

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра кафедри алгебри, топології та основ математики

Затверджено

На засіданні кафедри алгебри,
топології та основ математики
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені
Івана Франка
(протокол № 1 від 29.08. 2022 р.)

Завідувач кафедри проф. Т.О. Банах



Силабус з навчальної дисципліни
“Класична диференціальна геометрія”,
що викладається в межах ОПШ “Математика. Математична
економіка та економетрика”, “Середня освіта (Математика)”
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів
спеціальності Середня освіта, Математика

Львів 2023 р.

Назва дисципліни	Теорія кривих і поверхонь
Адреса викладання дисципліни	м. Львів, вул. Університетська, 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультет Кафедра алгебри, топології та основ математики
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	01 Освіта/Педагогіка 014.04 Середня освіта (Математика) 111 Математика
Викладачі дисципліни	Гуран Ігор Йосипович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри, топології та основ математики
Контактна інформація викладачів	ihor.huran@lnu.edu.ua ; https://new.mmf.lnu.edu.ua/employer/huran-i.-j. м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374; тел. 0322394218
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) за адресою: м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 374. Також можливі он-лайн консультації на платформі Teams. Для погодження часу консультації слід писати на електронну пошту викладача.
Сторінка дисципліни	https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/
Інформація про дисципліну	Дисципліна “Класична диференціальна геометрія” є вибірковою навчальною дисципліною циклу професійної і практичної підготовки з спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) для освітньої програми “Середня освіта (Математика)”, яка викладається у 4-му семестрі в обсязі 4,5 кредити (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Коротка анотація дисципліни	Навчальну дисципліну розроблено таким чином, щоб надати учасникам необхідні знання, обов'язкові для того, щоб ознайомити студентів з історичними відомостями про виникнення та розвиток диференціальної геометрії. Сформулювати вміння та навички розв'язувати практичні завдання та задачі з використанням отриманих теоретичних знань. Розвивати логічне і творче мислення, розширити науковий світогляд студентів.
Мета та цілі дисципліни	Надати основні теоретичні відомості та сформулювати практичні навички з курсу «Класична диференціальна геометрія», який складає невід'ємну частину загально математичної освіти майбутнього вчителя математики; озброїти студентів конкретними знаннями та вміннями, які даватимуть їм можливість викладати геометрію у різних навчальних закладах та кваліфіковано керувати спецкурсами, факультативами та гуртками з геометрії, виховувати у своїх учнів допитливість, інтерес до

<p>Література для вивчення дисципліни</p>	<p>знань.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Гуран І.Й., Зарічний М.М., Диференціальна геометрія і топологія. – К. НВК ВО, 1991. 2. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х. Основа, 1995. 3. Бокало Б.М., Гуран І.Й., Зарічний М.М. Збірник задач з курсу диференціальної геометрії і топології. – К. ІСФО, 1994. 4. Пришляк О. Диференціальна геометрія. – К. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 68 с. 5. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія. – К. Вища школа, 1973. – 68с. 6. Kobayashi, S., Nomiru.: Fundations of Differential Geometry, vols. I, II Wiely Classics Library Wiely, New Yourk, - 1996. 7. Величко І.Г., Гургенідзе М.О., Стеганцева П.Г. Диференціальна геометрія кривих та поверхонь: Навчально-методичний посібник до індивідуальної та самостійної роботи для студентів II курсу математичного факультету. – Запоріжжя: ЗНУ, 2009. – 76с. 8. Кованцов Н. И., Заржевская Г.М., Кочаровский В. Г. Диференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. – Киев; Вища школа. 1982. – 376с. 9. Taha Sochi. Introduction to Differential Geometry of Space Curves and Surfaces. Kindle Edition, Great spase, 2017. – 197p. 10. Kristopher Tapp. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Springer, Undergraduate Texts in Mathematics. 2016 – 374p. 11. А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір - Геометрія 9 клас. – Харків, «Гімназія», 2021. 12. А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршов – Геометрія 10 клас, Ранок, 2018. 13. М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З.О. Сердюк – Геометрія 11 клас. – Київ, Оріон, 2019. 14. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір – Геометрія 10 клас. – Харків, Гімназія, 2018. 15. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський – Геометрія 11 клас. – Харків, Гімназія, 2019. 16. І. Й. Гуран, О. В. Гутік – Методичка з теорії кривих і поверхонь.
	<p style="text-align: center;">ДОПОМІЖНА</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Никифорчин О.Р.: Елементи загальної топології. Івано-Франківськ – 2015 – 240с. 2. Helgason S: Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Space. Graduate Studies in Mathematiks. vol. 34. A. Math. Soc. Providewe 2012. 3. Pedro M. Gadea, Jaime Muñoz Masqué, Ihor V. Mykytyuk. Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds. A Workbook for Students and Teachers. - Springer , 2nd ed. 2013 – 644p. 4. T. Banakh, I. Guran, A. Ravsky: Manifolds Admitting a Continuous Cancellative Binary Operation are Orientable. - Journal of Lie Theory v. 16 (2016), - 1177-1185pp. 5. Igor Guran, Yaroslav Prytula: Sala Weinlös, the first female doctor of philosophy in Mathematics in Lviv university: Current Research in Mathematical and Computer Sciences // Publisher UWM, Olsztyn, 2018 pp. 27 – 39.

Обсяг курсу	Загальний обсяг: 135 год., з них – 32 год., лекцій, 32 год. практичних занять. Самостійна робота: 71 год.
Очікувані результати навчання	<p>У результаті вивчення курсу «Теорія кривих і поверхонь» відповідно до освітньої програми формуються програмні компетентності:</p> <p>Загальні компетентності:</p> <p>ЗК 5: Здатність до генерування нових ідей, виявлення та вирішення проблем.</p> <p>ЗК 7: Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.</p> <p>ЗК 9: Здатність навчатися та засвоювати новітні інформацію та знання.</p> <p>Фахові компетентності спеціальності:</p> <p>ФК 1: Здатність використовувати систематизовані та інноваційні теоретико-практичні знання з математики та методики і методології навчання та викладання математики під час розв’язування професійних завдань.</p> <p>ФК 4: Здатність до формування мотивації та організації пізнавальної діяльності учнів.</p> <p>ФК 8: Здатність до формування в учнів ключових і предметних компетентностей та здійснення міжпредметних зв’язків.</p> <p>ФК 11: Здатність до прийняття плідних та ефективних розв’язків у складних неочікуваних ситуаціях, вміння адаптуватися до нових ситуацій в освітницькій діяльності.</p> <p>Програмні результати навчання:</p> <p>ПРН 1: Знати та розуміти основні поняття, закони, теорії, загальну структуру, предмет і методи дослідження математики та методики її навчання, місце і зв’язки в системі наук, етапи історії її розвитку.</p> <p>ПРН 10: Уміти розв’язувати задачі різних рівнів складності курсу математики в закладах загальної середньої освіти, чітко й раціонально пояснювати розв’язання учням.</p> <p>ПРН 14: Розробляти і пропонувати різні форми та прийоми виховання позитивного ставлення до математики, мотивації учнів до засвоєння її основ та методів.</p>
Ключові слова	Вектор-функція, гладка крива, кривина, скрут, гладка поверхня, перша квадратична форма, друга квадратична форма, тензор кривини, геодезійні
Формат курсу	Очний.
Теми	Перелік тем подано в додатку у формі схеми курсу.
Підсумковий контроль, форма	Залік в кінці семестру в письмовій формі.
Пререквізити	Для вивчення курсу студенти потребують базових знань з лінійної алгебри, математичного аналізу, аналітичної геометрії, топології, елементарної математики в обсязі програми загальноосвітньої школи, диференціальних рівнянь.
Навчальні методи та техніки, які	Лекції, презентації, спільні розробки, робота у групах, дискусія, підготовка індивідуальних завдань.

<p>будуть використовуватися під час викладання курсу</p>	
<p>Необхідне обладнання</p>	<p>Дошка, комп'ютер, проектор, доступ до Internet мережі. Для вивчення курсу достатньо володіти загально вживаними програми такими як Microsoft Office Word, Microsoft Office, Excel, Microsoft Teams.</p>
<p>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</p>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • робота під час практичних занять: 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10. • підготовка індивідуальних завдань: 40% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 40. • залік: 50% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 50. <p>Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p>Залік проходить у письмовій формі. У кожному білеті міститься по два теоретичних питання із теорії кривих і поверхонь, а також набір задач, вибраних зі шкільного поглибленого курсу математики. Оцінка за семестр у випадку складання заліку є сумою балів поточного контролю та балів, отриманих під час заліку.</p> <p>Письмові роботи: Очікується, що студенти протягом семестру виконають індивідуальні завдання. Варіант ІЗ включає в собі розробку диференційованих завдань по темах шкільного курсу, написання конспектів уроків, проведення уроків.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману. Жодні форми недоброчесності не толеруються.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти</p>

	<p>самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття; недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p>
<p>Питання до заліку чи екзамену.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Основні властивості вектор-функції скалярного аргументу. Довести лему про похідну вектор-функції постійного модуля • Параметричні, загальні і векторні рівняння ліній • Довести теорему про дотичну до кривої • Вивести рівняння дотичної і нормальної площин до гладкої кривої • Поняття стичної площини до кривої та вивести її рівняння • Вивести рівняння головної нормалі і бінормалі • Поняття довжини дуги кривої і вивести формулу для її визначення • Поняття натурального параметра. Довести теорему про натуральну параметризацію довільної регулярної кривої • Кривина кривої, радіус кривини кривої • Поняття про скрут просторової кривої • Вивести формулу Френе • Вивести формулу кривини та скруту при довільній параметризації кривої • Довести основну теорему для просторових і плоских кривих. Натуральні рівняння кривої • Поняття гладкої параметризованої поверхні. Локальна еквівалентність різних форм поверхні: явне, неявне, параметричне задання поверхні • Координатні лінії на поверхні. Дотична площина та нормаль до поверхні • Перша квадратична форма поверхні та її обчислення • Елементи внутрішньої геометрії: довжина дуги кривої на поверхні, кут між кривими на поверхні, площа поверхні • Друга квадратична форма поверхні та формули для її обчислення. • Нормальні та похилі перерізи • Гауссова та середня кривини поверхні • Головні кривини поверхні. Індикатриса Дюпена • Класифікація точок поверхні • Дериваційні формули Вейнгартена-Гаусса • Довести теорему Гаусса • Геодезійні криві на поверхні. Обчислення геодезійної кривини • Геодезійні криві на сфері, циліндрі, конусі • Геодезійні на поверхнях обертання • Геодезійні та їх екстремальні властивості

Опитування	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.
-------------------	--

Схема курсу

Тижень, день, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності ((заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконан ня
Пер ший, 2 год.	Вступ до диференціаль ної геометрії. Векторна функція скалярного аргументу. Поняття кривої (лінії) в евклідовому просторі	лекція	[1, 2, 5, 8, 12, 14]	Про виникнення і розвиток диференціальної геометрії. Поняття кривої: проста плоска крива, плоскі криві, що задаються параметрично, просторові криві, крива як годограф вектор-функції. Гладкі криві. Розширення поняття функції в шкільному курсі. (2 год.)	Один тиждень
Дру гий, 2 год.	Дотична, нормальна і стична площини до кривої. Головна нормаль і бінормаль.	лекція	[1, 2, 4, 5, 8, 14]	Теорема про дотичну до кривої. Визначення рівняння: дотичної, нормальної площини до кривої, а також стичної площини, головної нормалі і бінормалі. Узагальнення поняття дотичної до кулі, циліндра шкільного курсу геометрії.	Один тиждень

				(2 год.)	
Перший, Другий, 4 год.	Тема 2. Похідні вектор-функції та їх обчислення. Обчислення дотичної, нормалі та бінормалі.	практичне	[3, 7, 8, 12, 13, 16]	Знаходження рівнянь дотичної, нормальної площини до кривої. Рівняння дотичної та нормалі до кривої при різних заданнях кривої. Розширення поняття дотичної до кривої, яка є графіком функції у шкільному курсі математики. (4 год.)	Два тижні
Третій, 2 год.	Довжина дуги кривої. Натуральний параметр.	лекція	[1, 2, 5, 8]	Означення довжини дуги і виведення формули для її знаходження. Натуральна параметризація. Перехід до натурального параметра. Узагальнення поняття довжини дуги кола. Число π . (2 год.)	Один тиждень
Третій, 2 год.	Обчислення довжини дуги кривої для різних параметризацій. Перехід до натурального параметра.	практичне	[3, 4, 7, 8, 12, 14]	Застосування формул для обчислення довжини кривої. Знаходження довжини кривої при заданні кривої у неявній формі. Розширення поняття кривої, як графіка функції в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Третій,	Кривина і скрут кривої	лекція	[1, 2, 5, 8, 11, 13]	Означення кривини.	Один тиждень

2 год.	при натуральній параметризації. Формули Френе.			Супровідний тригранник. Натуральні рівняння кривої. Кривина кривої, як узагальнення поняття радіуса кола шкільного курсу геометрії. (2 год.)	
Четвертий, 2 год.	Геометричний зміст кривини плоскої кривої.	практичне	[2, 7, 8, 11, 13, 14]	Обчислення кривини і скриту гладкої кривої. Визначення рівняння кривої через її кривину і скрут. Коло – єдина плоска плоска крива постійної ненульової кривини. Фізичний і геометричний зміст. (2 год.)	Один тиждень
П'ятий, 2 год.	Кривина і скрут кривої при довільній параметризації кривої.	лекція	[1, 2, 5, 8, 11, 13]	Виведення формул для обчислення кривої та скриту при довільній параметризації. Незалежність кривини кривої від її параметризації (2 год.)	Один тиждень
П'ятий, 2 год.	Обчислення кривини та скриту гладкої поверхні при довільній параметризації.	практичне	[3, 7, 8, 11, 13]	Кривина та скрут класичних кривих, заданих у різних формах задання: параметрична, явна, неявна. Неявне рівняння кола. Перехід від неявного рівняння до параметричного і навпаки.	Один тиждень

				(2 год.)	
Шостий, 2 год.	Доведення основної теорії плоских та просторових кривих.	лекція	[2, 5, 8]	Формули Серре-Френе як диференціальні рівняння руху репера Френе. Теорема існування і єдиності для системи диференціальних рівнянь з гладкими коефіцієнтами. (2 год.)	Один тиждень
Шостий, 2 год.	Особливі точки плоских кривих	практичне	[2, 5, 6, 12, 13]	Визначення особливих точок плоских кривих при різних формах задання кривих. Графік пів кубічної параболи в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Сьомий, 2 год.	Поняття поверхні та способи її задання.	лекція	[2, 4, 5, 12, 13, 16]	Означення елементарної області і поверхні. Параметричне, загальне і векторне рівняння поверхні. Гладкі поверхні. Координатні лінії та поверхні. Узагальнення поняття поверхні в шкільному курсі математики. (2 год.)	Один тиждень
Сьомий, 2 год.	Побудова поверхні її параметричним та неявним	практичне	[2, 4, 5, 8, 12, 13, 14]	Виділення класу поверхонь обертання, лінійчастих поверхонь. Знаходження	Один тиждень

	рівнянням.			координатних ліній на поверхнях. Поверхні обертання в шкільному курсі математики: сфера, циліндр, конус. (2 год.)	
Восьмий 2 год.	Дотична площина і нормаль поверхні.	лекція	[1, 2, 5, 8, 12, 13]	Означення дотичної площини до поверхні в заданій точці. Доведення теореми про дотичну площину до поверхні. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Розширення поняття дотичної до сфери в геометрії 10 клас. (2 год.)	Один тиждень
Восьмий 2 год.	Поверхні задані у різних формах і рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.	практичне	[2, 5, 8, 12, 13]	Знаходження рівнянь дотичної площини та нормалі до поверхонь. Узагальнення теореми про дотичну до сфери, перпендикулярну до радіуса. (2 год.)	Один тиждень
Дев'я- тий, 2 год.	Перша квадратична форма поверхні та її застосування.	лекція	[1, 2, 4, 5, 8, 12, 13]	Означення першої квадратичної форми поверхні. Довжина кривої на поверхні. Кут між кривими на поверхні. Площа області на поверхні. Розширення поняття відстані	Один тиждень

				від точки до поверхні сфери. Геометрія 10-11 класи. (2 год.)	
Дев'ятий, 2 год.	Метрична геометрія поверхонь.	практичне	[5, 7, 8, 12, 13]	Застосування формул для обчислення довжини дуги кривої, кута між кривими на поверхні та площі області на поверхні. Узагальнення поняття кута між променями в шкільному курсі геометрії. (2год.)	Один тиждень
Десятий, 2 год.	Друга квадратична форма поверхні та її застосування.	лекція	[1, 2, 5, 8, 12, 13, 14]	Означення другої квадратичної форми поверхні. Означення нормальних перерізів і нормальної кривини. Узагальнення поняття перерізу многогранника шкільного курсу геометрії. (2 год.)	Один тиждень
Десятий, 2 год.	Друга квадратична форма та її обчислення.	практичне	[1, 2, 5]	Обчислення коефіцієнтів другої квадратична форма поверхні при різних формах її задання. (2 год.)	Один тиждень

Одинадцятий, 2 год.	Індикатриса Дюпена та її рівняння. Головні кривини та гаусова кривина поверхні.	лекція	[1, 2, 4, 5, 16]	Знаходження рівняння індикатриси Дюпена, головних кривин, гаусової та середньої привини поверхні (2 год.)	Один тиждень
Одинадцятий, 2 год.	Головні, повні та середні кривини поверхні.	практичне	[2, 5, 7, 16]	Підсумкова контрольна з теорії поверхонь. (2 год.)	Один тиждень
Дванадцятий, 2 год.	Ізометричні поверхні. Внутрішня геометрія поверхні та її інваріанти.	лекція	[1, 2, 5, 8, 16]	Інваріанти ізометрії поверхонь. Гауссова кривина, як інваріант ізометрій. Ізометрія, як узагальнення поняття руху геометричних фігур в шкільному курсі геометрії. (2 год.)	Один тиждень
Дванадцятий, 2 год.	Взаємозв'язок різних формул для обчислення гаусової кривини.	практичне	[2, 5, 11, 12, 15]	Цікаві лінії на поверхнях: асиметричні, ортогональні, лінії кривини. Задачі на ГМТ в шкільній геометрії. (2 год.)	Один тиждень
Тринадцятий, 2 год.	Знаходження геодезійних.	практичне	[2, 4, 5, 7, 12, 13, 15]	Геодезійні на сфері, циліндрі, конусі. Поверхнях обертання. Доведення того, що геодезійні на сфері – дуги великих кіл. (2 год.)	Один тиждень
Чотирнадцятий, 2 год.	Екстремальні властивості геодезійних	лекція	[2, 5, 8, 12, 13, 15]	Доведення екстремальних властивостей геодезійних на основі напівгеодезійної системи координат. Гвинтові лінії – геодезійні на	Один тиждень

				циліндрі. (2 год.)	
П'ятнадцятий, 2 год.	Теорема Гауса-Бонне	лекція	[2, 5, 6]	Доведення теореми Гауса-Бонне (2 год.)	Один тиждень
П'ятнадцятий, 2 год.	Підсумкова контрольна робота та захист індивідуальних завдань.	практичне	[2, 5, 7, 8, 12, 13, 15]	Знаходження коваріантних похідних коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм поверхонь. Ідея розгортки многогранника при знаходженні геодезійних на многогранниках. (2 год.)	Один тиждень
Шістнадцятий, 2 год.	Поняття ріманового простору. Коваріантна похідна.	лекція	[1, 2, 5, 8, 11, 12, 14,]	Поняття тензора. Узагальнення поняття вектора, геодезійної, тензор кривини. Аксиоматика в шкільному курсі геометрії. Неевклідові геометрії. Постулат паралельних. (2 год.)	Один тиждень
Шістнадцятий, 2 год.	Підсумкове заняття з теми теорія поверхонь.	практичне	[2, 5, 6]	Загальний погляд на сучасний стан розвитку задач диференціальної геометрії. Апеляції до виконаних індивідуальних завдань. (2 год.)	Один тиждень