Львівський національний університет імені Івана Франка

"Затверджую" 21.07.2015 р.

Ректор проф. В. П. Мельник

N особової справи ____________________Варіант______

НАПРЯМИ "МАТЕМАТИКА, СТАТИСТИКА"

Вказівки: Розв'яжіть завдання і в дужках (.....) запишіть відповіді десятковим дробом. У випадку кількох вірних відповідей запишіть номери правильних варіантів у порядку зростання без розділових знаків. Ваші відповіді також запишіть у відповідних клітинках талону відповідей. Виправлення відповідей у завданні та в талоні не допускається.

1. (0001)
Обчислити $\log_2 \log_3(5^a)$, якщо $a = \log_5 81$.

1. (0051)
Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\log_8(\log_{0,5}(x/5 - 1)) > 0$.

2. (0101)
Вершини трикутної піраміди $ABCD$ знаходяться у точках $A(1; 2; 3)$, $B(9; 6; 4)$, $C(3; 0; 4)$, $D(5; 2; 6)$. Обчислити об'єм піраміди $ABCD$. Система координат прямокутна.

2. (0151)
Знайти відстань від точки $P(-1; 1; -2)$ до площини, заданої трьома точками $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$.

3. (0201)
Знайти найменший елемент множини $A \cap B$, якщо $A = \{0; 1; 2; 3\}$; $B = \{0,125; 0,25; 0,5; 1; 2\}$.

3. (0251)
Обчислити границю послідовності $x_n = (n^2 + 1) / (n^2 - 1)$.

4. (0301)
Знайти найменше число в області визначення функції $y = \sqrt{1 - 4x^2}$.

4. (0351)
При якому значенні параметра a найбільшим числом у області значення функції
$y = a - x^2$ буде число 1?

5. (0401)
Обчислити $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$.

5. (0451)
Обчислити $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 10x + 8}{x^2 - 3x + 2}$.

6. (0501)

Знайти значення похідної функції $f(x) = x^x$ у точці $x = 1$.

6. (0551)

Знайти $f'(x_0)$, якщо $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $x_0 = \sqrt{3}$.

7. (0601)

Серед первісних $F(x)$ функції $f = x \sin x + x$ вибрати таку, що $F(\pi) = \pi + 0.375\pi^2$. У відповідь записати $F(\pi/2)$.

7. (0651)

Обчислити інтеграл $\int_{-2}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$.

8. (0701)

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 2x$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$.

8. (0751)

Знайти абсцису центра мас плоскої однорідної фігури, обмеженої лініями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{10}$, $x = 0$, $y = 0$

9. (0801)

Нехай $U = L(a_1, a_2)$, $V = L(b_1, b_2)$. Знайти $\dim(U \cap V)$, якщо
$a_1 = (1,2,3)$; $a_2 = (2,4,5)$; $b_1 = (3,6,1)$; $b_2 = (4,8,3)$.

9. (0851)

Знайти найменше значення $\lambda \in \mathbf{Z}$, при якому квадратична форма $Q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ додатно визначена.

10. (0901)

Розв'яжіть рівняння $x^2 + (-4+5i)x - (1+7i) = 0$ і у поле відповідей запишіть максимальне значення модуля його коренів.

10. (0951)

Знайти найбільше значення λ при яких матриця $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ має найменший ранг.

11. (1001)

Які з формул числення висловлень є логічно еквівалентними (рівносильними) до формули $(\neg(A \to B) \wedge \neg(A \wedge B)) \vee B$?

1) $A \vee B$;
2) $(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B)$;
3) $A \wedge B$;
4) $\neg A \vee \neg B$;
5) $A \to B$.

11. (1051)

Скільки існує попарно не ізоморфних графів з п'ятьма вершинами і чотирма ребрами?

12. (1101)

Які з чисел 52, 48, 6, –12, –72 конгруентні 26 за модулем 2?

1) усі;   2) 48;   3) 52;   4) 6;   5) –12, –72.

12. (1151)
Вказати ті лишки, що є розв'язками конгруенції $15x \equiv 21 \pmod{18}$.
1) $x \equiv 5 \pmod{18}$;   2) $x \equiv 3 \pmod{18}$;   3) $x \equiv 1 \pmod{18}$;   4) $x \equiv 11 \pmod{18}$;   5) $x \equiv 7 \pmod{18}$.

13. (1201)
Яке серед поданих рівнянь є рівнянням з відокремлюваними змінними?
1) $\cos y y' = \sin y + 3x + 1$;
2) $y' - xy^2 = 2xy$;
3) $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$;
4) $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx + \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$.

13. (1251)
Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші $(y^2 - 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$, $y(1) = 1$.
У відповідь записати значення $y(5)$.

14. (1301)
Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші $y'' + y = \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
У відповідь записати значення $y(2\pi)$.

14. (1371)
Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші $y'' - 9y = 18 - 9x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.
У відповідь записати значення $y(10)$.

15. (1401)
Запишіть найслабшу (з поданих нижче) достатню умову на функцію $\varphi = \varphi(x)$, яка гарантує існування класичного розв'язку задачі Коші
$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0$.
1) функція φ неперервно диференційовна на R^1_+;
2) функція φ неперервно диференційовна на R^1;
3) функція φ двічі неперервно диференційовна на R^1_+;
4) функція φ двічі неперервно диференційовна на R^1;
5) функція φ тричі неперервно диференційовна на R^1_+;
6) функція φ тричі неперервно диференційовна на R^1.

15. (1451)
Знайти коефіцієнт $z(t)$, який стоїть біля функції $\sin(2x)$ у розкладі в ряд Фур'є розв'язку $u = u(x,t)$ мішаної задачі
$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(x,0) = \pi - x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
У відповідь записати значення $z(\pi / 6)$.

16. (1501)
Нехай функція f визначена в околі $z_0 \in \mathbf{C}$. Дати означення моногенності f в точці z_0 (вибрати правильний варіант):

1) існує $f'(z_0) \in \boldsymbol{C}$;

2) f' існує в околі z_0 і неперервна в z_0;

3) f' існує і неперервна в околі z_0;

4) в точці z_0 виконуються умови Коші – Рімана.

16. (1551)
Знайти образ області $D = \{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2, 3 < \operatorname{Im} z < 5\}$ при відображенні функцією $w = z - 1 - 3i$.

1) $G = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1, 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$;

2) $G = \{w : 0 < \operatorname{Re} w < 1, 0 < \operatorname{Im} w < 2\}$;

3) $G = \{w : 2 < \operatorname{Re} w < 3, 0 < \operatorname{Im} w < 2\}$;

4) $G = \{w : 2 < \operatorname{Re} w < 3, 6 < \operatorname{Im} w < 8\}$;

5) інша відповідь.

17. (1601)
У метричному просторі множина є скрізь щільною, якщо:
1) її замикання співпадає з усім простором; 2)її замикання порожнє; 3)внутрішність її замикання порожня; 4)доповнення до неї ніде не щільне; 5)доповнення до неї скінченне.

17. (1651)
Знайти найбільше характеристичне число рівняння $x(t) - \lambda \int_0^1 (2ts - 4t^2)\, x(s)\, ds = 0$.

18. (1701)
Обчислити інтеграл Лебега $\int\limits_{[-2;3]} 2\operatorname{sgn}(x^2 - x - 2)\, d\mu_1$.

18. (1748)
Вказати правильні твердження: 1)якщо множина вимірна за Лебегом, вона вимірна за Ріманом; 2)якщо множина вимірна за Ріманом, вона вимірна за Лебегом; 3)якщо множина борелівська, вона вимірна за Лебегом; 4)якщо множина вимірна за Лебегом, вона борелівська; 5)все множини вимірні за Лебегом.

19. (1801)
У коробці знаходиться 3 білих і 4 червоних кульок. Навмання вибирають три кульки. Знайти ймовірність *p* того, що витягнуто не менше двох білих куль, якщо відомо, що серед витягнутих куль є принаймні одна біла. У талон відповідей записати значення 93*p*.

19. (1851)
Відомо, що ймовірність одного влучення у мішень для спортсмена дорівнює *p*, яке є невідомим, і відомо, що ймовірність принаймні одного влучення при двох пострілах дорівнює 0.96. Знайти *p*.

20. (1901)
Сім раз підкидають симетричну монету. Випадкова величина ξ – кількість випадань герба. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ.

20. (1951)
Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають функцію розподілу $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ 1 - 1/x, & x > 1 \end{cases}$. Знайти значення функції розподілу випадкової величини $\eta = \min(\xi_1, \xi_2)$ в точці $x = 5$.

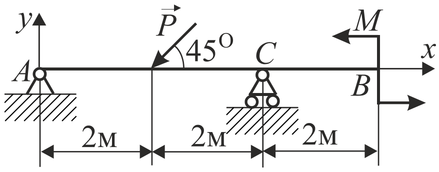
21. (2001)
Методом максимальної правдоподібності оцінити невідомий параметр a рівномірного розподілу на відрізку $[a;b]$, якщо задана реалізація вибірки

5	7	7	8	5	9	4	7	8	4

21. (2051)
Методом моментів оцінити невідомий параметр b рівномірного розподілу на відрізку $[0;b]$, якщо задана реалізація вибірки

1,0	1,8	1,7	0,2	0,9	1,1	0,7	1,8	0,2	0,1

22. (2101)
На горизонтальну балку AB діє сила $P=4\sqrt{2}$ кН і пара сил з моментом M=4 кН·м. Визначити у кН проекцію на вісь Ay реакції опори у точці C.



22. (2151)
Брусок масою m=1 кг штовхнули зі швидкістю v_0=9,8 м/с догори по ідеально гладкій поверхні, що нахилена під кутом 30^0 до горизонту. Обчисліть час T у секундах, протягом якого тіло рухалося до зупинки, прийнявши g=9,8 м/с^2.

23. (2201)
Вкажіть, які із сімей підмножин множини $\mathbb{R}$ утворюють топологію:

1) $\tau = \{[a, +\infty): a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing\}$;
2) $\tau = \{(a, +\infty): a\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing\}$;
3) $\tau = \{[a, b): a,b\in\mathbb{R}, a < b\} \cup\{\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing\}$;
4) $\tau = \{5\} \cup\{\mathbb{R}\}\cup\{\varnothing\}$.

23. (2250)
Знайти Гаусову кривину в точці $M(1, 0, 0)$ на сфері $x = \cos(u)\sin(v)$, $y = \cos(u)\cos(v)$, $z = \sin(u)$.

24. (2301)
Розв’язати задачу $u_1 + u_2 + u_3 \to \min$, $u_1 - u_2 \ge 0$, $u_1 + u_2 - u_3 - 10 = 0$, $u_1 \ge 0$, $u_2 \ge 0$, $u_3 \ge 0$. У поле відповідей записати оптимальне значення цільової функції.

24. (2351)
Знайти максимальне значення функції $u(x, y) = x^2 + y^2 + 10y$ у області $-1 \le x \le 4$, $-1 \le y \le 4$.

25. (2451)
Дві фірми виготовляють однорідний продукт в обсягах x_1, x_2 відповідно, їхні витрати при цьому задаються функціями $C_1 = 6x_1$, $C_2 = 3x_2$. Обернена функція попиту, яка визначає ціну одиниці продукції, має вигляд $p = 12 - 2(x_1 + x_2)$. Знайти рівновагу Штакельберга для другого гравця в дуополії Курно. У поле відповідей записати p^*.

25. (2476)
Нехай множина допустимих альтернатив $X = \mathbf{R}_+^2$ і система переваг споживача зображується функцією корисності $u(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, система цін $p = (1,2)$ і дохід $W = 216$. Знайти оптимальний вибір першого споживача.

Декан факультету М. М. Зарічний