, 1991. 2. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х. Основа, 1995. 3. Бокало Б.М., Гуран І.Й., Зарічний М.М. Збірник задач з курсу

	<p>диференціальної геометрії і топології. – К. ІСФО, 1994.</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. Пришляк О. Диференціальна геометрія. – К. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 68 с. 5. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К. Вища школа, 1973. – 68с. 6. Kobayashi, S., Nomiru.: Foundations of Differential Geometry, vols. I, II Wiely Classics Library Wiely, New Yourk, - 1996. 7. Величко І.Г., Гургенідзе М.О., Стеганцева П.Г. Диференціальна геометрія кривих та поверхонь: Навчально-методичний посібник до індивідуальної та самостійної роботи для студентів II курсу математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2009. – 76с. 8. Кованцов Н. И., Заржевская Г.М., Кочаровский В. Г. Диференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. – Киев; Вища школа. 1982. – 376с. 9. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір - Геометрія 9 клас. – Харків, «Гімназія», 2021. 10. А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов – Геометрія 10 клас, Ранок, 2018. 11. М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З.О. Сердюк – Геометрія 11 клас. – Київ, Оріон, 2019. 12. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Геометрія 10 клас. – Харків, Гімназія, 2018. 13. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський – Геометрія 11 клас. – Харків, Гімназія, 2019. 14. І. Й. Гуран, О. В. Гутік – Методичка з теорії кривих і поверхонь. <p style="text-align: center;">ДОПОМІЖНА</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Никифорчин О.Р.: Елементи загальної топології. Івано-Франківськ – 2015 – 240с. 2. Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Space. Graduate Studies in Mathematics. vol. 34. – A. Math. Soc., 2012. – 640 p. 3. Pedro M. G., Masque J.M., Mykytyuk I.V. Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds. A Workbook for Students and Teachers. – Springer , 2nd ed. – 2013 – 644 p. 4. Banakh T., Guran I., Ravsky A. Manifolds Admitting a Continuous Cancellative Binary Operation are Orientable //Journal of Lie Theory. – V. 16 (2016). – P. 1177-1185. 5. Igor Guran, Yaroslav Prytula. Sala Weinlös, the first female doctor of philosophy in Mathematics in Lviv university: Current Research in Mathematical and Computer Sciences // Publisher UWM, Olsztyn, 2018 P. 27–39.
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 150 год., з них – 32 год., лекцій, 32 год. практичних занять. Самостійна робота: 86 год.

<p>Очікувані результати навчання</p>	<p>У результаті вивчення курсу «Теорія кривих і поверхонь» відповідно до освітньої програми формуються програмні компетентності:</p> <p>Загальні компетентності:</p> <p>ЗК 1: Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</p> <p>ЗК 2: Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;</p> <p>ЗК 3: Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;</p> <p>ЗК 7: Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;</p> <p>ЗК 9: Здатність приймати обґрунтовані рішення;</p> <p>Фахові компетентності спеціальності:</p> <p>СК-1: Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання;</p> <p>СК-2: Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі;</p> <p>СК-3: Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізнити основні ідеї від деталей технічних викладок;</p> <p>СК-4: Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізнити правдоподібні аргументи від формально бездоганих;</p> <p>СК-6: Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем;</p> <p>СК-8: Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів;</p> <p>Програмні результати навчання:</p> <p>РН-1: Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;</p> <p>РН-3: Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;</p> <p>РН-4: Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;</p> <p>РН-7: Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики;</p> <p>РН-10: Розв’язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;</p> <p>РН-11: Розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;</p> <p>РН-14: Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв’язування професійних задач.</p>
<p>Ключові слова</p>	<p>Гладкі криві, плоскі та просторові криві, кривина, скрут, гладкі поверхні, перша квадратична форма поверхні, геодезійні.</p>

Формат курсу	Очний.
Теми	Перелік тем подано в додатку у формі схеми курсу.
Підсумковий контроль, форма	Залік в кінці семестру в письмовій формі.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з лінійної алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії, топології, елементарної математики в обсязі програми загальноосвітньої школи, диференціальних рівнянь.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Лекції, презентації, спільні розробки, робота у групах, дискусія, підготовка індивідуальних завдань.
Необхідне обладнання	Дошка, комп'ютер, проектор, доступ до Internet мережі. Для вивчення курсу достатньо володіти загально вживаними програми такими як Microsoft Office Word, Microsoft Office, Excel, Microsoft Teams.
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • робота під час практичних занять: 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10. • підготовка індивідуальних завдань: 40% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 40. • залік: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50. <p>Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p>Залік проходить у письмовій формі. У кожному білеті міститься по два теоретичних питання із теорії кривих і поверхонь, а також набір задач, вибраних зі шкільного поглибленого курсу математики. Оцінка за семестр у випадку складання заліку є сумою балів поточного контролю та балів, отриманих під час заліку.</p> <p>Письмові роботи: Очікується, що студенти протягом семестру виконають індивідуальні завдання з використанням додаткової літератури у вигляді реферату, презентації з подальшим захистом в кінці курсу.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її</p>

	<p>незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми недоброчесності не толеруються.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p>
<p>Питання до заліку чи екзамену.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Основні властивості вектор-функції скалярного аргументу. Довести лему про похідну вектор-функції постійного модуля • Параметричні, загальні і векторні рівняння ліній • Довести теорему про дотичну до кривої • Вивести рівняння дотичної і нормальної площин до гладкої кривої • Поняття стичної площини до кривої та вивести її рівняння • Вивести рівняння головної нормалі і бінормалі • Поняття довжини дуги кривої і вивести формулу для її визначення • Поняття натурального параметра. Довести теорему про натуральну параметризацію довільної регулярної кривої • Кривина кривої, радіус кривини кривої • Поняття про скрут просторової кривої • Вивести формулу Френе • Вивести формулу кривини та скриту при довільній параметризації кривої • Довести основну теорему для просторових і плоских кривих. Натуральні рівняння кривої • Поняття гладкої параметризованої поверхні. Локальна еквівалентність різних форм поверхні: явне, неявне параметричне задання поверхні • Координатні лінії на поверхні. Дотична площина та нормаль до поверхні • Перша квадратична форма поверхні та її обчислення • Елементи внутрішньої геометрії: довжина дуги кривої на поверхні, кут між кривими на поверхні, площа поверхні • Друга квадратична форма поверхні та формули для її обчислення.

	<ul style="list-style-type: none"> • Нормальні та похилі перерізи • Гауссова та середня кривини поверхні • Головні кривини поверхні. Індикатриса Дюпена • Класифікація точок поверхні • Дериваційні формули Вейнгартена-Гаусса • Довести теорему Гаусса • Геодезійні криві на поверхні. Обчислення геодезійної кривини • Геодезійні криві на сфері, циліндрі, конусі • Геодезійні на поверхнях обертання • Геодезійні та їх екстремальні властивості
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу

Тиж день, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності(заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконан ня
Перший тиждень, 2 год.	Поняття вектор-функції скалярного аргумента.	лекція	[2, 4, 5, 9, 14]	Задання географів кривих, заданих їх механічними властивостями. Циклоїди, епіциклоїди, кардіоїда, спіралі. (2 год.)	Один тиждень
Перший тиждень, 2 год.	Приклади вектор-функції скалярного аргумента.	практичне	[2, 4, 8]	Вектор-функція, як узагальнення поняття функції в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Другий тиждень, 2 год.	Границя вектор- функції. Неперервність. Диференційова ність.	лекція	[2, 5, 14]	Похідні вектор- функції постійного модуля, постійного напрямку. Похідні вищих порядків, їх геометричний та	Один тиждень

				механічний зміст. (2 год.)	
Другий тиждень, 2 год.	Приклади неперервних, диференційованих вектор-функцій.	практичне	[8, 4, 9]	Похідна вектор-функції, як розширення поняття похідної в шкільному курсі «Алгебра і початки аналізу» (2 год.)	Один тиждень
Третій тиждень, 2 год.	Поняття параметризації кривої в \mathbb{R}^3. Просторові криві; вектор швидкості. Гладкі криві.	лекція	[2, 4, 5, 7, 14]	Дотична та нормаль до кривої. Доведення теореми про напрямок дотичної до кривої. Рівняння головної нормалі та бінормалі до просторової кривої (2 год.)	Один тиждень
Третій тиждень, 2 год.	Приклади параметризації кривих.	практичне	[2, 5, 10, 11, 14]	Дотичний вектор до просторової кривої (лінії). Крива, як узагальнення графіка функції в шкільному курсі «Алгебра і початки аналізу» (10 клас) (2 год.)	Один тиждень
Четвертий тиждень, 2 год.	Знаходження елементів супровідного тригранника Френе.	лекція	[2, 4, 5, 8]	Основний тригранник Френе: стична, спрямна та нормальна площини та їх рівняння. (2 год.)	Один тиждень

Четвертий тижень, 2 год.	Виведення та обчислення елементів тригранника Френе.	практичне	[2, 4, 5, 9]	Зв'язок понять дотичної площини до кривої, нормалі як узагальнення поняття дотичної до кола в шкільному курсі геометрії (9 клас). (2 год.)	Один тижень
П'ятий тижень, 2 год.	Довжина дуги кривої. Натуральна параметризація гладкої просторової кривої.	лекція	[2, 5, 14]	Поняття довжини кривої. Криві Пеано. Франтали. Предмет фрактальної геометрії (2 год.)	Один тижень
П'ятий тижень, 2 год.	Обчислення довжини класичних кривих.	практичне	[2, 4, 5, 9, 14]	Узагальнення поняття довжини дуги кола, яке розглядається у програмі 9-го класу геометрії. Число π . (2 год.)	Один тижень
Шостий тижень, 2 год.	Кривина і скрут при натуральній параметризації. Формули Серре-Френе.	лекція	[2, 3, 5, 14]	Диференціальні рівняння руху реперу Френе. Інваріанти кривої. Знаходження натуральних рівнянь кривої. (2 год.)	Один тижень
Шостий тижень, 2 год.	Обчислення кривини і скриту.	практичне	[2, 4, 9, 14]	Чудові криві та їх кривина. Зв'язок кривини і радіуса кривини. Пряма, як єдина крива нульової кривини. Коло, як частковий випадок кривої постійної кривини (2 год.)	Один тижень
Сьомий тижень,	Кривина та скрут кривої	лекція	[1, 2, 5, 14]	Обчислення кривини і скриту	Один тижень

2 год.	при довільній параметризації кривої.			класичних просторових кривих. Спірالی. (2 год.)	
Сьомий тиждень, 2 год.	Обчислення інваріантів кривих.	практичне	[2, 5, 8, 9]	Криві другого порядку, які вивчаються в поглибленому курсі шкільної математики. Обчислення їх кривини для поглибленого дослідження властивостей цих кривих. (2 год.)	Один тиждень
Восьмий тиждень, 2 год.	Доведення основної теореми теорії плоских і просторових кривих.	лекція	[1, 2, 3, 14]	Дослідження класу кривих, для яких кривина і скрут збігаються (2 год.)	Один тиждень
Восьмий тиждень, 2 год.	Натуральні рівняння плоских і просторових кривих.	практичне	[2, 4, 5, 8, 14]	Побудова кривої за її натуральним рівнянням. (2 год.)	Один тиждень
Дев'ятий тиждень, 2 год.	Поняття параметризованої поверхні та способи її задання.	лекція	[1, 2, 4, 5]	Координатна сітка на поверхні. Виведення рівнянь дотичної площини та нормаль до поверхні для різних форм задання поверхні. (2 год.)	Один тиждень
Дев'ятий тиждень, 2 год.	Параметризація поверхонь. Канонічна параметризація	практичне	[4, 7, 8, 10]	Параметризована поверхня, як узагальнення понять циліндра, конуса, сфери та їх частин, які	Один тиждень

	поверхонь обертання.			вивчаються в шкільному курсі стереометрії (10-й клас) (2 год.)	
Десятий тиждень, 2 год.	Поверхні, задані у різних формах. Дотична та нормаль до поверхні.	лекція	[2, 5, 6, 7]	Побудова годографів класичних поверхонь за їх заданням. Явні рівняння поверхонь обертання. (2 год.)	Один тиждень
Десятий тиждень, 2 год.	Приклади поверхонь заданих параметрично.	практичне	[2, 5, 8, 9, 10, 14]	Узагальнення понять шкільного курсу розділу «Стереометрія» дотичної площини до сфери, циліндра, конуса та побудови до поверхні нормалі в точці дотику до дотичної площини. (2 год.)	Один тиждень
Одинадцятий тиждень, 2 год.	Поняття метрики на поверхні. Перша квадратична форма поверхні та її обчислення.	лекція	[2, 5]	Обчислення коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні. Геометричний зміст першої квадратичної форми. Евклідові та псевдоевклідові простори. (2 год.)	Один тиждень
Одинадцятий тиждень, 2 год.	Метрики на класичних поверхнях.	практичне	[7, 8, 11, 12]	Метричні властивості геометричних фігур та типи симетрії в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Дванадцятий тиждень, 2 год.	Довжина дуги кривої на поверхні, кут між кривими на поверхні, площа області	лекція	[2, 5, 6]	Поняття площі поверхні. Чобіт Шварца. Сферичне відображення Гауса. Сума кутів трикутника на	Один тиждень

	на поверхні.			поверхні. (2 год.)	
Дванадцятий, тринадцятий тиждень, 2 год.	Друга квадратична форма. Обчислення коефіцієнтів другої квадратичної форми для різних форм задання поверхні.	практичне	[1, 2, 4, 5, 8, 10]	Обчислення другої квадратичної форми для поверхонь, які вивчаються в шкільному курсі геометрії сфера, циліндр, конус; поверхні обертання. (2 год.)	Два тижні
Тринадцятий тиждень, 2 год.	Гаусова та середня кривини поверхні.	лекція	[2, 4, 5, 14]	Інваріанти ізометрії поверхні. (2 год.)	Один тиждень
Чотирнадцятий тиждень, 2 год.	Головні кривини та головні напрямки.	лекція	[2, 4, 5, 8, 14]	Екстремальні властивості головних кривин. (2 год.)	Один тиждень
Чотирнадцятий тиждень, 2 год.	Обчислення головних кривих. Лінії кривини, асимптотичні кривини.	практичне	[2, 4, 5, 8, 14]	Формули Ейлера. Локальна класифікація поверхонь за гаусовою кривиною. (2 год.)	Один тиждень
П'ятнадцятий тиждень, 2 год.	Геодезійні кривини. Геодезійні криві на поверхнях.	лекція	[2, 8]	Знаходження геодезійної кривини. Геодезійні на поверхнях обертання (2 год.)	Один тиждень
П'ятнадцятий тиждень, 2 год.	Мінімальні поверхні. Класичні поверхні: катеноїд і гелікоїд.	практичне	[2, 6, 8]	Мінімальні поверхні обертання. Ізометричність катеноїда та гелікоїда. (2 год.)	Один тиждень
Шістнадцятий тиждень, 2 год.	Екстремальні властивості геодезійних.	лекція	[2, 5, 7, 8, 11]	Геодезійні на сфері, циліндрі, конусі, які вивчаються в шкільному курсі. (2 год.)	Один тиждень

<p>Шістна- дцятий тиждень, 2 год.</p>	<p>Гіперболічна та сферична геометрії. Модель Пуанкаре. Поверхня Бельтрамі.</p>	<p>практичне</p>	<p>[2, 3, 6, 12, 13]</p>	<p>Аксиомати геометрії в шкільному курсі геометрії. Неевклідові геометрії. (2 год.)</p>	
--	--	------------------	--------------------------	--	--