

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет
імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет



Атестаційний іспит з математики
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 111 Математика

Програма і довідкова інформація

Львів 2022

Програма іспиту

Аналітична і диференціальна геометрія та топологія

Основи векторної алгебри. Векторно-координатний метод та його застосування. Пряма на площині. Пряма і площина в просторі. Афінні перетворення та афінна класифікація кривих та поверхонь другого порядку. Кривина та скрут кривої. Поняття топологічного простору. Відкриті та замкнені підмножини в топологічних просторах. Неперервні відображення топологічних просторів. Гомеоморфізм. Приклади гомеоморфних просторів.

Математичний аналіз

Дійсні числа. Аксиоматичне означення лінійно впорядкованого поля дійсних чисел. Послідовності. Збіжні послідовності. Фундаментальна послідовність.

Поняття функції, границя функції, неперервність. Існування та неперервність оберненої до функції однієї змінної. Властивості функцій, неперервних на компактах в \mathbb{R}^n . Диференціал та похідна функції однієї змінної, їх геометрична інтерпретація. Основні правила диференціювання. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа та Коші. Формули Тейлора та Маклорена. Екстремум функції однієї та багатьох змінних. Дослідження функцій однієї змінної.

Визначений інтеграл. Інтегрованість за Ріманом неперервної функції. Існування первісної неперервної функції. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Застосування визначеного інтеграла: площа, довжина дуги, об'єм.

Невластиві інтеграли, інтеграли, що залежать від параметра, неперервність, інтегрування та диференціювання по параметру.

Числові ряди. Найпростіші ознаки збіжності (ознаки порівняння, Даламбера, Коші, інтегральна ознака). Абсолютна та умовна збіжність, ознака Лейбніца.

Функційні послідовності і ряди. Рівномірна збіжність, почленне інтегрування та диференціювання. Ряди степеневі і Фур'є.

Кратні інтеграли, криволінійні та поверхневі інтеграли, їх застосування.

Лінійна алгебра і теорія чисел

Матриці і їх визначники. Властивості визначників. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Обернена матриця. Структура загального розв'язку системи лінійних рівнянь. Розклад многочленів з комплексними (дійсними) коефіцієнтами на незвідні множники. Порівняння першого степеня з одним невідомим.

Означення та приклади лінійних просторів та їх підпросторів. Лінійні оператори і їх матриці. Власні значення і власні вектори. Оператори простої структури. Лінійні оператори в евклідових і унітарних просторах.

Групи і підгрупи. Поняття фактор-групи. Теорема Лагранжа.

Поняття кільця і поля. Ідеали. Фактор-кільця. Кільця з однозначним розкладом на прості множники.

Дискретна математика

Висловлення та його істинносне значення. Дії над висловленнями. Предикат. Квантори, заперечення предикатів з кванторами. Основні операції над множинами та їх властивості. Декартів добуток множин, зліченні множини, потужність континуума. Відношення. Відношення еквівалентності.

Диференціальні рівняння

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку. Теорема існування та єдиності розв'язку. Методи розв'язування однорідних та лінійних рівнянь першого порядку. Нормальні лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь. Задача Коші.

Умови існування єдиного розв'язку. Нормальні лінійні однорідні системи. Фундаментальна система розв'язків та її існування. Структура загального розв'язку. Нормальні лінійні неоднорідні системи. Структура загального розв'язку. Метод варіації сталих. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Методи розв'язування (метод варіації сталих, метод неозначених коефіцієнтів).

Рівняння математичної фізики

Класифікація і зведення до канонічного вигляду рівнянь з частинними похідними другого порядку. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння коливань струни. Існування та єдиність розв'язку задачі Коші для однорідного хвильового рівняння. Вільні коливання закріпленої струни. Метод Фур'є. Існування розв'язку. Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності.

Комплексний аналіз

Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична та показникова форма запису комплексного числа. Означення аналітичної функції. Умови Коші-Рімана. Означення та основні властивості елементарних аналітичних функцій (ціла лінійна функція, степенева, показникова функції). Інтегральні теореми Коші. Інтегральна формула Коші. Ізольовані особливі точки однозначного характеру, їх класифікація. Теорема Ліувілля.

Функціональний аналіз і теорія міри

Метричні простори, приклади. Збіжність послідовностей в метричних просторах. Фундаментальні послідовності. Повні метричні простори. Неперервність в точці для функції $f: X \rightarrow Y$ (X, Y – метричні простори). Критерій неперервності.

Принцип стискуючих відображень і його застосування. Означення та основні властивості інтегралу Лебега. Теорема про перехід до границі під знаком інтеграла. Варіація функції. Міра множини.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Класичне означення ймовірності. Аксиоматика Колмогорова теорії ймовірностей. Правила додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Числові характеристики випадкових величин. Закон великих чисел для незалежних випробувань. Елементи математичної статистики: точкові оцінки параметрів розподілу, лінійна регресія.

Методи оптимізації та керування

Найпростіша задача класичного варіаційного числення. Задачі лінійного програмування. Екстремальні задачі функції кількох змінних.

Математична економіка

Рівновага Штакельберга в дуополі Курно. Задачі теорії споживання.

Регламент іспиту

Атестаційний іспит проводиться в письмовій формі за білетами, укладеними відповідно до програми іспиту і затвердженими на засіданні Екзаменаційної комісії, затвердженої ректором Університету.

Іспит проводиться письмово і триває 2,5 години. В білеті міститься 25 тестових завдань з відкритою відповіддю (відповідь – десятковий дріб до 6 знаків після коми).

Структура завдання:

- 1) Аналітична і диференціальна геометрія та топологія
- 2) Математичний аналіз
- 3) Лінійна алгебра і теорія чисел
- 4) Дискретна математика
- 5) Диференціальні рівняння
- 6) Рівняння математичної фізики
- 7) Комплексний аналіз
- 8) Функціональний аналіз і теорія міри
- 9) Теорія ймовірностей та математична статистика
- 10) Методи оптимізації та керування
- 11) Математична економіка

Пояснювальна записка до іспиту

Атестаційний іспит з математики проводиться після завершення навчання у 8-му семестрі і передбачає перевірку й оцінку теоретичної та практичної фахової підготовки здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 111 Математика з метою встановлення відповідності рівня та обсягу знань і вмінь, загальних і спеціальних компетентностей вимогам Стандарту вищої освіти з математики.

Програма атестації базується на навчальних дисциплінах, які формують ґрунтовну підготовку з основних розділів фундаментальної математики та її застосувань і є спільними для освітньо-професійних програм “Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”, “Комп’ютерний аналіз математичних моделей”, “Математика. Математична економіка та економетрика” першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів зі спеціальності 111 – Математика.

Складання атестаційного іспиту з математики сприяє завершенню формування таких **загальних (ЗК) і спеціальних компетентностей (ЗК):**

- ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
- ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;
- ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення;
- СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання;
- СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізнити основні ідеї від деталей і технічних викладок;
- СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

Успішне складання кваліфікаційного екзамену сприятиме завершенню досягнення бакалаврами таких програмних **результатів навчання (РН):**

- РН-10 Розв’язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;
- РН-11 Розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;
- РН-13 Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних;
- РН-14 Знати теоретичні основи і застосовувати методи аналітичної та диференціальної геометрії для розв’язування професійних задач;
- РН-15 Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур;
- РН-16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем;
- РН-17 Знати теоретичні основи і застосовувати основні методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики для дослідження випадкових явищ, перевірки гіпотез, обробки реальних даних та аналізу тривалих випадкових явищ;
- РН-18 Знати теоретичні основи і застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної;
- РН-19 Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичної фізики для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

Екзаменаційна комісія може вносити зміни в програму іспиту після відповідних консультацій з викладачами факультету до початку 8-го семестру.

Декан механіко-математичного
факультету



І.Й. Гуран

Взірець екзаменаційного білета

Варіант 1

Вказівки: Розв'яжіть завдання і в дужках (.....) запишіть відповіді десятковим дробом. У випадку кількох вірних відповідей запишіть номери правильних варіантів у порядку зростання без розділових знаків. Ваші відповіді також запишіть у відповідних клітинках талону відповідей. Виправлення відповідей у завданні та в талоні не допускається.

1.(.....)

Обчислити $\log_2 \log_3(5^a)$, якщо $a = \log_5 81$.

2.(.....)

Вершини трикутної піраміди $ABCD$ знаходяться у точках $A(1; 2; 3)$, $B(9; 6; 4)$, $C(3; 0; 4)$, $D(5; 2; 6)$. Обчислити об'єм піраміди $ABCD$. Система координат прямокутна.

3.(.....)

Знайти найменший елемент множини $A \cap B$, якщо $A = \{0; 1; 2; 3\}$; $B = \{0,125; 0,25; 0,5; 1; 2\}$.

4.(.....)

Знайти найменше число в області визначення функції $y = \sqrt{1-4x^2}$.

5.(.....)

Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

6.(.....)

Знайти значення похідної функції $f(x) = x^x$ у точці $x = 1$.

7.(.....)

Серед первісних $F(x)$ функції $f = x \sin x + x$ вибрати таку, що $F(\pi) = \pi + 0.375 \pi^2$. У відповідь записати $F(\pi/2)$.

8.(.....)

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 2x$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.

9.(.....)

Нехай $U = L(a_1, a_2)$, $V = L(b_1, b_2)$. Знайти $\dim(U \cap V)$, якщо $a_1 = (1,2,3)$; $a_2 = (2,4,5)$; $b_1 = (3,6,1)$; $b_2 = (4,8,3)$.

10.(.....)

Розв'яжіть рівняння $x^2 + (-4 + 5i)x - (1 + 7i) = 0$ і у поле відповідей запишіть максимальне значення модуля його коренів.

11.(.....)

Які з формул числення висловлень є логічно еквівалентними (рівносильними) до формули $(\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(A \wedge B)) \vee B$?

- 1) $A \vee B$;
- 2) $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B)$;
- 3) $A \wedge B$;
- 4) $\neg A \vee \neg B$;
- 5) $A \rightarrow B$.

12.(.....)

Які з чисел 52, 48, 6, -12, -72 конгруентні 26 за модулем 2?

- 1) усі; 2) 48; 3) 52; 4) 6; 5) -12, -72.

13.(.....)

Яке серед поданих рівнянь є рівнянням з відокремлюваними змінними?

- 1) $\cos y y' = \sin y + 3x + 1$;
- 2) $y' - xy^2 = 2xy$;
- 3) $2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$;
- 4) $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx + \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$.

14.(.....)

Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші $y'' + y = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

У відповідь записати значення $y(2\pi)$.

15.(.....)

Запишіть найслабшу (з поданих нижче) достатню умову на функцію $\varphi = \varphi(x)$, яка гарантує існування класичного розв'язку задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

- 1) функція φ неперервно диференційовна на R_+^1 ;
- 2) функція φ неперервно диференційовна на R^1 ;
- 3) функція φ двічі неперервно диференційовна на R_+^1 ;
- 4) функція φ двічі неперервно диференційовна на R^1 ;
- 5) функція φ тричі неперервно диференційовна на R_+^1 ;
- 6) функція φ тричі неперервно диференційовна на R^1 .

16.(.....)

Нехай функція f визначена в околі $z_0 \in C$. Дати означення моногенності f в точці z_0 (вибрати правильний варіант):

- 1) існує $f'(z_0) \in C$;
- 2) f' існує в околі z_0 і неперервна в z_0 ;
- 3) f' існує і неперервна в околі z_0 ;
- 4) в точці z_0 виконуються умови Коші – Рімана.

17.(.....)

У метричному просторі множина є скрізь щільною, якщо:

- 1) її замикання співпадає з усім простором; 2) її замикання порожнє; 3) внутрішність її

замикання порожня; 4) доповнення до неї ніде не щільне; 5) доповнення до неї скінченне.

18.(.....)

Обчислити інтеграл Лебега $\int_{[-2;3]} 2 \operatorname{sgn}(x^2 - x - 2) d\mu_1$.

19.(.....)

У коробці знаходиться 3 білих і 4 червоних кульок. Навмання вибирають три кульки. Знайти ймовірність p того, що витягнуто не менше двох білих куль, якщо відомо, що серед витягнутих куль є принаймні одна біла. У талон відповідей записати значення $93p$.

20.(.....)

Сім раз підкидають симетричну монету. Випадкова величина ξ – кількість випадань герба. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ .

21.(.....)

Методом максимальної правдоподібності оцінити невідомий параметр a рівномірного розподілу на відрізку $[a; b]$, якщо задана реалізація вибірки

5	7	7	8	5	9	4	7	8	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

22.(.....) Обчислити

$$\int -|z|^2 z i \, dz$$

1) 0; 2) -2π ; 3) πi ; 4) $-2\pi i$; 5) інша відповідь

23.(.....)

Вкажіть, які із сімей підмножин множини \mathbb{R} утворюють топологію:

- 1) $\tau = \{[a, +\infty): a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$;
- 2) $\tau = \{(a, +\infty): a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$;
- 3) $\tau = \{[a, b): a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$;
- 4) $\tau = \{5\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$.

24.(.....)

Розв'язати задачу $u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \min$, $u_1 - u_2 \geq 0$, $u_1 + u_2 - u_3 - 10 = 0$, $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$. У поле відповідей записати оптимальне значення цільової функції.

25.(.....)

Дві фірми виготовляють однорідний продукт в обсягах x_1 , x_2 відповідно, їхні витрати при цьому задаються функціями $C_1 = 6x_1$, $C_2 = 3x_2$. Обернена функція попиту, яка визначає ціну одиниці продукції, має вигляд $p = 12 - 2(x_1 + x_2)$. Знайти рівновагу Штакельберга для другого гравця в дуополії Курно. У поле відповідей записати p^* .