

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Затверджено

на засіданні кафедри теорії функцій і
функціонального аналізу
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
(протокол № 1 від 25 серпня 2022 року)



Завідувач кафедри: проф. Скасків О.Б.

Силабус з навчальної дисципліни

“Математичний аналіз I : функції однієї змінної”,

що викладається в межах ОПП *“Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”*, *“Комп’ютерний аналіз математичних моделей”*, *“Математика. Математична економіка та економетрика”*, *“Середня освіта (Математика)”*

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
для здобувачів із спеціальностей 111 – Математика
та 014 – Середня освіта (Математика)

Назва дисципліни	Математичний аналіз 1: функції однієї змінної
Адреса викладання дисципліни	Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 111 Математика; Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
Викладачі дисципліни	Християнин Андрій Ярославович , доцент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу Сущик Наталія Степанівна , асистент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу Луківська Дзвенислава Володимирівна , асистент кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Контактна інформація викладачів	andriy.khrystiyanyan@lnu.edu.ua nataliya.sushchik@lnu.edu.ua dzvenyslava.lukivska@lnu.edu.ua
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	https://teams.microsoft.com/l/team/19%3agc9FO9yGA790uY15apgvkS7rgs_ySXCxUcin7VfTf1o1%40thread.tacv2/conversations?groupId=c8ec252a-1c75-4859-91e9-2146bb7293bb&tenantId=70a28522-969b-451f-bdb2-abfea3aaa5bf https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/matematychnyy-analiz-mta-mtk-mtm-mto
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Математичний аналіз 1: функції однієї змінної” є нормативною дисципліною зі спеціальності 111 Математика для освітніх програм “Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”, “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Математика. Математична економіка та економетрика”, а також зі спеціальності 014 – Середня освіта для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”. Вона викладається в 1-му та 2-ому семестрах в обсязі 12 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Курс спрямований на оволодіння класичними методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної математики, їх використання в подальших курсах з математики та прикладної математики, сприянню розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

<p>Мета та цілі дисципліни</p>	<p>Мета: ознайомлення з основними поняттями та методами математичного аналізу, теоретичними положеннями та основними застосуваннями математичного аналізу в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної математики .</p> <p>Цілі: викласти основні поняття та теоретичні положення математичного, ознайомити з методами розв'язування задач математичного аналізу та застосувань.</p>
<p>Література для вивчення дисципліни</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз, Київ:Знання, 2018 2. Заболоцький М.В., Фединяк С.І., Філевич П.В., Червінка К.А. Практикум з математичного аналізу, Львів:Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. 3. Дороговцев А.Я., Математичний аналіз, Т.1, Київ: Либідь, 1993. 4. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К., Математичний аналіз, Ч.1, Київ, 1992. 5. Lebl J., Introduction to Real Analysis, Vol. I, II, Oklahoma State University, 2022.
<p>Обсяг курсу</p>	<p>Загальний обсяг: 360 годин. Аудиторних занять: 192 год., з них 96 годин лекцій та 96 годин лабораторних робіт. Самостійної роботи: 168 годин. Кредитів – 12.</p>
<p>Очікувані результати навчання</p>	<p>Після завершення цього курсу студент буде :</p> <p>знати: основні поняття математичного аналізу, зокрема: множини і дії над ними, загальне поняття відображення або функції, поняття образу та прообразу, поняття сюр'єкції, ін'єкції та бієкції, оберненої функції, суперпозиції функцій, графіка функції, рівнопотужних множин, зліченної множини, незліченної множини, множини потужності континуум, властивості злічених множин, означення дійсного числа, поняття точної верхньої і точної нижньої межі числової множини, принцип точних меж, теорему принцип вкладених відрізків, означення границі послідовності, теорему про єдиність границі, теорему про обмеженість збіжної послідовності, теорему про три послідовності, теорему про арифметичні операції над збіжними послідовностями, поняття монотонної послідовності і теорему про існування границі монотонної послідовності, число ϵ, підпослідовності, часткові границі послідовності, теорему про існування монотонної підпослідовності, теорему Больцано-Вейерштрасса, означення верхньої і нижньої границі послідовності, означення фундаментальної послідовності та критерій Коші, означення границі функції в точці за Коші і за Гейне, теорему про рівносильність означень за Коші і Гейне, односторонні границі, теорему про існування границі монотонної функції в точці, критерій Коші існування границі функції в точці, означення порядку однієї функції відносно іншої, означення неперервної функції в точці і на множині, теореми про арифметичні операції над неперервними функціями, про неперервність суперпозиції, про існування і неперервність оберненої функції, теорему Вейерштрасса та теорему Больцано-Коші про проміжне значення, рівномірної неперервності і теорему Кантора, розриви функції в точці і їх класифікацію, означення похідної, геометричну інтерпретацію похідної, правила обчислення похідних, похідну від складеної та оберненої функції, поняття односторонніх похідних, теореми Ферма, Ролля, Лагранжа і Коші, теореми про монотонність і строгу монотонність на інтервалі, означення диференційовної функції в точці, критерій диференційовності, означення</p>

похідних вищих порядків, формулу Лейбніца, означення диференціалів вищих порядків, формулу Тейлора із залишковими членами в формі Пеано і Лагранжа, правила Лопіталя, означення опуклої вниз та вгору на інтервалі функції, критерій опуклості в термінах похідної і похідної другого порядку, точки локального екстремуму функції, необхідні умови локального екстремуму, достатні умови локального екстремуму в термінах похідної і в термінах похідних вищих порядків, означення точок перегину і методи їх знаходження, означення асимптот графіка функції; поняття первісної та невизначеного інтеграла, таблицю невизначених інтегралів, теореми про інтегрування за допомогою підстановки і частинами, розклад раціональної функції на прості дроби методом невизначених коефіцієнтів, інтегрування простих дробів, інтегрування раціональної функції від $\sin x$ і $\cos x$, універсальна тригонометрична підстановка, інтегрування диференціального бінома, підстановки Ейлера, означення верхньої та нижньої суми Дарбу і інтегральної суми, функція інтегровна за Ріманом на відрізку, властивості сум Дарбу, критерій інтегровності, теореми про інтегровність неперервної та монотонної функцій, лінійність і адитивність інтеграла Рімана, теорему про середнє значення, означення інтеграла зі змінною верхньою межею, теореми про неперервність і диференційовність, теорему про існування первісної, формулу Ньютона-Лейбніца, теореми про заміну змінної і інтегрування частинами у визначеному інтегралі, означення площі криволінійної трапеції і формула для її обчислення, означення довжини дуги кривої і формули для її обчислення, означення об'єму тіла обертання і формула для його обчислення, означення площі поверхні тіла обертання і формули для його обчислення, означення невластивого інтеграла по нескінченному проміжку, властивості невластивих інтегралів, критерій Коші збіжності невластивих інтегралів, критерій збіжності невластивих інтегралів від невід'ємної функції, абсолютно і умовно збіжні невластиві інтеграли, ознаки Діріхле і Абеля, невластиві інтеграли від необмежених функцій, означення числового ряду, необхідні умови збіжності, геометрична прогресія, гармонійний ряд, узагальнений гармонійний ряд, елементарні властивості числових рядів, критерій Коші збіжності числового ряду, критерій збіжності для числових рядів з невід'ємними членами, перша і друга ознаки порівняння для рядів з невід'ємними членами, ознаки д'Аламбера, Коші і інтегральна збіжності рядів з невід'ємними членами, знакозмінний ряд, означення абсолютної і умовної збіжності ряду, теореми про абсолютно і умовно збіжні ряди, ознака Лейбніца, ознаки Діріхле і Абеля, теореми про групування та перестановку членів ряду, добуток рядів, поняття поточної та рівномірної збіжності на множині функціональної послідовності, критерій Коші рівномірної збіжності, ознаки Вейєрштраса, Діріхле та Абеля рівномірної збіжності функціональних рядів, теореми про неперервність суми, почленне інтегрування, граничний перехід і почленне диференціювання функціонального ряду, означення степеневого ряду, теорема Коші-Адамара, радіус збіжності і інтервал збіжності, теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду, теореми про властивості сум степеневих рядів, ряд Тейлора, скалярний добуток, норма функції, ортонормовані послідовності,

вміти: виконувати операції над множинами, обчислювати границі послідовностей, обчислювати границі функцій в точці, досліджувати функції на неперервність, обчислювати похідну функції, досліджувати функції за допомогою похідних і будувати їх графіки. обчислювати невизначені інтеграли, обчислювати інтеграли Рімана,

застосовувати інтеграл Рімана до знаходження площ плоских фігур, довжин дуг кривих, об'ємів тіл обертання, площ поверхонь тіл обертання, досліджувати невластиві інтеграли на збіжність, досліджувати на абсолютну та умовну збіжність числові ряди, досліджувати на рівномірну збіжність функціональні послідовності і функціональні ряди, досліджувати властивості сум функціональних рядів, розкласти функції в степеневі ряди.

Після успішного завершення курсу студент має набути такі **загальні компетентності (ЗК)** та **спеціальні (фахові) компетентності (СК)**:

ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;
ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;
ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення.

СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;

СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;

СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;

СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;

СК-6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем;

СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

і програмні результати навчання (РН):

РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;

РН-3 Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;

РН-4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;

РН-7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефаківців у галузі математики;

РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й

	<p>аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;</p> <p>PH-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;</p> <p>PH-13 Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних.</p>
Ключові слова	<p>Функція, послідовність, границя послідовності, границя функції, неперервні функції, точки розриву функції, похідна, диференціал функції, формула Тейлора, первісна, інтегрування, інтеграл Рімана, інтегральна сума, невластивий інтеграл, числовий ряд, функціональна послідовність, функціональний ряд, степеневий ряд.</p>
Формат курсу	<p>Очний, дистанційний.</p> <p>Проведення лекцій, лабораторних занять, колоквиумів, контрольних робіт і консультацій.</p>
Теми	<ol style="list-style-type: none"> 1. Елементи математичної логіки. 2. Множини. 3. Відображення (функції). 4. Потужність множин. Злічені множини. 5. Аксиоми дійсних чисел. 6. Найважливіші класи дійсних чисел. 7. Метод математичної індукції. 8. Принцип точних меж числових множин. 9. Принцип Архімеда та принцип вкладених відрізків. 10. Множини потужності континуум. 11. Поняття границя послідовності. 12. Властивості границі послідовності. 13. Нескінченно малі та великі послідовності. 14. Арифметичні властивості границі послідовності. 15. Монотонні послідовності. Число Ейлера. 16. Підпослідовності. 17. Фундаментальні послідовності. 18. Поняття границі функції в точці. 19. Властивості границі функції. 20. Односторонні границі. 21. Критерій Коші існування границі функції. 22. Границя монотонної функції. 23. Важливі границі функцій. 24. Порівняння функцій (o-символіка). 25. Неперервні функції в точці. 26. Властивості неперервних в точці функцій. 27. Класифікація точок розриву. 28. Властивості неперервних на відрізку функцій. 29. Неперервність елементарних функцій. 30. Рівномірна неперервність. 31. Поняття похідної функції. 32. Геометричний зміст похідної. 33. Поняття диференційовної функції. Диференціал. 34. Арифметичні властивості похідної. 35. Похідна складеної функції.

	<p>36. Похідна оберненої функції.</p> <p>37. Похідні та диференціали вищих порядків.</p> <p>38. Похідні неявно заданих та параметрично заданих функцій.</p> <p>39. Формула Лейбніца.</p> <p>40. Основні теореми про диференційовні функції.</p> <p>41. Правило Лопітала.</p> <p>42. Формула Тейлора.</p> <p>43. Монотонність і похідна.</p> <p>44. Опуклість і похідна.</p> <p>45. Екстремуми функцій однієї змінної.</p> <p>46. Асимптоти. Побудова графіків функцій.</p> <p>47. Первісна та невизначений інтеграл.</p> <p>48. Основні методи інтегрування.</p> <p>49. Інтегрування раціональних функцій.</p> <p>50. Інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій.</p> <p>51. Поняття визначеного інтеграла Рімана.</p> <p>52. Необхідна умова інтегровності за Ріманом.</p> <p>53. Інтегральні суми Дарбу.</p> <p>54. Критерії інтегровності.</p> <p>55. Класи інтегровних функцій.</p> <p>56. Інтеграл із змінною межею.</p> <p>57. Формула Ньютона-Лейбніца.</p> <p>58. Заміна змінних та інтегрування частинами в інтегралі Рімана.</p> <p>59. Геометричні застосування інтеграла Рімана.</p> <p>60. Функції обмеженої варіації та їх властивості.</p> <p>61. Інтеграл Рімана-Стілт'еса та його властивості.</p> <p>62. Поняття невластивого інтегралу.</p> <p>63. Ознаки збіжності невластивих інтегралів.</p> <p>64. Критерій Коші збіжності невластивого інтегралу.</p> <p>65. Абсолютна збіжність невластивих інтегралів.</p> <p>66. Поняття числового ряду.</p> <p>67. Ознаки збіжності числових рядів.</p> <p>68. Критерій Коші збіжності числового ряду.</p> <p>69. Абсолютна збіжність числових рядів.</p> <p>70. Функціональні послідовності і ряди.</p> <p>71. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів.</p> <p>72. Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів.</p> <p>73. Властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів.</p> <p>74. Степеневі ряди. Ряди Тейлора.</p>
Підсумковий контроль, форма	Екзамени в кінці першого та другого семестрів в письмовій формі.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань зі шкільного курсу математики, достатніх для сприйняття основних ідей та методів математичного аналізу.
Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання	Проведення лекцій, лабораторних занять, колоквиумів, контрольних робіт.

курсу	
Необхідне обладнання	<p>Аудиторія обладнана дошкою та засобами написання для аудиторних занять.</p> <p>Комп'ютер / смартфон / планшет з інтернет доступом для дистанційних занять.</p>
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали в кожному семестрі нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <p>активну роботу на заняттях та контрольні роботи : 30% семестрової оцінки (30 балів)</p> <p>теоретичні колоквиуми : 20% семестрової оцінки (20 балів)</p> <p>екзамен: 50% семестрової оцінки (50 балів)</p> <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
Питання до заліку чи екзамену.	На екзамені виносяться всі питання розглянуті в межах тем курсу.
Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

Схема курсу

Тиждень	Тема	Форма діяльності	Література	Завдання	Термін виконання
1-3	Дійсні числа (теми 1-10)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань	Три тижні
4-7	Границя числової послідовності (теми 11-17)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань Модуль №1	Чотири тижні
8-10	Границя функції (теми 18-24)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань	Три тижні
11-12	Неперервні функції (теми 25-30)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань Колоквіум №1	Два тижні
13-16	Похідна функції та її застосування (теми 31-46)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань	4 тижні

				завдань Модуль №2	
17-18	Невизначений інтеграл (теми 47-50)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань	Два тижні
19-22	Визначений інтеграл Рімана та його застосування (теми 51-59)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань Модуль №3	чотири тижні
23	Інтеграл Рімана-Стілт'єса (теми 60-61)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань	Один тиждень
24-25	Невластиві інтеграли (теми 62-65)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань Колоквіум №2	Два тижні
26-28	Числові ряди (теми 66-69)	Лекції та лабораторні заняття	Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)	Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань	Три тижні
29-31	Функціональні	Лекції та	Література зі	Опрацювання	Три тижні

	<p>послідовності та ряди (теми 70-73)</p>	<p>лабораторні заняття</p>	<p>списку рекомендованої літератури (див.вище)</p>	<p>лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань</p>	
32	<p>Степеневі ряди (тема 74)</p>	<p>Лекції та лабораторні заняття</p>	<p>Література зі списку рекомендованої літератури (див.вище)</p>	<p>Опрацювання лекційного та практичного матеріалу. Виконання домашніх завдань Модуль №4</p>	<p>Один тиждень</p>