

"Затверджую"

21.07.2015 р.

Ректор

проф. В. П. Мельник

№ особової справи _____ Варіант _____

НАПРЯМИ "МАТЕМАТИКА, СТАТИСТИКА"

Вказівки: Розв'яжіть завдання і в дужках (.....) запишіть відповіді десятковим дробом. У випадку кількох вірних відповідей запишіть номери правильних варіантів у порядку зростання без розділових знаків. Ваші відповіді також запишіть у відповідних клітинках талону відповідей. Виправлення відповідей у завданні та в талоні не допускається.

1. (0025)

Визначити найбільше ціле значення параметра a , при якому площа, обмежена лініями $y = 4x^3$, $x = 2$, $x = a$, $y = 0$, буде менша ніж 240.

1. (0075)

При якому найбільшому значенні параметра a рівняння $|x - 1| = 1 - (x - a)^2$ має лише один корінь?

2. (0125)

Знайти довжину проєкції вектора $\vec{a} (5; 2; 5)$ на вісь вектора $\vec{b} (2; -1; 2)$. Система координат прямокутна.

2. (0175)

Дано рівняння лінії другого порядку $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$. Визначити тип лінії: 1) пара дійсних прямих, що перетинаються; 2) пара уявних прямих, що перетинаються; 3) пара паралельних прямих.

3. (0217)

Знайти точну нижню грань множини $\{n^3/4 + 5/n, n \in \mathbf{N}\}$.

3. (0275)

Обчислити границю послідовності $x_n = 1 + (3 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n)^2 / (25^n - 7^n)$.

4. (0325)

Серед кількох функцій вибрати визначені на всій дійсній осі

1) $y = \arcsin x$; 2) $y = (x^2 - 1)$; 3) $y = x + 1/x$; 4) $y = \operatorname{ch}(x) - 1$; 5) $y = 4x^3$.

4. (0375)

При якому значенні параметра a графік функції $y = x^3 - (1 + a)x^2$ буде мати точку перегину при $x = 2$?

5. (0425)

Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) - \sin(2x)}{\sin(2x) - \sin(x)}$.

5. (0475)

Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 3}$.

6. (0525)

Знайти значення третьої похідної функції $f(x) = (x + 1)^3 \ln x$ у точці $x = 1$.

6. (0575)

Вказати кількість точок, у яких функція $f(x) = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ не є диференційовною.

7. (0625)

Чому дорівнює $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, де $u = x^3 y^2 z$, в точці $A(1, -1, 1)$.

7. (0675)

Обчислити інтеграл $\int_0^{-1+\sqrt{24}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx + \sqrt{2}$.

8. (0725)

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 10x + 16y$, $z = 0$, $y = x^{1/2}$, $y = 1$, $x = 0$.

8. (0775)

Знайти площу поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 2x$, що знаходиться всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

9. (0820)

Перевірити, чи є матриця A матрицею оператора простої структури. Якщо A – матриця простої структури, то у поле відповіді записати найбільше власне значення, якщо ні – то найменше.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

9. (0826)

Знайти вимірність ортогонального доповнення до підпростору $U = L(a_1, a_2, a_3)$ простору C^4 , якщо $a_1 = (1, 0, i, -i)$; $a_2 = (1-i, i, 1, -1)$; $a_3 = (1+i, -1, i, -i)$.

10. (0961)

Розв'яжіть рівняння $x^2 - 5x + \sqrt{11}(\sqrt{11} - 5i) = 0$ і у поле відповідей запишіть максимальне значення модуля його коренів.

10. (0980)

Розв'яжіть матричне рівняння і у поле відповідей запишіть слід матриці X

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

10. (0987)

Якщо $c = (c_1; c_2; c_3; 1; 4)$ - розв'язок заданої системи лінійних рівнянь, то знайдіть всі c_i і у поле

відповідей запишіть їх суму, тобто $\sum_{i=1}^5 c_i$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

11. (1025)

Знайдіть еквівалентні формули до заперечення предиката $(\forall x) (\forall y) ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \rightarrow (xy \neq 0))$.

- 1) $(\neg \forall x) (\neg \forall y) (((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \vee (xy \neq 0))$;
- 2) $(\neg \forall x) ((x = 0) \wedge (y = 0)) \vee (xy = 0)$;
- 3) $(\exists x) (\exists y) ((x = 0) \vee (y = 0)) \vee (xy \neq 0)$;
- 4) $(\exists x) (\exists y) ((x = 0) \vee (y = 0)) \vee (xy = 0)$;

- 5) $(\exists x) (\exists y) ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \wedge (xy = 0)$;
 6) $(\exists x) (\exists y) ((x \neq 0) \vee (y \neq 0)) \vee (xy \neq 0)$;
 7) $(\exists x) (\exists y) ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \vee (xy \neq 0)$.

11. (1037)

Скільки існує ін'єктивних відображень $f: S \rightarrow T$, якщо множина S – двоелементна, а множина T – тридцятиелементна?

12. (1145)

Які з чисел 30, 41, 52, 74, 85 конгруентні 8 за модулем 11?

1) усі; 2) 41; 3) 74; 4) жодне; 5) 85.

12. (1171)

З'ясувати, котрі із наступних множин за заданої операції утворюють групу.

A – цілі числа відносно додавання;

B – степені дійсного a , ($a \neq 0$), відносно множення;

C – додатні раціональні числа відносно множення.

1) жодна із перелічених; 2) множина A; 3) множина B; 4) множина C; 5) усі перелічені.

12. (1200)

Нехай $x_1 = 1 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ – один з коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – раціональні числа. Знайдіть суму усіх коренів заданого рівняння.

13. (1225)

При якому k всі інтегральні криві рівняння $y' = k y$ є обмеженими при $x \rightarrow +\infty$?

1) $k = -3$; 2) $k = 1$; 3) $k = 3$.

13. (1270)

Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі $x^2 y' - 4y = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -3$.

У відповідь записати значення $5e^{-1}(y(-1) + 4)$.

14. (1385)

Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші $y'' + y = \sin x - 3\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

У відповідь записати значення $2y(\pi)$ з точністю до сотих.

14. (1400)

Знайти розв'язок $y = y(x)$ задачі Коші $y'' + 4y = 12$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

У відповідь записати значення $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

15. (1425)

Який канонічний вигляд має рівняння $u_{xx} - 8u_{xy} + 17u_{yy} = 0$?

1) $v_{\xi\xi} = 0$; 2) $v_{\xi\eta} = 0$; 3) $v_{\eta\eta} = 0$; 4) $v_{\xi} - v_{\eta} = 0$; 5) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = 0$.

15. (1470)

Знайдіть значення розв'язку $u(x_1, x_2, x_3, t)$ задачі

$u_{tt} = 9(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3})$, $u|_{t=0} = 2x_1^2 - 2$, $u_t|_{t=0} = 3x_1x_2x_3$,

в точці $(0,0,0,1)$.

16. (1525)

Яка з функцій $f_1(z) = 3z$, $f_2(z) = z^2$, $f_3(z) = e^z$ здійснює конформне і однолисте відображення $C \rightarrow C$?

- 1) лише f_1 ;
- 2) лише f_1 та f_3 ;
- 3) усі три функції;
- 4) інша відповідь.

16. (1575)

Знайти образ області $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 2\}$ при відображенні функцією $w = 3e^{2z-1}$.

- 1) $G = \{w : |w| > 3e^3, \operatorname{Im} w > 0\}$;
- 2) $G = \{w : |w| < 3e^{-4}, \operatorname{Im} w < 0\}$;
- 3) $G = \{w : |w| > e^{-5}, \operatorname{Im} w > 0\}$;
- 4) $G = \{w : |w| < 3e^3, \operatorname{Im} w < 0\}$;
- 5) інша відповідь.

17. (1625)

Спектр оператора у гільбертовому просторі є дійсним, якщо:

- 1) оператор є обмеженим; 2) простір є скінченновимірним; 3) оператор є самоспряженим; 4) оператор самоспряжений і простір скінченновимірний; 5) оператор і фредгольмовим.

17. (1675)

Знайти норму лінійного неперервного оператора $A: l_1 \rightarrow l_1$,

$$A(x_1, x_2, \dots) = (0, 0, 3x_1 - 2x_4, x_5, x_2 + x_5, 0, \dots).$$

18. (1725)

Знайти μ_1 -міру множини $A = [-2, 2) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (n - \frac{1}{2^n}, n) \right)$.

18. (1775)

Знайти повну варіацію функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $[0, 2\pi]$.

19. (1825)

Послідовно навмання вибирають три цифри. Знайти ймовірність того, що відсутні цифри 0 і 1.

19. (1875)

Студент навмання послідовно витягає три карти з колоди в 52 карти. Знайти ймовірність того, що всі три карти будуть червоної масті, при умові, що перша карта червоної масті. Нехай шукана ймовірність дорівнює P . У талон відповідей записати $17P$.

20. (1925)

Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0; 10]$. Знайти щільність випадкової величини $\eta = \xi^2$ в точці $x = 2$. У талон відповідей записати значення $40\sqrt{2}f_\eta(2)$

20. (1975)

Два пасажири заходять у 5 вагонів електрички. Випадкова величина ξ – кількість пасажирів, які зайшли в перший вагон. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ .

21. (2025)

Методом максимальної правдоподібності оцінити невідомий параметр λ показникового розподілу $\exp(\lambda)$, якщо задана реалізація вибірки

2,1	3,4	0,3	1,5	0,4	1,3	1,1	5,2	2,5	1,9
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

У талон відповідей записати значення $1/\hat{\lambda}$.

21. (2075)

Методом моментів оцінити невідомий параметр p біноміального розподілу $Bi(20, p)$, якщо задана реалізація вибірка

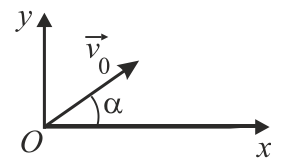
12	14	18	13	12	17	15	14	15	12
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

22. (2126)

Задане рівняння руху точки в декартових координатах $x(t) = 3t^2$ (у метрах), $y(t) = -2t^3$ (у метрах). Визначить у м/с проекцію вектора швидкості на вісь Ox у момент часу $t = 2$ с.

22. (2175)

Тіло масою $m=18$ кг кинути зі швидкістю $v_0=200\sqrt{2}$ м/с під кутом $\alpha=45^\circ$ до горизонту. Тіло рухається тільки під дією сили ваги. Обчисліть у метрах координату x тіла у момент часу 4 секунди, прийнявши $g=9,8$ м/с².



23. (2225)

Яку з аксіом відокремлення задовольняє топологічний простір (\mathbb{R}, τ) , де τ породжена базою $\beta = \{(-a, a) : a \in \mathbb{R}\}$?

- 1) T_1 ; 2) T_2 ; 3) T_3 ; 4) T_4 ; 5) жодну із перелічених.

23. (2275)

На множині дійсних чисел \mathbb{R} топологія τ визначається передбазою

$P = \{(-\infty, n] : n = 1, 2, \dots, 15\} \cup \{[i, +\infty) : i \in \mathbb{N}\}$. У скількох точках тотожне відображення з (\mathbb{R}, τ) в \mathbb{R} зі звичайною топологією є неперервним?

24. (2325)

Розв'язати найпростішу задачу класичного варіаційного числення

$$\int_0^{\pi/2} (y^2 - y'^2) dx \rightarrow \text{extr}, \quad y(0) = 1, y(\pi/2) = 0,$$

У поле відповідей записати $y(\pi/3)$.

24. (2375)

Знайти максимальне значення функції $u(x, y) = x^2 + y^2 + 8y$ у області $-4 \leq x \leq -2, -2 \leq y \leq 0$.

25. (2461)

Дві фірми виготовляють однорідний продукт в обсягах x_1, x_2 відповідно, їхні витрати при цьому задаються функціями $C_1 = 4x_1, C_2 = 3x_2$. Обернена функція попиту, яка визначає ціну одиниці продукції, має вигляд $p = 12 - 3(x_1 + x_2)$. Знайти рівновагу Штакельберга для другого гравця в дуополії Курно. У поле відповідей записати p^* .

25. (2486)

Нехай множина допустимих альтернатив $X = \mathbf{R}_+^2$ і система переваг споживача зображується функцією корисності $u(x) = \sqrt{x_1} + 0,5\sqrt{x_2}$, система цін $p = (1, 2)$ і дохід $W = 72$. Знайти оптимальний вибір другого споживача.