

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Львівський національний університет імені Івана Франка**  
**Механіко-математичний факультет**  
**Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь**

**Затверджено**

на засіданні кафедри математичної  
статистики і диференціальних рівнянь  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 29.08.2022)



Завідувач кафедри:



Бугрій О.М.

**Силабус з навчальної дисципліни**

**“Методи оптимізації та керування”,**

що викладається в межах ОПП “Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія  
ігор”, “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Математика.  
Математична економіка та економетрика”, “Середня освіта (Математика)”

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів із спеціальностей

111 Математика та 014 Середня освіта

**Львів 2022**

<b>Назва дисципліни</b>	<b>Методи оптимізації та керування</b>
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичного факультет Кафедра математичної статистики і диференціальних рівнянь
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань: 11 Математика і статистика Спеціальність: 111 Математика; Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
<b>Викладачі дисципліни</b>	<b>Скіра Ірина Володимирівна</b> , доктор філософії, асистент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:iryna.skira@lnu.edu.ua">iryna.skira@lnu.edu.ua</a> , <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/skira_i_v">https://new.mmf.lnu.edu.ua/employee/skira_i_v</a>
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) на базі платформи MS Teams, а також в групі курсу в Telegram у будь-який зручний для студентів та викладача час.
<b>Сторінка курсу</b>	
<b>Інформація про дисципліну</b>	Курс викладається в 7-му семестрі в обсязі 6 кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS) та є нормативною дисципліною зі спеціальності 111 Математика для освітніх програм “Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”, “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Математика. Математична економіка та економетрика”, а також зі спеціальності 014 – Середня освіта для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”.
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Дисципліну розроблено для ознайомлення студентів з основними поняттями та методами оптимізації функцій багатьох змінних, класичного варіаційного числення та оптимального керування.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	<i>Мета:</i> ознайомлення з основними поняттями та методами теорії оптимізації функцій багатьох змінних, оптимізації інтегральних та термінальних функціоналів, теорії оптимального керування. <i>Цілі:</i> ознайомити з методами розв'язування задач математичного, опуклого та лінійного програмування, з властивостями інтегральних та термінальних функціоналів, з основами класичного варіаційного числення та основами теорії оптимального керування.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	1) Лавренюк С.П. <i>Варіаційне числення й оптимальне керування</i> . – К.: НМК ВО, 1992. 2) Козицький В.А., Бугрій М.І. <i>Методичні вказівки з методів оптимізації</i> . – Львів, 1996. 3) Бугрій М.І. <i>Індивідуальні завдання з варіаційного числення та оптимального керування</i> . – Львів, 1997. 4) Моклячук М.П. <i>Варіаційне числення. Екстремальні задачі</i> : підручник. – К., 2003. 5) Кігель В.Р. <i>Оптимізація логістичних рішень</i> . – К., 2007.
<b>Обсяг курсу</b>	Загальний обсяг: 180 годин. Аудиторних занять: 80 год., з них 32 год.

	<p>лекційних та 48 год. практичних робіт. Самостійної роботи: 100 годин.</p>
<b>Очікувані результати навчання</b>	<p>У результаті вивчення даного курсу студент буде:</p> <p><b>знати:</b> формулювання основних задач оптимізації функцій багатьох змінних, формулювання класичних варіаційних задач оптимізації функціоналів, формулювання задач оптимального керування, доведення теорем розв'язності;</p> <p><b>вміти:</b> розділяти типи задач оптимізації функцій та функціоналів, типи задач оптимального керування, знаходити розв'язки задач класичної оптимізації, знаходити розв'язки та екстремальні варіаційних задач Лагранжа, задач з вільними та закріпленими кінцями, задач оптимального керування.</p> <p>Після успішного завершення курсу студент має набути такі <b>загальні компетентності (ЗК)</b> та <b>спеціальні (фахові) компетентності (СК)</b>:</p> <p>ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</p> <p>ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;</p> <p>ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;</p> <p>ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;</p> <p>ЗК-9 Здатність приймати обґрутовані рішення;</p> <p>СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символільній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;</p> <p>СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;</p> <p>СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;</p> <p>СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних;</p> <p>СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрутованості й ефективності використовуваних математичних підходів,</p> <p>і здобути такі програмні <b>результати навчання (РН)</b>:</p> <p>РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;</p> <p>РН-3 Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;</p> <p>РН-7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики;</p>

	<p>РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;</p> <p>РН-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.</p>
<b>Ключові слова</b>	Варіаційне числення, методи оптимізації, оптимальне керування.
<b>Формат курсу</b>	Очний, дистанційний Проведення лекційних, практичних робіт і консультацій.
<b>Теми</b>	<p>Тема 1. Класична задача умовної оптимізації. Метод невизначених множників Лагранжа.</p> <p>Тема 2. Основи опуклого аналізу.</p> <p>Тема 3. Мінімізаційна задача математичного програмування.</p> <p>Тема 4. Задача опуклого програмування. Теорія двоїстості.</p> <p>Тема 5. Геометричний зміст задач лінійного програмування.</p> <p>Тема 6. Варіація функціоналів та її застосування. Колоквіум 1.</p> <p>Тема 7. Слабкий та сильний екстремум в задачі з закріпленими кінцями.</p> <p>Тема 8. Варіаційна задача Лагранжа з алгебричними в'язями.</p> <p>Тема 9. Задача Лагранжа з диференціальними в'язями.</p> <p>Тема 10. Ізопериметрична задача класичного варіаційного числення.</p> <p>Тема 11. Необхідні умови екстремуму в задачі з рухомими кінцями.</p> <p>Тема 12. Задача керування для функціоналу Майєра.</p> <p>Тема 13. Принцип максимуму Понтрягіна для задачі термінального керування.</p> <p>Тема 14. Задача керування для функціоналу Больца.</p>
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Іспит
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення даного курсу студенти потрібні базові знання з: <ul style="list-style-type: none"> <li>- математичний аналіз.</li> <li>- функціональний аналіз.</li> <li>- диференціальні рівняння.</li> <li>- рівняння математичної фізики.</li> </ul>
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції, інтерактивна комунікація
<b>Необхідне обладнання</b>	Комп'ютер із необхідним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі.
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	Оцінювання проводиться за 100-балльною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Змістовий модуль 1: 7% семестрової оцінки за контрольну роботу, 3% семестрової оцінки за виконання домашніх завдань, максимальна кількість балів 10.</li> </ul>

<b>ності)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Змістовий модуль 2: 7% семестрової оцінки за контрольну роботу, 3% семестрової оцінки за виконання домашніх завдань, 15% семестрової оцінки за колоквіум, максимальна кількість балів 25.</li> <li>Змістовий модуль 3: 7% семестрової оцінки за контрольну роботу, 3% семестрової оцінки за виконання домашніх завдань, 5% семестрової оцінки за присутність та активність на заняттях, максимальна кількість балів 15.</li> <li>іспит: 50% семестрової оцінки, максимальна кількість балів 50.</li> </ul> <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Списування та втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в написанні завдань є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та лабораторні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів робіт, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали, набрані при поточному контролі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнень на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
<b>Питання до заліку чи екзамену.</b>	Означення і властивості опуклих множин і функцій; методи оптимізації функцій багатьох змінних; означення та властивості першої та другої варіації функціоналів; формулювання і доведення принципів Лагранжа для задач математичного та опуклого програмування; теорію двоїстості; симплекс-метод; формулювання основних задач класичного варіаційного числення, умови їх розв'язності; вигляд рівнянь Ейлера та крайових умов, які виникають при оптимізації функціоналів; формулювання основних задач теорії оптимального керування, умови їх розв'язності; вигляд функції Гамільтона, формулювання і доведення принципу Понтрягіна.
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

## Схема курсу

Тиж- ні	Лекційний курс		Практичні заняття		К-сть год сам. роб.
	Назва теми	К-сть год	Назва теми	К-сть год	
1	2	3	4	5	6
1	Класична задача умовної оптимізації.	2	Загальні принципи оптимізації функцій багатьох змінних	2	5
2	Метод невизначених множників Лагранжса. Основи опуклого аналізу	2	Задачі математичного і опуклого програмування	4	5
3	Мінімізаційна задача математичного програмування	2	Симплекс-метод розв'язування канонічної задачі лінійного програмування	4	5
4	Задача опуклого програмування. Теорія двоїстості	2	Основи теорії двоїстості	2	5
5	Геометричний зміст задач лінійного програмування.	2	Контрольна робота 1	2	5
6	Варіація функціоналів та її застосування. Колоквіум 1	2	Варіаційні задачі безумовного екстремуму	4	10
7	Слабкий та сильний екстремум в задачі з закріпленими кінцями.	2	Варіаційна задача з закріпленими кінцями	4	5
8	Варіаційна задача Лагранжса з алгебричними в'язями	2	Варіаційна задача Лагранжса	4	5
9	Задача Лагранжса з диференціальними в'язями.	2	Контрольна робота 2	2	5
10	Ізопериметрична задача класичного варіаційного числення	2	Ізопериметрична задача	2	5
11	Необхідні умови екстремуму в задачі з рухомими кінцями.	2	Задача з рухомими кінцями	4	5
12	Задача керування для функціоналу Майєра	2	Основи оптимального керування	2	5
13	Принцип максимуму Понтрягіна для задачі термінального керування	2	Оптимізація задачі з вільними кінцями	4	5
14	Принцип максимуму Понтрягіна для задачі термінального керування (продовження)	2	Задача оптимальної швидкодії	4	10
15	Задача керування для функціоналу Больца.	2	Контрольна робота 3	2	5
16	Задача керування для функціоналу Больца. (продовження)	2	Підсумкове заняття	2	5
	Разом	32		48	100