

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра алгебри, топології та основ математики**



**Затверджено**  
на засіданні кафедри алгебри, топології та  
основ математики  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 29.08.2022 р.)

Завідувач кафедри: проф. Банах Т.О.

**Силабус з навчальної дисципліни**

**“ Алгебраїчні структури ”,**

що викладається в межах ОПП “Комп’ютерна алгебра, криптологія та теорія ігор”, “Математика. Математична економіка та економетрика”, “Середня освіта (Математика)” першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів із спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (предметна спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика))

**Львів 2022**

<b>Назва дисципліни</b>	<b>Алгебраїчні структури</b>
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 111 Математика;  Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика) предметна спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика)
<b>Викладачі дисципліни</b>	<b>Романів Олег Миколайович</b> , кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:oleh.romaniv@lnu.edu.ua">oleh.romaniv@lnu.edu.ua</a>
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультацію з теоретичної чи практичної частини курсу можна отримати на нараді MS Teams і групі курсу в Telegram у будь-який зручний для студентів та викладача час, а також очно в день проведення лекцій чи практичних занять за попередньою домовленістю.
<b>Сторінка курсу</b>	<a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/1705">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/1705</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Алгебраїчні структури” є вибірковою дисципліною зі спеціальності 111 Математика для освітніх програм “Комп’ютерна алгебра, криптологія та теорія ігор”, “Математика. Математична економіка та економетрика”, а також зі спеціальності 014 Середня освіта для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”. Вона викладається в 4-му семестрі в обсязі 4 кредити (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Навчальну дисципліну розроблено таким чином, щоб надати здобувачам першого (бакалаврського) рівня необхідні знання для отримання загальних і фахових компетенцій з теорії алгебраїчних структур, які дозволять засвоювати пов’язані з нею дисципліни та використовувати набуті знання в професійній діяльності. Ця діяльність може, зокрема, бути пов’язаною з вивчення таких дисциплін як «Прикладна алгебра», «Математичні основи захисту інформації», «Основи криптографії».
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	<b>Мета:</b> ознайомити студентів з основними поняттями та теоретичними положеннями з теорії алгебраїчних структур, напрямками наукових досліджень у теоріях груп, кілець, полів та модулів, вказати сфери застосування цих теорій у різних задачах математики, економіки, програмування, комп’ютерних наук, криптографії тощо. <b>Цілі:</b> викласти базові поняття та основні положення теорії алгебраїчних структур, ознайомити з методами розв’язування задач з теорій груп, кілець, полів та модулів, які можуть бути використані в математичними моделями різних природних процесів.
<b>Література для вивчення</b>	1. О.М. Романів. Електронний варіант курсу «Алгебраїчні структури» // <a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/1705">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/1705</a>

дисципліни	<ol style="list-style-type: none"> <li>2. О.М. Романів. Електронний текст лекцій та практичних завдань з курсу «Загальна алгебра» // <a href="http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/468">http://mmf.lnu.edu.ua/algstu/468</a></li> <li>3. Silvestrov S., Malyarenko A., Rančić V., Algebraic Structures and Applications // Springer Nature Switzerland AG 2020.</li> <li>4. Загальна алгебра: навч. посібник / Б. Забавський, В. Андрійчук, А. Гаталевич, О. Пігура. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2018. – 186 с.</li> <li>5. Thomas W. Judson, Robert A. Beezer, Abstract Algebra. Theory and Applications. Annual Edition 2022.</li> <li>6. Андрійчук В.І., Забавський Б.В. Алгебра і теорія чисел. – Львів. – 2005.</li> <li>7. Онлайн-курс «Mathematics for Machine Learning: PCA» на Coursera: <a href="https://www.coursera.org/learn/pca-machine-learning">https://www.coursera.org/learn/pca-machine-learning</a></li> </ol>
Обсяг курсу	<p><b>Загальний обсяг:</b> 120 годин. Аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекцій та 32 годин практичних занять. Самостійна робота: 56 год.</p>
Очікувані результати навчання	<p><u>В результаті вивчення даного курсу студент повинен</u></p> <p><b>знати:</b> основні поняття теорії алгебричних структур, зокрема: групоїд, напівгрупа, моноїд, група, кільце, тіло, поле, модуль</p> <p><b>вміти:</b> досліджувати властивості груп, кільця, модулів, будувати факторгрупу, факторкільце, фактормодуль, будувати прості розширення полів, знаходити степінь розширення, виконувати арифметичні дії у скінченних розширеннях полів, будувати поле розкладу многочлена, перевіряти, чи є заданий елемент алгебраїчним та знаходити мінімальний многочлен, будувати скінченні поля.</p> <p>Після успішного завершення курсу студент має набути такі <b>загальні компетентності (ЗК)</b> та <b>спеціальні (фахові) компетентності (СК):</b></p> <p>ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</p> <p>ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;</p> <p>ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;</p> <p>ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення;</p> <p>ЗК-11 Здатність спілкуватися з представниками інших професійних груп різного рівня (з експертами з інших галузей знань);</p> <p>СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання;</p> <p>СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв’язання тієї самої задачі;</p> <p>СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;</p> <p>СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;</p> <p>СК-6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем;</p> <p>СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів;</p> <p>і здобути такі програмні <b>результати навчання (РН):</b></p> <p>РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;</p> <p>РН-3 Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та</p>

	<p>наслідки математичних тверджень;  РН-4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;  РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;  РН-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;  РН-15 Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур.</p>
<b>Ключові слова</b>	<p>Алгебраїчні структури, групоїд, напівгрупа, моноїд, група, гомоморфізм, ізоморфізм груп, факторгрупа, орбіта, стабілізатор, центр, централізатор, нормалізатор, р-група, абелева група, кільце, ідеали, поле, тіло, факторкільце, модуль, фактормодуль, ендоморфізм, радикал, алгебра  <i>Додаткові завдання розміщені на сторінці курсу-</i></p>
<b>Формат курсу</b>	Очний.
<b>Теми</b>	Див. <b>Схема курсу</b>
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Залік в кінці семестру
<b>Пререквізити</b>	<p>Для вивчення даного курсу студенти повинні мати базові знання з:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- лінійної алгебри</li> <li>- дискретної математики</li> </ul>
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	<p>Основними методами навчання, що використовуються в процесі викладання навчальної дисципліни «Алгебраїчні структури» є:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• метод передачі і сприйняття навчальної інформації, пробудження наукового інтересу (розповідь, пояснення, бесіда, лекція, презентація, демонстрація, спостереження, аналіз);</li> <li>• метод практично-орієнтованого засвоєння курсу з допомогою розв'язування задач за темами курсу для набуття умінь і практичних навичок (лабораторні заняття);</li> <li>• метод контролю з допомогою періодичного складання колоквиумів та контрольних робіт за тематикою лекційних та практичних занять;</li> <li>• метод самостійного засвоєння студентами навчального матеріалу у вигляді виконання домашніх завдань та розв'язування задач підвищеної складності, зокрема на доведення, з визначених тем курсу на підставі самостійно опрацьованої базової літератури та додаткових джерел інформації, інтернет-ресурсів з метою конкретизації й поглиблення базових знань, необхідних умінь та практичних навичок (самостійна робота);</li> <li>• інтерактивні методи (демонстраційні вправи, мозковий штурм, дискусії, діалогова форма набуття знань, обговорення складних дискусійних питань і проблем тощо) на лекціях, лабораторних заняттях та консультаціях.</li> </ul> <p>Під час навчання застосовуватимуться лекції, презентації, комплексні завдання, електронні матеріали з навчального курсу, спільні розробки, практично-орієнтоване навчання, інтерактивні методи, виконання індивідуальних завдань.</p>

<p><b>Необхідне обладнання</b></p>	<p>Для вивчення навчальної дисципліни «Алгебраїчні структури» потрібно: дошка, крейда, навчальні посібники, мультимедійний проектор, комп'ютер, доступ до мережі «Інтернет», доступ до платформ Microsoft Teams, Zoom, Telegram, електронна пошта.</p>
<p><b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b></p>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою.  Бали нараховуються так: контрольні роботи №1, №2 : <math>2 \times 20 = 40</math>; колоквіуми №1, №2: <math>2 \times 20 = 40</math>; самостійні роботи – <math>5 \times 2 = 10</math>; премія за активну роботу на заняттях – 10. Всього – 100.</p> <p><b>Остаточна кількість балів</b>, які отримує студент після закінчення курсу: загальна кількість балів, набраних за семестр.</p> <p><i>Примітка: Самостійні роботи студенти пишуть під час проведення практичних занять для перевірки засвоєння ними матеріалу цього заняття (5-10 хв). Написанням самостійних робіт також є контролем за відвідуванням занять, оскільки навіть за незначний результат самостійної роботи виставляється якась частина максимальної кількості балів за цю роботу і це фіксується в журналі.</i></p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p><b>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</b></p>
<p><b>Питання до колоквіумів</b></p>	<p>Колоквіум №1.  Алгебричні операції. Алгебричні структури. Ізоморфізми алгебричних структур. Групоїд. Напівгрупа. Моноїд. Група. Підгрупа. Порядок групи. Порядок елемента. Експонента групи. Твірні елементи. Циклічна група. Гомоморфізм груп. Ізоморфізм груп. Суміжні класи. Теорема Лагранжа. Факторгрупа. Основні теорема про гомоморфізм груп. Дія групи на множині. Орбіти. Стабілізатори. Центри. Централізатори. Нормалізатори. р-групи. Теорема Силова. Прямі добутки груп. Абелеві групи. Розв'язні групи. Скінченнопороджені абелеві групи</p> <p>Колоквіум №2.  Кільце. Підкільце. Ідеали. Поле. Тіло. Факторкільце. Модуль. Підмодуль. Фактормодуль. Незвідні, нерозкладні модулі. Композиційний ряд.</p>

	<p>Гомоморфізми кілець і модулів. Основні теореми про гомоморфізми. Умови скінченності для модулів. Теорема Жордана-Гельдера. Ендоморфізми модулів. Лема Шура. Кільце ендоморфізмів нерозкладного модуля. Теорема Крулля-Шмідта. Цілком звідні модулі. Кільце з умовою мінімальності. Лема Брауера. Радикал кільця. Напівпрості кільця. Розклад в пряму суму мінімальних лівих ідеалів. Критерії напівпростоти кільця. Структура модулів над напівпростим кільцем. Розклад напівпростого кільця в пряму суму простих кілець. Структура простого кільця. Теорема Веддерберна для напівпростих кілець. Скінченновимірні алгебри над полем. Розклад в пряму суму головних нерозкладних ідеалів. Групові алгебри скінченної групи над полем. Критерій напівпростоти групової алгебри</p> <p><i>Додаткові завдання розміщені на сторінці курсу-</i></p>
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

### Схема курсу “ Алгебраїчні структури ”

Тиж- день	Лекції		Практичні заняття		СР К-ть год Л-ра
	Назва теми	К- сть год	Назва теми	К- сть год	
1	Відображення. Відношення еквівалентності. Функціональні відношення.	2	Відображення. Відношення еквівалентності. Функціональні відношення.	2	4 [1-7]
2	Алгебричні операції. Алгебричні структури. Ізоморфізми алгебричних структур. Групоїд. Напівгрупа. Моноїд.	2	Алгебричні операції. Алгебричні структури. Ізоморфізми алгебричних структур. Групоїд. Напівгрупа. Моноїд.	2	4 [1-7]
3	Група. Підгрупа. Порядок групи. Порядок елемента. Експонента групи. Циклічна група	2	Група. Підгрупа. Порядок групи. Порядок елемента. Експонента групи. Циклічна група	2	4 [1-7]
4	Класи суміжності. Індекс підгрупи. Нормальні підгрупи. Факторгрупа.	2	Класи суміжності. Індекс підгрупи. Нормальні підгрупи. Факторгрупа.	2	4 [1-7]
5	Гомоморфізми та ізоморфізми груп. Основні теореми про гомоморфізм груп	2	Гомоморфізми та ізоморфізми груп. Основні теореми про гомоморфізм груп	2	4 [1-7]
6	Дія групи на множині. Орбіти. Стабілізатори. Центри. Централізатори. Нормалізатори. р-групи. Теореми Силова	2	Дія групи на множині. Орбіти. Стабілізатори. Центри. Централізатори. Нормалізатори. р-групи. Теореми Силова	2	4 [1-7]
7	Прямі добутки груп. Абелеві групи. Розв'язні групи. Скінченнопороджені абелеві групи.	2	Прямі добутки груп. Абелеві групи. Розв'язні групи. Скінченнопороджені абелеві групи.	2	4 [1-7]
8	Колоквіум №1	2	Контрольна робота №1	2	4 [1-7]

9	Кільце. Підкільце. Ідеали. Поле. Тіло. Факторкільце. Модуль. Підмодуль. Фактормодуль.	2	Кільце. Підкільце. Ідеали. Поле. Тіло. Факторкільце. Модуль. Підмодуль. Фактормодуль.	2	4 [1-7]
10	Незвідні, нерозкладні модулі. Композиційний ряд. Гомоморфізми кілець і модулів. Основні теореми про гомоморфізми.	2	Незвідні, нерозкладні модулі. Композиційний ряд. Гомоморфізми кілець і модулів. Основні теореми про гомоморфізми.	2	4 [1-7]
11	Умови скінченності для модулів. Теорема Жордана-Гельдера. Ендоморфізми модулів. Лема Шура. Кільце ендоморфізмів нерозкладного модуля.	2	Умови скінченності для модулів. Теорема Жордана-Гельдера. Ендоморфізми модулів. Лема Шура. Кільце ендоморфізмів нерозкладного модуля.	2	4 [1-7]
12	Теорема Крулля-Шмідта. Цілком звідні модулі. Кільце з умовою мінімальності. Лема Брауера.	2	Теорема Крулля-Шмідта. Цілком звідні модулі. Кільце з умовою мінімальності. Лема Брауера.	2	4 [1-7]
13	Радикал кільця. Напівпрості кільця. Розклад в пряму суму мінімальних лівих ідеалів. Критерії напівпростоти кільця. Структура модулів над напівпростим кільцем.	2	Радикал кільця. Напівпрості кільця. Розклад в пряму суму мінімальних лівих ідеалів. Критерії напівпростоти кільця. Структура модулів над напівпростим кільцем.	2	4 [1-7]
14	Розклад напівпростого кільця в пряму суму простих кілець. Структура простого кільця. Теорема Веддерберна для напівпростих кілець.	2	Розклад напівпростого кільця в пряму суму простих кілець. Структура простого кільця. Теорема Веддерберна для напівпростих кілець.	2	4 [1-7]
15	Скінченновимірні алгебри над полем. Розклад в пряму суму головних нерозкладних ідеалів. Групові алгебри скінченної групи над полем. Критерій напівпростоти групової алгебри	2	Скінченновимірні алгебри над полем. Розклад в пряму суму головних нерозкладних ідеалів. Групові алгебри скінченної групи над полем. Критерій напівпростоти групової алгебри.	2	4 [1-7]
16	Колоквіум №2	2	Контрольна робота №2	2	4 [1-7]
	Разом за семестр	<b>32</b>	Разом за семестр	<b>32</b>	<b>64</b>
	Лектор Романів О.М.		Викладач Романів О.М.		

Примітка: В [1] викладений повністю весь теоретичний матеріал по даному курсу, а --- в [2] --- матеріали до всіх практичних занять.