

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

Затверджено

на засіданні кафедри теорії функцій і
функціонального аналізу
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені
Івана Франка
(протокол № 1 від 25.08.2022)



Завідувач кафедри: проф. Скасків О.Б.

Силабус з навчальної дисципліни

“ Теорія ймовірностей і математична статистика ”,

що викладається в межах ОПП *“Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”*, *“Комп’ютерний аналіз математичних моделей”*, *“Математика. Математична економіка та економетрика”*

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів

із спеціальності 111 – Математика

Назва дисципліни	Теорія ймовірностей і математична статистика
Адреса викладання дисципліни	Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська 1
Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна	Механіко-математичний факультету Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
Галузь знань, шифр та назва спеціальності	11 – математика та статистика 112 – математика
Викладачі дисципліни	Скасків Олег Богданович , професор кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Контактна інформація викладачів	olskask@gmail.com , oleh.skaskiv@lnu.edu.ua Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 373. м. Львів, вул. Університетська, 1
Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються	Консультації в день проведення лекцій (за попередньою домовленістю).
Сторінка курсу	http://prima.lnu.edu.ua/faculty/mechmat/Departments/TFTJ/Web/Frameukr.htm
Інформація про дисципліну	Теорія ймовірностей і її важливий розділ – математична статистика – знайшли і продовжують знаходити надзвичайно вагомі застосування як теоретичні, в різних розділах сучасної математики, так і суто практичні в моделюванні результатів дослідження різноманітних явищ, які вивчають сучасні фізика, хімія, біологія, соціологія, економічна теорія, психологія і т.п. Одним з найсучасніших застосувань математичної статистики є застосування в моделюванні інформаційних потоків в ве-ликих базах даних. Метою курсу теорії ймовірностей і математичної статистики є ознайомлення студента з основними відомостями з даних дисциплін. Студент, який опанує цей курс, виявиться готовим до роботи із будь-якою спеціальною монографією з теорії ймовірностей, суміжних спеціальностей і їхніх застосувань. Курс теорії ймовірностей і математичної статистики включає в себе відповідний практикум, що дає змогу студентам опанувати основні прийоми та методи теорії ймовірностей і математичної статистики і набути необхідні навички для практичного застосування теоретичного матеріалу.
Коротка анотація дисципліни	Дисципліна “Теорія ймовірностей і математична статистика” є основною дисципліною з спеціальностей 111 – математика, яка викладається в 4-му семестрі в обсязі 4-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS) і у 5-му семестрі в обсязі 4-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
Мета та цілі дисципліни	Мета вивчення основної дисципліни “Теорія ймовірностей і математична статистика” – ознайомити студентів із основними поняттями і фактами з теорії ймовірностей, що базується на асимптотичному підході Колмогорова, та основними принципами аналізу випадкових явищ ймовірнісними методами математичної статистики.
Література для вивчення	1. Pugachev V.S. Probability theory and mathematical statistics for engineers. Elsevier, 1984

<p>дисципліни</p>	<p>https://www.sciencedirect.com/book/9780080291482/probability-theory-and-mathematical-statistics-for-engineers</p> <p>2. Sahoo P. Probability and mathematical statistics, University of Louisville, Louisville, 2013 http://www.uop.edu.pk/ocontents/Book.pdf</p> <p>3. Meyer M.C. Probability and mathematical statistics: Theory, applications, and practice in R. – SIAM, 24 Juny 2019 https://www.amazon.com/Probability-Mathematical-Statistics-Applications-Practice/dp/1611975778</p> <p>4. Скасків О.Б. Теорія ймовірностей. Львів: Число, 2012.</p> <p>5. Бордуляк М.Т., Скасків О.Б., Сумик О.М., Чижиков І.Е. Теореми і задачі теорії ймовірностей. Львів: Число, 2013.</p> <p>6. Feller W. An introduction to probability theory and its applications, V. 1,2,3rd edición. Wiley , 2008. https://bitcoinwords.github.io/assets/papers/an-introduction-to-probability-theory-and-its-applications.pdf</p> <p>7. Гіхман І.І., Скороход А.В., Ядренко М.І. <i>Теорія ймовірностей і математична статистика</i>. К.: Вища школа, 1988.</p> <p>8. Коваленко І.Н., Гнеденко Б.В. <i>Теорія ймовірностей</i>. К.: Вища школа, 1990.</p> <p>9. Голомозий В.В., Карташов М.В., Ральченко К.В. Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики. Навч. госібн., Київ: ВПЦ "Київський університет", 2015. http://ztimathan.chnu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/02/Збірник-завдань-з-теорії-ймовірностей\underline{\,}\\$1.pdf%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA-%D0%B7%D0%B0%D0%B2%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D1%8C-%D0%B7-%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%97-%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9_1.pdf</p> <p>10. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-ге видання. — Київ: Центр учб. літ., 2010. https://library.kre.dp.ua/Books/2-4%20kurs/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D0%B9%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%96%20%D1%82%D0%B0%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B0%20%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%91%D0%B0%D1%80%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D1%81%D1%8C%D0%BA%D0%B8%D0%B9%20%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F%20%D1%96%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9%20%D1%82%D0%B0%20%D0%9C%D0%A1%202010.pdf</p> <p>11. Єрмоменко В.О. та інш. Комплексні практичні індивідуальні завдання з теорії ймовірностей та математичної статистики для студентів всіх спеціальностей, Тернопіль, ТНЕУ, 2017. http://dSPACE.wunu.edu.ua/handle/316497/37133</p>
<p>Обсяг курсу</p>	<p>4-ий семестр --120 години; аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 год. практичних занять, самостійної роботи: 56 год; 5-ий семестр --120 години; аудиторних занять: 64 год., з них 32 год. лекційних та 32 год. практичних занять, самостійної роботи: 56 год..</p>
<p>Очікувані результати</p>	<p>У результаті вивчення даного курсу студент буде знати:</p>

<p>навчання</p>	<p>поняття елементарної події, алгебри і сигма-алгебри подій, ймовірнісної моделі, ймовірності і умовної ймовірності події, ймовірнісного та умовного ймовірнісного просторів, випадкової величини, випадкового вектора, незалежних: подій, сигма-алгебр, експериментів, випадкових величин, - функції розподілу, характеристичної і твірної функцій випадкових величин, щільності розподілу, моментів випадкових величин, математичного сподівання і дисперсії випадкових величин, умовного математичного сподівання і умовного розподілу, збіжності: за ймовірністю, майже напевно і за розподілом, - згортки розподілів і згортки щільностей, вибірки, генеральної сукупності, варіаційного ряду, статистики, порядкових статистик, квантилів, моди і медіани розподілів, точкової оцінки: незміщеної, змістовної, ефективної, асимптотично ефективної, - гістограми, полігона частот, емпіричної функції розподілу, інтеграла кількості інформації за Фішером, регресії і лінійної регресії випадкових величин,</p> <p>вміти: складати ймовірнісні моделі випадкових явищ, на основі яких знаходити або оцінювати ймовірності випадкових подій і числових характеристик випадкових величин, вміти застосовувати основні факти (теореми) теорії ймовірностей до розв'язання задач, які при цьому виникають, застосовувати методи максимальної правдоподібності, моментів, мінімальної дисперсії (теорему Блекуела-Крамера-Фреше) в задачах параметричного оцінювання.</p> <p>Після успішного завершення курсу студент має набути такі загальні компетентності (ЗК) та спеціальні (фахові) компетентності (СК):</p> <p>ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;</p> <p>ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;</p> <p>ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;</p> <p>ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;</p> <p>ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення;</p> <p>СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;</p> <p>СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;</p> <p>СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;</p> <p>СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;</p> <p>СК-5 Здатність до кількісного мислення;</p> <p>СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів,</p> <p>і здобути такі програмі результати навчання (РН):</p> <p>РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;</p>
------------------------	---

	<p>PH-3 Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;</p> <p>PH-4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;</p> <p>PH-7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики;</p> <p>PH-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;</p> <p>PH-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;</p> <p>PH-17 Знати теоретичні основи і застосовувати основні методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики для дослідження випадкових явищ, перевірки гіпотез, обробки реальних даних та аналізу тривалих випадкових явищ.</p>
Ключові слова	<p>Аксиоматичний підхід Коломогорова, випадкова подія, алгебра подій, ймовірність, функція розподілу, щільність розподілу, характеристична функція, математичне сподівання, дисперсія, дискретна випадкова величина, абсолютно неперервна випадкова величина, нерівність Чебишова-Б'єнейме, закон великих чисел, вибірка, варіаційний ряд, статистика, точкова оцінка, інтервальна оцінка, метод найбільшої правдоподібності, умовний розподіл, метод моментів, гістограма, полігон частот</p>
Формат курсу	<p>Очний, дистанційний. Проведення лекцій, практичних занять і консультацій.</p>
Теми	<p>1. Аксиоматичне визначення ймовірності, ймовірнісний простір. Властивості ймовірності, теорема додавання. Математична модель експерименту із зліченною або скінченною кількістю виходів (класичні ймовірності). Геометричні ймовірності.</p> <p>2. Умовні ймовірності. Теорема множення. Повна група подій, формули: повної ймовірності, Баєса.</p> <p>3. Незалежні події попарно і в сукупності. Приклад Берштейна. Випадкові величини та випадкові вектори. Теореми про події, породжені випадковою величиною чи випадковим вектором та борелевою множиною. Теореми про події, породжені випадковими величинами чи послідовністю випадкових величин. Теорема про суму, добуток та частку випадкових величин. Теорема про випадкові величини, породжені послідовністю випадкових величин. Теорема про випадкову величину, породжену борелевою функцією в R^p та випадковим вектором.</p>

4. Функція розподілу випадкової величини: властивості. Теорема існування випадкової величини з даною функцією розподілу. Теорема Каратеодорі-Лебега про продовження міри.
5. Асоційована з розподілом міра (Лебега-Стілт'єса), інтеграл Лебега-Стілт'єса. Три види розподілів. Теорема Лебега. Дискретні випадкові величини: критерій.
6. Числові характеристики випадкових величин: моменти, математичне сподівання, дисперсія, - та їх властивості. Нерівності Чебишова та Маркова.
7. Схема Бернуллі. Граничні теореми в схемі Бернуллі: Пуассона, локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
8. Розподіли: біноміальний, геометричний – відсутність післядії та єдиність дискретного розподілу з властивістю відсутності післядії.
9. Незалежні випадкові величини. Критерій незалежності. Теореми про незалежні випадкові величини, породжені борелевими функціями від незалежних випадкових величин.
10. Математичне сподівання добутку та дисперсія суми некорельованих випадкових величин. Закон великих чисел (теорема Чебишова) та наслідок для схеми Бернуллі (теорема Бореля).
11. Теорема про мультиплікативність системи незалежних випадкових величин.
12. Математичне сподівання добутку та дисперсія суми незалежних випадкових величин.
13. Розподіл суми випадкових величин: теорема про згортку та наслідки з неї -- згортка щільностей, згортка дискретних розподілів, згортка пуассонових випадкових величин, згортка гамма-розподілів, розподіл Ерланга (теореми додавання).
14. Характеристичні функції, характеристичні властивості, теорема Бохнера.
15. Характеристична функція однозначно визначає функцію розподілу (теорема про обернене перетворення Фур'є-Стілт'єса). Характеристична функція суми незалежних випадкових величин та характеристична функція суперпозиції лінійної функції і випадкової величини. Характеристична функція нормального розподілу і розподілу Коші. Теорема додавання для нормальних розподілів і розподілів Коші. Розподіли χ^2 і розподіл Максвелла.
16. Формула Тейлора для характеристичних функцій. Збіжність за розподілом. Теорема неперервності для характеристичних функцій. Перша і друга теореми Хеллі.
17. Центральна гранична теорема. Наслідок для схеми Бернуллі.
18. Різні види збіжності послідовностей випадкових величин. Критерій збіжності майже напевно. Зв'язок між збіжністю майже напевно та збіжністю за ймовірністю. Лема Бореля-Кантелі.
19. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел (теорема Колмогорова).
20. Посилений закон великих чисел для послідовностей однаково розподілених незалежних випадкових величин зі скінченим математичним сподіванням..
21. Твірні функції: властивості. Згортка цілочисельних випадкових величин та твірна функція згортки.
22. Умовні математичні сподівання випадкових величин відносно сигма-алгебри, випадкової величини, випадкового вектора та його властивості. Регресія випадкових величин, лінійна регресія випадкових величин.

	<p>23. Умовні розподіли: властивості.</p> <p>24. Випадкові процеси. Характеристики процесів: n-вимірна функція розподілу, функції математичного сподівання та дисперсії, автокореляційна функція. Процеси Пуассона та Вінера: твірні і характеристична функції.</p> <p>25. Процес та ланцюг Маркова з дискретним часом: рекурентні формули, рівняння Чепмена, фінальні ймовірності, ергодичні (два означення та їх еквівалентність) і стаціонарні (властивості) розподіли. Теореми: елементарна ергодична та про асимптотичні формули для фінальних ймовірностей (фінальний розподіл – стаціонарний).</p> <p>26. Основні поняття і задачі математичної статистики. Генеральна і вибіркова сукупності. Повторна і безповторна вибірки. Репрезентативна вибірка. Способи відбору. Емпірична функція розподілу.</p> <p>27. Параметричні оцінки: незміщеність, ефективність, змістовність, сильна змістовність. Теоретичне математичне сподівання та дисперсія і вибіркове математичне сподівання та дисперсія, девіація (виправлена вибіркова дисперсія), оцінки та їхні характеристики. Теорема про змістовність незміщеної асимптотично ефективної оцінки. Незміщена та ефективна оцінка математичного сподівання.</p> <p>28. Непараметричні оцінки: оцінки невідомої функції розподілу. Теорема-Гливленка. Оцінки щільності розподілу (гістограма, полігон частот). Розподіл Колмогорова. Теорема Смірнова-Колмогорова.</p> <p>29. Оцінка мінімальної дисперсії (теорема Блекуела-Крамера-Рао-Фреше). Наслідок для випадку вибірки. Інтеграл кількості інформації за Фішером.</p> <p>30. Метод найбільшої правдоподібності отримання точкових оцінок невідомих параметрів. Метод моментів отримання точкових оцінок невідомих параметрів.</p> <p>31. Точкові ефективні оцінки: математичного сподівання і дисперсії при відомому і невідомому математичному сподіванні, для нормального розподілу. Розподіли Фішера і Стьюдента.</p> <p>32. Інтервальні оцінки, довірчі інтервали. Інтервальні оцінки математичного сподівання і дисперсії нормального розподілу.</p> <p>33. Статистична перевірка гіпотез: функції правдоподібності: критерій Неймана-Пірсона. Задачі перевірки статистичної гіпотези та вибору між двома гіпотезами.</p>
<p>Підсумковий контроль, форма</p>	<p>4-ий семестр: Комбінований залік на основі 2-х контрольних робіт, колоквиуму, результатів поточного відвідування і опитування, роз'язання додаткових вправ</p> <p>5-ий семестр: Комбінований іспит (100 балів) на основі 4-х контрольних робіт (4x10 б.), колоквиуму(10 б.) у 5-ому семестрі (50 балів), і результатів здачі іспиту (50 балів)</p>
<p>Пререквізити</p>	<p>Для вивчення даного курсу студентіві потрібні базові знання з курсу математичного аналізу, комбінаторики, комплексного аналізу (теорія лишків), теорії міри</p>
<p>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</p>	<p>Презентації, лекції, індивідуальні завдання.</p>
<p>Необхідне обладнання</p>	<p>Аудиторія обладнана дошкою та засобами написання для аудиторних занять.</p>

	Комп'ютер / смартфон / планшет з інтернет доступом для дистанційних занять.
Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Залік: Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> • написання 2-х контрольних: 25% семестрової оцінки кожна; максимальна сумарна кількість балів 50. • написання та захист колоквиуму: 20% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 20. • відвідування, робота в аудиторії, виконання домашніх завдань 30% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 30 (у пропорції 10:10:10). Підсумкова кількість балів: до 100. <p>Іспит:</p> <ul style="list-style-type: none"> • написання 4-х контрольних: 10% семестрової оцінки кожна; максимальна сумарна кількість балів 40. • написання та захист колоквиуму: 10% семестрової оцінки; максимальна кількість балів 10. • результатів здачі іспиту 50% семестрової оцінки (50 балів) <p>Підсумкова максимальна кількість балів 100.</p> <p>Академічна доброчесність: Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p>Відвідання занять є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p>Література. Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем (у тому числі в цифровому вигляді) виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p>Політика виставлення балів. Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються активність студента під час практичного заняття; недопустимість запізнь на заняття; недопустимість користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; недопустимість списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін.</p> <p>Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.</p>
Питання до заліку чи екзамену.	На іспит виносяться усі теми курсу (див. пункт Теми).
Опитування	Протягом навчання студенти можуть висловити свої зауваження і побажання до курсу.

Схема курсу

А. Теоретична частина (лекції, перший семестр)

Тиждень, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконан ня
Перш ий, 2 год.	Тема 1. Аксиоматичне визначення ймовірності, ймовірнісний простір. Властивості ймовірності, теорема додавання. Математична модель експерименту із зліченною або скінченною кількістю виходів (класичні ймовірності). Геометричні ймовірності.	лекція	див. пункт Література для вивчення дисципліни	(1 год.)	Один тиждень
Другий, 2 год.	Тема 2. Умовні ймовірності. Теорема множення. Повна група подій, формули: повної ймовірності, Баєса. Незалежні події попарно і в сукупності. Приклад Берштейна.	лекція		(2 год.)	Один тиждень
Третій, 2 год.	Тема 3. Випадкові величини та випадкові вектори. Теореми про події, породжені випадковими величинами випадковим вектором та борелевою множиною. Теорема про суму, добуток та частку випадкових величин. Теореми про випадкові величини, породжені послідовністю випадкових величин, про випадкову величину, породжену борелевою функцією в R^p та випадковим вектором.	лекція		(1 год.)	
Четверт ий, 2 год.	Тема 4. Функція розподілу випадкової величини: властивості. Теорема про існуван-	лекція		(2 год.)	

	ня випадкової величини з даною функцією розподілу. Теорема Каратеодорі-Лебега про продовження ймовірнісної міри.				
П'ятий, 2 год.	Тема 5. Асоційована з розподілом міра (Лебега- Стілт'єса), інтеграл Лебега-Стілт'єса. Три види розподілів. Теорема Лебега. Дискретні випадкові величини: критерій. Розподіли зі щільністю. Приклади розподілів: рівномірний, Коші.	лекція		(2 год.)	
Шостий, 2 год.	Тема 6. Числові характеристики випадкових величин: моменти, математичне сподівання, дисперсія, їх властивості. Нерівності Б'єнейме-Чебишова та Маркова.	лекція		(2 год.)	
Сьомий, 2 год.	Тема 7. Схема Бернуллі. Розподіли: біномний, геометричний – відсутність післядії та єдиність дискретного розподілу з такою властивістю. Граничні теореми в схемі Бернуллі: Пуассона, локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Розподіли Пуассона і Гауса (стандартний нормальний).	лекція		(1 год.)	
Восьмий, 2 год.	Тема 8. Незалежні випадкові величини. Критерій незалежності. Теореми про незалежні випадкові величини, породжені борелевими функціями від незалежних випадкових величин.	лекція		(2 год.)	
Дев'ятий, 2 год.	Тема 9. Математичне сподівання добутку та дисперсія суми некорельованих випадкових величин. Закон великих чисел (теорема Чебишова) та наслідок для схеми Бернуллі.	лекція		(1 год.)	
Десятий	Тема 10. Теорема про	лекція		(2 год.)	

й, 2 год.	мультиплікативність системи незалежних випадкових величин. Математичне сподівання добутку та дисперсія суми незалежних випадкових величин.				
Одинадцятий, 2 год.	Тема 11. Розподіл суми випадкових величин: теорема про згортку та наслідки з неї -- згортка щільностей, згортка дискретних розподілів, згортка пуассонових випадкових величин, згортка гамма-розподілів, розподіл Ерланга (теореми додавання).	лекція		(2 год.)	
Дванадцятий, 2 год.	Тема 12. Характеристичні функції. Теореми: про характеристичні властивості та Бохнера.	лекція		(2 год.)	
Тринадцятий, 2 год.	Тема 13. Теорема про обернене перетворення Фур'є-Стілт'еса. Характеристична функція: суми незалежних випадкових величин та композиції лінійної функції і випадкової величини.	лекція		(2 год.)	
Чотирнадцятий, 2 год.	Тема 14. Характеристична функція нормального розподілу і розподілу Коші. Теореми додавання для нормальних розподілів і розподілів Коші. Розподіли: χ^2 і розподіл Максвелла.	лекція		(2 год.)	
П'ятнадцятий, 2 год.	Тема 15. Формула Тейлора для характеристичних функцій. Збіжність за розподілом. Теорема неперервності для характеристичних функцій. Перша і друга теореми Хеллі.	лекція		(2 год.)	
Шістнадцятий, 2 год.	Тема 16. Центральна гранична теорема. Наслідок для схеми Бернуллі.	лекція		(2 год.)	

--	--	--	--	--	--

(Лекції, другий семестр)

Тижде нь, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконан ня
Перш ий, 2 год.	Тема 17. Різні види збіжності послідовностей випадкових величин. Критерій збіжності майже напевно. Зв'язок між збіжністю майже напевно та збіжністю за ймовірністю. Лема Бореля-Кантелі.	лекція	див. пункт Література для вивчення дисципліни	(1 год.)	Один тиждень
Другий, 2 год.	Тема 18. Нерівність Колмогорова. Посилений закон великих чисел (теорема Колмогорова).	лекція		(2 год.)	Один тиждень
Третій, 2 год.	Тема 19. Посилений закон великих чисел для послідовностей однаково розподілених незалежних випадкових величин.	лекція		(1 год.)	
Четверт ий, 2 год.	Тема 20. Твірні функції: властивості. Згортка цілочисельних випадкових величин та твірна функція згортки.	лекція		(2 год.)	
П'ятий, 2 год.	Тема 21. Умовне математичне сподівання випадкової величини відносно: сигма-алгебри, випадкової величини, випадкового вектора, - та його властивості.	лекція		(2 год.)	
Шости й, 2 год.	Тема 22. Регресія випадкових величин, лінійна регресія випадкових величин. Умовні розподіли: властивості.	лекція		(2 год.)	
Сьомий , 2 год.	Тема 23. Випадкові процеси. Характеристики процесів: n-вимірна функція розподілу, функції математичного сподівання та	лекція		(1 год.)	

	дисперсії, автокореляційна функція. Процеси Пуассона та Вінера: твірна і характеристична функції.				
Восьми й, 2 год.	Тема 24. Процес та ланцюг Маркова з дискретним часом: рекурентні формули, рівняння Чепмена, фінальні ймовірності, ергодичні (два означення та їх еквівалентність) і стаціонарні розподіли. Теореми: елементарна ергодична та про асимптотичні формули для фінальних ймовірностей.	лекція		(2 год.)	
Дев'яти й, 2 год.	Тема 25. Основні поняття і задачі математичної статистики. Генеральна і вибіркова сукупності. Повторна і безповторна вибірки. Репрезентативна вибірка. Емпірична функція розподілу. Статистика.	лекція		(1 год.)	
Десяти й, 2 год.	Тема 26. Параметричні оцінки: незміщеність, ефективність та асимптотична ефективність, змістовність сильна змістовність. Теоретичне і вибіркове (емпіричне) математичне сподівання та дисперсія, девіація (виправлена вибіркова дисперсія). Теорема про змістовність незміщеної асимптотично ефективної оцінки. Незміщена та ефективна оцінка невідомого математичного сподівання.	лекція		(2 год.)	
Одинадцятій, 2 год.	Тема 27. Непараметричні оцінки. Оцінки невідомої функції розподілу. Теореми	лекція		(2 год.)	

	про рівномірне наближення неперервної теоретичної функції розподілу емпіричною: Гливенка, Смірнова-Колмогорова. Розподіл Колмогорова. Оцінки щільності розподілу (гістограма, полігон частот).				
Дванадцятий, 2 год.	Тема 28. Оцінка мінімальної дисперсії (теорема Блекуела-Крамера-Рао-Фреше). Наслідки для випадку вибірки. Інтеграл кількості інформації за Фішером.	лекція		(2 год.)	
Тринадцятий, 2 год.	Тема 29. Метод найбільшої правдоподібності отримання точкових оцінок невідомих параметрів. Метод моментів отримання точкових оцінок невідомих параметрів.	лекція		(2 год.)	
Чотирнадцятий, 2 год.	Тема 30. Точкові ефективні оцінки: математичного сподівання і дисперсії при відомому і невідомому математичному сподіванні, для нормального розподілу. Розподіли Фішера і Стьюдента.	лекція		(2 год.)	
П'ятнадцятий, 2 год	Тема 31. Інтервальні оцінки, довірчі інтервали. Інтервальні оцінки математичного сподівання і дисперсії нормального розподілу.	лекція		(2 год.)	
Шістнадцятий, 2 год	Тема 32. Статистична перевірка гіпотез. Функції правдоподібності. Задачі перевірки статистичної гіпотези та вибору між двома гіпотезами (критерій Неймана-Пірсона).	лекція		(2 год.)	

Б. Практичні заняття

Перший семестр

Тижде нь, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконан ня
Перш ий, 2 год.	Тема 1. Елементи комбінаторики.	практичне	Бордуляк М.Т., Скасків О.Б., Сумик О.М., Чижиков І.Е. Теореми і задачі теорії ймовірностей. Львів: Число, 2013. Методичні вказівки до практичних занять: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/04/Method_vkazivky_p_z_TYMS_2023.pdf	(2 год.)	Один тиждень
2-ий, 2 год.	Тема 2. Стохастич- ний експеримент. Ви- падкові події. Простір випадкових подій. Класичне означення ймовірності.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
3-ій, 2 год.	Тема 3. Геометричні ймовірності.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
4-ий, 2 год.	Тема 4. Аксиоматичне визначення ймовірно- сті.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
5-ий, 2 год.	Тема 5. Умовні ймо- вірності. Незалеж- ність подій.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
6-ий, 2 год.	Тема 6. Формула повної ймовірності. Формула Баєса.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
7-ий, 2 год.	Тема 7. Схема Бер- нуллі та поліномна схема.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
8-ий, 2 год.	Тема 8. Функція роз- поділу. Дискретні та неперервні випадкові величини.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
9-ий, 2 год.	Контрольна робота				
10-ий, 2 год.	Тема 9. Інтегрування випадкових величин.	практичне		(3 год.)	Один тиждень
11-ий, 2 год.	Тема 10. Числові ха- рактеристики випад-	практичне		(2 год.)	Один тиждень

	кових величин.				
12-ий, 2 год.	Тема 11. Випадкові вектори.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
13-ий 2 год.	Тема 12. Незалежні випадкові величини.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
14-15-ий, 4 год.	Тема 13. Числові характеристики випадкових векторів.	практичне		(3 год.)	Один тиждень
Шістнадцятий, 2 год	Контрольна робота Аналіз контрольних робіт				

Другий семестр

Тиждень, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності ((заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконання
Перший, 2 год.	Тема 14. Характеристики випадкових векторів	практичне	Бордуляк М.Т., Скасків О.Б., Сумик О.М., Чижиков І.Е. Теореми і задачі теорії ймовірностей. Львів: Число, 2013. Методичні вказівки до практичних занять: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/04/Metod_vkazivky_p_z_TYMS_2023.pdf	(2 год.)	Один тиждень
2-ий, 2 год.	Тема 15. Різні види збіжності випадкових величин.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
3-ій, 2 год.	Тема 16. Нерівність Б'єнейме-Чебишова, закон великих чисел.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
4-ий, 2 год.	Тема 17. Характеристичні функції.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
5-ий, 2 год.	Тема 18. Твірні функції.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
6-ий, 2 год.	Тема 19. Нормальний розподіл.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
7-ий, 2 год.	Тема 20. Умовні математичні сподівання та умовні розподіли.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
8-ий, 2 год.	Контрольна робота				
9-ий,	Тема 20. Регресія.			(2 год.)	Один

2 год.					тиждень
10-ий, 2 год.	Тема 21. Ланцюги Маркова: класифікація станів.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
11-ий, 2 год.	Тема 22. Ланцюги Маркова: фінальні розподіли, ергодичність.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
12-ий, 2 год.	Тема 23. Точкові оцінки. Класифікація оцінок.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
13-ий 2 год.	Тема 24. Методи побудови оцінок: метод моментів, метод максимальної правдоподібності, Ефективні оцінки: нерівність Блекуела-Крамера-Рао-Фреше.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
14-ий, 2 год.	Тема 25. Інтервальні оцінки.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
15-ий, 2 год.	Тема 26. Критерій Неймана-Пірсона.			(2 год.)	Один тиждень
16-ий, 2 год	Контрольна робота Аналіз контрольних робіт	практичне			