

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Львівський національний університет імені Івана Франка

Механіко-математичний факультет

Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу

**Затверджено**

на засіданні кафедри теорії функцій і  
функціонального аналізу  
механіко-математичного факультету  
Львівського національного університету  
імені Івана Франка  
(протокол № 1 від 25 серпня 2022 року)



Завідувач кафедри:

проф. Скасків О.Б.

Силабус з навчальної дисципліни

**“Комплексний аналіз”,**

що викладається в межах ОПП *“Комп’ютерна алгебра, криптологія і теорія ігор”*, *“Комп’ютерний аналіз математичних моделей”*, *“Математика. Математична економіка та економетрика”*

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти для здобувачів

із спеціальності 111 – Математика

**Львів 2022**

<b>Назва дисципліни</b>	<b>Комплексний аналіз</b>
<b>Адреса викладання дисципліни</b>	Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів, вул. Університетська 1
<b>Факультет та кафедра, за якою закріплена дисципліна</b>	Механіко-математичний факультет Кафедра теорії функцій і функціонального аналізу
<b>Галузь знань, шифр та назва спеціальності</b>	Галузь знань: 11 Математика та статистика Спеціальність: 111 Математика Галузь знань: 01 Освіта/педагогіка Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)
<b>Викладачі дисципліни</b>	<b>Скасків Олег Богданович</b> , професор кафедри теорії функцій і функціонального аналізу, <b>Чижиков Ігор Ельбертович</b> , професор кафедри теорії функцій і функціонального аналізу,
<b>Контактна інформація викладачів</b>	<a href="mailto:olskask@gmail.com">olskask@gmail.com</a> , <a href="mailto:oleh.skaskiv@lnu.edu.ua">oleh.skaskiv@lnu.edu.ua</a> <a href="mailto:chyzhykov@yahoo.com">chyzhykov@yahoo.com</a> , <a href="mailto:igor.chyzhykov@lnu.edu.ua">igor.chyzhykov@lnu.edu.ua</a>  Головний корпус ЛНУ ім. І. Франка, каб. 373. м. Львів, вул. Університетська, 1
<b>Консультації з питань навчання по дисципліні відбуваються</b>	Консультації в день проведення лекцій/практичних занять (за попередньою домовленістю) за адресою: м. Львів, вул. Університетська 1, ауд.374. Також можливі онлайн консультації на платформі ZOOM. Для погодження часу консультацій слід писати на електронну пошту викладача.
<b>Сторінка дисципліни</b>	<a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/matematychnyy-analiz-mtm-mto-mta-mtk-2kurs">https://new.mmf.lnu.edu.ua/course/matematychnyy-analiz-mtm-mto-mta-mtk-2kurs</a>
<b>Інформація про дисципліну</b>	Дисципліна “Комплексний аналіз” є основною дисципліною із спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика), яка викладається в 4-му семестрі в обсязі 4-ох кредитів (за Європейською Кредитно-Трансферною Системою ECTS).
<b>Коротка анотація дисципліни</b>	Курс комплексного аналізу заключний з циклу університетських курсів математичного аналізу. Математичний аналіз у дійсній області в основному вивчає неперервно диференційовані функції на інтервалі. Відповідно, комплексний аналіз вивчає функції, які мають неперервну похідну в певній області комплексної площини - так звані аналітичні функції. Цей клас функцій значно вужчий за клас функцій, що мають неперервну похідну на інтервалі, і тому аналітичні функції мають багато добрих і важливих властивостей, яких не мають функції в дійсній області. З іншого боку, клас аналітичних функцій настільки широкий, що має багаточисельні застосування як в інших розділах математики (алгебра, диференціальні рівняння, рівняння з частинними похідними, теорія спеціальних функцій, математичний аналіз, теорія чисел, спектральний аналіз), так і безпосередньо в природничих науках (радіофізика, радіотехніка, радіоелектроніка, теорія потенціалу, теорія конденсаторів, теорія поля, теоретична фізика, квантова механіка, аеродинаміка, гідродинаміка). Опанування курсу комплексного аналізу дає змогу студентам успішно працювати з будь-якою монографією з комплексного аналізу та його застосувань в різноманітних областях математики та природничих дисциплін. Курс комплексного аналізу включає в себе відповідний практикум,

	що дає змогу студентам опанувати основні прийоми та методи теорії аналітичних функцій і набути необхідних навиків для практичного застосування теоретичного матеріалу.
<b>Мета та цілі дисципліни</b>	Мета вивчення основної дисципліни “Комплексний аналіз” – ознайомити студентів із поняттями моногенності та аналітичності, ознайомити із елементарними конформними відображеннями навчити студентів застосовувати засоби теорії інтегралу типу Коші і теорії лишків у інших розділах математики, зокрема в теорії ймовірностей. Оволодіти класичними методами одновимірного комплексного аналізу та його основними застосуваннями в різноманітних задачах математики, механіки та прикладної математики, що сприятиме розвитку аналітичного мислення студентів.
<b>Література для вивчення дисципліни</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В, Скасків О.Б. Комплексний аналіз. Львів, Афіша, 2002; 2008</li> <li>2. Romik D. Complex analysis lecture notes, June 15, 2021 <a href="https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/notes/complex-analysis.pdf">https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/notes/complex-analysis.pdf</a></li> <li>3. Комплексний аналіз. Приклади і задачі: Навчальний посібник. – За редакцією В.Г. Самойленка. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010.</li> <li>4. Скасків О.Б. Методичні вказівки до практичних занять, 2023: <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Metod_vkazivky_p_z_kompleksnyy_a_naliz_2023.pdf">https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Metod_vkazivky_p_z_kompleksnyy_a_naliz_2023.pdf</a></li> <li>5. Shastri A.R. Basic complex analysis of one variable, 2010. <a href="https://www.math.iitb.ac.in/~ars/revbook.pdf">https://www.math.iitb.ac.in/~ars/revbook.pdf</a></li> <li>6. Narasimhan R., Nievergelt Y. Complex Analysis in One Variable Second Edition. – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2020. <a href="https://d-nb.info/960908153/04">https://d-nb.info/960908153/04</a></li> <li>7. Слюсарчук П.В. та інш. Комплексний аналіз: Навч. посібн., Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2022 <a href="https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/47410/1/%d0%ba%d0%be%d0%bc%d0%bf%d0%bb%d0%b5%d0%ba%d1%81%d0%bd%d0%b8%d0%b9%20%d0%b0%d0%bd%d0%b0%d0%bb%d1%96%d0%b7%20%d0%bd%d0%b0%d0%b2%d1%87%d0%b0%d0%bb%d1%8c%d0%bd%d0%b8%d0%b9%20%d0%bf%d0%be%d1%81%d1%96%d0%b1%d0%bd%d0%b8%d0%ba%20%2810%29PDF.pdf">https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/47410/1/%d0%ba%d0%be%d0%bc%d0%bf%d0%bb%d0%b5%d0%ba%d1%81%d0%bd%d0%b8%d0%b9%20%d0%b0%d0%bd%d0%b0%d0%bb%d1%96%d0%b7%20%d0%bd%d0%b0%d0%b2%d1%87%d0%b0%d0%bb%d1%8c%d0%bd%d0%b8%d0%b9%20%d0%bf%d0%be%d1%81%d1%96%d0%b1%d0%bd%d0%b8%d0%ba%20%2810%29PDF.pdf</a></li> </ol>
<b>Обсяг курсу</b>	Загальний обсяг: 120 годин. Аудиторних занять: 64 години, з них 32 години лекцій та 32 години практичних занять. Самостійна робота: 56 годин. Кредитів --- 4.
<b>Очікувані результати навчання</b>	У результаті вивчення даного курсу студент буде <b>знати</b> : інтегральні теореми Коші, інтегральна формула Коші, критерій аналітичності в термінах первісної, теореми Морери та Гурса, зв'язок між гармонійними та аналітичними функціями, теорему Вейерштрасса про ряди аналітичних функцій, теорему Лорана, теорема Тейлора, теорема про канонічне зображення функції в околі її нуля та її наслідки, типи ізольованих особливих точок однозначного характеру, теорему Сохоцького-Казароті, означення та формули для обчислення лишків, основну теорему про лишки, принцип аргументу, теорему Руше, поняття моногенності та аналітичності функції комплексної змінної,

умови Коші-Рімана, геометричний зміст модуля та аргумента похідної, елементарні конформні відображення, однозначні вітки багатозначних функцій (корінь  $n$ -го степеня, логарифм, інші багатозначні функції).

**вміти:**

знаходити точки моногенності та аналітичності функцій, знаходити образи множин при конформних відображеннях, знаходити конформне відображення, що відображає одну множину на іншу, знаходити інтеграли від функції комплексної змінної, розвивати аналітичні у крузі функції в узагальнений степеневий ряд, знаходити множину збіжності узагальнених степеневих рядів, застосовувати теорію лишків до обчислення інтегралів.

Курс забезпечує набуття таких компетентностей та програмних результатів навчання:

Після успішного завершення курсу студент має набути такі **загальні компетентності (ЗК)** та **спеціальні (фахові) компетентності (СК)**:

ЗК-1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

ЗК-2 Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

ЗК-3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності;

ЗК-7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями;

ЗК-9 Здатність приймати обґрунтовані рішення;

СК-1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання;

СК-2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі;

СК-3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок;

СК-4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих;

СК-8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів,

і здобути такі **програмні результати навчання (РН)**:

РН-1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці;

РН-3 Знати принципи *modus ponens* (правило виведення логічних висловлювань) та *modus tollens* (доведення від супротивного) і

	<p>використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень;</p> <p>РН-4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми;</p> <p>РН-7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефхівців у галузі математики;</p> <p>РН-10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями;</p> <p>РН-11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей;</p> <p>РН-18 Знати теоретичні основи і застосовувати методи теорії функцій комплексної змінної.</p>
<b>Ключові слова</b>	<p>Комплексні числа, сфера Рімана, моногенність, аналітичність, умови Коші-Рімана, конформні відображення, однозначні вітки багатозначних функцій, приріст багатозначної функції, інтегральні теореми Коші, інтегральна формула Коші, гармонійна функція, теорема Лорана, голоморфна функція, ізольовані особливі точки однозначного характеру, лишки.</p>
<b>Формат курсу</b>	<p>Очний, дистанційний. Проведення лекцій, практичних робіт і консультацій.</p>
<b>Теми</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Комплексні числа, послідовності та ряди комплексних чисел. Функції, криві, області. Нескінченно віддалена точка і сфера Рімана.</li> <li>2. Поняття моногенності та аналітичності функції. Умови Коші-Рімана.</li> <li>3. Геометричний зміст модуля та аргумента похідної. Конформні відображення.</li> <li>4. Елементарні аналітичні функції: ціла лінійна, степенева, функція Жуковського, показникова функція, тригонометричні та гіперболічні функції.</li> <li>5. Дробово-лінійна функція.</li> <li>6. Однозначні вітки багатозначних функцій, приріст багатозначної функції. Корінь <math>n</math>-го степеня, логарифм.</li> <li>7. Визначений інтеграл та його властивості.</li> <li>8. Інтегральні теореми Коші. Інтеграл типу Коші. Інтегральна формула Коші.</li> <li>9. Теореми про усунення відрізка, Морери та Гурса.</li> <li>10. Зв'язок між гармонійними та аналітичними функціями.</li> <li>11. Функціональні ряди. Рівноміра збіжність. Теорема Вейерштрасса про ряди аналітичних функцій.</li> <li>12. Степеневі ряди. Узагальнені степеневі ряди. Теорема Лорана. Теорема Тейлора. Голоморфні функції.</li> </ol>

	<p>13. Нулі аналітичних функцій. Теорема про нуль нескінченного порядку. Теорема про канонічне зображення функції в околі її нуля та її наслідки.</p> <p>14. Ізольовані особливі точки однозначного характеру: усувна особлива точка, полюс, істотно особлива точка. Теорема Сохоцького-Казораті.</p> <p>15. Означення та формули для обчислення лишків. Основна теорема про лишки.</p> <p>16. Застосування теорії лишків до обчислення інтегралів. Принцип аргументу. Теорема Руше.</p>
<b>Підсумковий контроль, форма</b>	Іспит у кінці семестру.
<b>Пререквізити</b>	Для вивчення даного курсу студенти потрібні базові знання з курсу математичного аналізу
<b>Навчальні методи та техніки, які будуть використовуватися під час викладання курсу</b>	Презентації, лекції. Індивідуальні завдання. Практичні заняття з розв'язування задач.
<b>Необхідне обладнання</b>	Аудиторія обладнана дошкою та засобами написання для аудиторних занять. Комп'ютер/ планшет/ смартфон із загально вживаним програмним забезпеченням, доступ до Internet мережі, Zoom.
<b>Критерії оцінювання (окремо для кожного виду навчальної діяльності)</b>	<p>Оцінювання проводиться за 100-бальною шкалою. Бали нараховуються за наступним співвідношенням:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• написання двох контрольних робіт – 32 бали;</li> <li>• здача колоквіуму – 18 балів;</li> <li>• виконання екзаменаційного завдання і співбесіда – 50 балів;</li> </ul> <p>Підсумкова максимальна кількість балів – 100.</p> <p><b>Письмові роботи:</b> Очікується, що студенти виконають письмові роботи: дві контрольні роботи і екзаменаційне завдання.</p> <p><b>Академічна доброчесність:</b> Очікується, що роботи студентів будуть їх оригінальними дослідженнями чи міркуваннями. Відсутність посилань на використані джерела, фабрикування джерел, списування, втручання в роботу інших студентів становлять, але не обмежують, приклади можливої академічної недоброчесності. Виявлення ознак академічної недоброчесності в письмовій роботі студента є підставою для її незарахування викладачем, незалежно від масштабів плагіату чи обману.</p> <p><b>Відвідання занять</b> є важливою складовою навчання. Очікується, що всі студенти відвідають усі лекції та практичні заняття курсу. Студенти повинні інформувати викладача про неможливість відвідати заняття. У будь-якому випадку студенти зобов'язані дотримуватися термінів визначених для виконання всіх видів письмових робіт та індивідуальних завдань, передбачених курсом.</p> <p><b>Література.</b> Уся література, яку студенти не зможуть знайти самостійно, буде надана викладачем виключно в освітніх цілях без права її передачі третім особам. Студенти заохочуються до використання також й іншої літератури та джерел, яких немає серед рекомендованих.</p> <p><b>Політика виставлення балів.</b> Враховуються бали набрані при поточному тестуванні, самостійній роботі та бали підсумкового тестування. При цьому обов'язково враховуються присутність на заняттях та активність студента під час практичного заняття;</p>

	недопустимість пропусків та запізнь на заняття; користування мобільним телефоном, планшетом чи іншими мобільними пристроями під час заняття в цілях не пов'язаних з навчанням; списування та плагіат; несвоєчасне виконання поставленого завдання і т. ін. Жодні форми порушення академічної доброчесності не толеруються.
<b>Питання до екзамену.</b>	На екзамені виносяться усі теми курсу (див. пункт Теми). Питання до екзаменів включають: <ul style="list-style-type: none"> <li>• формулювання означень основних понять курсу та подання прикладів, які ілюструють ці поняття;</li> <li>• формулювання теорем, викладених в цьому курсі;</li> <li>• знання і розуміння доведень тверджень, поданих в цьому курсі;</li> <li>• знання методів розв'язування задач;</li> <li>• вміння застосувати теоретичні знання до розв'язування практичних задач з тем, які викладені в курсі.</li> </ul>
<b>Опитування</b>	Анкету-оцінку з метою оцінювання якості курсу буде надано по завершенню курсу.

## Схема курсу

### А. Теоретична частина (лекції)

Тиждень, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності ((заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконання
Перший, 2 год.	<b>Тема 1.</b> Комплексні числа, послідовності та ряди комплексних чисел. Функції, криві, області. Нескінченно віддалена точка і сфера Рімана.	лекція	див. пункт Література для вивчення дисципліни.	(1 год.)	Один тиждень
Другий, 2 год.	<b>Тема 2.</b> Поняття монотонності та аналітичності функції. Умови Коші-Рімана.	лекція		(2 год.)	Один тиждень
Третій, 2 год.	<b>Тема 3.</b> Геометричний зміст модуля та аргумента похідної. Конформні відображення.	лекція		(1 год.)	
Четвертий, 2 год.	<b>Тема 4.</b> Елементарні аналітичні функції: ціла лінійна, степенева, функція Жуковського, показникова функція, тригонометричні та гіперболічні функції.	лекція		(2 год.)	

П'ятий, 2 год.	<b>Тема 5.</b> Дробово-лінійна функція.	лекція		(2 год.)	
Шостий, 2 год.	<b>Тема 6.</b> Однозначні вітки багатозначних функцій, приріст багатозначної функції. Корінь $n$ -го степеня, логарифм.	лекція		(2 год.)	
Сьомий, 2 год.	<b>Тема 7.</b> Визначений інтеграл та його властивості.	лекція		(1 год.)	
Восьмий, 2 год.	<b>Тема 8.</b> Інтегральні теореми Коші. Інтеграл типу Коші. Інтегральна формула Коші.	лекція		(2 год.)	
Дев'ятий, 2 год.	<b>Тема 9.</b> Теореми про усунення відрізка, Морери та Гурса.	лекція		(1 год.)	
Десятий, 2 год.	<b>Тема 10.</b> Зв'язок між гармонійними та аналітичними функціями.	лекція		(2 год.)	
Одинадцятий, 2 год.	<b>Тема 11.</b> Функціональні ряди. Рівномірна збіжність. Теорема Вейерштрасса про ряди аналітичних функцій.	лекція		(2 год.)	
Дванадцятий, 2 год.	<b>Тема 12.</b> Степеневі ряди. Узагальнені степеневі ряди. Теорема Лорана. Теорема Тейлора. Голоморфні функції.	лекція		(2 год.)	
Тринадцятий, 2 год.	<b>Тема 13.</b> Нулі аналітичних функцій. Теорема про нуль нескінченного порядку. Теорема про канонічне зображення функції в околі її нуля та її наслідки.	лекція		(2 год.)	
Чотирнадцятий, 2 год.	<b>Тема 14.</b> Ізольовані особливі точки однозначного характеру: усувна особлива точка, полюс, істотно особлива точка. Теорема Сохоцького-Казораті.	лекція		(2 год.)	
П'ятнадцятий, 2 год.	<b>Тема 15.</b> Означення та формули для обчислення лишків. Основна теорема про	лекція		(2 год.)	



	лишки.				
Шістнадцятий, 2 год	<b>Тема 16.</b> Застосування теорії лишків до обчислення інтегралів. Принцип аргументу. Теорема Руше.	лекція		(2 год.)	

### ***Б. Практичні заняття***

Тиждень, год.	Тема, план, короткі тези	Форма діяльності (заняття)* *лекція, самостійна, дискусія, групова робота)	Література (Ресурси в інтернеті)	Завдання, год.	Термін виконання
Перший, 2 год.	<b>Тема 1.</b> Комплексні числа, області, криві, стереографічна проекція.	практичне	Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В, Скасків О.Б. Комплексний аналіз. Львів, Афіша, 2002; 2008 Методичні вказівки до практичних занять: <a href="https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Method_vkazivky_p_z_kompleksnyy_analiz_2023.pdf">https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/03/Method_vkazivky_p_z_kompleksnyy_analiz_2023.pdf</a>	(2 год.)	Один тиждень
2-ий, 2 год.	<b>Тема 2.</b> Комплексні послідовності і ряди	практичне		(2 год.)	Один тиждень
3-ій, 2 год.	<b>Тема 3.</b> Функції комплексної змінної, границі, неперерв- ність. Моногенність та аналітичність, умови Коші-Рімана	практичне		(2 год.)	Один тиждень
4-ий, 2 год.	<b>Тема 4.</b> Геометрич- ний зміст модуля і аргумента похідної.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
5-ий, 2 год.	<b>Тема 5.</b> Ціла лінійна функція, функція Жуковського	практичне		(2 год.)	Один тиждень
6-ий, 2 год.	<b>Тема 6.</b> Показникова функція, тригонометричні та гіперболічні функції	практичне		(2 год.)	Один тиждень
7-ий, 2 год.	<b>Тема 7.</b> Дробово- лінійна функція	практичне		(2 год.)	Один тиждень

8-ий, 2 год.	<b>Тема 8.</b> Корінь $n$ -го степеня, логарифм	практичне		(2 год.)	Один тиждень
9-ий, 2 год.	<b>Контрольна робота</b>				
10-ий, 2 год.	<b>Тема 9.</b> Інтегрування функцій дійсної змінної. Визначений (криволінійний) інтеграл, теорема і формула Коші.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
11-ий, 2 год.	<b>Тема 10.</b> Рівномірно збіжні ряди. Степеневі ряди і ряди Лорана.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
12-ий, 2 год.	<b>Тема 11.</b> Нулі аналітичних функцій та ізольовані особливі точки.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
13-ий 2 год.	<b>Тема 12.</b> Обчислення лишків. Основна теорема про лишки.	практичне		(2 год.)	Один тиждень
14-15-ий, 4 год.	<b>Тема 13.</b> Застосування лишків до обчислення інтегралів	практичне		(2 год.)	Один тиждень
Шістнадцятий, 2 год.	<b>Контрольна робота</b> <b>Аналіз контрольних робіт</b>	практичне			