МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра кафедри алгебри, топології та основ математики

Затверджено
На засіданні кафедри алгебри,
топології та основ математики
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 29.08. 2022 р.)

Завідувач кафедри проф. Т.О. Банах

Силабус з навчальної дисципліни
“Комплексні числа в геометрії ”,
що викладається в межах ОПП “Середня освіта (Математика)”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
з спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)

Львів 2022 р.

Назва дисципліни	Комплексні числа в геометрії
Адреса викладання дисципліни	м. Львів, вул. Університетська, 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	01 Освіта/Педагогіка 014.04 Середня освіта (Математика)
Викладачі дисципліни	Банах Тарас Онуфрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри, топології та основ математики
Контактна інформація викладачів	taras.banakh@lnu.edu.ua; https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/banah-t-o м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374; тел. 0322394218
Консультації з питань навчання по дис.ципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) за адресою: м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374. Також можливі он-лайн консультації на платформі Teams. Для погодження часу консультації слід писати на електронну пошту викладача.
Сторінка дисципліни	https://new.mmf.lnu.edu.ua/academics/bachelor/curriculum-education
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Комплексні числа в геометрії ” є вибірковою навчальною дисципліною циклу професійної та практичної підготовки з спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”, яка викладається у 7-му семестрі в обсязі 6 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Навчальну дисципліну розроблено таким чином, щоб надати учасникам необхідні знання, обов'язкові для того, щоб ознайомити студентів з відомостями про комплексні числа, кватерніони та їхні застосування у геометрії. Сформулювати вміння та навички розв'язувати практичні завдання та задачі з використанням отриманих теоретичних знань. Розвивати логічне і творче мислення, розширити науковий світогляд студентів.
Мета та цілі дисципліни	Надати основні теоретичні відомості та сформулювати практичні навички з курсу «Комплексні числа в геометрії», який складає невід'ємну частину загально математичної освіти майбутнього вчителя математики; озброїти студентів конкретними знаннями та вміннями, які даватимуть їм можливість викладати геометрію у різних навчальних закладах та кваліфіковано керувати спецкурсами, факультативами та гуртками з геометрії, виховувати у своїх учнів допитливість, інтерес до знань.
Література для вивчення дисципліни	1. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір - Геометрія 9 клас. – Харків, «Гімназія», 2021. 2. А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов – Геометрія 10 клас, Ранок, 2018. 3. М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць,

	З.О. Сердюк – Геометрія 11 клас. – Київ, Оріон, 2019. 4. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Геометрія 10 клас. – Харків, Гімназія, 2018. 5. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський – Геометрія 11 клас. – Харків, Гімназія, 2019. 6. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський – Алгебра 11 клас. – Харків, Гімназія, 2019. 7. I.M. Yaglom, Complex Numbers in Geometry, Academic Press, 1968 8. R.Deaux, Introduction to the Geometry of Complex Numbers, Dover Publ Inc, 2008 9. H. Schwerdtfeger, Geometry of Complex Numbers: Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry, Dover Publ Inc, 1980 10. Liang-shin Hahn, Complex numbers & Geometry, Amer. Math. Soc. 1994 11. S. Cunningham, A. Hanson, Visualizing Quaternions, Elsevier, 2004. ДОПОМІЖНА 12. P. S. W. MacIlwaine , C. Plumpton, Coordinate Geometry and Complex Numbers, Springer, 1984 13. J. Kramer , A.-M. von Pippich, From Natural Numbers to Quaternions, Springer, 2017. 14. S. L. Altmann, Rotations, Quaternions, and Double Groups, Dover Publ., 2005. 15. J. Conway, On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry, CRC Press, 2003
Обсяг курсу	Загальний обсяг: 180 год., з них – 36 год., лекцій, 36 год. практичних занять. Самостійна робота: 108 год.

Очікувані результати навчання	У результаті вивчення курсу «Комплексні числа в геометрії» відповідно до освітньої програми формуються **програмні компетентності:** **Загальні компетентності:** **ЗК 5:** Здатність до генерування нових ідей, виявлення та вирішення проблем. **ЗК 7:** Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел. **ЗК 9:** Здатність навчатися та засвоювати новітні інформацію та знання. **Фахові компетентності спеціальності:** **ФК 1:** Здатність використовувати систематизовані та інноваційні теоретико-практичні знання з математики та методики і методології навчання та викладання математики під час розв'язування професійних завдань. **ФК 4:** Здатність до формування мотивації та організації пізнавальної діяльності учнів. **ФК 8:** Здатність до формування в учнів ключових і предметних компетентностей та здійснення міжпредметних зв'язків. **ФК 11:** Здатність до прийняття плідних та ефективних розв'язків у складних неочікуваних ситуаціях, вміння адаптуватися до нових ситуацій в освітницькій діяльності. **Програмні результати навчання:** **ПРН 1:** Знати та розуміти основні поняття, закони, теорії, загальну структуру, предмет і методи дослідження математики та методики її навчання, місце і зв'язки в системі наук, етапи історії її розвитку. **ПРН 10:** Уміти розв'язувати задачі різних рівнів складності курсу математики в закладах загальної середньої освіти, чітко й раціонально пояснювати розв'язання учням. **ПРН 14:** Розробляти і пропонувати різні форми та прийоми виховання позитивного ставлення до математики, мотивації учнів до засвоєння її основ та методів.
Ключові слова	Комплексні числа, кватерніони, ізометричні перетворення, інверсії
Формат курсу	Очний.
Теми	Перелік тем подано в додатку у формі схеми курсу.
Підсумковий контроль, форма	Залік в кінці семестру в письмовій формі.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з лінійної алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії, елементарної математики в обсязі програми загальноосвітньої школи
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу	Лекції, презентації, спільні розробки, робота у групах, дискусія, підготовка індивідуальних завдань.

Необхідне обладнання	Дошка, комп'ютер, проектор, доступ до Internet мережі. Для вивчення курсу достатньо володіти загально вживаними програми такими як Microsoft Office Word, Microsoft Office, Excel, Microsoft Teams.
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: • робота під час практичних занять: 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10. • підготовка індивідуальних завдань: 40% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 40. • залік: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50. Підсумкова максимальна кількість балів – 100. Залік проходить у письмовій формі. У кожному білеті міститься по два теоретичних питання, а також набір задач. Оцінка за семестр у випадку складання заліку є сумою балів поточного контролю та балів, отриманих під час заліку. **Письмові роботи:** Очікується, що студенти протягом семестру виконають індивідуальні завдання з використанням додаткової літератури у вигляді реферату, презентації з подальшим захистом в кінці курсу. **Академічна доброчесність**: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахуванння викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми недоброчесності не толеруються. **Відвідання занять** є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні зайняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом. **Література.** Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих. **Політика виставлення балів.** Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на

	заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.
Питання до заліку чи екзамену.	• Комплексні числа та алгебраїчні операції над комплексними числами • Тригонометрична форма комплексного числа • Ізометричні перетворення та рухи • Класифікація ізометричних перетворень та рухів площини • Перетворення подібності • Застосування комплексних чисел до перетворень подібності • Дробово-лінійні перетворення комплексної площини • Інверсія відносно кола • Властивості інверсії • Модель Пуанкаре неевклідової геометрії • Кватерніони • Зв'язок множення кватерніонів зі скалярним та векторним добутками • Застосування кватерніонів до зображення ізометрій 3-вимірного простору. • Теорема Птоломея-Ойлера • Теорема Кліфорда про кола • Коло дев'яти точок • Пряма Сімсона • Теорема Кантора про дотичний трикутник • Теорема Феєрбаха • Теорема Морлея • Чотири точки трикутника
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу

Тиждень, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності	Література	Завдання, год.	Термін виконання
Перший тиждень, 3 год.	**Комплексні числа**	лекція	[6,7,8]	Комплексні числа, операції, застосування до розв'язування квадратних рівнянь (4,5 год.)	Один тиждень
Перший тиждень, 3 год.	**Алгебраїчні операції над комплексними числами**	Практичне заняття	[6,7,8]	Алгебраїчні операції над комплексними числами (4,5 год.)	Один тиждень
Другий тиждень, 3 год.	**Тригонометрична форма комплексного числа**	лекція	[6,7,8]	Тригонометрична форма комплексного числа, модуль та аргумент, геометричний зміст множення (4,5 год.)	Один тиждень
Другий тиждень, 3 год.	**Модуль та аргумент комплексного числа**	Практичне заняття	[6,7,8]	Тригонометрична форма комплексного числа, модуль та аргумент комплексного числа, геометричний зміст множення (4,5 год.)	Один тиждень
Третій тиждень, 3 год.	**Ізометричні перетворення, рухи та перетворення подібності**	лекція	[1,2,3,4,5]	Різні види перетворень метричних просторів, Перетворення площини та простору, Ізометрії та перетворення подібності, центральні та осьові симетрії (4,5 год.)	Один тиждень
Третій тиждень, 3 год.	**Застосування комплексних чисел до зображення перетворень площини**	Практичне заняття	[5,6,7,8]	Зображення перетворень подібності за допомогою комплексних чисел (4,5 год.)	Один тиждень
Четвертий тиждень, 3 год.	**Дробово-лінійні перетворення комплексної площини**	лекція	[7,8,9,10]	Дробово-лінійні перетворення комплексної площини, конформність (4,5 год.)	Один тиждень

Четвертий тиждень, 3 год.	**Дробово-лінійні перетворення комплексної площини**	Практичне заняття	[7,8,9,10]	Дробово-лінійні перетворення комплексної площини, конформні відображення (4,5 год.)	Один тиждень
П’ятий тиждень, 3 год.	**Інверсія площини**	лекція	[7,8,9,10]	Інверсія площини відносно кола, властивості інверсії (4,5 год.)	Один тиждень
П’ятий тиждень, 3 год.	**Інверсія площини, властивості інверсії**	Практичне заняття	[7,8,9,10]	Інверсія площини відносно кола, властивості інверсії (4,5 год.)	Один тиждень
Шостий тиждень, 3 год.	**Модель Пуанкаре неевклідової геометрії**	лекція	[9,10]	Модель Пуанкаре неевклідової геометрії, «прямі» та «кола» в цій моделі (4,5 год.)	Один тиждень
Шостий тиждень, 3 год.	**Модель Пуанкаре неевклідової геометрії**	Практичне заняття	[9,10]	Модель Пуанкаре неевклідової геометрії, «прямі» та «кола» в цій моделі (4,5 год.)	Один тиждень
Сьомий тиждень, 3 год.	**Кватерніони**	лекція	[11,14,15]	Алгебраїчні операції над кватерніонами, зв’язок множення кватерніонів з векторним та скарярним добутками векторів (4,5 год.)	Один тиждень
Сьомий тиждень, 3 год.	**Кватерніони**	Практичне заняття	[11,14,15]	Алгебраїчні операції над кватерніонами, зв’язок множення кватерніонів з векторним та скарярним добутками векторів (4,5 год.)	Один тиждень
Восьмий тиждень, 3 год.	**Застосування кватерніонів до зображення рухів простору**	лекція	[11,14,15]	Обертання простору, теорема Ойлера, кути Ойлера, зображення обертань за допомогою одиничних кватерніонів (4,5 год.)	Один тиждень
Восьмий тиждень, 3 год.	**Застосування кватерніонів до зображення рухів простору**	Практичне заняття	[11,14,15]	Обертання простору, теорема Ойлера, кути Ойлера, зображення обертань за допомогою одиничних кватерніонів (4,5 год.)	Один тиждень
Дев’ятий тиждень, 3 год.	**Теорема Птоломея-Ойлера**	лекція	[7,8,10]	Теорема Птоломея про вписані в коло чотирикутники (4,5 год.)	Один тиждень

Дев'ятий тиждень, 3 год.	**Теореми Кліфорда про кола**	Практичне заняття	[7,8,10]	Теореми Кліфорда про кола і її доведення з використанням комплексних чисел (4,5 год.)	Один тиждень
Десятий тиждень, 3 год.	**Чотири точки трикутника**	лекція	[7,8,10]	Чотири точки трикутника: перетини медіан, висот, бісектрис, серединних пенпердикулярів (4,5 год.)	Один тиждень
Десятий тиждень, 3 год.	**Коло дев'яти точок**	Практичне заняття	[7,8,10]	Теорема про дев'ять точок трикутника і її доведення за допомогою комплексних чисел (4,5 год.)	Один тиждень
Одинад-цятий тиждень, 3 год.	**Пряма Сімсона**	лекція	[7,8,10]	Пряма Сімсона і її доведення за допомогою компдексних чисел (4,5 год.)	Один тиждень
Одинад-цятий тиждень, 3 год.	**Теорема Кантора про дотичний трикутник**	Практичне заняття	[7,8,10]	Теорема Кантора про дотичний трикутник (4,5 год.)	Один тиждень
Дванад-цятий тиждень, 3 год.	**Теорема Феєрбаха**	лекція	[7,8,10]	Теорема Феєрбаха про властивості кола дев'яти точок. (4,5 год.)	Один тиждень
Дванад-цятий тиждень, 3 год.	**Теорема Морлея**	Практичне заняття	[7,8,10]	Теорма Морлея про три сектори (4,5 год.)	Один тиждень