

Вказівки: Розв'яжіть завдання і в дужках (.....) запишіть відповіді десятковим дробом. У випадку кількох вірних відповідей запишіть номери правильних варіантів у порядку зростання без розділових знаків. Ваші відповіді також запишіть у відповідних клітинках талону відповідей. Виправлення відповідей у завданні та в талоні не допускається.

1. (0040)

Визначити кількість розв'язків рівняння  $x|x| - 3|x| + 2,25 = 0$ .

1. (0090)

Змішали 40% розчин солі із 12% і одержали 560 г 18% розчину. Скільки грамів 12% розчину було взято?

2. (0140)

Знайти відстань між паралельними прямими  $3x + 4y - 18 = 0$  і  $3x + 4y + 43 = 0$ .

1. (2401)

Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності  $(x^2 - x - 2)(x^2 + 4x + 3) < 0$ .

2. (0190)

Знайти центр поверхні  $4x^2 + 2y^2 + 12z^2 - 4xy + 8yz + 12xz + 14x - 10y + 7 = 0$ . У відповідь записати суму координат центра.

3. (0240)

Серед кількох послідовностей вибрати розбіжні

1)  $x_n = \sin(\pi n/5)$ ; 2)  $x_n = \exp(n)/n$ ; 3)  $x_n = (2n - 1)/(2n + 1)$ ; 4)  $x_n = (1 + 1/n)^n$ ; 5)  $x_n = (1/n)^5$ .

3. (0290)

Обчислити границю послідовності  $x_n = (1 + \ln(n^5 + 4)) / (n^2 + \ln n)$ .

4. (0340)

Визначити найменший додатний період функції  $y = \operatorname{tg}(\pi x) (1 + \cos(\pi x/2) - \sin(\pi x/3))$ .

4. (0390)

При якому найбільшому значенні параметра  $a$  функція  $y = x^3 - 3ax$  монотонно зростатиме?

5. (0440)

Обчислити  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-2}$ .

5. (0490)

Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 - 13x + 15}{x^2 + 2x - 3}$ .

6. (0540)

Знайти значення похідної неявно заданої функції  $y(x)$  у точці  $(-2, 0)$ , якщо  $x^4 + y^3 + x^2 + y = 20$ .

6. (0590)

Знайти кількість точок на проміжку  $[-10; 10]$ , у яких похідна функції  $y = \sin^2(x/2)$  рівна нулю.

7. (0640)

Чому дорівнює коефіцієнт Фур'є  $a_4$   $2\pi$ -періодичної функції  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\pi, \pi]$ .

7. (0690)

Розкласти функцію  $f(x) = 3x \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  у ряд Маклорена. У відповідь записати  $a_{11}$ .

8. (0740)

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $x^2 + y^2 = 1/\pi$ ,  $x^2 + y^2 = 2\pi z$ ,  $z = 0$ .

8. (0790)

Обчислити криволінійний інтеграл  $\int_C x dx + y dy + (x + y - 1) dz$ , де  $C$  – відрізок, що з'єднує точки

$A(1,1,1)$  і  $B(2,3,4)$ .

9. (0875)

Обчислити визначник матриці Грама векторів  $a_1 = (2, i)$  та  $a_2 = (i, 3)$ .

9. (0890)

Лінійний оператор  $\varphi$  в деякій ортонормованій базі задається матрицею  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Знайти

добуток елементів спектру оператора  $\varphi$ .

10. (0901)

Обчисліть визначник  $\begin{vmatrix} 2014 & 2015 & 2015 & 2015 \\ 2015 & 2014 & 2014 & 2015 \\ 2015 & 2014 & 2015 & 2015 \\ 2015 & 2014 & 2014 & 2014 \end{vmatrix}$  та його значення запишіть у поле відповідей.

10. (0935)

Встановіть, які з матриць  $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -14 & 8 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 10,5 & -5,5 \\ -1,5 & -7,5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 5,5 & 1,5 \\ -10,5 & 2,5 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$E = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  подібні до матриці  $X = \begin{pmatrix} 5,5 & -1,5 \\ 10,5 & -2,5 \end{pmatrix}$ .

Варіанти відповідей 1) A, B ; 2) B, C ; 3) A, D ; 4) B, E; 5) C, E;

11. (1051)

Перетворити формулу алгебри висловлень у рівносильну, звівши кількість логічних операцій у цій формулі до  $n = 1$ :  $((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C) \vee (\neg A \rightarrow B) \vee A \vee (B \wedge \neg C))$ . У поле для відповідей запишіть номери правильних відповідей у зростаючому порядку без пробілів та розділових знаків. 1)  $A \wedge C$ ; 2)  $A \wedge B$ ; 3)  $B \vee C$ ; 4)  $C \vee A$ ; 5)  $A \vee B$ .

11. (1075)

Визначіть, які із заданих відношень  $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$  заданих на множині  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  є одночасно рефлексивними і транзитивними. У поле відповідей запишіть їх номери (без пробілів і розділових знаків) у зростаючому порядку.

$R_1 = \{(1,3); (1,2); (2,1); (3,1); (5,4); (4,5); (5,6); (6,5); (6,7); (7,6); (5,7); (7,5); (3,3)\},$   
 $R_2 = \{(1,1); (5,7); (7,5); (2,2); (3,3); (4,4); (5,6); (6,5); (6,7); (7,6); (5,5); (6,6); (7,7)\},$   
 $R_3 = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2); (3,4); (4,5); (6,6); (6,5); (6,7); (7,6); (5,5); (7,7); (5,6)\},$   
 $R_4 = \{(1,3); (1,2); (2,1); (3,2); (2,3); (3,1); (1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7)\},$   
 $R_5 = \{(5,7); (1,2); (7,5); (2,1); (3,3); (4,4); (5,6); (6,5); (6,7); (7,6); (5,5); (6,6); (7,7)\}.$

12. (1101)

Нехай  $x_1 = -1 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$  - один з коренів рівняння  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a, b, c$  - раціональні числа. Знайдіть добуток усіх коренів заданого рівняння.

12. (1125)

Знайдіть дві останні цифри числа  $2015^{2016}$ .

12. (1151)

Розв'яжіть конгруенцію  $15x \equiv 21 \pmod{18}$  і в полі для відповідей запишіть суму її розв'язків (найменше додатне ціле число) за модулем 18. Якщо конгруенція не має розв'язків, то в полі для відповідей запишіть 0.

13. (1226)

Яке з наведених рівнянь є диференціальним рівнянням Клеро?

1)  $xy' - y = (y')^3 + (y')^5;$

2)  $xy' - y = y^3 + y^5;$

3)  $xy - y' = (y')^3 + (y')^5;$

4)  $xy - y' = y^3 + y^5.$

13. (1245)

У якому з наведених рівнянь можна понизити порядок заміною  $y' = v(y)$ ?

1)  $y''' y'' y' - (y'')^4 = xy';$

2)  $y''' y'' y' - (y'')^3 = xy^3;$

3)  $y''' y'' y' - (y'')^4 = y' y;$

4)  $y''' y'' y' - (y'')^3 = x^3 y.$

13. (1251)

Якій з наведених задач Коші еквівалентне інтегральне рівняння  $y(x) = 2 + \int_0^x (s + y^2(s)) ds$ ?

1)  $y' = x^2 + y, \quad y(2) = 0;$

2)  $y' = x + y^2, \quad y(2) = 0;$

3)  $y' = x^2 + y, \quad y(0) = 2;$

4)  $y' = x + y^2, \quad y(0) = 2.$

13. (1291)

Відомо, що  $y = e^{2x}$  та  $y = \sin(2x)$  є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння третього порядку зі сталими дійсними коефіцієнтами. Який вигляд має загальний розв'язок цього рівняння? Варіанти відповідей:

- 1)  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 \sin(2x)$ ;
- 2)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 \sin(2x)$ ;
- 3)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 \sin(2x) + C_3 x \sin(2x)$ ;
- 4)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x)$ .

14. (1301)

Знайти розв'язок  $y = y(x)$  задачі Коші  $y' - xy^2 = 2xy$ ,  $y(1) = 3$ .

У відповідь записати значення  $y(-1)$ .

14. (1330)

Знайти розв'язок  $y = y(x)$  задачі  $x^2 y' - 3 = y$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -2$ .

У відповідь записати значення  $e^{(y(1)+3)}$ .

15. (1401)

Визначте тип рівняння  $u_{xx} + 10u_{yy} + 10u_{zz} + 2u_{xy} - 6u_{xz} + 2u_x = 0$ . Варіанти відповідей:

- 1) гіперболічне;
- 2) параболічне;
- 3) еліптичне;
- 4) безтипне.

15. (1451)

Знайти розв'язок  $u = u(x, y)$  задачі Коші

$$u_{xy} - 2x u_{yy} + 2x u_y = 0, \quad u|_{y=0} = 4(1-x), \quad u_y|_{y=0} = 0.$$

У відповідь записати значення  $u(1,1)$ .

16. (1520)

Нехай  $G_1 = \left\{ z : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2} \right\}$ ,  $G_2 = \mathbb{C}$ . В якій з цих областей функція  $f(z) = 3z - 5i$  здійснює конформне відображення?

- 1) лише в  $G_1$ ;
- 2) лише в  $G_2$ ;
- 3) в обох;
- 4) в жодній.

16. (1540)

Яка з наведених функцій є дійсною частиною аналітичної функції  $f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y)$ , якщо її уявна частина  $v(x; y) = 6xy + 2y$ ?

- 1)  $u(x; y) = 3x^2 + y^2$ ;
- 2)  $u(x; y) = 6x + 2$ ;
- 3)  $u(x; y) = 3x^2 y + 2x$ ;
- 4)  $u(x; y) = 3x^2 - 3y^2 + 2x$ ;
- 5) жодна.

16. (1590)

Обчислити  $\arg(\sin(\pi/7) + i \cos(\pi/7))^5$

- 1)  $5\pi/7$ ;
- 2)  $-5\pi/7$ ;
- 3)  $-3\pi/14$ ;
- 4)  $2\pi/7$ ;
- 5) інша відповідь.

17. (1640)

Знайти кут (в градусах) між елементами  $x_1(t) \equiv 1$  і  $x_2(t) = t$  в просторі  $L_2(-1,1)$ .

17. (1690)

Знайти норму лінійного обмеженого функціонала  $F$ , заданого на просторі  $C[0,1]$  формулою

$$F(x(t)) = \int_0^1 tx(t)dt.$$

18. (1715)

Обчислити інтеграл Лебега-Стільтьєса  $\int_{[0;3]} x^2 d \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2)$ .

18. (1751)

Знайти границю послідовності інтегралів  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \int_1^{\infty} \frac{n(\sqrt[3]{1+x/n} - 1)}{x^3} d\mu_1$ .

18. (1768)

Для якого найбільшого цілого  $p$  функція  $f(x) = (1-x)^{-1/5} \chi_{R_Q}(x)$  належить до простору  $L_p(0,1)$ ?

19. (1840)

У ліфт 11-и поверхового будинку на першому поверсі зайшло троє пасажирів. Знайти ймовірність того, що принаймні двоє з них вийдуть на різних поверхах.

19. (1896)

Знайти найімовірніше число в схемі Бернуллі, якщо було проведено 80 випробувань і ймовірність появи події при одному випробування дорівнює 0,4.

20. (1903)

Ймовірність влучення баскетболіста при одному кидку в кошик дорівнює 0.8. Баскетболіст 15 раз кидає м'яч у кошик. Випадкова величина  $\xi$  – кількість влучень. Знайти дисперсію випадкової величини  $\xi$ .

20. (1908)

Монету підкидають до цього часу, поки не випаде герб. Випадкова величина  $\xi$  – номер випробування при якому вперше випав герб. Знайти дисперсію випадкової величини  $\xi$ .

20. (1919)

Випадкова величина  $\xi$  має рівномірний розподіл на відрізку  $[0;4]$ . Знайти щільність випадкової величини  $5\xi$  у точці  $x = 4$ .

21. (2040)

Методом максимальної правдоподібності оцінити невідомий параметр  $p$  біноміального розподілу  $Bi(20, p)$ , якщо задана реалізація вибірки

11	12	7	12	10	5	7	12	8	9
----	----	---	----	----	---	---	----	---	---

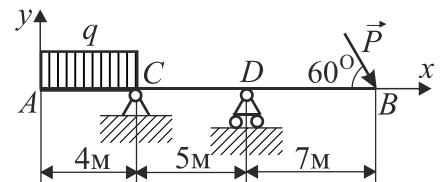
21. (2090)

Методом моментів оцінити невідомий параметр  $a$  рівномірного розподілу на відрізку  $[a;0]$ , якщо задана реалізація вибірки

-2,9	-4,8	-10	-0,3	-1,2	1,7	-2,5	-0,4	-1,5	-5,2
------	------	-----	------	------	-----	------	------	------	------

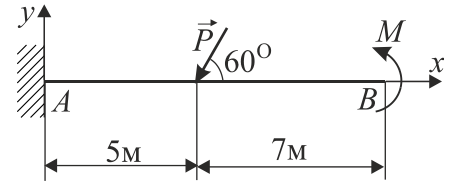
22. (2111)

На горизонтальну балку  $AB$  діє сила  $P=6$  Н і рівномірно розподілене навантаження інтенсивності  $q=23$  Н/м. Визначити у ньютонках проекцію на вісь  $Ax$  реакції опори у точці  $C$ .



22. (2121)

На горизонтальну балку  $AB$  діє сила  $P=6\sqrt{3}$  Н і пара сил з моментом  $M=12$  Н·м. Визначити у ньютонках проекцію на вісь  $Ay$  реакції опори у точці  $A$ .



22. (2131)

Задане рівняння руху точки в декартових координатах  $x(t) = -8t^3 + 4t + 1$  (у метрах),  $y(t) = 2t^2 + 4t - 3$  (у метрах). Визначити у м/с проекцію вектора швидкості на вісь  $Ox$  у момент часу  $t = 1$  с.

23. (2210)

Вкажіть, які з наступних множин будуть відкритими на прямій  $\mathbb{R}$  з природньою топологією (топологія, породжена базою  $\beta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ).

- 1)  $[0, +\infty)$ ;
- 2)  $[3, 4)$ ;
- 3)  $(3, +\infty)$ ;
- 4)  $(0, 9) \cup (12, 15)$ .

23. (2240)

Обчислити кривину кривої  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 4$ .

23. (2290)

Нехай  $\beta = \{(x, y) : (x - a)^2 + y^2 = r, r \geq 0\}$  – база топології  $\tau$  на площині  $\mathbb{R}^2$ . Вказати зв'язні підмножини в топологічному просторі  $(\mathbb{R}^2, \tau)$ :

1.  $\{(x, y) : (x - a)^2 + y^2 \leq 2\}$ ;
2.  $\{(-1 - a, 0); (1 - a, 0)\}$ ;
3.  $\{(x, y) : x = a, |y| \leq 2\}$ ;
4.  $\{(-a, y) : |y| \leq 2\}$ .

24. (2340)

Знайти мінімальне значення функції  $u(x, y) = 4(x + y + y^2)$  у області  $-10 \leq x \leq 10$ ,  $10 \leq y \leq 20$ .

24. (2390)

Знайти мінімальне значення функції  $u(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 1$  у області  $-4 \leq x \leq -2$ ,  $-2 \leq y \leq 0$ .

25. (2470)

Дві фірми виготовляють однорідний продукт в обсягах  $x_1$ ,  $x_2$  відповідно, їхні витрати при цьому задаються функціями  $C_1 = 2x_1$ ,  $C_2 = x_2$ . Обернена функція попиту, яка визначає ціну одиниці продукції, має вигляд  $p = 12 - 2(x_1 + x_2)$ . Знайти рівновагу Штакельберга для другого гравця в дуополії Курно. У поле відповідей записати обсяг продукту  $x_2^*$ .

25. (2495)

Нехай множина допустимих альтернатив  $X = \mathbf{R}_+^2$  і система переваг споживача зображується функцією корисності  $u(x) = \sqrt{6x_1x_2}$ , система цін  $p = (2, 3)$  і дохід  $W = 120$ . Знайти оптимальний вибір другого споживача.

Декан факультету

М. М. Зарічний