

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Т. М. Заблоцький

**МОДЕЛЮВАННЯ В УПРАВЛІННІ
ПОРТФЕЛЕМ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ**

Монографія

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2016

УДК 330.4 : 330.131.7 : 519.814
 ББК 65.050.9(4Укр)030.1+65в641
 3 12

Рецензенти:

д-р екон. наук, проф. *В. В. Вітлінський*,
 (Київський національний економічний університет
 імені Вадима Гетьмана);

д-р екон. наук, проф. *В. І. Слейко*,
 (Львівський торговельно-економічний університет);

д-р екон. наук, проф. *Б. Ю. Кишакевич*,
 (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка).

*Рекомендовано до друку Вченою радою
 Львівського національного університету імені Івана Франка
 (протокол № 25/9 від 28.09.2016)*

Заблоцький Т. М.

3 12 Моделювання в управлінні портфелем фінансових активів :
 монографія / Т. М. Заблоцький. – Львів : ЛНУ імені Івана
 Франка, 2016. – 408 с.

ISBN 978–617–10–0326–2.

Досліджено проблеми управління портфелем фінансових активів в умовах новітньої теорії портфеля. Проаналізовано імовірнісні властивості оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем *VaR* та на їх основі запропоновано методи управління портфелем фінансових активів з найменшим рівнем *VaR*. Розроблено методи контролю за характеристиками портфеля на основі контрольних карт. Отримані результати поширено на випадок використання *CVaR* як міри ризику. Досліджено питання сумісності методів Марковіца та мінімізації *VaR* портфеля вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. Визначено рівень довіри для *VaR*, при якому очікувана дохідність портфеля, отриманого з задачі безумовної мінімізації ризику портфеля, буде дорівнювати наперед заданому рівню очікуваної дохідності. Проведено імовірнісний аналіз оцінки отриманого рівня довіри з метою спрощення управління портфелем на практиці та відображення зв'язку дохідність-ризик. Розглянуто вплив коефіцієнта, що описує ставлення до ризику на коректність вибіркової оцінки ваг і характеристик портфеля. Досліджено імовірнісні властивості вибіркової оцінки коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику.

УДК 330.4 : 330.131.7 : 519.814
 ББК 65.050.9(4Укр)030.1+65в641

© Львівський національний університет
 імені Івана Франка, 2016

І
 ISBN 978–617–10–0326–2 © Заблоцький Т. М., 2016

ВСТУП

В умовах бурхливого розвитку фінансових ринків все частішими стали кризові явища у цій сфері діяльності. Остання світова фінансова криза стала однією з наймасштабніших у сучасній історії людства. Її негативні наслідки дотепер відчуються у світовій економіці. Тому головними у фінансовій діяльності стали проблеми зменшення фінансових ризиків. З теорії та практики фінансової науки відомо, що одним із найвідоміших методів зниження фінансових ризиків є диверсифікація, яка вже стала класичним методом зниження загального ризику.

Диверсифікація є головним інструментом для розподілу ризиків та, як наслідок, зниження загального рівня ризику. Одним із найвідоміших методів застосування диверсифікації у фінансовій діяльності є використання портфелів, наприклад, кредитний портфель, інвестиційний портфель та ін. Основного ефекту диверсифікації досягають додаванням у портфель різних активів так, щоб зниження ціни одних активів компенсувалося ростом ціни інших, причому цей процес не завжди призводить до зниження доходу. Популярність диверсифікації насамперед пов'язана з необхідністю мінімізації фінансових ризиків. Відомо не лише з теорії, але й з практики діяльності фінансових установ, що ризик портфеля складеного з двох та більше активів є не більшим, ніж сумарний ризик елементів, з яких складено портфель. Тобто, активи, що входять у портфель, компенсують ризик один одного.

Теорія портфелів бере свій початок з роботи Марковіца, в якій автор вперше проаналізував алгоритм раціонального вибору структури портфеля на основі припущення, що дохідності фінансових активів поводяться як випадкові величини. За основні характеристики портфеля було вибрано очікувану дохідність (математичне сподівання дохідності) та дисперсію (як міру ризику). Очевидно, найкращим за таких характеристик буде портфель з максимальною очікуваною дохідністю та мінімальною дисперсією. Отже, для побудови портфеля необхідно розглянути двокритеріальну оптимізаційну задачу, яка на практиці не завжди може бути розв'язана. З огляду на це, за критерії оптимізації Марковіц вибрав максимізацію очікуваного прибутку портфеля

при обмеженому ризику та мінімізацію ризику при обмеженій дохідності. Якщо поняття очікуваного прибутку портфеля не викликає запитань та з того часу не змінилося, то проблема оцінки ризику не має єдиного розв'язку. Це пов'язане з тим, що міра ризику не може бути визначена однозначно. Як правило, за означення ризику використовують або імовірність певних втрат, або втрати з певною імовірністю. В теорії портфеля Марковіца за міру ризику взято дисперсію. Ця теорія набула великої популярності у другій половині минулого століття та навіть була відзначена Нобелівською премією з економіки у 1990 році. Парадигма, описана в роботі Марковіца, отримала назву класична теорія портфеля.

Завдяки своїй простоті та універсальності класична теорія портфеля є доволі популярною на сьогодні. Такі поняття цієї теорії як очікувана корисність портфеля чи відношення Шарпа портфеля є надзвичайно важливими не лише для теоретиків фінансового ринку, але й для практиків.

У банківській діяльності розвинених країн світу велику увагу приділяють відповідності банківських операцій певним нормативним документам, таким як, наприклад, *Basel II*, *RiskMetrics*, *CAD II*. Насамперед це пов'язано з вибором міри для опису фінансових ризиків у банківській діяльності. В усіх вищезгаданих рекомендаційних банківських програмах для опису фінансових ризиків пропонується міра *Value-at-Risk* (надалі *VaR*). Зважаючи на це, актуальним є завдання побудови і дослідження властивостей портфелів фінансових активів на основі ризику обчисленого з допомогою *VaR*.

Загалом класична теорія портфеля суттєво відрізняється від банківської практики, тому актуальним є дослідження використання сучасних інструментів при побудові та дослідженні характеристик портфеля фінансових активів.

Одним із головних завдань, що повинно бути вирішеним перед формуванням портфеля фінансових активів є питання вибору міри ризику, що є актуальним як для практиків фінансового ринку та банківської сфери, так і для науковців-теоретиків. До мір, що найчастіше використовуються на практиці, можна віднести дисперсію, *Value-at-Risk (VaR)* та умовне *Value-at-Risk (CVaR)*. Ці міри ризику зазвичай застосовують у банках, фінансових установах, страхових

компаніях, приватними інвесторами тощо. Проте поведінка та інформативність цих мір є неоднакова. Дисперсія є найкраще вивченою та найменш інформативною мірою, а *VaR* є простою в обчисленні та надає більше інформації про ризик, ніж дисперсія, проте не є субадитивною. *CVaR* надає набагато кращу інформацію про ризик, ніж дві інші згадані міри, задовольняє аксіому субадитивності, але є важкою в обчисленні. На практиці вибір міри ризику регламентується певними документами у випадку фінансових установ, та певними особистими переконаннями у випадку приватних інвесторів.

Оскільки у своїй діяльності фінансові установи та приватні інвестори покладаються на оцінки характеристик портфеля, які є випадковими величинами, то найкращим інструментом для опису їх властивостей є їх розподіл. Тому при проведенні дослідження основним інструментом обґрунтування тих чи інших властивостей є розподіл характеристик портфеля. Розподіл характеристик портфеля фінансових активів залежить від вибору оцінок невідомих параметрів. У дослідженні використовують вибіркові (історичні) оцінки, що ґрунтуються на статистичних даних, тому такий підхід до аналізу портфеля фінансових активів називається статистичним аналізом.

Основними характеристиками портфеля, що цікавлять інвестора, є його очікувана дохідність та ризик. Крім того, важливою є структура портфеля, тобто частка коштів вкладена у кожен з активів. Ми дослідимо імовірнісні властивості цих характеристик за різних припущень щодо поведінки дохідності активів, з яких формується портфель. Також ми розглянемо проблему сумісності класичної та новітньої теорій портфеля. Знайдемо місце класичних портфелів у новітній теорії та, як наслідок, дамо рекомендації як отримати класичні портфелі, використовуючи новітні підходи до вибору раціональної структури портфеля.

Розв'язанню питань статистичного аналізу властивостей характеристик портфелів фінансових активів та сумісності класичної й новітньої теорій портфеля передували роботи українських та закордонних учених, а саме, Г. Марковіца, Ю. Фами, Д. Джобсона, Б. Коркі, Ф. Джоріона, Р. Енгла, Т. Болерслева, Г. Пфлюга, С. Урясева, Т. Рокафелара, Г. Александра, А. Баптісти, У. Шарпа, П. Ембрехта, К. Асербі, А. МакНейла, Д. Таше, В. Шміда, Я. Охріна, В. В. Вітлінського, А. Б. Камінського, Т. Д. Боднара та ін.

РОЗДІЛ 1

ДИВЕРСИФІКАЦІЯ У ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ. КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПОРТФЕЛЯ

1.1. Диверсифікація у фінансово-економічній діяльності

Важливим завданням у економічній діяльності є проблеми зменшення фінансових ризиків. З теорії та практики економічної науки відомо, що одним із найвідоміших методів зниження фінансових ризиків є диверсифікація, яка вже стала класичним методом зниження загального ризику. Проте в результаті світової фінансової кризи цей напрям отримав нові напрями розвитку.

Диверсифікація використовується у всіх сферах економічної діяльності людини. Важливість використання диверсифікації у різних секторах економіки розглядається багатьма вченими. Зокрема, важливість диверсифікації у агропромисловому секторі, який на даний момент є чи не найважливішим сектором економіки України, описана у [8], [9], [31], [36]-[38]. Необхідність диверсифікації при формуванні місцевих бюджетів досліджене у [11]. Питання використання диверсифікації при роботі сервісних центрів досліджено у [35], а використання портфельів з найменшим рівнем ризику для організації та планування роботи банківської установи розглянуто в [22]. Більш загально питання використання диверсифікації у економічній діяльності висвітлено у [7], [33], [39].

Через свою популярність та поширеність, на сьогодні існує багато визначень диверсифікації як процесу [34]. Нас цікавитиме одне з найширших означень наведене у [40]: диверсифікація – розподіл капіталів, що інвестуються між різними об'єктами вкла-

день з метою зниження ризику можливих втрат капіталу або доходів від нього.

На практиці диверсифікація часто реалізується шляхом побудови портфеля фінансових активів. З теорії відомо, що довільний розподіл коштів між активами, в чому і полягає побудова портфеля, призводить до зниження загального рівня ризику. З іншого боку, побудова портфеля повинна опиратися на певні критерії з метою досягнення мінімального рівня ризику при максимально можливому рівні доходу.

1.2. Основні складові класичної теорії портфеля

Головними елементами фінансового ринку, з якими здійснюються операції купівлі та продажу, є фінансові активи. Основною характеристикою, в якій зацікавлений інвестор, є ринкова ціна фінансового активу (теперішня чи майбутня). Приймаючи рішення про купівлю того чи іншого активу, інвестор, насамперед, на основі певних економічних показників, повинен бути впевнений, що через певний проміжок часу ринкова ціна буде більшою, ніж є тепер. Також важливим є те, що здебільшого сам власник активу не може впливати на поведінку ціни. Ціна формується під впливом незалежних від власника чинників. Тому необхідно мати певний математичний апарат для формування певних уявлень про майбутню поведінку ринкової ціни фінансового активу.

Позначимо P_t – ринкова ціна фінансового активу в момент часу t . Виникає запитання: як інвестор може отримати уявлення про майбутні значення ціни активу P_{t+1} . Поведінці ціни притаманні періоди зростання та спаду. Тобто, на основі історичних даних та графічного їх зображення можна отримати певні уявлення про ціну. Проте такий аналіз є, очевидно, найменш ефективним і більше опирається на певні інтуїтивні переконання.

Для проведення детальнішого аналізу введемо таке означення.

Означення 1.1 Процес X_t називається (слабко) стаціонарним, якщо

$$M(X_t) = \mu, \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_h,$$

тобто математичне сподівання та коваріація процесу не залежать від часу, а коваріація залежить лише від зміщення h .

Однією з властивостей стаціонарних процесів є те, що дисперсія їх теж не залежить від часу

$$D(X_t) = \text{Cov}(X_t, X_t) = \gamma_0 = \sigma^2.$$

Ціновий процес не є стаціонарним. Цьому процесу притаманні періоди часу, коли математичні сподівання суттєво відрізняються. Крім того, процес P_t в певні періоди часу має виражений тренд, причому в різні моменти часу тренд має різні напрямки. З огляду на те, що ціна є обмежена знизу 0 та необмежена зверху, можемо зробити висновок, що моделювання ціни фінансового активу є доволі важкою задачею. Для моделювання цін фінансових активів у фінансовій математиці використовують стохастичні процеси. Нашим завданням є розглянути дискретні моделі. Зауважимо, що інвестора насправді не цікавить ціна фінансового активу як абсолютний показник. Більш вагомою характеристикою для інвестора є зміна, а точніше, відносна зміна ціни за період часу $(t, t+1)$.

Означення 1.2. Нехай P_t ринкова ціна фінансового активу в момент часу t . Тоді неперервна дохідність в момент часу t :

$$X_t = 100 \ln(P_t / P_{t-1}). \quad (1.1)$$

Множник 100 в означенні X_t ми вживаємо для відображення цієї величини у відсотках. Розглянемо основні властивості неперервної дохідності фінансового активу.

На відміну від ціни, неперервній дохідності активу притаманні такі властивості як:

1. Відсутність тренду. Неперервна дохідність не має тренду, а її значення є зосередженні навколо 0.

2. Симетричність. Неперервна дохідність має поведінку близьку до симетричної відносно 0. Ми можемо використовувати припущення, що X_t є симетричним відносно 0 процесом. Таке припущення трапляється у багатьох працях з аналізу фінансових показників.

3. Обмеженість знизу. Неперервна дохідність є необмежена. При сталому значенні ціни P_{t-1} , маємо:

$$\lim_{P_t \rightarrow 0} X_t = 100 \lim_{P_t \rightarrow 0} (\ln(P_t / P_{t-1})) = -\infty,$$

$$\lim_{P_t \rightarrow +\infty} X_t = 100 \lim_{P_t \rightarrow +\infty} (\ln(P_t / P_{t-1})) = +\infty.$$

Отже, на відміну від фінансового активу, при моделюванні неперервної дохідності ми можемо використовувати процеси з необмеженою областю значень без додаткових припущень.

4. Неперервна дохідність за багато періодів. Неперервна дохідність за багато періодів дорівнює сумі неперервних дохідностей за один період. Тобто, якщо просумувати неперервну дохідність за один період по періодах ми отримаємо неперервну дохідність за багато періодів. Зауважимо, що ця властивість відіграє важливе значення в економічному аналізі. Зокрема, знаючи неперервні дохідності певного фінансового активу за один день, можна просто обчислити дохідності за тиждень, місяць, квартал, рік.

5. Стаціонарність. Загалом, неперервна дохідність не є стаціонарним процесом. Однак під час моделювання часто припускають, що процеси, які описують неперервну дохідність фінансового активу, є стаціонарними.

Беручи до уваги властивості неперервної дохідності, її переваги і недоліки, можемо зробити такі висновки. Властивості неперервної дохідності є кращими зі статистичної та математичної точки зору, ніж властивості ціни. Тому частіше у фінансовій математиці замість цінового процесу розглядають неперервні дохідності. Надалі ми вживаємо термін «дохідність», розуміючи під ним «неперервна дохідність».

■ *Зауваження 1.1.* В означенні дохідності (1.1) не враховано прибуток, що приніс фінансовий актив за проміжок часу $(t, t+1) - D_t$. Якщо виникає необхідність врахувати ці виплати, то (1.1) набуде вигляду:

$$X_t = 100 \ln((P_t + D_t)/P_{t-1}).$$

Надалі ми припускаємо, що для всіх t , $D_t = 0$.

Нехай на ринку існує k видів фінансових активів. Позначимо дохідність i -го фінансового активу X_i . Зауважимо, що у випадку, коли характеристики дохідності i -го фінансового активу залежать від часу, цей факт ми будемо позначати X_{it} . Будемо вважати, що дохідності фінансових активів є випадковими величинами. Нагадаємо, що основними характеристиками випадкової величини є математичне сподівання та дисперсія. Навіть якщо ми для оцінки ризиків використовуємо іншу міру ризику, замість дисперсії, ця величина все одно відіграє важливу роль. Позначимо математичне сподівання дохідності i -го фінансового активу $M(X_i) = \mu_i$, дисперсію $D(X_i) = \sigma_i^2$. Якщо нам необхідно звернути увагу на те, що характеристики залежать від часу, то будемо писати μ_{it} та σ_{it}^2 . Оскільки в портфелі є багато фінансових активів, необхідно ввести міру залежності дохідності одного фінансового активу від дохідності іншого. Зазвичай за таку міру залежності використовують коваріацію. Ми позначаємо коваріацію між дохідностями i -го та j -го фінансових активів через $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$, якщо вона не залежить від часу, та через σ_{ijt} – інакше. Зрозуміло, що $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Нагадаємо, що показує коваріація. Якщо випадкові величини незалежні, то коваріація дорівнює 0. Зауважимо, що навпаки це твердження невірне. Проте, якщо випадкові величини є нормально розподілені, то два ці твердження є еквівалентні. Якщо коваріація додатна, то відхилення однієї випадкової величини в більшу сторону, викликає відхилення другої також скоріше в більшу сторону. У випадку коли коваріація від'ємна, то відхилення однієї випадкової величини в більшу сторону, викликає відхилення другої скоріше в меншу сторону. Нехай ми вкладаємо в покупку фінансових активів одну грошову одиницю. Позначимо w_i кошти спрямовані на купівлі i -го фінансового активу. Тоді портфелем назвемо вектор $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)'$. Загалом портфель це вектор часток капіталу по відношенню до загальної суми вкладених у відповідний фінансовий актив. Як би ми не означали портфель, очевидно має виконуватися умова:

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (1.2)$$

Позначивши $\mathbf{1}$ – k -вимірний вектор, елементами якого є одиниці, (1.2) можна переписати у вигляді:

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1. \quad (1.3)$$

Дуже часто при побудові портфеля робиться припущення, що ваги портфеля $w_i > 0$. Проте ця умова не є необхідною. Крім того, оскільки нас цікавить статистичний аналіз характеристик портфеля фінансових активів, нам необхідно отримати аналітичні вирази для цих характеристик, а це неможливо за накладання умови невід'ємності ваг портфеля. Тому, ймовірно, є випадки, коли для деякого i $w_i < 0$ та $w_i > 1$. Зокрема, при випуску цінних паперів та їх продажу, інвестор очевидно отримає від'ємні відповідні ваги у своєму портфелі.

Зрозуміло, що портфель ми можемо розглядати як один фінансовий актив, який характеризується своєю дохідністю. Позначимо вектор дохідностей фінансових активів доступних на ринку в момент часу t $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})'$, тоді, припустивши, що поведінка вектора дохідностей \mathbf{X}_t є стаціонарною, отримаємо:

$$M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)',$$

$$D(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1k} & \sigma_{2k} & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}.$$

Дохідність портфеля визначаємо як зважену суму дохідностей його компонент (ваг):

$$X_w(t) = \sum_{i=1}^k w_i X_{it}.$$

Оскільки ми припустили, що $X_w(t)$ є випадковою величиною, яка характеризується математичним сподіванням (очікуваною дохідністю) та дисперсією. Враховуючи, що поведінка вектора дохідностей \mathbf{X}_t є стаціонарною, ми обчислюємо з:

$$R_w = M(X_w(t)) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^k w_i \mu_i,$$

$$V_w = D(X_w(t)) = \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sigma_{ij} w_i w_j.$$

Отже, вивчення властивостей портфеля фінансових активів може бути зведене до вивчення випадкової величини з параметрами R_w та V_w . Оскільки поведінка випадкової величини наперед не є відомою, інвестор на фінансовому ринку оперує лише її характеристиками. Виникає запитання, яке співвідношення між характеристиками має бути, щоб цей портфель зацікавив інвестора.

Перед формуванням портфеля, тобто перед розподілом коштів між активами, необхідно вибрати певний критерій, який, з одного боку, відображатиме очікування від портфеля, а з іншого – задасть метод побудови портфеля. Тому класичним завданням при формуванні портфеля є досягнення якомога більшої очікуваної доходності за якомога меншого ризику. Формально, прийнявши за ризик портфеля його дисперсію (за Марковіцем), оптимізаційну задачу можемо записати у вигляді:

$$\begin{cases} R_w \rightarrow \max \\ V_w \rightarrow \min \end{cases} \text{ за умови } \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1. \quad (1.4)$$

Умова $\mathbf{w}' \mathbf{1} = 1$ вказує на те, що всі кошти повинні бути розподілені між активами. Зауважимо, що сформована таким чином задача не має розв'язку в загальному випадку. Спочатку необхідно звести її до задачі одновимірної оптимізації.

1.3. Принципи підходу Марковіца до вибору раціональної структури портфеля

Г. Марковіц [108] для вирішення цієї проблеми запропонував обмежити знизу бажаний рівень очікуваної доходності портфеля та мінімізувати його ризик або, що еквівалентно, обмежити ризик портфеля зверху і максимізувати його очікувану доходність. Класична задача раціонального вибору структури портфеля фінансових активів Марковіца має вигляд:

$$\begin{cases} V_w = \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \min \\ R_w = \mathbf{\mu}' \mathbf{w} = R_0 \end{cases} \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (1.5)$$

Окремо виділимо задачу безумовної, відносно очікуваної доходності, мінімізації дисперсії портфеля, вигляду:

$$V_w = \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (1.6)$$

Розв'язок задачі (1.6) має вигляд:

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}. \quad (1.7)$$

Портфель фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{GMV} отримав назву портфеля з найменшою дисперсією. Характеристики цього портфеля мають вигляд:

$$R_{GMV} = \frac{\mathbf{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} - \text{очікувана доходність}, \quad (1.8)$$

$$V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} - \text{дисперсія}. \quad (1.9)$$

Використовуючи попередні позначення для ваг і характеристик портфеля з найменшою дисперсією, розв'язок задачі (1.5) можемо записати у вигляді [14]:

$$\mathbf{w}_{R_0} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_0 - R_{GMV}}{s} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad (1.10)$$

$$\text{де } \mathbf{R} = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \Sigma^{-1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \mathbf{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}.$$

Характеристики портфеля фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{R_0} мають вигляд:

$$R_{R_0} = \mathbf{w}'_{R_0} \boldsymbol{\mu} = R_0,$$

$$V_{R_0} = \mathbf{w}'_{R_0} \Sigma \mathbf{w}_{R_0} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}. \quad (1.11)$$

1.4. Ефективна множина портфелів як узагальнення підходу Марковіца

Змінюючи значення R_0 в задачі (1.5) від мінімально можливого, R_{GMV} , до $+\infty$ та розв'язуючи її, отримаємо множину портфелів відому як ефективна множина.

Означення 1.3. Нехай на фінансовому ринку доступно k видів фінансових активів. Розглянемо на множині (V_w, R_w) множину A , яка складається з точок, координатами яких є дисперсія та очікувана дохідність портфеля з відносними частками фінансових активів (w_1, w_2, \dots, w_k) , які задовільняють умову $\mathbf{w}'\mathbf{1}=1$. Тоді підмножина A_0 множини A , яка складається з точок з координатами (V_w^0, R_w^0) , називається ефективною множиною, якщо

- 1) для всіх точок множини A з координатами (V_w, R_w) виконується $R_w \leq R_w^0$;
- 2) для всіх точок множини A з координатами (V_w, R_w^0) виконується $V_w \geq V_w^0$.

Інакше кажучи, ефективна множина складається з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна збільшити дохідність не збільшуючи дисперсію, або, що еквівалентно, з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна зменшити дисперсію не зменшуючи дохідність. Уперше поняття ефективної множини увів Марковіц [108]. У своїй роботі він прийняв за міру ризику портфеля його дисперсію, тому означення ефективної множини за Марковіцем звучало так: ефективна множина складається з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна збільшити дохідність не збільшуючи ризик, або, що еквівалентно, з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна зменшити ризик не зменшуючи дохідність. Очевидно, що означення ефективної множини за Марковіцем особливо підкреслює її важливість. Незважаючи на те, що дисперсія на цей момент часу доволі рідко використовується в якості міри ризику, ефективна множина не втратила свого значення. Ми звернемо на це увагу у наступних розділах.

Часто при побудові портфеля на його ваги накладаються додаткові умови. Наприклад, природною умовою є те, що ваги портфеля мають бути невід'ємними. Також, з певних міркувань, доволі часто виникають умови типу $w_i \geq \lambda w_j$, де $\lambda > 0$. Зрозуміло, що при додаванні умов змінюється вигляд ефективної множини. Звернемо увагу ще на те, що попередньо ми припустили, що дохідності всіх фінансових активів на ринку є випадковими величинами. Загалом це припущення не є правильним з практичної точки зору, оскільки інвестор може розмішувати кошти під безризикову ставку. В цьому випадку вже недостатньо отримати сумарну дохідність портфеля просто більшу від 0. Тепер необхідно, щоб доходи від портфельного інвестування перевищували доходи від розміщення коштів під безризикову ставку.

Отже, з усіх можливих портфелів ми можемо виділити ефективну множину. Проте виникає запитання, який з портфелів, що належить ефективній множині, є для інвестора найкращим.

Мертон [110] дослідив ефективну множину та виявив, що в просторі очікувана дохідність-дисперсія вона є параболою, причому вершиною її є портфель з найменшою дисперсією, а в просторі очікувана дохідність-середньоквадратичне відхилення гіперболою.

Розглянемо деякі властивості портфелів, що належать ефективній множині.

1.5. Метод Шарпа вибору раціональної структури портфеля

У підході використаному Марковіцем, оптимізується лише одна із характеристик портфеля, в той час як інша є фіксованою. У Шарп [126] для досягнення оптимізації портфеля запропонував використати відношення очікуваної дохідності портфеля до його дисперсії (чи більш загально, ризику). І чим більшим є таке відношення, тим кращим буде портфель. Припустимо, що на ринку існує можливість безризикового розміщення коштів з дохідністю r_0 та інвестор будує портфель з k ризикових активів та безризикового активу. За такого припущення відношення Шарпа має вигляд:

$$SR_w = (R_w - r_0) / V_w, \quad (1.12)$$

де $R_w = \mathbf{\mu}'\mathbf{w} + w_0 r_0$ та $V_w = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$ очікувана дохідність і дисперсія портфеля фінансових активів зі структурою (\mathbf{w}', w_0) , де w_0 частка коштів вкладених у безризиковий актив. Ми припускаємо, що всі кошти інвестора вкладені в k ризикових активів та в безризиковий актив. Це припущення можна записати у вигляді еквівалентному до (1.3):

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} + w_0 = 1.$$

Задача вибору структури портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа може бути сформульована у вигляді:

$$SR_w \rightarrow \max \text{ за умови } \mathbf{w}'\mathbf{1} + w_0 = 1. \quad (1.13)$$

Розв'язок (1.13), що задає структуру портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа має вигляд [102]:

$$\mathbf{w}_{SR} = \begin{pmatrix} \eta \mathbf{w}_{TP} \\ 1 - \eta \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

де

$$\mathbf{w}_{TP} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})}. \quad (1.15)$$

Зауважимо, що портфель зі структурою \mathbf{w}_{TP} відомий як тангенціальний портфель. Він лежить на перетині ефективної множини у випадку відсутності безризикового розміщення коштів та ефективної множини при наявності такої можливості, що є точкою дотику дотичної, що проходить через точку $(0, r_0)$, до графіку ефективної множини при відсутності можливості безризикового розміщення коштів. Тангенціальний портфель у літературі часто називають ринковим портфелем. Якщо коефіцієнт η належить проміжку $(0, 1)$, то інвестор частину коштів вкладає у безризиковий актив, чим зменшує ризик свого портфеля, якщо ж

$\eta > 1$, то інвестор намагається отримати очікувану дохідність свого портфеля більшу за очікувану дохідність тангенціального портфеля, і як результат, збільшує ризик свого портфеля.

Характеристики портфеля зі структурою (1.15) мають вигляд:

$$R_T = \frac{\mathbf{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})} = r_0 + \frac{(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})} - \text{очікувана дохідність}, \quad (1.16)$$

$$V_T = \frac{(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} - \text{дисперсія}. \quad (1.17)$$

Окремо варто виділити випадок, коли можливість безризикового розміщення коштів відсутня ($r_0 = 0$), або коли інвестор не використовує цю можливість ($\eta = 1$). У цьому випадку структури тангенціального портфеля фінансових активів та портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа збігаються. При відсутності можливості безризикового розміщення коштів ваги та характеристики портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа мають вигляд:

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\mu}}, \quad (1.18)$$

$$R_{SR} = \frac{\mathbf{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\mu}}, \quad (1.19)$$

$$V_{SR} = \frac{\mathbf{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\mu}}{(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\mu})^2}. \quad (1.20)$$

Портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа є доволі популярним серед інвесторів [101], [126]. Він є альтернативою до портфеля Марковіца фінансових активів у випадку наявності безризикового розміщення коштів.

1.6. Максимізація корисності як метод вибору раціональної структури портфеля

Недоліком методу Марковіца вибору раціональної структури портфеля фінансових активів є те, що раціонально задати рівень очікуваної доходності портфеля доволі непросто, особливо коли діють додаткові умови. До того ж, при виборі раціональної структури портфеля необхідно брати до уваги співвідношення між очікуваним доходом та ризиком. Це призвело до вироблення інших критеріїв вибору раціональної структури портфеля.

Одним із найвідоміших методів вибору раціональної структури портфеля є критерій максимізації очікуваної корисності портфеля [116]. Корисність у цьому випадку визначається за допомогою спеціального коефіцієнта, який описує ставлення інвестора до ризику. Цей метод є узагальненням теорії Марковіца. Недоліком методу є залежність від коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. У випадку коли цей коефіцієнт дорівнює $+\infty$, тобто інвестор повністю не схильний до ризику, портфель отриманий з задачі максимізації корисності збігатиметься з портфелем з найменшою дисперсією. Змінюючи значення цього коефіцієнта у межах від 0 до $+\infty$, отримуємо ефективну множину портфелів. Зазначимо, що на сьогодні не існує єдиної теорії щодо раціонального вибору коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. В роботах [6], [19], [43], [56] наведено певні рекомендації для обчислення цього коефіцієнта. В [6] обґрунтовано залежність цього коефіцієнта від об'єктивних та суб'єктивних показників. Натомість у [43] наведено метод визначення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику на основі показників портфеля фінансових активів.

Задача вибору раціональної структури портфеля з максимальною очікуваною корисністю може бути записана у вигляді [87], [116], [117]:

$$R_w - V_w \beta / 2 \rightarrow \max \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1. \quad (1.21)$$

Іншими можливостями вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі максимізації корисності портфеля є:

1) максимізація квадратичної корисності

$$M(R_w(t) - R_w^2(t) \beta_{quad} / 2) \rightarrow \max \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1; \quad (1.22)$$

2) максимізація очікуваної експоненційної корисності

$$M(1 - \exp(-\beta_{exp} R_w(t))) \rightarrow \max \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1. \quad (1.23)$$

У [54] показано, що портфелі отримані з задач (1.21)-(1.23) є математично еквівалентні. Проте зі стохастичної точки зору це твердження не виконується. Припустивши, що вектор доходностей \mathbf{X}_t має багатовимірний нормальний розподіл, тоді задачі (1.21) та (1.23) є повністю еквівалентні.

Нас буде цікавити лише портфель фінансових активів зі структурою отриманою з (1.21). Ваги такого портфеля мають вигляд:

$$\mathbf{w}_{EU} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} + \beta^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}. \quad (1.24)$$

Характеристики портфеля фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{EU} можуть бути записані у вигляді:

$$R_{EU} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} + \beta^{-1} s - \text{очікувана доходність}, \quad (1.25)$$

$$V_{EU} = \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} + \beta^{-2} s - \text{дисперсія}. \quad (1.26)$$

Зауважимо, що при довільному додатному значенні коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, β портфель фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{EU} є ефективним за Марковіцем, тобто належить ефективній множині портфелів. Отже, з одного боку, наявність коефіцієнта робить метод максимізації очікуваної корисності універсальним, а з іншого – постає питання про визначення цього коефіцієнта та властивості, якими він має володіти. У класичній теорії портфеля припускається, що коефіцієнт, який враховує ставлення інвестора до ризику, не залежить від об'єктивних показників, тобто є повністю суб'єктивним, та, крім цього, є незмінним у часі. З практики відомо, що ставлення до ризику не лише змінюється в часі, але є дуже залежним від об'єктивних показників [6]. Проте ці факти часто ігноруються в наукових роботах.

1.7. Теорія оцінювання та проблеми використання на практиці

Використати вищенаведені методи вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на практиці неможливо, оскільки параметри розподілу вектора доходностей \mathbf{X}_t , $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є невідомими на практиці. Спершу необхідно оцінити невідомі параметри розподілу. Одним з найвідоміших методів оцінки параметрів розподілу є історичний метод, основною ідеєю якого є побудова оцінок параметрів на основі поведінки випадкової величини чи процесу в минулому. Нехай нам відома вибірка попередніх значень векторів доходностей акцій $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$. На основі цієї вибірки ми будемо вибірково оцінювати невідомі параметри, тобто

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'. \quad (1.27)$$

Оцінки (1.27) мають хороші статистичні властивості. Наприклад, у разі припущення, що вектор доходностей \mathbf{X}_t має k -вимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, вибірково оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ є незміщеними, консистентними, незалежними між собою. Зазначимо, що припущення, про нормальність розподілу вектора доходностей \mathbf{X}_t з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є одним з основних у класичній теорії портфеля. Незважаючи на критику цього припущення в останні десятиріччя, воно досить часто використовується не лише на практиці, але й в теоретичних роботах. Це зумовлено тим, що щомісячні та щорічні доходності мають розподіли, близькі до нормального [74], а вплив важких хвостів на поведінку характеристик портфеля можна суттєво послабити з допомогою диверсифікації [68].

Підставляючи оцінки (1.27) замість невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ у вирази для ваг та характеристик портфелів (1.7)-(1.11), (1.14)-(1.20), (1.24)-(1.26) отримуємо вибірково оцінки ваг і характеристик портфелів фінансових активів з раціональними структурами. Позначатимемо оцінку, використовуючи символ $\hat{\cdot}$, тобто, оцінки ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією, матимуть вигляд:

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \hat{R}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \hat{V}_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}.$$

Виникає запитання, як інвестору інтерпретувати отримані оцінки. Чи можна оперувати отриманими оцінками як константами? Відповідь на це питання, однозначно, ні. Отримані значення є реалізаціями випадкової величини. Тому і використовувати їх треба зважаючи на цей факт.

З точки зору статистики і теорії ймовірностей будь-яку випадкову величину повністю характеризує її розподіл. Тобто, знаючи розподіл оцінок ваг та характеристик свого портфеля фінансових активів, інвестор володіє максимумом доступної інформації про ці оцінки. Проте інвестору також необхідно враховувати статистичні властивості оцінок, насамперед незміщеність. Для вибірково оцінок ваг і характеристик портфелів фінансових активів у припущеннях класичної теорії портфеля ці питання досліджені у [52], [94], [116]. У цих роботах знайдено розподіли ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією, портфеля фінансових активів з максимальною корисністю, тангенціального портфеля фінансових активів та портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа.

Звернемо увагу на той факт, що у [116] показано, що для вибірково оцінки ваг портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа не існує математичного сподівання, а тому говорити про незміщеність цієї оцінки в нашому випадку не можна. Виникає запитання, чи можливо взагалі побудувати незміщену оцінку для ваг портфеля з максимальним відношенням Шарпа за припущення нормальності розподілу вектора доходностей \mathbf{X}_t . Відповідь на це запитання наведено в наступній теоремі для портфеля фінансових активів зі структурою (1.18) [125].

Теорема 1.1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ – додатно визначена. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ – незалежні реалізації вектора \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді не існує незміщеної оцінки параметра \mathbf{w}_{SR} , тобто, не існує оцінки $\mathbf{T}(\mathbf{X}_1,$*

$\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$) параметра \mathbf{w}_{SR} такої, що $M_{\mu, \Sigma}(T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)) = \mathbf{w}_{SR}(\mu, \Sigma)$ для всіх μ та Σ , для яких виконується нерівність $\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu \neq 0$.

Доведення теореми 1.1 ґрунтується на наступній лемі.

Лема 1.1. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ незалежні випадкові вектори та $\mathbf{X}_i \sim N_k(\mu, \Sigma)$. Нехай $T = T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ дійснозначна функція така, що $M_{\mu, \Sigma}(|T|) < \infty$ для всіх μ, Σ . Нехай $\{b_m\}$ дійснозначна обмежена послідовність.

Тоді послідовність $M_{\mu + b_m \Sigma^{1/2} \mathbf{1}, \Sigma}(|T|)$ також є обмежена.

Доведення лемати 1.1. Маємо

$$M_{\mu + b_m \Sigma^{1/2} \mathbf{1}, \Sigma}(|T|) = \frac{1}{(2\pi)^{kn/2}} \int_{\mathbb{R}^{kn}} |T(\Sigma^{1/2} \mathbf{y}_1, \Sigma^{1/2} \mathbf{y}_2, \dots, \Sigma^{1/2} \mathbf{y}_n)| \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \Sigma^{-1/2} \mu - b_m \mathbf{1})' (\mathbf{y}_i - \Sigma^{-1/2} \mu - b_m \mathbf{1})\right) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \dots d\mathbf{y}_n.$$

Припустимо, що $a \leq b_m \leq b$. Нехай $h(\lambda, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \lambda \mathbf{1})' (\mathbf{y} - \lambda \mathbf{1})$, де $\lambda \in [a, b]$. Тоді

$$h(\lambda, \mathbf{y}) = k(\lambda - \mathbf{y}' \mathbf{1} / n)^2 + \mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{1}^2 / n.$$

Оскільки

$$(\lambda - u)^2 \geq \begin{cases} (u - b)^2, & \text{при } u > b \\ (u - b)^2 - (a - b)^2, & \text{при } a \leq u \leq b \geq \min\{(u - a)^2, (u - b)^2\} - (a - b)^2 \\ (u - a)^2, & \text{при } u < a \end{cases}$$

Отже

$$h(\lambda, \mathbf{y}) \geq \min\{h(a, \mathbf{y}), h(b, \mathbf{y})\} - (a - b)^2.$$

Використовуючи попередню нерівність, отримаємо

$$M_{\mu + b_m \Sigma^{1/2} \mathbf{1}, \Sigma}(|T|) = \frac{1}{(2\pi)^{kn/2}} \int_{\mathbb{R}^{kn}} |T(\Sigma^{1/2} \mathbf{y}_1, \Sigma^{1/2} \mathbf{y}_2, \dots, \Sigma^{1/2} \mathbf{y}_n)| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \Sigma^{-1/2} \mu - b_m \mathbf{1})' (\mathbf{y}_i - \Sigma^{-1/2} \mu - b_m \mathbf{1})\right) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2 \dots d\mathbf{y}_n \leq \exp\left(\frac{n}{2} (a - b)^2\right) (M_{\mu + a \Sigma^{1/2} \mathbf{1}, \Sigma}(|T|) + M_{\mu + b \Sigma^{1/2} \mathbf{1}, \Sigma}(|T|)) < \infty.$$

Лему доведено.

Доведення теореми 1.1. Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що існує незміщена оцінка

$$T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = (T_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n), \dots, T_k(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n))'$$

параметра $\mathbf{w}_{SR} = (w_{1SR}, \dots, w_{kSR})'$, тобто виконується рівність

$$M_{\mu, \Sigma}(T(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)) = \mathbf{w}_{SR}(\mu, \Sigma)$$

для всіх μ та Σ , для яких виконується нерівність $\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu \neq 0$.

Виберемо послідовність $\mu_m = (\mu_{1m}, \dots, \mu_{km})'$ таку, що $\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu_m \neq 0$ для всіх натуральних m , $\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mu_m \rightarrow 0$ та $\Sigma^{-1}\mu_m \rightarrow \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, де $\mathbf{0}$ – k -вимірний нуль-вектор. Таку послідовність легко побудувати. Ми можемо взяти, наприклад,

$$\mu_m = r \mathbf{1} + \tau + a_m \Sigma^{1/2} \mathbf{1}$$

з $a_m = (-1)^m / m$. Вектор \mathbf{q} можна вибрати як довільний ненульовий вектор, сума компонентів якого дорівнює 0. Тоді ми можемо вибрати $\tau = \Sigma \mathbf{q}$.

Припустимо, що $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_k)'$ і $q_j \neq 0$. Розглянемо послідовність математичних сподівань $M_{\mu_m, \Sigma}(T_j(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n))$. За лемою 1.1 ця послідовність є обмежена, а отже, можливо вибрати збіжну підпослідовність $M_{\mu_{m_l}, \Sigma}(T_j(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n))$. Отримуємо суперечність, оскільки $w_{jSR}(\mu_{m_l}, \Sigma) \rightarrow \pm \infty$.

Оскільки портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа є популярним серед інвесторів, Теорема 1.1 є попередженням стосовно його використання. Отримані результати повинні надзвичайно акуратно інтерпретуватися, щоб уникнути накопичення зміщення.

РОЗДІЛ 2

ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНОК ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСИЧНИХ ПОРТФЕЛІВ ЗА НАЯВНОСТІ АВТОКОРЕЛЯЦІЇ ДОХІДНОСТЕЙ

2.1. Властивості вибіркового оцінок параметрів дохідностей за наявності автокореляції

У більшості праць з теорії портфеля зроблено припущення про незалежність у часі дохідностей фінансових активів, з яких складено портфель. Таке припущення є доволі обмеженим та часто зазнає критики у фінансовій літературі. Дохідності зазвичай не є незалежними в часі [65], [72], [100], [109]. На сьогодні лише в декількох роботах розглядається питання впливу автокореляції дохідностей на статистичні властивості портфелів фінансових активів. Зокрема, у [116] знайдено асимптотичний розподіл вибіркового оцінок ваг портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією та портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю у разі припущення, що дохідності активів, з яких складено портфель, поведуться як стаціонарний процес Гауса. Ми розглянемо інше важливе питання, а саме, дослідимо властивості вибіркового оцінок характеристик портфеля фінансових активів у разі припущення, що дохідності активів, з яких складено портфель, поведуться як стаціонарний процес Гауса.

Позначимо $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ матриця автоковаріацій процесу \mathbf{X}_t зі зміщенням h . У разі такого позначення отримаємо, $\Sigma = \Gamma(0)$, тобто при нульовому зміщенні матриця автоковаріацій процесу \mathbf{X}_t збігається з його коваріаційною матрицею.

Перед тим як розглядати властивості вибіркового оцінок характеристик портфелів фінансових активів, дослідимо спочатку влас-

тності вектора вибіркового оцінок невідомих параметрів розподілу дохідностей (1.27). Позначимо $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})')'$ – вектор невідомих параметрів та $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}})')'$ – вибіркова оцінка для $\boldsymbol{\theta}$. Оператор vech визначений для довільної квадратної симетричної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij})$ розмірності $k \times k$ та перетворює її на $k(k+1)/2$ вектор за правилом

$$\text{vech}(\mathbf{A}) = (a_{11}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{ki}, \dots, a_{kk})'$$

Основні властивості матричних операторів описані в [85].

Асимптотичний розподіл вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ можемо знайти, використовуючи результати, наведені в [60], [84], а саме, вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ є асимптотично нормально розподілений з середнім $\boldsymbol{\theta}$ та матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Omega}$, тобто

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} N_{k(k+3)/2}(\mathbf{0}_{k(k+3)/2}, \boldsymbol{\Omega}),$$

де символ \xrightarrow{d} означає збіжність за розподілом, а $\mathbf{0}_m$ – m -вимірний нуль-вектор.

Для стаціонарних процесів Гауса матриця $\boldsymbol{\Omega}$ має вигляд [60], [84]:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) & \mathbf{0}_{k \times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2 \times k} & \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де $\mathbf{0}_{m \times l}$ – нульова матриця розмірності $m \times l$, \mathbf{I}_{k^2} – одинична матриця розмірності $k^2 \times k^2$, $\mathbf{D}_k^+ = (\mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{D}_k'$, \mathbf{D}_k – матриця розмірності $k^2 \times k(k+1)/2$ така, що $\mathbf{D}_k \text{vech} \mathbf{A} = \text{vec} \mathbf{A}$, де \mathbf{A} довільна квадратна симетрична матриця розмірності $k \times k$, оператор vec перетворює довільну $m \times l$ матрицю \mathbf{B} у вектор шляхом перестановки стовпців матриці один під інший, тобто $\text{vec} \mathbf{B} = (b_{11}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{1l}, \dots, b_{ml}, \dots, b_{ml})'$, \mathbf{K}_k – $k^2 \times k^2$ матриця така, що для довільної $k \times k$ матриці \mathbf{C} виконується $\mathbf{K}_k \text{vec} \mathbf{C} = \text{vec} \mathbf{C}'$. Знак \otimes означає добуток Кронекера двох матриць. Припускаємо, що ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (2.1), є збіжними.

Надалі нам необхідне таке твердження [60].

Твердження 2.1. Нехай випадковий вектор \mathbf{X}_n асимптотично нормально розподілений з середнім $\boldsymbol{\mu}$ та коваріаційною матрицею $c_n^{-2}\boldsymbol{\Sigma}$, де $\boldsymbol{\Sigma}$ симетрична невід'ємно визначена матриця і $c_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Якщо $\mathbf{g}(\mathbf{X}) = (g_1(\mathbf{X}), \dots, g_m(\mathbf{X}))'$ відображення з \mathbb{R}^k в \mathbb{R}^m таке, що всі $g_i(\cdot)$ неперервно диференційовані в околі $\boldsymbol{\mu}$, і якщо всі діагональні елементи матриці $\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}'$ є ненульові, де $t \times k$ матриця складена з часткових похідних $(\partial g_i / \partial x_j)(\boldsymbol{\mu})$, то випадковий вектор $\mathbf{g}(\mathbf{X}_n)$ є асимптотично нормально розподілений з середнім $\mathbf{g}(\boldsymbol{\mu})$ та коваріаційною матрицею $c_n^{-2}\mathbf{D}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{D}'$.

Твердження 2.1 відоме під назвою дельта-метод і часто використовується для обчислення асимптотичних розподілів випадкових величин.

2.2. Моделювання вибірових оцінок характеристик класичних портфельів при автокорельованих дохідностях

Метою підрозділу є знаходження розподілу вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів із раціональною структурою за умови, що дохідності активів, з яких складено портфель, поведуться як стаціонарний процес Гауса. Вибіркові оцінки очікуваної дохідності та дисперсії можемо представити у вигляді неперервно диференційованих функцій від вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, тобто

$$g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{R}_{GMV}, \quad g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{V}_{GMV}, \quad g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{s},$$

$$g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{R}_{EU}, \quad g_5(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{V}_{EU},$$

$$g_6(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{R}_T, \quad g_7(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{V}_T.$$

Використовуючи твердження 2.1, отримаємо

$$\sqrt{n}(g_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - g_i(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{G}_i' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_i),$$

для всіх $i=1, \dots, 7$ та \mathbf{G}_i $k(k+3)/2$ -вимірний вектор з елементами $\partial g_i / \partial \theta_1, \dots, \partial g_i / \partial \theta_{k(k+3)/2}$. У наступній теоремі знайдено розподіл вибірових оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю (1.24).

Теорема 2.1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель, в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводиться як k -вимірний стаціонарний гаусівський процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma} = \Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (2.1) є збіжними. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$a) \sqrt{n}(\hat{R}_{EU} - R_{EU}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{EU;1}^2), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{EU;1}^2 = & \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(V_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4\beta^{-1} V_{GMV} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \right. \\ & + 4\beta^{-2} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + 2a_{11}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + a_{12}^2 (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ & + 2\beta^{-2} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2a_{11} a_{12} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ & \left. + 2a_{11} \beta^{-1} (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) + 2a_{12} \beta^{-1} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \right). \end{aligned}$$

$$б) \sqrt{n}(\hat{V}_{EU} - V_{EU}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{EU;2}^2), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{EU;2}^2 = & \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(4\beta^{-4} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + 2a_{21}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 4\beta^{-4} R_{GMV}^2 (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ & + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) - 4\beta^{-2} a_{21} R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) - \\ & - 4R_{GMV} \beta^{-4} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ & \left. + 2\beta^{-4} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2a_{21} \beta^{-2} (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$a_{11} = \frac{(\beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1} - 1) \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} = \beta^{-1} R_{GMV}^2 - R_{GMV} V_{GMV},$$

$$a_{12} = \frac{1 - 2\beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} = V_{GMV} - 2\beta^{-1} R_{GMV},$$

$$a_{21} = \frac{\beta^{-2} (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2 - 1}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} = \beta^{-2} R_{GMV}^2 - V_{GMV}^2,$$

$$q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{b}.$$

для довільних k -вимірних векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} .

Доведення. Для доведення теореми використаємо результат, отриманий в [85]

$$\frac{\partial(\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = -\mathbf{D}'_k (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}'_k. \quad (2.4)$$

а) Маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_4 &= ((\partial g_4(\theta)/\partial \boldsymbol{\mu})', (\partial g_4(\theta)/\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))') = \\ &= ((\partial R_{EU}/\partial \boldsymbol{\mu})', (\partial R_{EU}/\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))'). \end{aligned}$$

Використовуючи правила матричного диференціального числення [85], отримаємо:

$$\frac{\partial R_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \boldsymbol{\mu}} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} + \frac{\partial(\beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} + 2\beta^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}.$$

З огляду на те, що для довільних функцій $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ виконується [85], [105]

$$\frac{\partial(\mathbf{f}(\mathbf{x})/g(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{g(\mathbf{x})} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{1}{g(\mathbf{x})^2} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

і для довільних n -вимірних векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} та довільної симетричної матриці \mathbf{A} розмірності $n \times n$ маємо

$$\frac{\partial \mathbf{a}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}{\partial \text{vech} \mathbf{A}} = \frac{\partial(\text{vec} \mathbf{A}^{-1})'}{\partial \text{vech} \mathbf{A}} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}),$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{EU}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} &= \\ &= \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} - \frac{\partial(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} + \frac{\partial(\beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \left(\frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) + \\ &\quad + \frac{\partial(\beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} - \frac{\partial(\beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} \boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \left(\frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \beta^{-1} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) \right) - \\ &\quad - \beta^{-1} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} + \beta^{-1} \frac{\partial(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \frac{(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \left(\left(\frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} - 2\beta^{-1} \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} \right) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + (\beta^{-1} \frac{(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} - \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \beta^{-1} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) \right). \end{aligned}$$

Беручи до уваги (2.1), отримаємо:

$$\mathbf{G}'_4 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_4 = S_{11} + S_{12},$$

де

$$S_{11} = \left(\frac{\partial R_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) \left(\frac{\partial R_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} + 2\beta^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} + 2\beta^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} \right) = \\
&= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} + 4\beta^{-1} \frac{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} + \right. \\
&\quad \left. + 4\beta^{-2} \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\Gamma(h)\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} \right).
\end{aligned}$$

Нехай

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{(\beta^{-1}\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1} - 1)\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2}, \\
a_{12} &= \frac{1 - 2\beta^{-1}\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

Позначивши \mathbf{K}_{mn} ортогональну матрицю розмірності $mn \times mn$ таку, що $\mathbf{K}_{mn}\text{vec}\mathbf{A} = (\text{vec}\mathbf{A})'$ для довільної матриці \mathbf{A} розмірності $m \times n$,

$$\mathbf{N}_n = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{K}_{nn}), \quad (2.5)$$

де \mathbf{I}_{n^2} – одинична матриця розмірності $n^2 \times n^2$, та врахувавши, що [85], [105]

$$\mathbf{K}_{mn}' = \mathbf{K}_{mn}^{-1} = \mathbf{K}_{nm}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{N}_n = \mathbf{N}_n' = \mathbf{N}_n^2, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{D}_n \mathbf{D}_n^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{n^2} + \mathbf{K}_{nn}) \quad (2.8)$$

з (2.4) отримаємо:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \left(\frac{\partial R_{EU}}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \left(\frac{\partial R_{EU}}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right) = \\
&= (a_{11}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + a_{12}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}))' \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times (-\mathbf{D}_k'(\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1})\mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \times \\
&\quad \times \mathbf{D}_k^+ (-\mathbf{D}_k'(\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1})\mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k') \times \\
&\quad \times (a_{11}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + a_{12}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
&= (a_{11}(\mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}') + a_{12}(\mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{\mu}') + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu}' \otimes \boldsymbol{\mu}')) \times \\
&\quad \times (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}) \right) \times \\
&\quad \times (a_{11}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + a_{12}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \alpha^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})).
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що для довільних n -вимірних векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} і для довільної $n \times n$ матриці \mathbf{A} справедливими є такі рівності

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \quad \mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{A}), \quad \mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}), \quad (2.9)$$

та використовуючи прості алгебраїчні перетворення, отримаємо:

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(2a_{11}^2 (\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2 + \right. \\
&\quad + a_{12}^2 ((\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})(\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \\
&\quad + (\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})) + \\
&\quad \left. + 2\beta^{-2} (\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu})^2 + \right. \\
&\quad + 2a_{11}a_{12} (\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}) \right) + \\
&\quad + 2a_{11}\beta^{-1} \left((\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu})^2 + (\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2 \right) + \\
&\quad + 2a_{12}\beta^{-1} (\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \\
&\quad \left. + (\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}) \right).
\end{aligned}$$

Позначивши $q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{b}$ для довільних k -вимірних векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} та склавши вирази для S_{11} та S_{12} , отримаємо твердження а).

б) Використовуючи правила матричного диференціального числення [85], маємо

$$\frac{\partial V_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial(\beta^{-2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 2\beta^{-2}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{EU}}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} &= -\frac{\partial(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \frac{1}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} + \frac{\partial(\beta^{-2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \\ &= -\frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \frac{1}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \frac{\partial(\beta^{-2}\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} - \\ &\quad - \frac{\partial(\beta^{-2}\boldsymbol{\mu}'\frac{\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \left(-\frac{1}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \beta^{-2}(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) \right) - \\ &\quad - \beta^{-2} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \frac{1}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-2} \frac{\partial(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \frac{(\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \left((\beta^{-2} \frac{(\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} - \frac{1}{(\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-2}(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2\beta^{-2} \frac{\boldsymbol{\mu}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) \right). \end{aligned}$$

Решта доведення є повністю аналогічна до а). Теорему доведено.

Підставивши $\beta = \infty$ у вирази (2.2) та (2.3) отримаємо асимптотичний розподіл вибіркового оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією (1.7). Сформулюємо цей результат у вигляді наслідку.

Наслідок 2.1. В умовах теореми 2.1 виконується

$$\text{а) } \sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_1^2), \text{ де}$$

$$\sigma_1^2 = V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + \quad (2.10)$$

$$+ (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) - 2R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})(q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})))$$

$$\text{б) } \sqrt{n}(\hat{V}_{GMV} - V_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_2^2), \text{ де}$$

$$\sigma_2^2 = 2V_{GMV}^4 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2. \quad (2.11)$$

У наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл вибіркового оцінок очікуваної дохідності та дисперсії тангенсального портфеля фінансових активів (1.15).

Теорема 2.2. В умовах теореми 2.1 виконується

$$\text{а) } \sqrt{n}(\hat{R}_T - R_T) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{T;1}^2), \text{ де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{T;1}^2 &= V_T^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(4 \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(R_T - r_0)^2} - 4 \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1})}{R_T - r_0} + q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})^2}{(R_T - r_0)^2} - 2q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{R_T - r_0} + \right. \\ &\quad \left. + q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right). \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sqrt{n}(\hat{V}_T - V_T) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{T;2}^2), \text{ де}$$

$$\sigma_{T;2}^2 = \frac{V_T^4}{(R_T - r_0)^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(4 \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(R_T - r_0)^2} - 8 \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1})}{R_T - r_0} + 4q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2 \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})^2}{(R_T - r_0)^2} - 4q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \frac{q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{R_T - r_0} + \\
& +4(q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + q_h(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})). \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Доведення. Доведення є аналогічним до доведення теореми 2.1 беручи до уваги те, що

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_T}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \frac{\partial((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))}{\partial \boldsymbol{\mu}} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} + \\
& + (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \frac{\partial(1/\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \\
& = 2 \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} - \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}, \\
\frac{\partial V_T}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \frac{\partial((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))}{\partial \boldsymbol{\mu}} \frac{1}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} + \\
& + (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \frac{\partial(1/(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2)}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \\
& = 2 \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} - 2 \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^3} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}, \\
\frac{\partial R_T}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} &= \frac{\partial((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} + \\
& + (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \frac{\partial(1/\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} = \\
& = \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \left(\frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} ((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} ((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}), \\
\frac{\partial V_T}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} &= \frac{\partial((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \frac{1}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} + \\
& + (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \frac{\partial(1/(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2)}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} = \\
\frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} & \left(\frac{1}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2} ((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) - \right. \\
& \left. - 2 \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^3} ((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}) \right).
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Отже, інвестор у своїй діяльності може спростити обчислення, використовуючи асимптотичні властивості вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів, які є доволі привабливими (асимптотично нормально розподілені). Проте виникає запитання, наскільки швидкою є збіжність точних розподілів вибірових оцінок характеристик портфеля до асимптотичного. Відповідь на це питання буде отримана у розділі 2.4.

2.3. Моделювання параметрів ефективної множини

У попередньому розділі ми знайшли асимптотичний розподіл вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів. На практиці важливо знати не лише розподіли оцінок характеристик, але й взаємозв'язок між ними. Для цього потрібно знайти сукупний розподіл оцінок, які нас цікавлять.

У цьому розділі ми дослідимо сукупні розподіли вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з макси-

мальною очікуваною корисністю, тангенсiального портфеля фiнансових активiв та вибiркових оцiнок параметрiв ефективної множини. Оскiльки портфель з максимальною очiкуваною корисністю i тангенсiальний портфель є ефективними за Марковiцем, а як показано в [110] параметри (R_{GMV}, V_{GMV}, s) повністю визначають ефективну множину, тому спочатку ми дослiдимо асимптотичний розподiл випадкового вектора $(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})'$.

Нехай

$$\mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}), g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}), g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}))' = (\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})',$$

$$\mathbf{g}_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}), g_5(\hat{\boldsymbol{\theta}}))' = (\hat{R}_{EU}, \hat{V}_{EU})',$$

$$\mathbf{g}_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (g_6(\hat{\boldsymbol{\theta}}), g_7(\hat{\boldsymbol{\theta}}))' = (\hat{R}_T, \hat{V}_T)'.$$

З твердження 2.1 випливає, що

$$\sqrt{n}(\mathbf{g}_l(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{G}'_l \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_l),$$

де $l=1, 2, 3$ i матриця \mathbf{G}_l складена з похiдних $\partial \mathbf{g}_l / \partial \boldsymbol{\theta}$. Використовуючи цю властивiсть можемо знайти спiльний асимптотичний розподiл вибiркових оцiнок параметрiв, що описують ефективну множину.

Теорема 2.3. *Нехай ми формуємо портфель з k фiнансових активiв. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимiрний вектор дохiдностей активiв, з яких формується портфель, в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить ся як k -вимiрний стацiонарний гаусiвський процес з середнiм $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковарiацiй $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma} = \Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, якi входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (2.1) є збiжними. Тодi при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + \\ &+ (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) - 2R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})(q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}))) \\ &, \sigma_2^2 = 2V_{GMV}^4 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^2 &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (4\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + 2R_{GMV}^4 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + \\ &+ 4R_{GMV}^2 (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + 2q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 - \\ &- 4R_{GMV}^3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})(q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + 2R_{GMV}^2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) - \\ &- 4R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})(q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}))), \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = 2V_{GMV}^3 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 - q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2\boldsymbol{\mu}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \mathbf{R} \mathbf{1} - 2R_{GMV}^3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 - \\ &- 2R_{GMV} (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ &+ 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})(2q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) - 2R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + \\ &+ 2q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})), \end{aligned}$$

$$\sigma_{23} = -V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 - 4R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2),$$

$$q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \mathbf{b}$$

для довiльних k -вимiрних векторiв \mathbf{a} та \mathbf{b} .

Доведення. Вирази для σ_1 та σ_2 знайдено у наслiдку 2.1 (2.10)-(2.11). Ми обчислимо σ_{12} . Маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_1 &= ((\partial g_1(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\mu})', (\partial g_1(\boldsymbol{\theta})/\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))') = \\ &= ((\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})', (\partial R_{GMV}/\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))') \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'_2 &= ((\partial g_2(\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\mu})', (\partial g_2(\boldsymbol{\theta})/\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))') = \\ &= ((\partial V_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})', (\partial V_{GMV}/\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))'). \end{aligned}$$

Використовуючи правила матричного диференціального числення, знайдемо

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1} / \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}},$$

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} + \frac{\partial (1/\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1} =$$

$$= \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} (V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})),$$

$$\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial (1/\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0},$$

$$\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \frac{\partial (1/\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} (-V_{GMV}^2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})).$$

Враховуючи (2.1) отримаємо

$$\mathbf{G}_4' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_2 = S_{11} + S_{12},$$

де

$$S_{11} = \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) \left(\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} \right) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

З (2.4)-(2.9) маємо

$$S_{12} = \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \right) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \left(\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \right) =$$

$$\begin{aligned} &= (V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \times \\ &\times (-\mathbf{D}'_k (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}'_k)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \times \\ &\times \mathbf{D}_k^+ (-\mathbf{D}'_k (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}'_k) (-V_{GMV}^2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\ &= (V_{GMV}(\mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{\mu}') - R_{GMV} V_{GMV}(\mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}')) \times \\ &\times (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \right) \times \\ &\times (-V_{GMV}^2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\ &= 2V_{GMV}^3 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2R_{GMV}(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2 - \\ &- (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})). \end{aligned}$$

Склавши вирази для S_{11} та S_{12} отримаємо вираз для σ_{12} .

Вирази для σ_3^2 , σ_{13} та σ_{23} обчислюємо так само, використовуючи

$$\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 2\mathbf{R} \boldsymbol{\mu}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} - \frac{\partial ((\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2 / (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}))}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} =$$

$$= \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} -$$

$$- \frac{\partial (1/(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}))}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2 =$$

$$= - \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \left(\frac{(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2 \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) \right).$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що з теореми 2.3 випливає, що у випадку стаціонарних процесів Гауса для яких $\Gamma(h)=d_h\Gamma(0)$, асимптотична матриця коваріацій є діагональною. До класу таких процесів належать усі стаціонарні багатовимірні авторегресійні моделі з біжучим середнім (VARMA), у яких коефіцієнтами є діагональні матриці з однаковими елементами.

Наступним кроком є обчислення спільного асимптотичного розподілу вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю і тангенсального портфеля. Для цього позначимо

$$b_{11} = 1 - \frac{sV_{GMV}}{(R_{GMV} - r_0)^2}, \quad b_{12} = \frac{s}{(R_{GMV} - r_0)}, \quad b_{13} = \frac{V_{GMV}}{(R_{GMV} - r_0)}, \quad (2.14)$$

$$b_{21} = \frac{-2V_{GMV}^2 s}{(R_{GMV} - r_0)^3}, \quad b_{22} = 1 + \frac{2V_{GMV} s}{(R_{GMV} - r_0)^2}, \quad b_{23} = \frac{V_{GMV}^2}{(R_{GMV} - r_0)^2}. \quad (2.15)$$

Наслідок 2.2. В умовах теореми 2.3 виконується

$$a) \sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{EU} \\ \hat{V}_{EU} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{EU} \\ V_{EU} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{EU;1}^2 & \sigma_{EU;12} \\ \sigma_{EU;12} & \sigma_{EU;2}^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_{EU;1}^2 = \sigma_1^2 + 2\beta^{-1}\sigma_{13} + \beta^{-2}\sigma_3^2,$$

$$\sigma_{EU;2}^2 = \sigma_2^2 + 2\beta^{-2}\sigma_{23} + \beta^{-4}\sigma_3^2,$$

$$\sigma_{EU;12} = \sigma_{12} + \beta^{-1}\sigma_{23} + \beta^{-2}\sigma_{13} + \beta^{-3}\sigma_3^2.$$

$$б) \sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_T \\ \hat{V}_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_T \\ V_T \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{T;1}^2 & \sigma_{T;12} \\ \sigma_{T;12} & \sigma_{T;2}^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_{T;1}^2 = b_{11}^2\sigma_1^2 + b_{12}^2\sigma_2^2 + b_{13}^2\sigma_3^2 + 2b_{11}b_{12}\sigma_{12} + 2b_{11}b_{13}\sigma_{13} + 2b_{12}b_{13}\sigma_{23},$$

$$\sigma_{T;2}^2 = b_{21}^2\sigma_1^2 + b_{22}^2\sigma_2^2 + b_{23}^2\sigma_3^2 + 2b_{21}b_{22}\sigma_{12} + 2b_{21}b_{23}\sigma_{13} + 2b_{22}b_{23}\sigma_{23},$$

$$\sigma_{T;12} = b_{11}b_{21}\sigma_1^2 + b_{12}b_{22}\sigma_2^2 + b_{13}b_{23}\sigma_3^2 + (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})\sigma_{12} + \\ + (b_{11}b_{23} + b_{13}b_{21})\sigma_{13} + (b_{12}b_{23} + b_{13}b_{22})\sigma_{23}.$$

Вирази для $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_3, \sigma_{13}$ та σ_{23} наведено в теоремі 2.3.

Доведення. Покажемо спочатку, що

$$R_{EU} = R_{GMV} + \beta^{-1}s, \quad (2.16)$$

$$V_{EU} = V_{GMV} + \beta^{-2}s, \quad (2.17)$$

$$R_T = R_{GMV} + \frac{sV_{GMV}}{R_{GMV} - r_0}, \quad (2.18)$$

$$V_T = V_{GMV} + \frac{sV_{GMV}^2}{(R_{GMV} - r_0)^2}. \quad (2.19)$$

З (1.25) та (1.26), отримаємо

$$R_{EU} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \beta^{-1}s,$$

$$V_{EU} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = V_{GMV} + \beta^{-2}s.$$

Оскільки

$$sV_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}} - \frac{(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1})^2} = V_{GMV}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\mu} - R_{GMV}^2,$$

то

$$V_{GMV}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\mu} = sV_{GMV} + R_{GMV}^2. \quad (2.20)$$

З (1.16) та (2.17) маємо

$$R_T = r_0 + \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})} = \\ = r_0 + \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\mu} - 2r_0\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\mu} + r_0^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}'\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}\mathbf{1}}$$

$$= \frac{-r_0 R_{GMV} + V_{GMV} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu}}{R_{GMV} - r_0} = \frac{R_{GMV}^2 + s V_{GMV} - r_0 R_{GMV}}{R_{GMV} - r_0} = R_{GMV} + \frac{s V_{GMV}}{R_{GMV} - r_0}.$$

Аналогічно можемо показати, що

$$V_T = V_{GMV} + \frac{s V_{GMV}^2}{(R_{GMV} - r_0)^2}.$$

Використовуючи правила матричного диференційного числення [85], отримаємо

$$\frac{\partial R_{EU}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \beta^{-1} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

$$\frac{\partial V_{EU}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \beta^{-2} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_T}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{V_{GMV}}{R_{GMV} - r_0} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{s}{R_{GMV} - r_0} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{s V_{GMV}}{(R_{GMV} - r_0)^2} \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \\ &= b_{11} \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + b_{12} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + b_{13} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_T}{\partial \boldsymbol{\theta}} &= \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{V_{GMV}^2}{(R_{GMV} - r_0)^2} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{2s V_{GMV}}{(R_{GMV} - r_0)^2} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{2s V_{GMV}^2}{(R_{GMV} - r_0)^3} \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \\ &= b_{21} \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + b_{22} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + b_{23} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}}, \end{aligned}$$

де $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}$ задані в (2.14)-(2.15).

Отже

$$\begin{aligned} \sigma_{1;EU}^2 &= \left(\frac{\partial R_{EU}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{\Omega} \left(\frac{\partial R_{EU}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) = \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \beta^{-1} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{\Omega} \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \beta^{-1} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{\Omega} \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) + 2\beta^{-1} \left(\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{\Omega} \left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) + \beta^{-2} \left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \boldsymbol{\Omega} \left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) = \\ &= \sigma_1^2 + 2\beta^{-1} \sigma_{13} + \beta^{-2} \sigma_3^2. \end{aligned}$$

Вирази для $\sigma_{2;EU}, \sigma_{12;EU}, \sigma_{1;T}, \sigma_{2;T}, \sigma_{12;T}$ виводяться аналогічно.

2.4. Емпіричні результати і теоретичні приклади

Ми знайшли асимптотичний розподіл вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю, тангенсального портфеля фінансових активів, портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією та їх сукупні асимптотичні розподіли. Також ми знайшли сукупний розподіл вибірових оцінок параметрів ефективної множини. Ми припускали, що нескінченні суми в (2.1) є збіжними, виникає запитання, чи існує клас стаціонарних процесів Гауса, для яких це припущення виконується, і наскільки широким є такий клас. Крім того, вирази для коваріаційних матриць є дуже громіздкими, цікаво розглянути часткові випадки та перевірити чи не спростяться ці вирази.

Приклад 2.1. Припустимо, що дохідності активів, з яких складено портфель, є незалежними в часі та нормально розподіленими. Це припущення є широко розповсюджене у фінансовій літературі. Незважаючи на критику цього припущення [48], [111], така модель поведінки дохідностей має низку важливих властивостей [47]. Крім того, як показано в [74], припущення щодо нормальності дохідностей з частотою меншою за щомісячну є повністю коректним. Також у [128] показано, що використання припущення про нормальність дохідностей замість врахування наявності «важких хвостів» не призводить до значних втрат.

Припустивши, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має k -вимірний нормальний розподіл, отримаємо, $\Gamma(h)=0$ для всіх $h \neq 0$ та, крім того,

$$q_0(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1} = \frac{1}{V_{GMV}}, \quad q_0(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu} = \frac{R_{GMV}}{V_{GMV}},$$

$$q_0(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}' \Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu} = s + \frac{R_{GMV}^2}{V_{GMV}},$$

$$q_0(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) = \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) = \frac{R_T - r_0}{V_T},$$

$$q_0(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) = (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) = \frac{(R_T - r_0)^2}{V_T}.$$

З наслідку 2.2, врахувавши, що $\mathbf{R}\Gamma(0)\mathbf{R}=\mathbf{R}$, отримаємо:

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_T \\ \hat{V}_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_T \\ V_T \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{T;1}^2 & \sigma_{T;12} \\ \sigma_{T;12} & \sigma_{T;2}^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{T;1}^2 &= V_T^2 \left(4 \frac{(R_T - r_0)^2}{V_T(R_T - r_0)^2} - 4 \frac{R_T - r_0}{V_T(R_T - r_0)} + \frac{1}{V_{GMV}} + \right. \\ &+ 2 \frac{(R_T - r_0)^4}{V_T^2(R_T - r_0)^2} - 4 \frac{(R_T - r_0)^3}{V_T^2(R_T - r_0)} + \frac{(R_T - r_0)^2}{V_T V_{GMV}} + \left. \frac{(R_T - r_0)^2}{V_T^2} \right) \\ &= \frac{V_T^2 + (R_T - r_0)^2(V_T - V_{GMV})}{V_{GMV}}. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} \sigma_{T;12} &= 2 \frac{V_T(V_T - V_{GMV})(V_T + (R_T - r_0)^2)}{V_{GMV}(R_T - r_0)}, \\ \sigma_{T;2}^2 &= 4 \frac{V_T^3(V_T - V_{GMV})}{V_{GMV}(R_T - r_0)^2} + \frac{V_T^2(4V_T - 2V_{GMV})}{V_{GMV}}. \end{aligned}$$

Оскільки $R_T > r_0$ та $V_T \geq V_{GMV}$, то ми отримуємо, що вибіркові оцінки очікуваної дохідності та дисперсії тангенсального портфеля фінансових активів є додатньо корельовані.

У випадку вибірових оцінок параметрів ефективної множини, маємо

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2s^2 \end{pmatrix} \right),$$

тобто в цьому випадку оцінки параметрів асимптотично незалежні. Цей результат відповідає дослідженню, проведеному в [52], де показано, що вибіркова оцінка дисперсії портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією є незалежною від вибірових оцінок очікуваної дохідності та параметра s .

Приклад 2.2. k -вимірний VARMA(1,1) процес з коефіцієнтами $\Phi = \varphi \mathbf{I}$ та $\Theta = \theta \mathbf{I}$, де φ та θ константи, а \mathbf{I} – k -вимірний одиничний матриця. Такий процес визначається

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \Phi(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \Theta \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ процес білого шуму з коваріаційною матрицею $\boldsymbol{\Sigma}$. В цьому випадку ми отримуємо [121],

$$\Gamma(h) = \varphi^{h-1} \eta \Gamma(0), \text{ для всіх } h=1, 2, \dots \text{ і } \eta = (\varphi - \theta)(1 - \varphi\theta) / (1 + \theta^2 - 2\varphi\theta).$$

Для вибірових оцінок параметрів ефективної множини, маємо

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= V_{GMV}(1+s) + 2\eta V_{GMV} \frac{1 + \eta s + \phi}{1 - \phi^2}, \quad \sigma_2^2 = 2V_{GMV}^2 \left(1 + \frac{2\eta^2}{1 - \phi^2} \right), \\ \sigma_3^2 &= 4s + s^2 + 2\eta \left(\frac{4s}{1 - \phi} + \frac{2\eta s^2}{1 - \phi^2} \right). \end{aligned}$$

Отже, незважаючи на те, що дохідності активів, з яких складено портфель, є залежними в часі, вибіркові оцінки параметрів ефективної множини залишаються незалежними (див. приклад 2.1).

З наслідку 2.2 ми отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{EU;1}^2 &= \sigma_1^2 + \beta^{-2} \sigma_3^2, \quad \sigma_{EU;2}^2 = \sigma_2^2 + \beta^{-4} \sigma_3^2, \quad \sigma_{EU;12} = \beta^{-3} \sigma_3^2, \\ \sigma_{T;1}^2 &= b_{11}^2 \sigma_1^2 + b_{12}^2 \sigma_2^2 + b_{13}^2 \sigma_3^2, \quad \sigma_{T;2}^2 = b_{21}^2 \sigma_1^2 + b_{22}^2 \sigma_2^2 + b_{23}^2 \sigma_3^2, \\ \sigma_{T;12} &= b_{11} a_{21} \sigma_1^2 + b_{12} a_{22} \sigma_2^2 + b_{13} a_{23} \sigma_3^2. \end{aligned}$$

Приклад 2.3. В теоремах 2.1-2.3 ми припускали, що нескінченні суми в (2.1) є збіжними. Виникає запитання, наскільки широким є клас стаціонарних процесів Гауса, для яких це припущення виконується. У [60] показано, що для всіх каузальних VARMA процесів існує $\varepsilon \in (0,1)$ та константа K такі, що

$$|\gamma_{ij}(h)| \leq K\varepsilon^{|h|},$$

де $\Gamma(h) = (\gamma_{ij}(h))$. Очевидно з попередньої нерівності випливає, що нескінченні суми в (2.1) є збіжними, а отже, каузальні *VARMA* процеси належать класу стаціонарних процесів Гауса, для яких наше припущення про збіжність нескінчених сум в (2.1) виконується.

Приклад 2.4. Розглянемо на прикладі даних, взятих з американської фондової біржі, наскільки добре асимптотичний розподіл наближає розподіл емпіричний. Припустимо, що ми формуємо портфель з трьох активів, акції компаній *JP Morgan Chase*, *McDonald's*, *IBM*.

Припустимо, що вектор доходностей вибраних акцій поводить ся як *VARMA*(1,1) процес з нормально розподіленими залишками, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор доходностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)'$ і дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$.

Ми припускаємо, що параметри *VARMA*(1,1) процесу \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$ є відомими. Значення для них ми отримаємо на основі даних про ціни акцій, з яких складено портфель, за період часу з 30.09.2013 по 31.08.2015. На основі цих даних обчислимо щотижневі доходності акцій за цей період часу. Отримаємо 100 спостереження. Використовуючи пакет *MTS* програми статистичного аналізу даних \mathbf{R} , отримаємо такі значення

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} -0.984 & -1.063 & -0.085 \\ 0.692 & 0.291 & 0.487 \\ 0.888 & -0.922 & 0.811 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -0.866 & -1.185 & -0.123 \\ 0.658 & 0.369 & 0.537 \\ 0.878 & -1.024 & 0.872 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 6.137 & 1.644 & 2.381 \\ 1.644 & 2.808 & 1.492 \\ 2.381 & 1.492 & 5.854 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'$$

З отриманої моделі визначимо параметри доходності

$$\boldsymbol{\mu} = (0.2936, 0.0319, -0.2380)',$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 6.354 & 1.461 & 2.290 \\ 1.461 & 3.051 & 1.735 \\ 2.290 & 1.735 & 6.489 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(1) = \begin{pmatrix} -0.441 & 0.108 & -0.096 \\ 0.015 & -0.175 & -0.011 \\ 0.370 & 0.021 & 0.028 \end{pmatrix}.$$

З теорем 2.1-2.3 отримаємо, що

$$\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, 2.7143),$$

$$\sqrt{n}(\hat{V}_{GMV} - V_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, 13.1292),$$

$$\sqrt{n}(\hat{s} - s) \xrightarrow{d} N(0, 0.1196),$$

$$\sqrt{n}(\hat{R}_{EU} - R_{EU}) \xrightarrow{d} N(0, 2.7045),$$

$$\sqrt{n}(\hat{V}_{EU} - V_{EU}) \xrightarrow{d} N(0, 13.1300).$$

Таблиця 2.1

Середнє значення та дисперсія відхилень вибірових оцінок характеристик портфеля з максимальною очікуваною корисністю складеного з акцій *Microsoft*, *JP Morgan Chase*, *McDonald's* та характеристик ефективної множини від точних значень.

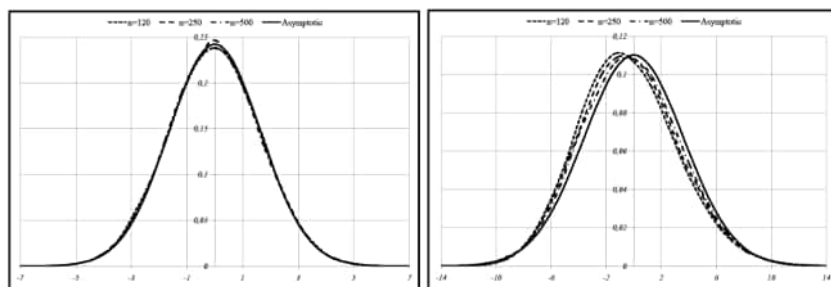
	n=120		n=250		n=500		Асимптотичні	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
R_{GMV}	-0.0144	2.7771	-0.0066	2.7459	-0.0282	2.7142	0	2.7143
V_{GMV}	-0.4629	12.8839	-0.3630	12.9648	-0.2223	13.0161	0	13.1292
s	0.1809	0.1618	0.0857	0.1295	0.0625	0.1233	0	0.1196
R_{EU}	0.0459	2.7725	0.0340	2.7392	0.0003	2.7026	0	2.7045
V_{EU}	-0.4428	12.8845	-0.3494	12.9657	-0.2128	13.0167	0	13.1300

Джерело: розроблено автором

Виникає запитання, наскільки добре наближення ми отримали? Оцінимо методом імітаційного моделювання середнє та дисперсії відхилення характеристик портфеля від точних значень. Для цього ми 50000 раз згенеруємо вибірки розміру $n \in \{120, 250, 500\}$ з *VARMA*(1,1) процесу з параметрами \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, і $\boldsymbol{\mu}$, та обчислимо вибірові оцінки характеристик портфеля на основі вибірових оцінок параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Gamma}(0)$, отриманих зі згенерованих вибірок.

Обчислимо середнє та дисперсії величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV})$, $\sqrt{n}(\hat{V}_{GMV} - V_{GMV})$, $\sqrt{n}(\hat{s} - s)$, $\sqrt{n}(\hat{R}_{EU} - R_{EU})$, $\sqrt{n}(\hat{V}_{EU} - V_{EU})$ для кожного n . Результати моделювання наведено у табл. 2.1.

З табл. 2.1 бачимо, що середні та дисперсії, отримані емпірично методом імітаційного моделювання, є близькі до асимптотичних значень, особливо при обсягах вибірки n більших за 120. З цього робимо висновок, що при плануванні діяльності інвестор може використовувати асимптотичний розподіл для вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів, наприклад, для побудови інтервалів довіри чи для тестування статистичних гіпотез.

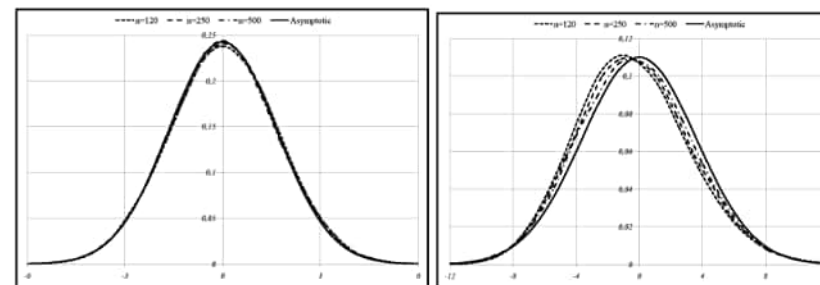


Джерело: розроблено автором

Рис. 2.1. Емпіричні ($n=120$, $n=250$, $n=500$) та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV})$ (зліва) та

$\sqrt{n}(\hat{V}_{GMV} - V_{GMV})$ (справа).

Порівняємо емпіричні розподіли відхилень $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV})$, $\sqrt{n}(\hat{V}_{GMV} - V_{GMV})$, $\sqrt{n}(\hat{R}_{EU} - R_{EU})$, $\sqrt{n}(\hat{V}_{EU} - V_{EU})$ з асимптотичним графічно (рис. 2.1-2.2). З рис. 2.1-2.2 бачимо, що для всіх обсягів вибірок стосовно яких будувалися емпіричні розподіли наближення асимптотичним розподілом є доволі добрим. Це ще раз підтверджує попередні спостереження, що для простоти розрахунків та з метою економії часу інвестор може використовувати у практичній діяльності асимптотичний розподіл вибірових оцінок.



Джерело: розроблено автором

Рис. 2.2. Емпіричні ($n=120$, $n=250$, $n=500$) та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{EU} - R_{EU})$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{V}_{EU} - V_{EU})$ (справа).

РОЗДІЛ 3

**ВРАХУВАННЯ ВАЖКИХ ХВОСТІВ
РОЗПОДІЛІВ ДОХІДНОСТЕЙ ПРИ
МОДЕЛЮВАННІ ПОВЕДІНКИ
ХАРАКТЕРИСТИК КЛАСИЧНИХ ПОРТФЕЛІВ**

**3.1. VARMA(p1, q1)-GARCH(p2, q2)
модель поведінки дохідностей**

У попередньому розділі ми припускали, що дохідності активів, з яких формується портфель, поведуться як стаціонарний процес Гауса. В [74] показано, що припущення про нормальність розподілу дохідностей активів є повністю коректним у випадку дохідностей з частотою меншою за щомісячну. У випадку щоденних дохідностей активів таке припущення часто не виконується, оскільки розподілам дохідностей притаманна наявність «важких хвостів», тобто імовірність набуття дохідностями екстремально високих чи екстремально низьких значень є більшою ніж для нормально розподіленої випадкової величини [50], [57], [72], [74], [107], [111], [118]. У такому випадку, для моделювання поведінки вектора дохідностей активів багатовимірні GARCH процеси часто використовуються у фінансовій літературі [55]. У цьому розділі ми розглянемо випадок, коли вектор дохідностей активів, з яких формується портфель, поводить як VARMA(p1, q1)-GARCH(p2, q2) процес. У цьому випадку дохідності не є ні незалежними в часі, ні нормально розподіленими. За такого припущення розподілам дохідностей притаманна властивість «важких хвостів», що є підтверджено практичними спостереженнями [48], [120].

Опишемо спочатку VARMA(p1, q1)-GARCH(p2, q2) процес.

Позначимо \mathbf{X}_t k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний VARMA(p1, q1)-GARCH(p2, q2) процес з

вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h)=(\gamma_{ij}(h))=$
 $= \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Тобто

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{p_1} \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{X}_{t-i} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t - \sum_{j=1}^{q_1} \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\eta}_{t-j}, \quad (3.1)$$

де

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{h}_t = \text{vech}(\mathbf{H}_t) = \boldsymbol{\omega} + \sum_{l=1}^{q_2} \mathbf{A}_l \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-l} \boldsymbol{\eta}'_{t-l}) + \sum_{m=1}^{p_2} \mathbf{B}_m \mathbf{h}_{t-m}, \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim E_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k, \Psi). \quad (3.4)$$

$k(k+1)/2$ -вимірний вектор $\boldsymbol{\omega}$, матриці $\boldsymbol{\Phi}_i$, $\boldsymbol{\Theta}_j$, розмірності $k \times k$ та матриці \mathbf{A}_l , \mathbf{B}_m розмірності $k(k+1)/2 \times k(k+1)/2$ – параметри процесу (3.1)-(3.4). Припускаємо, що порядок процесу p_1 , q_1 , p_2 , q_2 є відомим.

k -вимірний випадковий вектор \mathbf{Y} має багатовимірний еліптичний розподіл, якщо його характеристична функція має вигляд

$$M(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{Y})) = \exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}) \text{ для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$$

де $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2$, $\gamma = (-\psi'(0)/2)^{1/2}$ та функція ψ називається характеристичним генератором еліптичного розподілу. Клас еліптично розподілених випадкових величин включає в себе багато розподілів з «важкими хвостами». Ми припускаємо, що залишки процесу (3.1)-(3.4) $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ є еліптично розподілені з огляду на [58], де показано, що вектор дохідностей активів не є умовно нормально розподіленим, а має «важкі хвости». В [58] запропоновано використати t -розподіл замість нормального для моделювання процесу залишків $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$.

Використовуючи теорему 11.3.1 з [60], ми можемо переписати процес (3.1) у вигляді

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_i \boldsymbol{\eta}_{t-i}, \quad (3.5)$$

де $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{I}_k$ і $\mathbf{Y}_j = \sum_{i=1}^j \boldsymbol{\Phi}_i \mathbf{Y}_{j-i} - \boldsymbol{\Theta}_j$ при $j=1, 2, \dots$, $\boldsymbol{\Theta}_j = \mathbf{0}$ при $j > q_1$ та $\boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0}$ при $i > p_1$.

Нехай всі власні значення матриці $\sum_{i=1}^{\max\{p_2, q_2\}} (c_1 \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i)$ є меншими за модулем від 1, де $c_1 = E(\varepsilon_{i,t}^2)$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1,t}, \dots, \varepsilon_{k,t})$, $\mathbf{A}_i = \mathbf{0}$ при $i > q_2$ і $\mathbf{B}_j = \mathbf{0}$ при $j > p_2$. Ця умова є необхідною і достатньою, щоб процес $\{\boldsymbol{\eta}_t\}$ був слабо стаціонарним [73]. Тоді ми отримуємо, що процес $\{\boldsymbol{\eta}_t\}$ є процесом білого шуму з безумовною матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_\eta = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t')$, яку ми обчислюємо з

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}) = \text{vech}(E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t')) = c_1 \left(\mathbf{I}_{k(k+1)/2} - \sum_{i=1}^{\max\{p_2, q_2\}} (c_1 \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i) \right)^{-1} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.6)$$

Нехай $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_t = \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t')$. З (3.6) випливає, що

$$\mathbf{h}_t - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{c_1} = \sum_{i=1}^{q_2} \mathbf{A}_i (\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{t-i} - \boldsymbol{\sigma}) + \sum_{j=1}^{p_2} \mathbf{B}_j (\mathbf{h}_{t-j} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{c_1}).$$

Зауважимо, що $E(\mathbf{h}_t) = \text{vech}(E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t')) / c_1 = \boldsymbol{\sigma} / c_1$. Нехай $\mathbf{v}_t = \boldsymbol{\eta}_t - c_1 \mathbf{h}_t$. Процес $\{\mathbf{v}_t\}$ є процесом білого шуму, тобто $E(\mathbf{v}_t) = \mathbf{0}$ і $E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_s') = \mathbf{0}$ при $t \neq s$. Оскільки $\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{v}_t + c_1 \mathbf{h}_t$, то ми отримуємо, що вектор умовних коваріацій може бути записаний у вигляді *VARMA* процесу

$$\mathbf{h}_t - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{c_1} = \sum_{i=1}^{\max\{p_2, q_2\}} (c_1 \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i) (\mathbf{h}_{t-i} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{c_1}) + \sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{A}_j \mathbf{v}_{t-j}. \quad (3.7)$$

Процес (3.7) є еквівалентним до

$$\mathbf{h}_t = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{c_1} + \frac{1}{c_1} \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{v}_{t-i}, \quad (3.8)$$

де

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 = \mathbf{I}_{k(k+1)/2} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{\Lambda}_j = -\mathbf{B}_j + \sum_{i=1}^j (c_1 \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i) \boldsymbol{\Lambda}_{j-i}. \quad (3.9)$$

Крім того,

$$\boldsymbol{\Gamma}_G(h) = \text{Cov}(\mathbf{h}_{t+h}, \mathbf{h}_t) = \frac{1}{c_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}_{i+h} \boldsymbol{\Sigma}_v \boldsymbol{\Lambda}_i'. \quad (3.10)$$

Позначимо $\boldsymbol{\Sigma}_\eta = E(\boldsymbol{\eta}_t \boldsymbol{\eta}_t')$, $\boldsymbol{\Sigma}_h = E(\mathbf{h}_t \mathbf{h}_t')$ і $\boldsymbol{\Sigma}_v = E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t')$. З [82] ми отримуємо, що

$$\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_v) = \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_\eta) - c_1^2 \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_h) = (\mathbf{G}_k - c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2}) \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_h)$$

$$\text{з } \mathbf{G}_k = c_2 (2(\mathbf{D}_k^+ \otimes \mathbf{D}_k^+) (\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{K}_k \otimes \mathbf{I}_k) (\mathbf{D}_k \otimes \mathbf{D}_k) + \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2})$$

і $c_2 = E(\varepsilon_{i,t}^4) / 3$. З (3.10) отримуємо, що

$$\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}_h) = (c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} (\boldsymbol{\Lambda}_j \otimes \boldsymbol{\Lambda}_j) (\mathbf{G}_k - c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2}))^{-1} \text{vec}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}') \quad (3.11)$$

і

$$\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}_G(0)) = ((c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2} - \sum_{j=1}^{+\infty} (\boldsymbol{\Lambda}_j \otimes \boldsymbol{\Lambda}_j) (\mathbf{G}_k - c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2}))^{-1} - \frac{1}{c_1^2} \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2}) \text{vec}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}'). \quad (3.12)$$

Константи c_1 та c_2 залежать від типу еліптичного розподілу вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_t$. Наприклад, у випадку нормальності розподілу вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ отримуємо $c_1 = c_2 = 1$, а у випадку t -розподілу з $v > 4$ ступенями вільності отримуємо $c_1 = v / (v-2)$ і $c_2 = (v-2) / (v-4)$.

Припустивши, що $\det(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^{p_1} \boldsymbol{\Phi}_i z) \neq 0$ при $|z| \leq 1$, ми отримуємо,

що процес $\{\mathbf{X}_t\}$ є слабо стаціонарним з вектором середніх $E(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\boldsymbol{\Gamma}(h)$ вигляду

$$\boldsymbol{\Gamma}(h) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_{i+h} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Y}_i'. \quad (3.13)$$

3.2. Властивості оцінок середнього та матриці коваріацій

Припустимо, що процес $\{\mathbf{X}_t\}$ поводить як *VARMA*(p_1, q_1)-*GARCH*(p_2, q_2) процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\boldsymbol{\Gamma}(h) = (\gamma_{ij}(h)) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h .

Очевидно, що $\Gamma(0)$ є матрицею коваріацій процесу $\{\mathbf{X}_t\}$. Ми припускаємо, що $\Gamma(0)$ додатно визначена.

Нехай $\theta = (\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\Gamma(0)))'$. Перед дослідженням статистичних властивостей портфелів фінансових активів нам необхідно оцінити вектор параметрів θ . Нехай ми маємо вибірку $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ попередніх значень процесу $\{\mathbf{X}_t\}$. Позначимо оцінку θ через $\hat{\theta}^* = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\Gamma}^*(0)))'$, де

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \quad \text{і} \quad \hat{\Gamma}^*(0) = c_1 \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \right) \mathbf{Y}_j'. \quad (3.14)$$

Ми очікуємо, що оцінка (3.14) матриці $\Gamma(0)$ є кращою зі статистичної точки зору, ніж (1.27), оскільки $\hat{\Gamma}^*(0)$ виражена через матриці умовної коваріації \mathbf{H}_t , які містять більше інформації стосовно коваріації, ніж $\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t'$.

Оцінку для дисперсії ми отримуємо, підставляючи $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i$

замість $\boldsymbol{\Sigma}$ в (3.13). Оскільки $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i$ є незміщеною оцінкою для $\boldsymbol{\Sigma}$, то ми отримуємо, що $\hat{\Gamma}^*(0)$ є незміщеною оцінкою матриці $\Gamma(0)$.

Теорема 3.1. *Нехай процес $\{\mathbf{X}_t\}$ поводитья як VARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2) процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = (\gamma_{ij}(h)) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Нехай ми маємо вибірку $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ попередніх значень процесу $\{\mathbf{X}_t\}$. Тоді оцінки (3.14) є некорельованими, тобто $\text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \text{vech}(\hat{\Gamma}^*(0))) = \mathbf{0}$.*

Доведення. Покажемо спочатку, що в умовах теореми виконується $\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_i), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{0}$. Нехай $F_j = \sigma(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{j-1}, \dots)$ σ -поле згенероване минулими значеннями $\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{j-1}, \dots$. Далі ми розглянемо два випадки $i \leq j$ та $i > j$.

Нехай $i \leq j$. Оскільки \mathbf{H}_i є вимірною за F_j , ми отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_i), \boldsymbol{\eta}_j) &= \text{M}(\mathbf{h}_i \boldsymbol{\eta}_j') = \text{M}(\mathbf{h}_i (\mathbf{H}_j^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_j)') = \\ &= \text{M}(\text{M}(\mathbf{h}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) = \text{M}(\mathbf{h}_i \text{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) \mathbf{H}_j^{1/2}). \end{aligned}$$

З (3.4) випливає, що $\text{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) = \mathbf{0}$ і тому

$$\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_i), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{0}.$$

Нехай тепер $i > j$. Використаємо принцип математичної індукції. При $i = j+1$ маємо

$$\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \text{M}(\mathbf{h}_{j+1} \boldsymbol{\eta}_j') = \text{M}(\text{M}(\mathbf{h}_{j+1} \boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)).$$

Враховавши (3.3), отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+1}), \boldsymbol{\eta}_j) &= \boldsymbol{\omega} \text{M}(\text{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{q_2} \mathbf{A}_k \text{M}(\text{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+1-k}) \boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{p_2} \mathbf{B}_k \text{M}(\text{M}(\mathbf{h}_{j+1-k} \boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) = \boldsymbol{\omega} \text{M}(\text{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) \mathbf{H}_j^{1/2}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{q_2} \mathbf{A}_k \text{M}(\text{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+1-k}) \boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{p_2} \mathbf{B}_k \text{M}(\mathbf{h}_{j+1-k} \text{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) \mathbf{H}_j^{1/2}). \end{aligned}$$

Оскільки $\text{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) = \mathbf{0}$ і $j+1-k \leq j$ при $k \geq 1$, маємо

$$\text{M}(\boldsymbol{\omega} \text{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) \mathbf{H}_j^{1/2}) = \mathbf{0}$$

і

$$\sum_{k=1}^{p_2} \mathbf{B}_k \text{M}(\mathbf{h}_{j+1-k} \text{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_j' | F_j) \mathbf{H}_j^{1/2}) = \mathbf{0}$$

при $k \geq 1$. Отже,

$$\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{A}_1 \text{M}(\text{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}_j') \boldsymbol{\varepsilon}_j' \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=2}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+1-k}) \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) = \\
& = \mathbf{A}_1 \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{H}_j^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2}) \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) + \\
& + \sum_{k=2}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+1-k}) \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}'_j | F_j) \mathbf{H}_j^{1/2}) = \\
& = \mathbf{A}_1 \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{H}_j^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2}) \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)).
\end{aligned}$$

Остання рівність випливає з факту, що $\boldsymbol{\eta}_{j+1-k}$ є вимірною за F_j при $k \geq 2$ і $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}'_j | F_j) = \mathbf{0}$. Використовуючи те, що всі непарні моменти процесу $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ дорівнюють 0, ми отримаємо

$$\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{A}_1 \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{H}_j^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_j \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2}) \boldsymbol{\varepsilon}'_j \mathbf{H}_j^{1/2} | F_j)) = \mathbf{0}.$$

Припустимо, що наше твердження виконується для $l > 1$, тобто

$$\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{M}(\mathbf{h}_{j+1} \boldsymbol{\eta}'_j) = \mathbf{0}.$$

Покажемо, що наше твердження виконується для $l+1$. Маємо

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+l+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{M}(\mathbf{h}_{j+l+1} \boldsymbol{\eta}'_j) = \\
& = \boldsymbol{\omega} \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}'_j) + \sum_{k=1}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j) + \sum_{k=1}^{p_2} \mathbf{B}_k \mathbf{M}(\mathbf{h}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_j).
\end{aligned}$$

Використовуючи припущення індукції та те, що $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}_l) = \mathbf{0}$, отримаємо

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}'_j) = \mathbf{0} \text{ і } \sum_{k=1}^{p_2} \mathbf{B}_k \mathbf{M}(\mathbf{h}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_j) = \mathbf{0}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+l+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \sum_{k=1}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j) = \\
& = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j) + \sum_{k=l+2}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{A}_{l+1} \mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}'_j) \boldsymbol{\eta}'_j) = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j | F_{j+l+1-k})) + \\
& + \sum_{k=l+2}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j | F_j)) + \mathbf{A}_{l+1} \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}'_j) \boldsymbol{\eta}'_j | F_j)).
\end{aligned}$$

Маємо, що $\sum_{k=l+2}^{q_2} \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j | F_j)) = \mathbf{0}$, оскільки

ки $\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k}$ є вимірною за F_j при $k \geq l+2$. Крім того, $\mathbf{A}_{l+1} \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_j \boldsymbol{\eta}'_j) \boldsymbol{\eta}'_j | F_j)) = \mathbf{0}$, бо непарні моменти процесу $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ дорівнюють 0. Отже, останню рівність ми можемо спростити до вигляду

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+l+1}), \boldsymbol{\eta}_j) = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\mathbf{M}(\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j | F_{j+l+1-k})) = \\
& = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_{j+l+1-k} | F_{j+l+1-k})) \boldsymbol{\eta}'_j) = \\
& = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{M}(\mathbf{H}_{j+l+1-k}^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\varepsilon}'_{j+l+1-k} \mathbf{H}_{j+l+1-k}^{1/2} | F_{j+l+1-k})) \boldsymbol{\eta}'_j) = \\
& = \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+l+1-k}^{1/2} \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\varepsilon}'_{j+l+1-k} | F_{j+l+1-k}) \mathbf{H}_{j+l+1-k}^{1/2}) \boldsymbol{\eta}'_j).
\end{aligned}$$

З (3.4) та [76] випливає, що $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\varepsilon}'_{j+l+1-k} | F_{j+l+1-k}) = -2\boldsymbol{\Psi}'(0)\mathbf{I}$. Звідси

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+l+1-k}^{1/2} \mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\varepsilon}'_{j+l+1-k} | F_{j+l+1-k}) \mathbf{H}_{j+l+1-k}^{1/2}) \boldsymbol{\eta}'_j) = \\
& = -2\boldsymbol{\Psi}'(0) \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\text{vech}(\mathbf{H}_{j+l+1-k}) \boldsymbol{\eta}'_j) = -2\boldsymbol{\Psi}'(0) \sum_{k=1}^l \mathbf{A}_k \mathbf{M}(\mathbf{h}_{j+l+1-k} \boldsymbol{\eta}'_j) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

з припущення індукції. Отже, ми довели, що $\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_l), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{0}$.

Маємо

$$\text{Cov}(\text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}^*(0)), \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \text{Cov}(\text{vech}(c_1 \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Y}_j (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i) \mathbf{Y}'_j), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i).$$

Використовуючи теорему 16.2.1 з [85], рівність (3.5) та зв'язок між операторами vec та vech , отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\text{vech}(\hat{\Gamma}^*(0)), \hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \frac{c_1}{n^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_l \otimes \mathbf{Y}_l \right) \mathbf{D}_k \text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_j), \boldsymbol{\eta}_{i-m}) \mathbf{Y}_m' = \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

де остання рівність випливає з того, що $\text{Cov}(\text{vech}(\mathbf{H}_i), \boldsymbol{\eta}_j) = \mathbf{0}$. Теорему доведено.

Враховуючи, що процеси $\{\mathbf{X}_t\}$ та $\{\mathbf{h}_t\}$ є лінійними та результат теореми 3.1, робимо висновок, що випадковий вектор $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \boldsymbol{\theta})$ є асимптотично нормально розподілений з середнім $\mathbf{0}$ та матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Omega}$, яка дорівнює ([60], [84], [127])

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{0}_{k \times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2 \times k} & \boldsymbol{\Omega}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

де

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h)$$

і

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = c_1^2 \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}_G(h) \mathbf{D}_k' \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}_k^+$$

з $\boldsymbol{\Gamma}(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_{t+h}, \mathbf{X}_t)$ і $\boldsymbol{\Gamma}_G(h) = \text{Cov}(\mathbf{h}_{t+h}, \mathbf{h}_t)$ визначена в (3.12).

3.3. Моделювання ваг класичних портфельів за припущення поведінки доходностей як VARMA(p₁, q₁)-GARCH(p₂, q₂) процесу

Розглянемо статистичні властивості вибірових оцінок ваг портфельів фінансових активів з раціональними структурами (1.7), (1.15), (1.24). Зазначимо, що ми припускаємо, що вектор доходностей активів \mathbf{X}_t , з яких ми формуємо портфель, поводитья як

VARMA(p₁, q₁)-GARCH(p₂, q₂) процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ і матрицею автоковаріацій $\boldsymbol{\Gamma}(h) = (\gamma_{ij}(h)) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі змищенням h . Ця модель є узагальненням моделі VARMA(p₁, q₁)-GARCH(p₂, q₂), запропонованої в [99]. Ми, на відміну від моделі, розглянутої в [99], моделюємо залишки, використовуючи багатовимірний GARCH процес, запропонований в [57], так званий VEC процес. Зауважимо також, що тут ми використовуємо оцінки невідомих параметрів (3.14), а не (1.27). Тобто, наприклад, оцінки ваг портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю матимуть вигляд

$$\hat{\mathbf{w}}_{EU} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}^*(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}^*(0)^{-1} \mathbf{1}} + \beta^{-1} \mathbf{R} \hat{\boldsymbol{\mu}},$$

де

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Gamma}^*(0)^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Gamma}^*(0)^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}^*(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}^*(0)^{-1} \mathbf{1}}.$$

Ми розглядаємо оцінку $\hat{\mathbf{w}}_{EU}$ як неперервно диференційовану вектор-функцію з аргументом $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$, тобто $\mathbf{g}_{EU}(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{\mathbf{w}}_{EU}$. З Твердження 2.1 ми отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{EU} - \mathbf{w}_{EU}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{G}'_{EU} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_{EU}),$$

де $\mathbf{G}_{EU} = \left(\frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right)'$ – матриця розміру $k \times k(k+3)/2$. Для спрощення подальших викладок введемо позначення

$$a_1 = \frac{1 - \beta^{-1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}, \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_V = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \quad \text{і} \quad \boldsymbol{\Xi}_G = c_1^2 \mathbf{D}_k \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}_G(h) \mathbf{D}_k', \quad (3.17)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{j=0}^{+\infty} (\mathbf{Y}_j' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{A} \otimes \mathbf{Y}_j' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{B}), \quad (3.18)$$

для деяких матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} розміру $k \times m_1$ та $k \times m_2$ і $m_1, m_2 \in \{1, k\}$.

Теорема 3.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний $VARMA(p_1, q_1)$ - $GARCH(p_2, q_2)$ процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріації $\Gamma(h) = (\gamma_{ij}(h)) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Припустимо, що ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (3.15) є збіжними. Тоді

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{EU} - \mathbf{w}_{EU}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_{EU}),$$

де

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_{EU} = & \beta^{-2} \mathbf{R} \boldsymbol{\Xi}_V \mathbf{R} + (a_1 \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{I}_k) - a_1 \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_k) - \beta^{-1} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \mathbf{w}'_{GMV})' \times \\ & \times \boldsymbol{\Xi}_G (a_1 \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{I}_k) - a_1 \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_k) - \beta^{-1} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \mathbf{w}'_{GMV}), \quad (3.19) \\ & a_1, \boldsymbol{\Xi}_V, \boldsymbol{\Xi}_G, \mathbf{q}(\cdot, \cdot) \text{ задані в (3.16)-(3.18), а } \mathbf{w}_{GMV} - \text{ в (1.7).} \end{aligned}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що для довільних матриць \mathbf{A} та \mathbf{B} розміру $k \times m_1$ та $k \times m_2$ з $m_1, m_2 \in \{1, k\}$ виконується рівність

$$\mathbf{D}'_k \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{D}'_k \mathbf{q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \quad (3.20)$$

З властивостей матричних операторів [105] маємо для довільної матриці \mathbf{A} розміру $k \times k$

$$\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{D}_k = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{D}_k.$$

Тому, враховуючи властивості добутку Кронекера [105],

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}'_k \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \\ & = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k)' = \\ & = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{Y}_j \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0) \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k)' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \left(\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{B} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k \right)' = \\ & = \mathbf{D}'_k \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{B} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{Y}_j \right) = \mathbf{D}'_k \mathbf{q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Отже, рівність (3.20) є справедлива.

Маємо $\mathbf{G}_{EU} = \left(\frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right)'$, де

$$\frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} + \beta^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \right)'}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \beta^{-1} \mathbf{R}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} = & \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} \frac{\partial (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} - \frac{1}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})^2} \frac{\partial (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} + \\ & + \beta^{-1} \frac{\partial (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} - \beta^{-1} \frac{\partial \left(\frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} \right)'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)}. \end{aligned}$$

Враховавши, що для довільних n -вимірних векторів \mathbf{a} , \mathbf{b} та довільної симетричної матриці \mathbf{A} розмірності $n \times n$ маємо

$$\frac{\partial \mathbf{a}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}{\partial \text{vech} \mathbf{A}} = \frac{\partial (\text{vec} \mathbf{A}^{-1})'}{\partial \text{vech} \mathbf{A}} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}' \mathbf{A}^{-1}}{\partial \text{vech} \mathbf{A}} = \frac{\partial (\text{vec} \mathbf{A}^{-1})'}{\partial \text{vech} \mathbf{A}} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{I}_n),$$

отримаємо

$$\frac{\partial \mathbf{w}'_{EU}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} = \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \left(\frac{\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}} - \frac{(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}}{(\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})^2} + \beta^{-1} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) \right) -$$

$$-\frac{\beta^{-1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1})}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} + \frac{\beta^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} \frac{\partial(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}.$$

Далі, використовуючи правила матричного диференційного числення [85], [105],

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{w}'_{EU}}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(\frac{\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} - \frac{(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + \frac{\beta^{-1}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} \right) - \\ &= \frac{\beta^{-1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \mathbf{1}\Gamma(0)^{-1} - \frac{\beta^{-1}\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \frac{\partial(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1})}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(\frac{1}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} (1 - \beta^{-1}\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\beta^{-1}\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1} - 1)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{\beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \right) = \\ &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(\frac{a_{11}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{a_{11}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{\beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \right). \end{aligned}$$

З (3.15) випливає, що

$$\mathbf{G}'_{EU} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_{EU} = \mathbf{S}_{11} + \mathbf{S}_{12},$$

де

$$\mathbf{S}_{11} = \left(\frac{\partial\mathbf{w}'_{EU}}{\partial\boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial\mathbf{w}'_{EU}}{\partial\boldsymbol{\mu}} \right) = \beta^{-2} \mathbf{R} \boldsymbol{\Xi}_v \mathbf{R}.$$

Нехай $a_1 = (1 - \beta^{-1}\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})/\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}$. Використавши (2.4), ми отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12} &= c_1^2 \left(\frac{\partial\mathbf{w}'_{EU}}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma_G(h) \mathbf{D}'_k \times \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial\mathbf{w}'_{EU}}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \right) = \\ &= c_1^2 (a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV})' \times \\ &\quad \times \left(\frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma_G(h) \mathbf{D}'_k \times \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \right) \times \\ &\quad \times (a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV}) = \\ &= c_1^2 (a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV})' \times \\ &\quad \times \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right) \mathbf{D}_k \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma_G(h) \mathbf{D}'_k \times \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}'_k (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}'_k \times \\ &\quad \times (a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - a_1(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \beta^{-1}(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV}). \end{aligned}$$

З рівності (3.20) отримаємо,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12} &= (a_1\mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{I}_k) - a_1\mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1}\mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_k) - \beta^{-1}\mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV})' \times \\ &\quad \times \boldsymbol{\Xi}_G (a_1\mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{I}_k) - a_1\mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \beta^{-1}\mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_k) - \beta^{-1}\mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV}). \end{aligned}$$

Склавши вирази для \mathbf{S}_{11} та \mathbf{S}_{12} , отримаємо твердження теореми.

Підставивши $\beta=\infty$ у (3.19), отримаємо асимптотичний розподіл вибірових оцінок ваг портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією (1.7). Сформулюємо цей результат у вигляді наслідку.

Наслідок 3.1. В умовах теореми 3.2 виконується

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{GMV} - \mathbf{w}_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{\Omega}_{GMV}),$$

де

$$\mathbf{\Omega}_{GMV} = \frac{1}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{I}_k) - \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV})' \Xi_G (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{I}_k) - \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV}). \quad (3.21)$$

У наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл вибірових оцінок ваг тангенсiального портфеля фінансових активів (1.15).

Теорема 3.3. В умовах теореми 3.2 виконується

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_T - \mathbf{w}_T) \xrightarrow{d} N(0, \mathbf{\Omega}_T),$$

де

$$\mathbf{\Omega}_T = \frac{1}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}))^2} ((\mathbf{I}_k - \mathbf{w}_T\mathbf{1}')\Gamma(0)^{-1}\Xi_V\Gamma(0)^{-1}(\mathbf{I}_k - \mathbf{1}\mathbf{w}'_T) + (\mathbf{q}((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}), \mathbf{I}_k) - \mathbf{q}((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}), \mathbf{1})\mathbf{w}'_T)' \Xi_G (\mathbf{q}((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}), \mathbf{I}_k) - \mathbf{q}((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}), \mathbf{1})\mathbf{w}'_T)). \quad (3.22)$$

Доведення. Доведення є аналогічним до доведення теореми 2.1, враховуючи, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}'_T}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \frac{\partial \left(\frac{\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})} \right)'}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \\ &= \frac{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}) \frac{\partial((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1})}{\partial \boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1})}{\partial \boldsymbol{\mu}} (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}))^2} = \\ &= \frac{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1} - \Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}))^2} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}'_T}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} &= \frac{1}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} - \\ &- \frac{1}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}))^2} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1} = \\ &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \left(\frac{(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}) \otimes \mathbf{I}_k}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})} - \frac{((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}))^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})} \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} (((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}) \otimes \mathbf{I}_k) - ((\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_T). \end{aligned}$$

Поклавши в (3.22) $r_0=0$, тобто виключивши можливість безризикового розміщення коштів, отримаємо асимптотичний розподіл вибірових оцінок ваг портфеля з максимальним відношенням Шарпа за відсутності можливості безризикового розміщення коштів (1.18), який відіграє важливу роль на практиці [63], [104].

Результати теорем 3.2-3.3. та наслідку 3.1 можуть бути використані для побудови статистичного тесту. Розглянемо, наприклад, випадок портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю. Нехай нам потрібно протестувати чи ваги портфеля \mathbf{w}_{EU} збігаються із вагами еталонного портфеля \mathbf{w}_0 . Статистичний тест матиме вигляд:

$$H_0: \mathbf{w}_{EU} = \mathbf{w}_0 \text{ проти } H_1: \mathbf{w}_{EU} \neq \mathbf{w}_0$$

зі статистикою

$$T_{EU} = n(\hat{\mathbf{w}}_{EU} - \mathbf{w}_{EU})' \hat{\mathbf{\Omega}}_{EU}^{-1} (\hat{\mathbf{w}}_{EU} - \mathbf{w}_{EU}).$$

З теореми 3.2 та з консистентності $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ випливає, що T_{EU} є асимптотично χ^2 розподілена з k ступенями вільності за виконання гіпотези H_0 .

3.4. Моделювання характеристик класичних портфельів за припущення поведінки дохідностей як VARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2) процесу

У попередньому розділі ми дослідили статистичні властивості вибіркового оцінок ваг портфельів фінансових активів з раціональними структурами (1.7), (1.15), (1.24). Частіше інвестора цікавлять не ваги портфеля, а його характеристики, очікувана дохідність і дисперсія. У цьому розділі ми дослідимо властивості характеристик портфельів фінансових активів з раціональними структурами за умови, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t , з яких ми формуємо портфель, поводитья як VARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2) процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h)=(\gamma_{ij}(h))=\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Аналогічно, як у розділі 2.2, вибіркові оцінки очікуваної дохідності та дисперсії представимо у вигляді неперервно диференційованих функцій від вектора оцінок $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$, тобто

$$g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{R}_{GMV}, \quad g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{V}_{GMV}, \quad g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{s},$$

$$g_4(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{R}_{EU}, \quad g_5(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{V}_{EU},$$

$$g_6(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{R}_T, \quad g_7(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \hat{V}_T.$$

Використовуючи твердження 2.1, отримаємо

$$\sqrt{n}(g_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) - g_i(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{G}'_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_i),$$

для всіх $i=1, \dots, 7$, \mathbf{G}_i $k(k+3)/2$ -вимірний вектор з елементами $\partial g_i / \partial \theta_1, \dots, \partial g_i / \partial \theta_{k(k+3)/2}$ та матриця $\boldsymbol{\Omega}$ задана у (3.15).

Теорема 3.4. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний VARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2) процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоко-

варіацій $\Gamma(h)=(\gamma_{ij}(h))=\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Припустимо, що ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (3.15), є збіжними. Тоді

$$a) \sqrt{n}(\hat{R}_{EU} - R_{EU}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{EU;1}^2), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{EU;1}^2 = & \left(\mathbf{w}_{GMV} + 2\beta^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \right)' \boldsymbol{\Xi}_V \left(\mathbf{w}_{GMV} + 2\beta^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \right) + \\ & + \frac{1}{4} (a_{12} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + 2a_{11} \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 2\beta^{-1} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}))' \times \\ & \times \boldsymbol{\Xi}_G (a_{12} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + 2a_{11} \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 2\beta^{-1} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})). \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$б) \sqrt{n}(\hat{V}_{EU} - V_{EU}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{EU;2}^2), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{EU;2}^2 = & 4\beta^{-4} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\Xi}_V \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + (a_{21} \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) - \beta^{-2} R_{GMV} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ & + \beta^{-2} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}))' \boldsymbol{\Xi}_G (a_{21} \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) - \beta^{-2} R_{GMV} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \beta^{-2} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})), \end{aligned} \quad (3.24)$$

a_{11}, a_{12}, a_{21} задані в теоремі 2.1, $\boldsymbol{\Xi}_V, \boldsymbol{\Xi}_G, \mathbf{q}(\cdot; \cdot)$ задані в (3.17)-(3.18), а \mathbf{w}_{GMV} та R_{GMV} – в (1.7)-(1.8).

Доведення. Доведемо спочатку, що для довільних k -вимірних векторів \mathbf{a}, \mathbf{b} виконується рівність

$$\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mathbf{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{q}(\mathbf{b}, \mathbf{a})). \quad (3.25)$$

Оскільки $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k' = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_{kk})$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \\ = & \frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Враховавши, що

$$(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) = (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \quad \text{і}$$

$\mathbf{N}_k = \mathbf{N}'_k = \mathbf{N}_k^2$, отримаємо

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j \right)' (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}).$$

Зважаючи на те, що для довільних матриць \mathbf{A} розмірності $m \times n$ та \mathbf{B} розмірності $p \times q$ та p -вимірному вектора \mathbf{b} виконуються рівності

$$\mathbf{K}_{pm} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{b} \otimes \mathbf{A}, \quad \mathbf{K}_{mp} (\mathbf{b} \otimes \mathbf{A}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{b},$$

та врахувавши властивості добутку Кронекера отримаємо потрібне твердження. Решта доведення є аналогічним до доведення теореми 2.1 з матрицею Ω вигляду (3.15). Теорему доведено.

Підставивши $\beta = \infty$ у (3.23)-(3.24) отримаємо асимптотичний розподіл вибірових оцінок очікуваної доходності та дисперсії портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією (1.7). Сформулюємо цей результат у вигляді наслідку.

Наслідок 3.2. В умовах теореми 3.4 виконується

$$\text{а) } \sqrt{n} (\hat{R}_{GMV} - R_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_1^2), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = & V_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \Xi_V \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1} + \frac{1}{4} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \mathbf{1}))' \times \\ & \times \Xi_G (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \mathbf{1}))); \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\text{б) } \sqrt{n} (\hat{V}_{GMV} - V_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_2^2), \quad \text{де}$$

$$\sigma_2^2 = V_{GMV}^4 \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1})' \Xi_G \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}). \quad (3.27)$$

Розподіли оцінок характеристик тангенціального портфеля фінансових активів наведено в наступній теоремі.

Теорема 3.5. В умовах теореми 3.4 виконується

$$\text{а) } \sqrt{n} (\hat{R}_T - R_T) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{T,1}^2), \quad \text{де}$$

$$\sigma_{T,1}^2 = V_T^2 \left(2 \frac{\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}}{R_T - r_0} - \mathbf{1} \right)' \Gamma(0)^{-1} \Xi_V \Gamma(0)^{-1} \left(2 \frac{\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}}{R_T - r_0} - \mathbf{1} \right) +$$

$$+ V_T^2 \left(\left(\frac{1}{R_T - r_0} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) - \frac{1}{2} (\mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \right. \right. \quad (3.28)$$

$$\left. \left. + \mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) \right)' \Xi_G \left(\frac{1}{R_T - r_0} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) - \frac{1}{2} (\mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1}) + \mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) \right);$$

$$\text{б) } \sqrt{n} (\hat{V}_T - V_T) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{T,2}^2), \quad \text{де}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{T,2}^2 = & \frac{4V_T^4}{(R_T - r_0)^2} \left(\frac{\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}}{R_T - r_0} - \mathbf{1} \right)' \Gamma(0)^{-1} \Xi_V \Gamma(0)^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}}{R_T - r_0} - \mathbf{1} \right) + \\ & + \frac{V_T^4}{(R_T - r_0)^2} \left(\left(\frac{1}{R_T - r_0} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) - \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1}) - \right. \right. \quad (3.29) \\ & \left. \left. - \mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) \right)' \Xi_G \left(\frac{1}{R_T - r_0} \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) - \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}, \mathbf{1}) - \mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right). \end{aligned}$$

Доведення. Доведення теореми є повністю аналогічне доведенню теореми 2.2 з матрицею Ω вигляду (3.15), враховуючи, що

$$\frac{1}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} = \frac{V_T}{R_T - r_0}.$$

3.5. Моделювання параметрів ефективної множини

З метою дослідження взаємозв'язку між оцінками очікуваної доходності та дисперсії портфельів фінансових активів з раціональними структурами дослідимо спочатку спільний розподіл вектора вибірових оцінок параметрів ефективної множини $(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})'$.

Розглянемо функцію $\mathbf{g}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = (g_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}), g_2(\hat{\boldsymbol{\theta}}), g_3(\hat{\boldsymbol{\theta}}))' = (\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})'$, яка є неперервно диференційованою. Тому з твердження 2.1

отримаємо, що $\sqrt{n}(\hat{\mathbf{g}}_1(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{g}_1(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \mathbf{G}'_1 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_1)$, де матриця $\boldsymbol{\Omega}$ задана у (3.15), а \mathbf{G}_1 складена з похідних $\partial \mathbf{g}_1 / \partial \boldsymbol{\theta}$.

Теорема 3.6. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний VARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2) процес (3.1)-(3.4) з вектором середніх $\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\boldsymbol{\Gamma}(h) = (\gamma_{ij}(h)) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$ зі зміщенням h . Припустимо, що ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (3.15), є збіжними. Тоді*

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_1^2 = V_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Xi}_V \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1} + \frac{1}{4} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \mathbf{1}))' \times \\ \times \boldsymbol{\Xi}_G (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \mathbf{1}))), \quad (3.30)$$

$$\sigma_2^2 = V_{GMV}^4 \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1})' \boldsymbol{\Xi}_G \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (3.31)$$

$$\sigma_3^2 = 4 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\Xi}_V \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1})' \boldsymbol{\Xi}_G \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}), \quad (3.32)$$

$$\sigma_{12} = \frac{V_{GMV}^3}{2} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}) + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \mathbf{1}))' \boldsymbol{\Xi}_G \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (3.33)$$

$$\sigma_{13} = 2 V_{GMV} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Xi}_V \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \frac{V_{GMV}}{2} (\mathbf{q}(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}) + \\ + \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \mathbf{1}))' \boldsymbol{\Xi}_G \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}), \quad (3.34)$$

$$\sigma_{23} = V_{GMV}^2 \mathbf{q}(\boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} - R_{GMV} \mathbf{1})' \boldsymbol{\Xi}_G \mathbf{q}(\mathbf{1}, \mathbf{1}), \quad (3.35)$$

де $\mathbf{q}(\cdot, \cdot)$ задана в (3.18).

Доведення. Доведення аналогічне до доведення теореми 2.3 з матрицею $\boldsymbol{\Omega}$ вигляду (3.15).

Оскільки характеристики портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю і тангенціального портфеля можна виразити через параметри ефективної множини (2.16)-(2.19), то з теореми 3.6 випливають сукупні розподіли випадкових векторів $(\hat{R}_{EU}, \hat{V}_{EU})'$ та $(\hat{R}_T, \hat{V}_T)'$.

Наслідок 3.3. *В умовах теореми 3.6. виконується*

$$\text{а) } \sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{EU} \\ \hat{V}_{EU} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{EU} \\ V_{EU} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{EU;1}^2 & \sigma_{EU;12} \\ \sigma_{EU;12} & \sigma_{EU;2}^2 \end{pmatrix} \right), \text{ де}$$

$$\sigma_{EU;1}^2 = \sigma_1^2 + 2\beta^{-1} \sigma_{13} + \beta^{-2} \sigma_3^2,$$

$$\sigma_{EU;2}^2 = \sigma_2^2 + 2\beta^{-2} \sigma_{23} + \beta^{-4} \sigma_3^2,$$

$$\sigma_{EU;12} = \sigma_{12} + \beta^{-1} \sigma_{23} + \beta^{-2} \sigma_{13} + \beta^{-3} \sigma_3^2.$$

$$\text{б) } \sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_T \\ \hat{V}_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_T \\ V_T \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{T;1}^2 & \sigma_{T;12} \\ \sigma_{T;12} & \sigma_{T;2}^2 \end{pmatrix} \right), \text{ де}$$

$$\sigma_{T;1}^2 = b_{11}^2 \sigma_1^2 + b_{12}^2 \sigma_2^2 + b_{13}^2 \sigma_3^2 + 2b_{11} b_{12} \sigma_{12} + 2b_{11} b_{13} \sigma_{13} + 2b_{12} b_{13} \sigma_{23},$$

$$\sigma_{T;2}^2 = b_{21}^2 \sigma_1^2 + b_{22}^2 \sigma_2^2 + b_{23}^2 \sigma_3^2 + 2b_{21} b_{22} \sigma_{12} + 2b_{21} b_{23} \sigma_{13} + 2b_{22} b_{23} \sigma_{23},$$

$$\sigma_{T;12} = b_{11} b_{21} \sigma_1^2 + b_{12} b_{22} \sigma_2^2 + b_{13} b_{23} \sigma_3^2 + (b_{11} b_{22} + b_{12} b_{21}) \sigma_{12} +$$

$$+ (b_{11} b_{23} + b_{13} b_{21}) \sigma_{13} + (b_{12} b_{23} + b_{13} b_{22}) \sigma_{23},$$

де вирази для $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \sigma_3, \sigma_{13}$ та σ_{23} наведено в теоремі 3.6, а $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}$ та b_{23} – в (2.14)-(2.15).

3.6. Конзистентність оцінок параметрів VARMA(p₁, q₁)-GARCH(p₂, q₂) моделі

Попередні результати стосовно оцінок ваг і характеристик портфелів фінансових активів з раціональною структурою за умови, що вектор дохідностей активів, що входять у портфель, поводить як VARMA(p₁, q₁)-GARCH(p₂, q₂) отримані припускаючи, що параметри моделі поведінки дохідностей є відомими. Очевидно, що на практиці це припущення не виконується. Інвестор повинен оцінити параметри моделі перед її використанням. Виникає запитання, чи залишаться властивості оцінок ваг і характеристик портфеля такими ж, якщо ми використаємо модель з оціненими параметрами. Ми використаємо оцінки параметрів VARMA(p₁, q₁)-GARCH(p₂, q₂) моделі отримані методом квазі максимуму правдоподібності (QMLE оцінки) та покажемо, що такі оцінки є конзистентними. В цьому випадку всі попередньо отримані результати залишаться справедливими для моделі з оціненими параметрами.

Позначимо $\lambda = (\varphi', \delta')$ вектор параметрів моделі, де $\varphi = \text{vec}(\mu, \Phi_1, \dots, \Phi_{p_1}, \dots, \Theta_1, \dots, \Theta_{q_1})$, $\delta = \text{vec}(\omega, A_1, \dots, A_{p_2}, B_1, \dots, B_{q_2})$. Ми припускаємо, що простір параметрів F є компактним підпростором Евклідового простору, такий, що точне значення вектора параметрів $\lambda_0 = (\varphi'_0, \delta'_0)$ є внутрішньою точкою простору F .

Незважаючи на те, що припущення про еліптичність розподілу залишків $\{\varepsilon_t\}$ є ширшим за припущення нормальності, ми використаємо логарифмічну функцію правдоподібності Гауса. Позначимо початковий вектор значень (X_0, η_0) . QMLE оцінку вектора параметрів λ отримуємо максимізуючи

$$L_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t(\lambda), \quad (3.36)$$

де

$$l_t(\lambda) = -\frac{1}{2} \ln |H_t| - \frac{1}{2} \eta_t' H_t^{-1} \eta_t.$$

Позначення $|A|$ означає визначник матриці A .

Зауважимо, що така процедура побудови оцінок використовується в літературі. В [64] такий метод використаний для побудови QMLE оцінок багатовимірного GARCH процесу, записаного у BEKK формі [73]. В [99] метод квазі максимуму правдоподібності використано для VARMA-GARCH процесу з залишками, які поведуться як CCC GARCH процес [58]. Інші приклади можуть бути знайдені в [89].

Для встановлення конзистентності QMLE оцінок вектора параметрів λ накладемо на параметри процесу (3.1)-(3.4) умови, що розглянуті в [64], [99]. Нехай λ_0 точне значення параметрів і λ довільна точка з F . Тоді умовами конзистентності є:

Припущення 1. Всі власні значення матриць $\sum_{i=1}^{p_1} \Phi_i$ і $\sum_{i=1}^{q_1} \Theta_i$ є за модулем менші за 1.

Припущення 2. Всі власні значення матриць $\sum_{i=1}^{\max(p_2, q_2)} (c_i A_i + B_i)$ і $\sum_{i=1}^{p_2} B_i$ є за модулем менші за 1.

Припущення 3. Модель (3.1)-(3.4) може бути визначена. Це означає, що $\Phi(L) = I_k - \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_i L^i$ і $\Theta(L) = I_k - \sum_{j=1}^{q_1} \Theta_j L^j$ є взаємно

прості зліва, тобто, якщо $\Phi(L) = U(L)\Phi_1(L)$ і $\Theta(L) = U(L)\Theta_1(L)$, тоді $U(L)$ є унімодальною зі сталим визначником, та задовільняють інші умови ідентифікації наведені в [69]. Матриці $I - \sum_{i=1}^{q_2} (A_i L^i)$ і

$\sum_{i=1}^{p_2} B_i L^i$ є взаємно прості зліва і задовільняють інші умови ідентифікації наведені в [64], [89]. Оператор L – оператор зміщення.

Припущення 4. Існує константа $c > 0$ така, що для всіх t і всіх $\lambda \in F$ виконується нерівність $\det H_t(\lambda) \geq c$.

Матриця умовної коваріації отримана з багатовимірного GARCH процесу [55], представленого у VEC вигляді не є обов'язково додатньо визначена, тому, щоб забезпечити її додатню визначеність ми припустимо, що процес $\{\mathbf{H}_t\}$ може бути записаний у BEKK вигляді [73].

Припущення 5. Для кожного $\lambda \in \mathbf{F}$ модель (3.1)-(3.4) має єдиний сильно стаціонарний розв'язок.

Ці припущення необхідні для наступної теореми.

Теорема 3.7. Припустимо, що модель (3.1)-(3.4) задовільняє припущення 1-4, густина $\{\eta_t\}$ абсолютно неперервна за мірою Лебега та додатня в околі 0. Нехай

$$\mathbf{z}_t = (\text{vech}(\mathbf{H}_{t+1})', \dots, \text{vech}(\mathbf{H}_{t-p_2+2})', \boldsymbol{\eta}'_t, \dots, \boldsymbol{\eta}'_{t-q_2+1}, \mathbf{X}'_t, \dots, \mathbf{X}'_{t-p_1+1})'.$$

Тоді рекурсивне відношення (3.1)-(3.3) для \mathbf{z}_t майже напевно має стаціонарний каузальний розв'язок, який представляє додатній зворотній за Гарісом ланцюг Маркова, який є геометрично ергодичним та β -змішаним.

Доведення. Умови теореми задовільняють умови теореми 1 з [64], тому

$$\tilde{\mathbf{z}}_t = (\text{vech}(\mathbf{H}_{t+1})', \dots, \text{vech}(\mathbf{H}_{t-p_2+2})', \boldsymbol{\eta}'_t, \dots, \boldsymbol{\eta}'_{t-q_2+1})'$$

є майже напевно стаціонарний каузальний розв'язок, який представляє додатній зворотній за Гарісом ланцюг Маркова, який є геометрично ергодичним та β -змішаним. Решта доведення випливає з доведення теореми 2.1 з [99].

Припущення 6. $(\mathbf{X}_t(\lambda), \mathbf{H}_t(\lambda))'$ є непервною функцією від λ .

Припущення 1-6 дозволяють нам довести конзистентність QMLE оцінок вектора параметрів λ .

Теорема 3.8. Нехай \mathbf{X}_t згенерований з моделі (3.1)-(3.4) задовільняє припущення 1-6. Нехай λ_n розв'язок

максимізаційної задачі $\max_{\lambda \in \mathbf{F}} L_n(\lambda)$. Тоді $\lambda_n \xrightarrow{p} \lambda_0$, де λ_0

точка, в якій $L(\lambda) = E(l_t^\varepsilon(\lambda))$ досягає максимуму.

Доведення. Розглянемо неспостережний процес $\{(\boldsymbol{\varepsilon}_t^\varepsilon, \mathbf{H}_t^\varepsilon) : t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, який задовільняє

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{p_1} \boldsymbol{\Phi}_i (\mathbf{X}_{t-i} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \sum_{j=1}^{q_1} \boldsymbol{\Theta}_j \boldsymbol{\eta}_{t-j}^\varepsilon, \quad (3.37)$$

де

$$\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t^\varepsilon, \quad (3.38)$$

$$\mathbf{h}_t^\varepsilon = \text{vech}(\mathbf{H}_t^\varepsilon) = \boldsymbol{\omega} + \sum_{l=1}^{q_2} \mathbf{A}_l \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-l}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-l}^{\varepsilon'}) + \sum_{m=1}^{p_2} \mathbf{B}_m \mathbf{h}_{t-m}^\varepsilon, \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t^\varepsilon \sim E_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_k, \Psi). \quad (3.40)$$

Неспостережна логарифмічна функція правдоподібності за умови $\underline{\mathbf{X}}_0 = (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{-1}, \dots)$ має вигляд:

$$L_n^\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n l_t^\varepsilon(\lambda) \quad \text{з} \quad l_t^\varepsilon(\lambda) = -\frac{1}{2} \ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} (\mathbf{H}_t^\varepsilon)^{-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon. \quad (3.41)$$

Різниця між функціями (3.36) та (3.41) полягає у тому, що перша залежить від початкових значень процесу, а друга – від нескінченно багатьох минулих значень. Використання логарифмічної функції правдоподібності (3.41) на практиці неможливе.

Щоб довести теорему нам потрібно декілька лем.

Лема 3.1. Нехай \mathbf{X}_t згенерований з моделі (3.1)-(3.4) задовільняє припущення 1-6. Нехай \mathbf{a}_φ та \mathbf{a}_δ сталі вектори з такою ж розмірністю, що і $\boldsymbol{\varphi}$ та $\boldsymbol{\delta}$ відповідно. Тоді $\mathbf{a}'_\varphi \left(\partial \boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} / \partial \boldsymbol{\varphi} \right) = \mathbf{0}$ майже

напевно лише коли $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{0}$ і $\mathbf{a}'_\delta \left(\partial \mathbf{h}_t^{\varepsilon'} / \partial \boldsymbol{\delta} \right) = \mathbf{0}$ майже напевно лише коли $\mathbf{a}_\delta = \mathbf{0}$.

Доведення лема 3.1. З (3.37) ми отримаємо

$$\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{L})^{-1} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{L})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varphi}'} = \boldsymbol{\Theta}^{-1}(\mathbf{L})[-\boldsymbol{\Phi}(1), \mathbf{y}_{t-1} \otimes \mathbf{I}_m],$$

де $\mathbf{y}_{t-1} = (\mathbf{X}'_{t-1} - \boldsymbol{\mu}', \dots, \mathbf{X}'_{t-p_1+1} - \boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\eta}'_{t-1}, \dots, \boldsymbol{\eta}'_{t-q_1+1})$, $\boldsymbol{\Phi}(1) = \sum_{i=1}^{p_1} \boldsymbol{\Phi}_i$, і

друга побудована по правилах диференціювання [103].

Нехай $\mathbf{U}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varphi}'}$ і $\mathbf{V}_t = [-\boldsymbol{\Phi}(1), \mathbf{y}_{t-1} \otimes \mathbf{I}]$. Тоді

$\mathbf{U}_t - \boldsymbol{\Theta}_1 \mathbf{U}_{t-1} - \dots - \boldsymbol{\Theta}_{q_1} \mathbf{U}_{t-q_1} = \mathbf{V}_t$. Якщо $\mathbf{U}_t \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{0}$ майже напевно, тоді $\mathbf{V}_t \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{0}$ майже напевно. Нехай $\mathbf{a}_\varphi = (\mathbf{a}'_{\varphi_1}, \mathbf{a}'_{\varphi_2})'$, тоді $-\boldsymbol{\Phi}(1) \mathbf{a}_{\varphi_1} + (\mathbf{y}_{t-1} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{a}_{\varphi_2} = \mathbf{0}$. Оскільки \mathbf{y}_{t-1} невироджений, то $(\mathbf{y}_{t-1} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{a}_{\varphi_2} = \mathbf{0}$ і $\boldsymbol{\Phi}(1) \mathbf{a}_{\varphi_1} = \mathbf{0}$. З припущення 1, матриця $\boldsymbol{\Phi}(1)$ має повний ранг. Тому, $\mathbf{a}_{\varphi_1} = \mathbf{0}$. З припущення 3, ми отримаємо $\mathbf{a}_{\varphi_2} = \mathbf{0}$. Тому $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{0}$.

З (3.39) випливає

$$\mathbf{h}_t^\varepsilon = (\mathbf{I} - \sum_{m=1}^{p_2} \mathbf{B}_m \mathbf{L}^m)^{-1} (\boldsymbol{\omega} + \sum_{l=1}^{q_2} \mathbf{A}_l \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-l}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-l}^{\varepsilon \prime})),$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_t^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\delta}'} = (\mathbf{I} - \sum_{m=1}^{p_2} \mathbf{B}_m \mathbf{L}^m)^{-1} (\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{h}}_{t-1}^\varepsilon \otimes \mathbf{I}),$$

де $\tilde{\mathbf{h}}_{t-1}^\varepsilon = (\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-1}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-1}^{\varepsilon \prime}), \dots, \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-q_2}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-q_2}^{\varepsilon \prime}), \mathbf{h}_{t-1}^{\varepsilon \prime}, \dots, \mathbf{h}_{t-p_2}^{\varepsilon \prime})'$. Позначимо

$\mathbf{U}_t = \frac{\partial \mathbf{h}_t^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\delta}'}$, $\mathbf{V}_t = (\mathbf{I}, \tilde{\mathbf{h}}_{t-1}^\varepsilon \otimes \mathbf{I})$, отримаємо $\mathbf{V}_t + \mathbf{B}_1 \mathbf{U}_{t-1} + \dots + \mathbf{B}_{p_2} \mathbf{U}_{t-p_2} = \mathbf{U}_t$.

Якщо $\mathbf{U}_t \mathbf{a}_\delta = \mathbf{0}$ майже напевно, тоді $\mathbf{V}_t \mathbf{a}_\delta = \mathbf{0}$. Аналогічно до першої частини доведення з припущень 2 та 5 ми отримуємо $\mathbf{a}_\delta = \mathbf{0}$. Лему доведено.

Лема 3.2. В умовах лема 3.1, $L(\boldsymbol{\lambda})$ існує для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ і

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} |L_n^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}) - L(\boldsymbol{\lambda})| = o_p(1).$$

Доведення лема 3.2. Оскільки простір параметрів \mathbf{F} є компактним, усі корені $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{L})$ лежать поза одиничним колом і всі корені поліному є неперервними функціями своїх коефіцієнтів, існують константи $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ і $0 < \rho_1 < 1$ незалежні від $\boldsymbol{\lambda}$ такі, що

$$\|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \leq a_1 + a_2 \sum_{i=0}^{+\infty} \rho_1^i \|\mathbf{X}_{t-i}\| = \boldsymbol{\eta}_t^* \quad (3.42)$$

Отже, з теореми 3.7, $M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} \|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\|^2 < \infty$. З припущення 4 випливає, що $|\mathbf{H}_t^\varepsilon|$ має нижню межу рівномірно на \mathbf{F} . Маємо $M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} (\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon \prime} \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon) < \infty$.

Аналогічно з припущення 2 випливає, що існують константи $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ і $0 < \rho_2 < 1$ незалежні від $\boldsymbol{\lambda}$ такі, що

$$\|\mathbf{h}_t^\varepsilon\| \leq a_3 + a_4 \sum_{i=0}^{+\infty} \rho_2^i \|\mathbf{X}_{t-i}\|^2 = \mathbf{h}_t^* \quad (3.43)$$

Отже, $M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} \|\mathbf{h}_t^\varepsilon\| < \infty$, звідки випливає, що $M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} |\mathbf{H}_t^\varepsilon| < \infty$. З нерівності Йенсена отримаємо, $M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} |\ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon|| < \infty$. Звідси отримуємо $M |l_t^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda})| < \infty$ для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$, що доводить першу частину лема.

Нехай $g(\underline{\mathbf{X}}_t, \boldsymbol{\lambda}) = l_t^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}) - M(l_t^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}))$, де $\underline{\mathbf{X}}_t = (\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots)$. Тоді

$$M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} |g(\underline{\mathbf{X}}_t, \boldsymbol{\lambda})| < \infty.$$

Більше того, оскільки $g(\underline{\mathbf{X}}_t, \boldsymbol{\lambda})$ є сильно стаціонарна з $Mg(\underline{\mathbf{X}}_t, \boldsymbol{\lambda}) = 0$, з теореми 3.1 з [99] отримуємо, що $M \sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} |n^{-1} \sum_{i=1}^n g(\underline{\mathbf{X}}_t, \boldsymbol{\lambda})| = o_p(1)$. Лему доведено.

Лема 3.3.1 В умовах лема 3.1, $L(\boldsymbol{\lambda})$ досягає єдиного максимуму в $\boldsymbol{\lambda}_0$.

Доведення лема 3.3. Нехай $\{\boldsymbol{\eta}_{0t}\}$ позначає процес $\{\boldsymbol{\eta}_t\}$, коли точний вектор параметрів $\boldsymbol{\lambda}_0$ використано в моделі (3.1)-(3.4). Маємо

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\lambda}) &= -M \ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - M(\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon) = \\ &= -M \ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - M((\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t} + \boldsymbol{\eta}_{0t})' \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} (\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t} + \boldsymbol{\eta}_{0t})) = \\ &= -M \ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - E(\boldsymbol{\eta}_{0t}' \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_{0t}) - M((\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t})' \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} (\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t})) = L_1(\boldsymbol{\lambda}) + L_2(\boldsymbol{\lambda}) \end{aligned}$$

де $L_1(\boldsymbol{\lambda}) = -M \ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - M(\boldsymbol{\eta}_{0t}' \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_{0t})$ і

$L_2(\boldsymbol{\lambda}) = -M((\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t})' \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} (\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t}))$. $L_2(\boldsymbol{\lambda})$ досягає максимум в 0 і це стається тоді і лише тоді коли $\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon = \boldsymbol{\eta}_{0t}$. Отже,

$$\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_{0t} = \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\varphi}'} \Big|_{\boldsymbol{\varphi}^*} (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}_0) = \mathbf{0}.$$

З лема 3.1 випливає, що остання рівність виконується тоді і лише тоді коли $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0$.

Далі розглянемо

$$L_1(\boldsymbol{\lambda}) = -M \ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - M(\text{tr}(\mathbf{M}_t)) = -(-M \ln |\mathbf{M}_t| + M(\text{tr}(\mathbf{M}_t))) - M \ln |\mathbf{H}_{0t}|,$$

де $\mathbf{M}_t = (\mathbf{H}_t^\varepsilon)^{-1/2} \mathbf{H}_{0t} (\mathbf{H}_t^\varepsilon)^{-1/2}$. Зауважимо, що для довільної додатно визначеної матриці \mathbf{M} розміру $k \times k$, виконується [90] $-f(\mathbf{M}) = -\ln |\mathbf{M}| + \text{tr}(\mathbf{M}) \geq k$. Отже, $-M(\ln |\mathbf{M}_t|) + \text{tr}(\mathbf{M}_t) \geq k$. Якщо $\mathbf{M}_t = \mathbf{I}$, то $f(\mathbf{M}_t) = f(\mathbf{I}) = -k$. Якщо $\mathbf{M}_t \neq \mathbf{I}$, ми отримуємо $f(\mathbf{M}_t) < f(\mathbf{I})$. З нерівності Йенсена випливає, що $Mf(\mathbf{M}_t) \leq Ef(\mathbf{I})$, причому рівність досягається лише у випадку $\mathbf{M}_t = \mathbf{I}$ з імовірністю 1. Отже $L_1(\boldsymbol{\lambda})$ досягає свого максимуму $-m - M(\ln \mathbf{H}_{0t})$ тоді і лише тоді коли $\mathbf{H}_t^\varepsilon = \mathbf{H}_{0t}$.

Нехай

$$\mathbf{H}_t^\varepsilon = \{H_{ij;t}^\varepsilon\}_{i,j=1,\dots,k} = \mathbf{D}_t^\varepsilon \boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon \mathbf{D}_t^\varepsilon,$$

де $\mathbf{D}_t^\varepsilon = \text{diag}\{H_{11;t}^{\varepsilon/2}, \dots, H_{kk;t}^{\varepsilon/2}\}$ і $\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon$ кореляційна матриця з одиничними діагональними елементами. З цієї властивості $\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon$ випливає, що $H_{ii;t}^\varepsilon = H_{ii;0t}^\varepsilon$, і тому $\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon = \boldsymbol{\Gamma}_{0t}^\varepsilon$.

Очевидно, що $\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} L(\boldsymbol{\lambda}) \leq \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} L_1(\boldsymbol{\lambda}) + \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} L_2(\boldsymbol{\lambda})$. Рівність $\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} L(\boldsymbol{\lambda}) = -m - M \ln(\mathbf{H}_{0t})$ виконується тоді і лише тоді, коли $\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} L_2(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ і $\max_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} L_1(\boldsymbol{\lambda}) = -m - M \ln(\mathbf{H}_{0t})$, що еквівалентно до $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon = \boldsymbol{\Gamma}_{0t}^\varepsilon$, і $H_{ii;t}^\varepsilon = H_{ii;0t}^\varepsilon$. З $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0$ і $H_{ii;t}^\varepsilon = H_{ii;0t}^\varepsilon$, ми отримуємо

$$(\mathbf{h}_t^\varepsilon - \mathbf{h}_{0t}^\varepsilon) \Big|_{\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0} = \frac{\partial \mathbf{h}_t^\varepsilon}{\partial \boldsymbol{\delta}'} \Big|_{(\boldsymbol{\varphi}_0; \boldsymbol{\delta}^*)} (\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{\delta}_0) = \mathbf{0},$$

з імовірністю 1. З лема 3.1 випливає, що остання рівність виконується тоді і лише тоді коли $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}_0$. Отже $L(\boldsymbol{\lambda})$ досягає свого єдиного максимуму в точці $\boldsymbol{\lambda}_0$. Лему доведено.

Лема 3.4.2 В умовах лема 3.1,

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}} |L_n^\varepsilon(\boldsymbol{\lambda}) - L_n(\boldsymbol{\lambda})| = o_p(1).$$

Доведення лема 3.4. Не звужуючи загальності, припустимо, що $\mathbf{X}_0 = \mathbf{0}$ і $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{0}$. З припущення 1, $\boldsymbol{\eta}_t$ та $\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon$ можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Y}_i^* (\mathbf{X}_{t-i} - \boldsymbol{\mu}), \quad \boldsymbol{\eta}_t = \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{Y}_i^* (\mathbf{X}_{t-i} - \boldsymbol{\mu}),$$

де $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Y}_i^* \mathbf{L}^i = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(\mathbf{L}) \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{L})$. Отже,

$$\|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_t\| \leq a_1 \sum_{i=t}^{\infty} \rho_1^i \|\mathbf{X}_{t-i} - \boldsymbol{\mu}\|, \quad (3.44)$$

де a_1 і $0 < \rho_1 < 1$ константи незалежні від $\boldsymbol{\lambda}$.

Аналогічно, з припущення 2, ми отримуємо

$$\mathbf{h}_t^\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Lambda}_i^* (\boldsymbol{\omega} + (\sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{A}_j L^j) (\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-i}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-i}^{\varepsilon'}))),$$

$$\mathbf{h}_t = \sum_{i=0}^{t-1} \boldsymbol{\Lambda}_i^* (\boldsymbol{\omega} + (\sum_{j=1}^{q_2} \mathbf{A}_j L^j) (\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-i}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-i}^{\varepsilon'}))),$$

де $\sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i^* L^i = (\mathbf{I} - \sum_{i=0}^{p_2} \mathbf{B}_i L^i)^{-1}$. Маємо

$$\|\mathbf{h}_t^\varepsilon - \mathbf{h}_t\| \leq \sum_{i=t}^{\infty} \rho_2^i (a_2 + a_3 \|\text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-i}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_{t-i}^{\varepsilon'}) - \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-i} \boldsymbol{\eta}_{t-i}')\|), \quad (3.45)$$

де a_2, a_3 і $0 < \rho_2 < 1$ константи незалежні від λ . З (3.44)-(3.45) отримаємо

$$\begin{aligned} \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} (\eta_{it}^\varepsilon - \eta_{it})^2 &= O(\rho^t), \quad \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} |h_{jt}^\varepsilon - h_{jt}| = O(\rho^t), \\ H_{ij,t}^\varepsilon &= H_{ij,t} + O(\rho^t) \quad (3.46) \end{aligned}$$

для всіх $i, j=1, \dots, k$ і $0 < \rho < 1$.

Оскільки, з доведення леми 3.2 і припущення 4, $H_{ii,t}^\varepsilon$ і $H_{ii,t}$ мають нижню межу рівномірно по i, t і λ , то

$$\Gamma_{ij,t}^\varepsilon = \frac{H_{ij,t}^\varepsilon}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon} \sqrt{H_{jj,t}^\varepsilon}} = \Gamma_{ij,t} + O(\rho^t), \quad (3.47)$$

де $\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon = \{\Gamma_{ij,t}^\varepsilon\}_{i,j=1,\dots,k}$ і $\boldsymbol{\Gamma}_t = \{\Gamma_{ij,t}\}_{i,j=1,\dots,k}$. З (3.47) отримаємо, що $|\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon| = |\boldsymbol{\Gamma}_t| + O(\rho^t)$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} |\ln |\mathbf{H}_t^\varepsilon| - \ln |\mathbf{H}_t|| &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} \left| \ln \frac{H_{ii,t}^\varepsilon}{H_{ii,t}} + \ln \frac{|\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon|}{|\boldsymbol{\Gamma}_t|} \right| \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} \left| \frac{H_{ii,t}^\varepsilon - H_{ii,t}}{H_{ii,t}} \right| + \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} \left| \frac{|\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon| - |\boldsymbol{\Gamma}_t|}{|\boldsymbol{\Gamma}_t|} \right| \right) = \\ &= O(1) \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii,t}^\varepsilon - H_{ii,t}| + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} \|\boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon| - |\boldsymbol{\Gamma}_t|\| \right) = \\ &= O(1) \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n O(\rho^t) \right) = o(1). \end{aligned}$$

Крім того,

$$\sum_{i=1}^k \left| \frac{\eta_{it}^\varepsilon}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{\eta_{it}}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right|^2 \leq \sum_{i=1}^k (\eta_{it}^{\varepsilon 2} \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right|^2 + (\eta_{it}^\varepsilon - \eta_{it})^2) O(1).$$

Маємо

$$\begin{aligned} &|\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} \mathbf{H}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_t' \mathbf{H}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t| = |\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} (\mathbf{D}_t^\varepsilon \boldsymbol{\Gamma}_t^\varepsilon \mathbf{D}_t^\varepsilon)^{-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_t' (\mathbf{D}_t \boldsymbol{\Gamma}_t \mathbf{D}_t)^{-1} \boldsymbol{\eta}_t| = \\ &= |2 \boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} \mathbf{D}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\Gamma}_t^{\varepsilon-1} (\mathbf{D}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t) - (\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon'} \mathbf{D}_t^{\varepsilon-1} - \boldsymbol{\eta}_t' \mathbf{D}_t^{-1}) \boldsymbol{\Gamma}_t^{\varepsilon-1} (\mathbf{D}_t^{\varepsilon-1} \boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \\ &-\mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t) + \boldsymbol{\eta}_t' \mathbf{D}_t^{-1} (\boldsymbol{\Gamma}_t^{\varepsilon-1} - \boldsymbol{\Gamma}_t^{-1}) \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\eta}_t| \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\frac{\eta_{it}^\varepsilon}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{\eta_{it}}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right)^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| O(1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ O(1) \sum_{i=1}^k \left(\frac{\eta_{it}^\varepsilon}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{\eta_{it}}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right)^2 + \sum_{i=1}^k \frac{\eta_{it}^2}{H_{ii,t}} \|\boldsymbol{\Gamma}_t^{\varepsilon-1} - \boldsymbol{\Gamma}_t^{-1}\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k (\|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right| + \eta_{it}^{\varepsilon 2} \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right|^2) O(1) \leq \\ &+ \sum_{i=1}^k (\|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_t\| + (\eta_{it}^\varepsilon - \eta_{it})^2) O(1) + \sum_{i=1}^k \frac{\eta_{it}^2}{H_{ii,t}} \|\boldsymbol{\Gamma}_t^{\varepsilon-1} - \boldsymbol{\Gamma}_t^{-1}\|. \end{aligned}$$

З (3.42) і (3.46), маємо

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} \sum_{i=1}^k (\|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_t\| + (\eta_{it}^\varepsilon - \eta_{it})^2) = o_p(1).$$

Крім того, з (3.47) і того, що $\text{Msup}_{\lambda \in \mathbf{F}} \|\boldsymbol{\eta}_t\|^2 < \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} \sum_{i=1}^k \frac{\eta_{it}^2}{H_{ii,t}} \|\boldsymbol{\Gamma}_t^{\varepsilon-1} - \boldsymbol{\Gamma}_t^{-1}\| = o_p(1).$$

Нам достатньо довести, що

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} \left(\sum_{i=1}^k (\|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \|\boldsymbol{\eta}_t^\varepsilon\| \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right| + \eta_{it}^{\varepsilon 2} \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}^\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii,t}}} \right|^2) \right) = o_p(1).$$

Нехай $\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\eta}_t^{*2}$ і $\xi_t = \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii;t}^{\varepsilon-1/2} - H_{ii;t}^{-1/2}|^2$. $\{\mathbf{y}_t\}$ є сильно стаціонарним та ергодичним часовим рядом, з $M\mathbf{y}_t < \infty$ та $|\xi_t| \leq C$. З (3.46) ми отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \xi_t &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} \left| \frac{H_{ii;t}^{\varepsilon} - H_{ii;t}}{\sqrt{H_{ii;t}^{\varepsilon} H_{ii;t}} (\sqrt{H_{ii;t}^{\varepsilon}} + \sqrt{H_{ii;t}})} \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} \frac{|H_{ii;t}^{\varepsilon} - H_{ii;t}| (H_{ii;t}^{\varepsilon} + H_{ii;t})}{H_{ii;t}^{\varepsilon} H_{ii;t} (\sqrt{H_{ii;t}^{\varepsilon}} + \sqrt{H_{ii;t}})^2} \leq \\ &\leq O(1) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii;t}^{\varepsilon} - H_{ii;t}| = O(1) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n O_p(\rho^t) = o_p(1). \end{aligned}$$

З леми 4.5 з [99], отримуємо

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{y}_t \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii;t}^{\varepsilon-1/2} - H_{ii;t}^{-1/2}|^2 = o_p(1).$$

Аналогічно,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{y}_t \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii;t}^{\varepsilon-1/2} - H_{ii;t}^{-1/2}| = o_p(1).$$

Тому,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} \left(\sum_{i=1}^k \left(\|\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon}\| \|\boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon}\| \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii;t}^{\varepsilon}}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii;t}}} \right| + \boldsymbol{\eta}_t^{\varepsilon 2} \left| \frac{1}{\sqrt{H_{ii;t}^{\varepsilon}}} - \frac{1}{\sqrt{H_{ii;t}}} \right|^2 \right) \right) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} (\mathbf{y}_t \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii;t}^{\varepsilon-1/2} - H_{ii;t}^{-1/2}|^2 + \mathbf{y}_t \sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |H_{ii;t}^{\varepsilon-1/2} - H_{ii;t}^{-1/2}|) \right) = o_p(1). \end{aligned}$$

Лему доведено.

Доведення теореми 3.8.

З припущень маємо, що простір параметрів \mathbf{F} є компактом і вектор точних значень параметрів $\boldsymbol{\lambda}_0$ є внутрішньою точкою \mathbf{F} . Крім того, для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ $L_n(\boldsymbol{\lambda})$ є неперервна по $\boldsymbol{\lambda}$ і вимірна на \mathbf{y}_t , $t=1, \dots, n$. З лем 3.2-3.3 отримуємо, що $L_n^{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) \xrightarrow{p} L_n(\boldsymbol{\lambda})$ і з леми 3.4 –

$\sup_{\lambda \in \mathbf{F}} |L_n^{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) - L_n(\boldsymbol{\lambda})| = o_p(1)$. Також, ми показали, що $\boldsymbol{\lambda}_0$ є єдиним максимумом функції $L(\boldsymbol{\lambda})$ (лема 3.2). Отже всі умови теореми 4.1.1 з [44] виконуються. Використання цієї теореми завершує доведення. Теорему доведено.

Оскільки ми довели, що *QMLE* оцінки параметрів процесу (3.1)-(3.4) є конзистентні, то заміна параметрів процесу $\boldsymbol{\lambda}$ на оцінки $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ не змінить асимптотичних властивостей оцінок ваг та характеристик портфелів фінансових активів з раціональними структурами, тобто результати теорем 3.2-3.6 та наслідків 3.1-3.2 є справедливими для *VARMA*(p_1, q_1)-*GARCH*(p_2, q_2) процесу з оціненими параметрами.

3.7. Емпіричні результати та теоретичні приклади

Всі результати теорем 3.2-3.6 та наслідків 3.1-3.2 виконуються за умови збіжності рядів у (3.15). Виникає запитання, для яких процесів *VARMA*(p_1, q_1)-*GARCH*(p_2, q_2) це виконується. Тобто, який порядок процесу p_1, q_1, p_2, q_2 забезпечує виконання цієї умови. Зауважимо, що на сьогодні не існує раціонального методу визначення порядку *VARMA*(p_1, q_1)-*GARCH*(p_2, q_2). Крім того, зі зростанням порядку, дуже швидко зростає і кількість невідомих параметрів, відповідно зростає і складність моделі. Тому на практиці найчастіше використовують *VARMA*(1, 1)-*GARCH*(1, 1).

Приклад 3.1. *VARMA*(1,1)-*GARCH*(1,1) визначається так:

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\eta}_t - \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{\eta}_{t-1},$$

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\mathbf{h}_t = \text{vech}(\mathbf{H}_t) = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}_1 \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-1} \boldsymbol{\eta}_{t-1}') + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}_{t-1}.$$

$$\text{Маємо } \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_i \boldsymbol{\eta}_{t-i}, \text{ з}$$

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{I}_k, \mathbf{Y}_j = \Phi_1^{j-1}(\Phi_1 - \Theta_1), j=1, 2, \dots$$

і $\mathbf{h}_i = (\boldsymbol{\sigma} + \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \mathbf{v}_{i-j}) / c_1$, де $\Lambda_j = c_1(c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)^{j-1} \mathbf{A}_1$, $j=1, 2, \dots$. Оскільки

$$\mathbf{Y}_{j+h} = \Phi_1^h \mathbf{Y}_j, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j &= \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{I}_k + \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{Y}_j \otimes \mathbf{Y}_j = \\ &= \mathbf{I}_{k^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} (\Phi_1^{j-1}(\Phi_1 - \Theta_1)) \otimes (\Phi_1^{j-1}(\Phi_1 - \Theta_1)) = \\ &= \mathbf{I}_{k^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} (\Phi_1^{j-1} \otimes \Phi_1^{j-1}) ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)) = \\ &= \mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - (\Phi_1 \otimes \Phi_1))^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)). \end{aligned}$$

Оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\Gamma(0)$ мають вигляд:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$$

та

$$\text{vech}(\hat{\Gamma}^*(0)) =$$

$$= c_1 \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - (\Phi_1 \otimes \Phi_1))^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1))) \mathbf{D}_k \times \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_i \right).$$

Обчислимо

$$\Xi_V = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) = \Gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma(h) + \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma'(h).$$

Маємо

$$\begin{aligned} \Gamma(h) &= \mathbf{Y}_h \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Y}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}_{i+h} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Y}_i = \Phi_1^{h-1}(\Phi_1 - \Theta_1) \boldsymbol{\Sigma} + \Phi_1^h \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}_i \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Y}_i = \\ &= \Phi_1^{h-1}(\Phi_1 - \Theta_1) \boldsymbol{\Sigma} + \Phi_1^h (\Gamma(0) - \boldsymbol{\Sigma}) = \Phi_1^{h-1}(\Phi_1 \Gamma(0) - \Theta_1 \boldsymbol{\Sigma}), \end{aligned}$$

де $\boldsymbol{\Sigma}$ обчислюємо з $\Gamma(0) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{Y}_i \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{Y}_i$, тобто

$$\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}) = \left(\mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - \Phi_1 \otimes \Phi_1)^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)) \right)^{-1} \text{vec}(\Gamma(0)).$$

Отже,

$$\Xi_V = \Gamma(0) + (\mathbf{I} - \Phi_1)^{-1} (\Phi_1 \Gamma(0) - \Theta_1 \boldsymbol{\Sigma}) + (\Gamma(0) \Phi_1' - \boldsymbol{\Sigma} \Theta_1') (\mathbf{I} - \Phi_1')^{-1}.$$

Аналогічно, з того, що $\Lambda_{j+h} = (c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)^h \Lambda_j$, ми отримаємо

$$\begin{aligned} \Xi_G &= c_1^2 \mathbf{D}_k \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma_G(h) \mathbf{D}_k' = \\ &= c_1^2 \mathbf{D}_k \Gamma_G(0) \mathbf{D}_k' + c_1^2 \mathbf{D}_k \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_G(h) \mathbf{D}_k' + c_1^2 \mathbf{D}_k \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_G'(h) \mathbf{D}_k' = \\ &= c_1^2 (\mathbf{D}_k \Gamma_G(0) \mathbf{D}_k' + \mathbf{D}_k (\mathbf{I}_{k(k+1)/2} - c_1 \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1)^{-1} (c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \times \\ &\quad \times \Gamma_G(0) \mathbf{D}_k' + \mathbf{D}_k \Gamma_G(0) (c_1 \mathbf{A}_1' + \mathbf{B}_1') (\mathbf{I}_{k(k+1)/2} - c_1 \mathbf{A}_1' - \mathbf{B}_1')^{-1} \mathbf{D}_k'). \end{aligned}$$

Використовуючи рівність

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{+\infty} (\Lambda_j \otimes \Lambda_j) &= c_1^2 \sum_{j=1}^{+\infty} ((c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)^{j-1} \otimes (c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)^{j-1}) (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1) = \\ &= c_1^2 (\mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2} - ((c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \otimes (c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)))^{-1} (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1), \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \text{vec}(\Gamma_G(0)) &= ((c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2} - c_1^2 (\mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2} - ((c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \otimes (c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)))^{-1} \times \\ &\quad \times (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_1) (\mathbf{G}_k - c_1^2 \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2}))^{-1} - \frac{1}{c_1^2} \mathbf{I}_{(k(k+1)/2)^2}) \text{vec}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}'). \end{aligned}$$

Отже, у випадку $VARMA(1,1)$ - $GARCH(1,1)$ процесу дисперсії та коваріації в теоремах 3.2-3.6 обчислюємо, використовуючи

$$\mathbf{q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - (\Phi_1 \otimes \Phi_1))^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)) \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times ((\Gamma(0)^{-1} \mathbf{a}) \otimes (\Gamma(0)^{-1} \mathbf{b})), \\ \mathbf{q}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = & \left(\mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - (\Phi_1 \otimes \Phi_1))^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)) \right) \times \\ & \times ((\Gamma(0)^{-1} \mathbf{A}) \otimes (\Gamma(0)^{-1} \mathbf{B})). \end{aligned}$$

Наприклад у випадку портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю, отримаємо

$$\begin{aligned} \Omega_{EU} = & \beta^{-2} \mathbf{R}(\Gamma(0) + (\mathbf{I} - \Phi_1)^{-1} (\Phi_1 \Gamma(0) - \Theta_1 \Sigma) + (\Gamma(0) \Phi_1' - \Sigma \Theta_1') (\mathbf{I} - \Phi_1')^{-1}) \mathbf{R} + \\ & + c_1^2 (a_1 ((\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}) \otimes \Gamma(0)^{-1}) - a_1 ((\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}) \otimes (\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})) \mathbf{w}'_{GMV} + \\ & + \beta^{-1} ((\Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu}) \otimes \Gamma(0)^{-1}) - \beta^{-1} ((\Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu}) \otimes (\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})) \mathbf{w}'_{GMV})' \times \\ & \times \left(\mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - (\Phi_1 \otimes \Phi_1))^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)) \right) \times \\ & \times (\mathbf{D}_k \Gamma_G(0) \mathbf{D}'_k + \mathbf{D}_k (\mathbf{I}_{k(k+1)/2} - c_1 \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1)^{-1} (c_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \Gamma_G(0) \mathbf{D}'_k + \\ & + \mathbf{D}_k \Gamma_G(0) (c_1 \mathbf{A}'_1 + \mathbf{B}'_1) (\mathbf{I}_{k(k+1)/2} - c_1 \mathbf{A}'_1 - \mathbf{B}'_1)^{-1} \mathbf{D}'_k) \times \\ & \times \left(\mathbf{I}_{k^2} + (\mathbf{I}_{k^2} - (\Phi_1 \otimes \Phi_1))^{-1} ((\Phi_1 - \Theta_1) \otimes (\Phi_1 - \Theta_1)) \right) \times \\ & \times (a_1 ((\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}) \otimes \Gamma(0)^{-1}) - a_1 ((\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}) \otimes (\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})) \mathbf{w}'_{GMV} \\ & + \beta^{-1} ((\Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu}) \otimes \Gamma(0)^{-1}) - \beta^{-1} ((\Gamma(0)^{-1} \boldsymbol{\mu}) \otimes (\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})) \mathbf{w}'_{GMV}). \end{aligned}$$

Приклад 3.2. Розглянемо на прикладі даних, взятих з американської фондової біржі, наскільки добре асимптотичний розподіл наближає емпіричний розподіл очікуваної доходності портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією. Припустимо, що ми формуємо портфель з трьох активів, акції компаній *McDonald's*, *Home Depot*, *Microsoft*. Припустимо, що доходності цих акцій поведуться як *VARMA(0,0)-GARCH(1,1)* (або просто *GARCH(1,1)*) процес з нормально розподіленими залишками, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\eta}_t,$$

$$\boldsymbol{\eta}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\mathbf{h}_t = \text{vech}(\mathbf{H}_t) = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{A}_1 \text{vech}(\boldsymbol{\eta}_{t-1} \boldsymbol{\eta}'_{t-1}) + \mathbf{B}_1 \mathbf{h}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор доходностей елементів, з яких складено портфель, 6-вимірний вектор $\boldsymbol{\omega}$ та 6×6 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 параметри процесу, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)'$ і дисперсією \mathbf{I}_3 . Ми припускаємо, що параметри процесу $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , та $\boldsymbol{\mu}$ є відомими. Значення для них ми отримаємо на основі даних про ціни акцій, з яких складено портфель, за період часу з 02.01.2014 по 31.12.2015. На основі цих даних обчислимо щоденні доходності акцій за цей період часу. Отримаємо 504 спостереження. Використовуючи пакет *mgarch* програми статистичного аналізу даних \mathbf{R} , отримаємо такі значення:

$$\boldsymbol{\omega}' = (0.4582, -0.0394, -0.0970, 0.1755, -0.2254, 0.4111),$$

$$\boldsymbol{\mu}' = (0.0391, 0.0940, 0.0782),$$

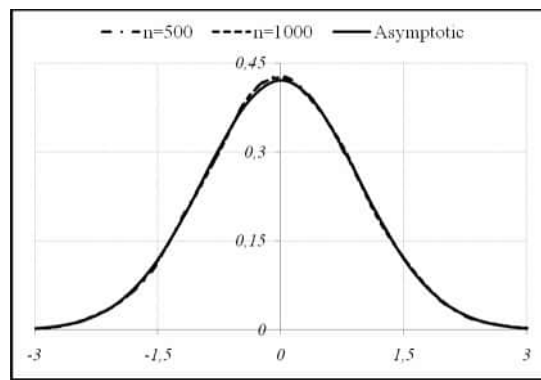
$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.0193 & -0.0439 & 0.1043 & 0.0250 & -0.1184 & 0.1406 \\ 0.0018 & 0.0200 & 0.0295 & -0.0251 & 0.0317 & 0.0663 \\ 0.0946 & -0.1106 & 0.2552 & 0.0036 & -0.0085 & 0.00004 \\ 0.0002 & 0.0042 & 0.0046 & 0.0253 & 0.0562 & 0.0313 \\ 0.0089 & 0.1078 & 0.1203 & -0.0036 & -0.0040 & 0.00002 \\ 0.4631 & -0.0307 & 0.0002 & 0.0005 & -0.000005 & 0.00000001 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.0133 & 0.0514 & 0.0462 & 0.0498 & 0.0894 & 0.0401 \\ -0.0409 & 0.0218 & -0.0515 & 0.1953 & 0.2133 & 0.0340 \\ -0.0201 & -0.0074 & 0.0463 & 0.0611 & 0.2122 & 0.1413 \\ 0.1258 & -0.6211 & -0.1205 & 0.7666 & 0.2976 & 0.0289 \\ 0.0620 & -0.2501 & -0.2799 & 0.2397 & 0.6643 & 0.1199 \\ 0.0305 & -0.0957 & -0.2465 & 0.0749 & 0.3863 & 0.4978 \end{pmatrix},$$

З наслідків 3.1-3.2 отримаємо, що $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV}) \xrightarrow{d} N(0, 0.89468)$.

Порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV})$ з асимптотичним графічно (рис. 3.1). Для цього ми 50000 разів згенеруємо вибірки розміру $n=500$, $n=1000$ з

$GARCH(1,1)$ процесу з параметрами A_1 , B_1 , ω , і μ , та обчислимо вибіркові оцінки характеристик та ваг портфеля, отриманих зі згенерованих вибірок. З рис. 3.1 бачимо, що наближення асимптотичним розподілом є доволі добрим. Це підтверджує, що для простоти розрахунків та з метою економії часу інвестор може використовувати у практичній діяльності асимптотичний розподіл вибірових оцінок.



Джерело: розроблено автором

Рис. 3.1. Емпіричні ($n=500$, $n=1000$) та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{GMV} - R_{GMV})$.

РОЗДІЛ 4

СУЧАСНІ МІРИ РИЗИКУ В ТЕОРІЇ ПОРТФЕЛЯ

4.1. Метод мінімізації міри Value-at-Risk вибору раціональної структури портфеля

Фінансові ризики відіграють одну з найважливіших ролей у портфелі ризиків будь-якої фінансової установи. До цього часу не існує однозначного визначення ризику. Наприклад, ризик може означати імовірність втрат загалом, або ж імовірність певних втрат чи втрати з певною імовірністю тощо. Усі вищенаведені означення важливі під час оцінки фінансових ризиків, однак необхідно вибрати одне з них за основу.

До середини 90-х років минулого століття для вимірювання ризиків використовували дисперсію. Така міра ризику добра тільки тоді, коли дохідності фінансових активів поведуться як нормально розподілені випадкові величини та є незалежними у часі. Якщо це припущення неможливо відхилити на основі певного статистичного тесту, то ця міра дає непогане уявлення про ризик. Використовуючи правило трьох сігм, неважко оцінити інтервал довіри для майбутніх доходів, причому нижня межа інтервалу буде ризиком з певним рівнем довіри та навпаки, задаючи рівень довіри та використовуючи властивості нормально розподіленої випадкової величини, можна оцінити рівень втрат з певною імовірністю. Проте дисперсія має низку недоліків. По-перше, вона описує двосторонній ризик, тобто зростання імовірності великих прибутків призводить до зростання дисперсії, що відповідно призводить до зростання ризику втрат. Ця властивість є серйозним недоліком цієї міри. По-друге, дисперсія не надає жодної інформації про ризик, якщо розподіл доходностей фінан-

сових активів не є нормально розподіленими. У цьому випадку дисперсія не дає змоги отримати інформацію про екстремальні значення функції втрат, причому як про додатні, що описують втрати, так і про від'ємні значення, що відповідають за прибуток. По-третє, дохідності фінансових активів з високою частотою (щоденна, щогодинна) мають розподіли далекі від нормального (див. напр. [74], [107], [111]), тобто розподіли, що мають так звані важкі хвости. По-четверте, дохідності фінансових активів є залежними в часі (див. напр. [57], [72], [114]), тобто, передбачаючи майбутню поведінку дохідності фінансового активу, необхідно брати до уваги його поведінку в минулому. Отже, при обчисленні ризиків необхідно враховувати ці фактори. По-п'яте, під час кризи, коли ризики потрібно оцінювати якомога точніше, реальні розподіли ще більше віддаляються від нормального і дисперсія стає зовсім непридатною мірою для оцінки ризиків.

На практиці кращими є міри, що обчислюють ризик на основі відповідних квантилей функції втрат [96], так звані квантильні міри ризику. Найвідомішою і найпоширенішою квантильною мірою є *Value-at-Risk* (*VaR*). В основних рекомендаційних програмах для банків (*Basel II*, *RiskMetrics*, *CAD II*) пропонують визначати ризик як втрати з певною імовірністю. За міру ризику пропонують використовувати *VaR*. Зауважимо, що в різних програмах рівень довіри неоднаковий. Наприклад, для *RiskMetrics* цей рівень становить 95 %, а для *Basel II* – 99 %. Так само різними є часові горизонти (*RiskMetrics* – 1 день, *Basel II* – 10 днів). Зауважимо, що *VaR* є квантильною мірою, тобто вона дорівнює відповідній квантилі функції втрат. Тому збільшення імовірності високих прибутків не впливає на значення *VaR*. При відомому рівні довіри α для *VaR*, отримуємо, що ризик фінансового активу з дохідністю X_t в момент часу t дорівнює

$$VaR_\alpha(X_t) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P\{X_t \leq x\} \leq 1 - \alpha\}. \quad (4.1)$$

Тобто, з означення *VaR* можемо зробити висновок, що VaR_α є мінімальний рівень втрат з імовірністю $1 - \alpha$ або, еквівалентно, максимальний рівень втрат з імовірністю α . Крім того, зауважимо, що додатні значення дохідностей, які характеризують прибуток, не впливають на значення ризику. Очевидно, що для обчислення точного значення квантилі необхідно знати функцію розподілу

дохідності фінансового активу. Нехай нам відома функція розподілу дохідності певного фінансового активу. Позначимо її $F_X(x)$, тоді означення (4.1) можемо переписати у вигляді

$$VaR_\alpha(X_t) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \leq 1 - \alpha\}. \quad (4.2)$$

Легко бачити, що для неперервних розподілів, *VaR* при рівні довіри α дорівнює мінус $1 - \alpha$ квантилі розподілу дохідності X_t .

Якщо дохідності фінансового активу X_t поведуться як незалежні нормально розподілені випадкові величини з параметрами μ та σ , тоді (див., напр., [93])

$$VaR_\alpha(X_t) = \sigma z_\alpha - \mu, \quad (4.3)$$

де z_α – мінус $1 - \alpha$ квантиль стандартного нормального розподілу.

З (4.3) випливає, що у випадку нормально розподілених дохідностей, використовуючи прості арифметичні операції, міри ризику VaR_α та дисперсія надають еквівалентну інформацію про ризик. Проте, розглядаючи інші розподіли, особливо несиметричні відносно математичного сподівання, VaR_α є набагато кращою мірою ніж дисперсія.

На жаль, як з'ясувалося, загалом *VaR* не є доброю мірою ризику. Не важко показати, що ця міра не є субадитивною. Може трапитися, що загальний ризик двох портфельів є більший, ніж сума ризиків цих портфельів. В кінці минулого століття науковці сформулювали 4 основних властивості когерентності, якими повинна володіти міра ризику [93]. Наведемо означення когерентної міри ризику з [45].

Означення 4.1. Нехай X та Y довільні випадкові величини. Тоді міра ризику μ називається когерентною, якщо вона задовольняє такі властивості:

- 1) якщо $X \leq Y$, то $\mu(X) \geq \mu(Y)$ (монотонність);
- 2) для всіх $\lambda \geq 0$, $\mu(\lambda X) = \lambda \mu(X)$ (додатня однорідність);
- 3) для всіх $a \in \mathbb{R}$, $\mu(X + a) = \mu(X) - a$ (інваріантність відносно зсуву);
- 4) $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$ (субадитивність).

Хоча субадитивність є найбільш суперечливою властивістю серед наведених вище, вона одночасно є і найважливішою. Саме субадитив-

ність робить необхідною диверсифікацію портфеля з метою зниження його ризику, а також забезпечує існування та єдиність розв'язку мінімізаційної задачі, оскільки субадитивність забезпечує випуклість поверхонь ризику. Крім того, VaR є лише квантилем розподілу і тому не повністю відображає інформацію, яка стоїть за його значенням.

Наведемо приклад з [119], який доводить, що міра VaR не є субадитивною. Розглянемо дві незалежні, однаково розподілені випадкові величини X_1 та X_2 з густинами:

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0.05, & -2 \leq x < 0 \\ 0.9, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Нехай ці випадкові величини описують дохідності певних фінансових активів, тоді $VaR_{0.9}(X_1) = VaR_{0.9}(X_2) = 0$, тобто

$$VaR_{0.9}(X_1) + VaR_{0.9}(X_2) = 0.$$

Покажемо, що $VaR_{0.9}(X_1 + X_2) > 0$. Для цього достатньо довести, що $P\{X_1 + X_2 < 0\} > 0.1$. Знайдемо густину випадкової величини $X_1 + X_2$. Покажемо, що $VaR_{0.9}(X_1 + X_2) > 0$. Для цього достатньо довести, що $P\{X_1 + X_2 < 0\} > 0.1$. Знайдемо густину випадкової величини $X_1 + X_2$. Маємо

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(t-x) dx = \int_{-\infty}^0 0.05 f_{X_2}(t-x) dx + \int_0^1 0.9 f_{X_2}(t-x) dx = \\ &= \int_t^{t+2} 0.05 f_{X_2}(y) dy + \int_{t-1}^t 0.9 f_{X_2}(y) dy = \\ &= \begin{cases} 0, & t < -4 \\ 0.05^2(t+4), & -4 \leq t < -2 \\ 0.9(t+2) - 0.05^2 t, & -2 \leq t < -1 \\ 0.9 - 0.05^2 t, & -1 \leq t < 0 \\ 0.9(1-t) - 0.9^2 t, & 0 \leq t < 1 \\ 0.9^2(2-t), & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

З властивостей густини отримаємо

$$P\{X_1 + X_2 < 0\} = \int_{-\infty}^0 f_{X_1+X_2}(x) dx = 0.145 > 0.$$

Отже, VaR не задовільняє аксіому субадитивності і, як наслідок, не є когерентною мірою ризику.

Очевидно, що аксіоми Арцнера не описують лише одну міру. Існує декілька когерентних мір ризику, проте, однією з найвідоміших є так зване умовне VaR ($CVaR$), яка є узагальненням VaR . В [119] доведено, що така міра ризику задовільняє усі умови когерентності. Хоча на сьогодні $CVaR$ не є основною мірою для оцінювання ризиків у фінансовій математиці, проте ця міра є досить поширена у страховій справі [70]. Крім того, не важко показати, що у випадку неперервно розподілених дохідностей фінансових активів значення $CVaR$ є більше ніж VaR при однаковому рівні довіри, що є актуальним під час кризи, коли інвестори схильні створювати більші резерви.

Як і у випадку VaR , для обчислення ризику за допомогою $CVaR$, необхідно спершу задати рівень довіри α , тоді

$$CVaR_\alpha(X_i) = -M(X_i | X_i < -VaR_\alpha(X_i)).$$

Тобто, $CVaR_\alpha(X_i)$ відображає середні втрати з імовірністю $1-\alpha$.

Припустивши, що дохідність фінансового активу є нормально розподілена з параметрами μ та σ , $CVaR$ при рівні довіри α обчислюємо так:

$$CVaR_\alpha(X_i) = k_\alpha \sigma - \mu, \quad (4.4)$$

де $k_\alpha = -\frac{\int_{-\infty}^{-z_\alpha} x \varphi(x) dx}{1-\alpha}$, та $\varphi(x)$ функція густини стандартного нормального розподілу.

З (4.3)-(4.4) випливає, що у випадку нормально розподілених дохідностей фінансових активів, міри ризику дисперсія, VaR та $CVaR$ надають еквівалентну інформацію про ризик активу.

Зважаючи на популярність та поширеність міра ризику VaR , у [42] розглянуто метод вибору раціональної структури портфеля

фінансових активів на основі мінімізації VaR портфеля у разі припущення, що вектор доходностей активів, з яких складено портфель, поводяться як багатовимірна нормально розподілена випадкова величина з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. За такого припущення VaR портфеля при рівні довіри α дорівнює

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{w}) = z_{\alpha} \sqrt{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}. \quad (4.5)$$

Рациональну структуру портфеля з найменшим рівнем VaR отримують з наступної оптимізаційної задачі [42]:

$$VaR_{\alpha}(\mathbf{w}) = z_{\alpha} \sqrt{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (4.6)$$

Зауважимо, що як і у випадку портфелів з найменшою дисперсією, ми не накладаємо умову додатності ваг портфеля. У [42] знайдено ваги та характеристики портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , які в наших позначеннях матимуть вигляд:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_{\alpha}^2 - s}} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad (4.7)$$

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_{\alpha}^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}}, \quad (4.8)$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_{\alpha}^2}{z_{\alpha}^2 - s} V_{GMV}, \quad (4.9)$$

$$M_{VaR} = \sqrt{z_{\alpha}^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \quad (4.10)$$

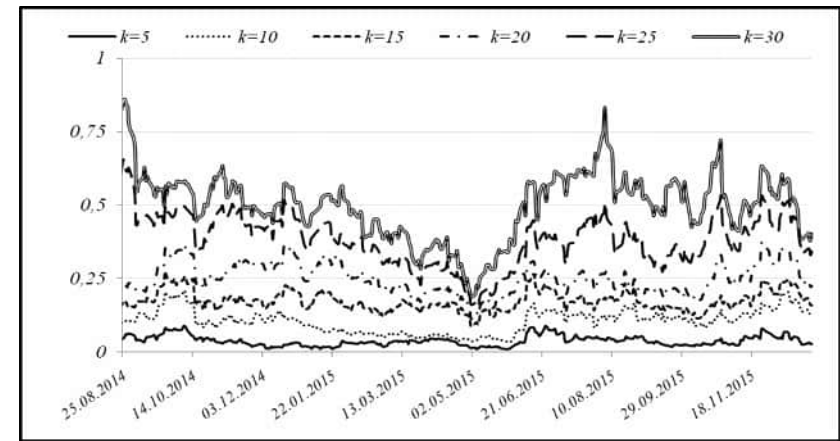
де M_{VaR} є VaR портфеля фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{VaR} при рівні довіри α , \mathbf{w}_{GMV} , R_{GMV} , V_{GMV} задані у (1.7)-(1.9),

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}.$$

Зауважимо, що необхідною і достатньою умовою існування розв'язку задачі (4.6) є умова

$$s < z_{\alpha}^2. \quad (4.11)$$

Дослідимо умову (4.11). Для цього виберемо щоденні дані про курси акцій, які входять до індексу *Dow Jones* за період часу з 01.01.2014 по 31.12.2015. Використовуючи метод біжучого вікна шириною $m=100$ днів, обчислимо значення коефіцієнта s для портфелів з $k=5;10;15;20;25;30$ активів. Отримані результати представлені на рис. 4.1. Бачимо, що максимальне значення, яке набуває коефіцієнт s , становить 0.86, тобто портфель з найменшим рівнем VaR для вибраних нами активів існує для всіх рівнів довіри $\alpha > 0.823$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 4.1. Значення коефіцієнта s для портфелів з $k=5;10;15;20;25;30$ активів, включених до індексу *Dow Jones*, отриманих методом біжучого вікна шириною $m=100$ днів.

У табл. 4.1 наведено мінімальні рівні довіри α_{min} для VaR , при яких можливо побудувати портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR залежно від кількості активів, включених у портфель. Отже, зі зростанням кількості активів, включених у портфель, значення α_{min} зростає, проте при статистично обґрунтованих рівнях довіри, тобто при $\alpha \geq 0.9$, інвестор має можливість сформувати портфель з найменшим рівнем VaR .

Таблиця 4.1

Залежність мінімального значення рівня довіри α_{min} , при якому виконується умова (4.11) від кількості активів k в портфелі.

	$k=5$	$k=10$	$k=15$	$k=20$	$k=25$	$k=30$
α_{min}	0,616	0,676	0,7	0,73	0,791	0,823

Джерело: розроблено автором

У [42] показано, що якщо портфель з найменшим рівнем VaR існує, тобто за виконання умови (4.11), то він належить ефективній множині. Причому очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR є не меншою, ніж дохідність портфеля з найменшим рівнем дисперсії, тобто $R_{MVaR} \geq R_{GMV}$, зі строгим знаком нерівності для всіх допустимих значень $\alpha < 1$. Отже, портфелі з найменшою дисперсією і з найменшим рівнем VaR збігаються лише у випадку, коли рівень довіри α для обчислення VaR дорівнює 1. Зауважимо, що при нормально розподілених дохідностях фінансових активів, оскільки $z_1 = +\infty$, ми отримаємо

$$VaR_1 = z_1 \sigma - \mu = +\infty.$$

Тобто, у цьому випадку VaR не надає жодної інформації про можливий ризик. Можемо провести паралелі з інтервалами довіри. У випадку рівня довіри 1, інтервали мають вигляд $(-\infty, +\infty)$ і також не мають жодної цінності.

При переході до когерентної міри ризику $CVaR$ у разі припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поведуться як багатомірною нормально розподілена випадкова величина з параметрами μ та Σ ризик портфеля обчислюється

$$CVaR_\alpha(\mathbf{w}) = k_\alpha \sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \mu. \quad (4.12)$$

Задачу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі мінімізації $CVaR$ портфеля розглянуто у [41]. У цьому випадку оптимізаційна задача матиме вигляд:

$$CVaR_\alpha(\mathbf{w}) = k_\alpha \sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \mu \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (4.13)$$

Необхідною та достатньою умовою існування розв'язку задачі (4.13) є умова [41]

$$s < k_\alpha^2. \quad (4.14)$$

Зауважимо, що за припущення неперервності розподілів дохідностей ми отримаємо, $k_\alpha^2 \geq z_\alpha^2$, тобто, портфель фінансових активів з найменшим рівнем $CVaR$ може бути сформований тоді і лише тоді, коли може бути сформований портфель з тих самих фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

У [41] знайдено ваги та характеристики портфеля фінансових активів з найменшим рівнем $CVaR$

$$\mathbf{w}_{CVaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{k_\alpha^2 - s}} \mathbf{R} \mu \quad (4.15)$$

$$R_{CVaR} = \mathbf{w}'_{CVaR} \mu = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{k_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}}, \quad (4.16)$$

$$V_{CVaR} = \mathbf{w}'_{CVaR} \Sigma \mathbf{w}_{CVaR} = \frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s} V_{GMV}, \quad (4.17)$$

$$M_{CVaR} = \sqrt{k_\alpha^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \quad (4.18)$$

Оскільки $k_\alpha^2 \geq z_\alpha^2$, то при довільному рівні довіри α , при якому виконується умова (4.11), ми отримуємо $R_{GMV} \leq R_{CVaR} \leq R_{VaR}$, причому нерівність є строгою при всіх допустимих значень $\alpha < 1$. Натомість при $\alpha = 1$ всі розглянуті нами портфелі фінансових активів з мінімальним ризиком збігаються.

4.2. Проблеми оцінки ризику портфеля в кризові та спокійні періоди

Метою цього підрозділу є порівняння різних методів обчислення VaR у кризові періоди та в періоди, коли поведінка фінансових показників є стабільною, та отримати відповідь на запитання, чи можна коректно обчислити VaR в умовах кризи.

Як вже наголошувалося, VaR є квантильною мірою. При заданому рівні довіри α , VaR дорівнює $(1-\alpha)$ -квантилі розподілу функції втрат або, що еквівалентно мінус α -квантилі розподілу функції дохідності.

Очевидно, що для обчислення точного значення квантилі необхідно знати функцію розподілу. На практиці, функція розподілу дохідності фінансових активів є невідомою, тому для того, щоб обчислити VaR , використовують певні статистичні методи оцінки характеристик розподілу.

Розглянемо три основних методи обчислення VaR : історичний метод, дельта-нормальний метод, метод Монте-Карло, а також їх застосування для обчислення ризику основних валютних курсів відносно гривні.

Розглянемо кожен з методів докладніше. Припустимо спочатку, що нам задано вибірку $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ з історичних даних дохідності курсу певної валюти відносно гривні.

Історичний метод. Цей метод полягає в тому, що за відсутності додаткових припущень щодо розподілу дохідностей та його характеристик оцінки будуються лише на основі попередніх спостережень. При використанні цього методу спочатку на основі заданої вибірки будується вибірка $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$, тобто дані сортуються в порядку зростання. Для обчислення оцінки VaR з рівнем довіри α вибирають значення $-X_{[(1-\alpha)n]}$, де символ $[\cdot]$ означає цілу частину. На перший погляд, у цьому методі справді не робиться жодного припущення про розподіл дохідностей, але неявно використовуються два доволі строгих припущення. По-перше, припускається, що розподіл дохідності є дискретним, що на практиці є досить грубою помилкою; а по-друге, в основі методу лежить припущення про те, що дохідність у майбутньому буде приймати лише ті значення, які наявні у вибірці. Друге припущення, очевидно, ніколи не виконується на практиці, оскільки розподіл дохідності є неперервним. Тому імовірність того, що значення дохідності в майбутньому буде таким самим, як одне зі значень в минулому, дорівнює 0, тобто така подія є неймовірна. Незважаючи на свої недоліки, цей метод є надзвичайно простим для практичного використання і застосовують його в ситуації, коли ризику треба оцінити якомога швидше.

Дельта-нормальний метод. В основі цього параметричного методу закладено припущення про те, що розподіл дохідностей є нормальним і дохідності не є автокорельованими, тобто є незалежними в часі. Оскільки функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини залежить від двох параметрів (математичного сподівання μ та дисперсії σ^2), то спочатку на основі заданої вибірки необхідно оцінити значення цих двох параметрів. Найчастіше для цього використовують вибіркові оцінки (1.27). Зважаючи на те, що VaR_α є відповідною квантилею розподілу функції втрат, оцінку ризику обчислюють (4.3)

$$VaR_\alpha = z_\alpha \hat{\sigma} - \hat{\mu}, \quad (4.19)$$

де $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ – оцінки параметрів нормального розподілу. На відміну від історичного методу, тут робиться припущення про розподіл дохідностей, а саме вважають, що розподіл є неперервним, а тому цей метод більш придатний для практичного застосування. З іншого боку, дельта-нормальний метод також має свої недоліки, а саме, припущення про незалежність дохідностей в часі і їх нормальний розподіл. Незважаючи на це, дельта-нормальний метод дає доволі хороші результати на практиці. Проте під час кризи ці недоліки можуть викликати серйозні негативні наслідки для діяльності фінансових установ. Зауважимо також, що у випадку, коли розподіли дохідностей є нормальними, VaR задовольняє усі умови когерентності для мір ризику, які сформульовані в роботі [45].

Метод Монте-Карло. Хоча VaR коректно описує ризик лише в ситуації, коли розподіли дохідностей є нормальними чи близькими до нормальних, важливо вміти обчислити VaR і в разі інших припущень щодо розподілу. Для цього використовують метод Монте-Карло, який ґрунтується на імітації ситуації з наперед вибраними припущеннями. На основі наявної вибірки ми формулюємо певні твердження щодо поведінки дохідності в минулому і припускаємо, що такою ж поведінка дохідності буде в майбутньому. Розглянемо дві моделі поведінки дохідностей: авторегресійна модель з біжучим середнім (ARMA) та узагальнена авторегресійна модель умовної гетероскедастичності (GARCH). У першому випадку моделюються дохідності, які є нормально

розподіленими, проте автокорельованими, а в другому – дохідності, розподіли яких мають важкі хвости. Загалом використання цього методу можна розбити на декілька кроків. На першому кроці за допомогою заданої вибірки оцінюються параметри моделей. Другий крок полягає у генеруванні майбутніх значень дохідності на основі оцінених моделей. Третій крок – це застосування історичного методу обчислення VaR до згенерованих даних. Другий і третій кроки повторюються декілька разів і остаточна оцінка VaR будується методом усереднення отриманих результатів. Усереднення (закон великих чисел) та велика кількість згенерованих даних усуває негативний ефект від використання історичного методу.

Перед моделюванням даних за допомогою $GARCH$ процесів необхідно визначити правильний порядок процесу. На сьогодні не існує ефективного алгоритму визначення порядку цих моделей, а тому найчастіше у фінансовій літературі використовують $GARCH(1,1)$ процес.

Нагадаємо, що необхідною і достатньою умовою слабкої стаціонарності $GARCH(1,1)$ процесу є умова

$$\alpha_1 + \beta_1 < 1, \quad (4.20)$$

де α_1, β_1 – параметри процесу.

Цікавим випадком є інтегровані $GARCH$ ($IGARCH$) процеси, для яких умова (4.20) набуває вигляду $\alpha_1 + \beta_1 = 1$. Цей процес характерний тим, що $D(X_T) = \infty$, тобто він не є слабо стаціонарним, проте, як показано в [115], залишається сильно стаціонарним. Детальний опис $GARCH$ процесів можна знайти, наприклад, у роботі [83].

Для проведення аналізу ми вибрали три курси валют відносно гривні: євро, англійський фунт, польський злотий. Для оцінки параметрів моделі виберемо дані про курси валют з 01.01.2006 по 30.09.2010, тобто виберемо період часу, в який входять як спокійні, так і кризові періоди. Зауважимо, що обсяг вибірки, яка використовується для оцінки параметрів, має значний вплив на отримані результати. Якщо обсяг вибірки замалий, то і результати будуть недостовірними; якщо ж завеликий, то процеси втрачають властивість стаціонарності. Тому вибірку треба вибирати достатньо великою, але такою, щоб поведінка реальних процесів за

вибраний проміжок часу була близькою до однорідної. У рекомендаційних банківських документах подається лише мінімальний обсяг вибірки, який становить 1 рік.

Значимо, що всі проведені обчислення проводилися в програмі статистичного аналізу даних **R**.

Порівняння методів для оцінки VaR проведемо за наступною схемою. Спочатку на основі кожного з методів, використовуючи вибрану нами вибірку, оцінюємо VaR з рівнем довіри 95 %, тобто $VaR_{0.95}$, та перевіряємо, використовуючи дані з 01.10.2010 по 12.03.2011 (111 денних дохідностей), правильність цього прогнозу. Очевидно, що за цей проміжок часу має бути не більше ніж 5 % днів, коли реальні дані приймають значення менші від нашої оцінки VaR . Звернемо також увагу на те, що ситуація, коли взагалі немає даних, що є меншими ніж VaR , також є незадовільною, оскільки в такому випадку ми робимо висновок, що ризик є переоціненим.

Оскільки банки валюту і продають і купляють, то необхідно оцінювати ризик події, що курс сильно зростає, та події, що курс сильно знизиться. Простіше кажучи, нас цікавить двосторонній VaR , тобто $VaR_{0.95}$ та $VaR_{0.05}$. Позначимо через $n_{0.95}$ – кількість днів, коли реальний курс був меншим за $-VaR_{0.95}$ та $n_{0.05}$ – більшим за $VaR_{0.05}$.

Результати, отримані під час використання історичного методу, наведені в таблиці 4.2. Бачимо, що результати є задовільними лише для польського злотого. При гранично допустимому рівні помилок 5.55 днів (тобто 5-6 днів) 2 рази дохідність була меншою за оцінку $-VaR_{0.95}$ для злотого, та 5 разів – більшою від $VaR_{0.05}$. Для євро цей метод недооцінив $VaR_{0.95}$, унаслідок чого упродовж 111 днів 9 разів дохідність курсу була меншою за прогнозований рівень. З іншого боку, оцінка $VaR_{0.05}$ для євро була досить точною, оскільки лише 4 рази дохідність курсу перевищила $VaR_{0.05}$. Для фунта ризику є сильно переоціненими. Протягом 111 днів жодного разу дохідність не перевищила $VaR_{0.05}$ та не була меншою від $-VaR_{0.95}$.

Результати використання дельта-нормального методу наведені в таблиці 4.3. Для євро та злотого результати є кращими порівняно з історичним методом. Зокрема, для злотого кількість помилок $n_{0.95}$ становить 2, а $n_{0.05}$ – 3. Для євро, на відміну від історичного

методу, кількість днів, коли дохідність була меншою ніж $-VaR_{0,95}$ та кількість днів, коли дохідність була більшою від $VaR_{0,05}$ в обох випадках дорівнює 3, тобто знаходиться у допустимих межах. Для фунта ризику є ще більш переоцінені, ніж у попередньому випадку, оскільки значення $VaR_{0,95}$ та $VaR_{0,05}$ зросли.

Таблиця 4.2

Результати отримані на основі історичного методу
(спокійний період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.076229	1.186873	9	4
Фунт	1.177165	1.313322	0	0
Злотий	2.018869	1.786522	2	5

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.3

Результати отримані на основі дельта-нормального методу
(стабільний період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.255121	1.357703	3	3
Фунт	1.328421	1.391468	0	0
Злотий	1.947110	2.043952	2	3

Джерело: розроблено автором

У таблиці 4.4 наведено результати оцінювання VaR методом Монте-Карло, припускаючи, що дохідності поведуться як стаціонарний $ARMA(1,1)$ процес. Результати порівняно з дельта-нормальним методом суттєво не змінилися. Цього треба було очікувати, оскільки в процесі дослідження виявлено, що лінійна залежність між дохідностями не є значною.

У процесі дослідження поведінки дохідностей курсів валют також було виявлено, що більш суттєва лінійна залежність спостерігається між дохідностями в квадраті, що вказує на доцільність використання узагальнених авторегресійних моделей умовної гетероскедастичності для моделювання дохідностей.

З огляду на попередні результати, зауважимо, що в періоди часу, коли курси є відносно стабільними, немає необхідності використовувати важкі моделі для оцінки VaR . Зокрема, достатньо добрі результати були отримані, припускаючи, що дохідності є

нормально розподіленими і, крім цього, цей метод є простіший для практичного застосування, ніж метод Монте-Карло.

Таблиця 4.4

Результати отримані на основі методу Монте-Карло ($ARMA(1,1)$)
(стабільний період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.301262	1.306604	2	3
Фунт	1.359409	1.361055	0	0
Злотий	2.000260	1.995428	2	4

Джерело: розроблено автором

У таблиці 4.5 наведені результати методу Монте-Карло для обчислення VaR курсів валют, припускаючи, що дохідності поведуться як стаціонарний $GARCH(1,1)$ процес. Зауважимо, що цей метод переоцінює ризики для курсів євро та фунта. Варто зазначити, що у випадку фунта ризик є менш переоцінений, ніж у випадку попередніх методів, оскільки один раз при перевірці результатів реальна дохідність була більшою, ніж $VaR_{0,05}$. Подібну ситуацію бачимо і у випадку з євро. Для злотого ризику виявилися коректно оцінені.

Таблиця 4.5

Результати отримані на основі методу Монте-Карло
($GARCH(1,1)$) (стабільний період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.483571	1.479298	0	2
Фунт	1.245902	1.241027	0	1
Злотий	2.039087	2.028286	2	3

Джерело: розроблено автором

Цікаво також перевірити поведінку різних методів обчислення VaR у кризові періоди. Тому візьмемо для оцінки параметрів моделі дані про курси валют з 01.01.2006 по 30.09.2008. Результати оцінювання ризику для курсів валют перевіримо, використовуючи дані з 01.10.2008 по 30.06.2009 (180 денних дохідностей), тобто гранично допустимий рівень помилок є 9 днів.

Результати цього дослідження наведені в таблицях 4.6-4.9. Зауважимо, що вони є вкрай незадовільними. Зокрема, розглянемо випадок дохідності курсу фунта, оскільки попередні результати показали, що всі використані нами методи ризик для цієї валюти

переоцінюють. Застосувавши історичний метод, бачимо (табл. 4.6), що кількість днів, коли дохідність курсу фунта була меншою ніж $-VaR_{0.95}$, становить 42 дні, а кількість днів, коли дохідність була більшою від $VaR_{0.05}$ – 56. Подібна ситуація спостерігається і для двох інших валют.

Таблиця 4.6

Результати отримані на основі історичного методу (кризовий період).

	$VaR_{0.95}$	$VaR_{0.05}$	$n_{0.95}$	$n_{0.05}$
Євро	0.802717	0.8827381	38	44
Фунт	0.820806	0.8025138	42	56
Злотий	1.128314	1.090729	49	48

Джерело: розроблено автором

Результати застосування дельта-нормального методу наведені в таблиці 4.7. Кількість помилок для фунта в сторону зменшення становить 39, а в сторону збільшення – 54. Зауважимо, що результати відносно покращилися у порівнянні з історичним методом, проте залишилися вкрай незадовільними. Для двох інших валют отримано аналогічні результати.

Таблиця 4.7

Результати отримані на основі дельта-нормального методу (кризовий період).

	$VaR_{0.95}$	$VaR_{0.05}$	$n_{0.95}$	$n_{0.05}$
Євро	0.8881385	0.9353483	35	43
Фунт	0.8812579	0.8842869	39	54
Злотий	1.226331	1.312642	46	43

Джерело: розроблено автором

У таблиці 4.7 наведені результати перевірки використання методу Монте-Карло, за припущення, що дохідності поведуться як $ARMA(1,1)$ процес. Для дохідності курсу фунта ситуація є аналогічною до попереднього випадку, що вказує на те, що між дохідностями немає суттєвої лінійної залежності. Для євро та злогого результати є дещо кращими, проте надалі залишаються незадовільними.

Таблиця 4.8

Результати отримані на основі методу Монте-Карло ($ARMA(1,1)$) (кризовий період).

	$VaR_{0.95}$	$VaR_{0.05}$	$n_{0.95}$	$n_{0.05}$
Євро	0.92	0.9170843	31	43
Фунт	0.8806709	0.8806535	39	54
Злотий	1.265621	1.267455	44	44

Джерело: розроблено автором

Найкращі результати отримано при використанні методу Монте-Карло з припущенням, що дохідності поведуться як $GARCH(1,1)$ процес (табл. 4.9). Наприклад, для дохідності курсу фунта кількість днів, коли вона була меншою ніж $-VaR_{0.95}$, становить 23 дні, а кількість днів коли вона була більшою від $VaR_{0.05}$ – 38. Незважаючи на те, що результати покращилися, вони залишаються незадовільними, оскільки критичний рівень помилок у кожному з випадків становить 9 днів. Тому, виникає запитання, можливо модель потрібно переоцінювати кожен раз при надходженні нових даних про курс валют? Розглянемо це питання детальніше лише для останнього методу, оскільки він виявився найкращим.

Таблиця 4.9

Результати отримані на основі методу Монте-Карло ($GARCH(1,1)$) (кризовий період).

	$VaR_{0.95}$	$VaR_{0.05}$	$n_{0.95}$	$n_{0.05}$
Євро	1.368545	1.371491	14	34
Фунт	1.37098	1.369134	23	38
Злотий	1.427919	1.418998	40	43

Джерело: розроблено автором

Результати перевірки оцінки ризику для дохідності курсів валют методом Монте-Карло за припущення, що вони поведуться як $GARCH(1,1)$ процес (параметри процесу переоцінюються кожного дня) наведені в таблиці 4.10. Дані результати є суттєво кращими. Зокрема, для курсу євро кількість помилок оцінки $VaR_{0.95}$ становить 9 днів, тобто побудована оцінка досить добре описує ризик. Для всіх інших оцінок кількість помилок перевищує допустимий рівень, проте є набагато меншою ніж у випадках, коли параметри моделі не переоцінювалися.

Т а б л и ц я 4.10

Результати отримані на основі методу Монте-Карло ($GARCH(1,1)$), параметри процесу переоцінюються кожного дня (кризовий період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.3439-2.0303	1.3376-2.0214	9	19
Фунт	1.3988-2.2716	1.3964-2.2630	15	14
Злотий	1.4350-3.0268	1.4253-3.0077	18	23

Джерело: розроблено автором

Звернемо увагу на те, як змінюються оцінки параметрів $GARCH(1,1)$ процесу при переході від стабільної ситуації до кризової. Наприклад, при оцінюванні VaR для доходності курсу євро, використовуючи вибірку з 01.01.2006 по 30.09.2010, ми отримали наступні оцінки для параметрів моделі $\alpha_1=0.048145$ та $\beta_1=0.950142$. При використанні вибірки з 01.01.2006 по 30.09.2008 оцінки стали $\alpha_1=0.028514$ та $\beta_1=0.970486$. Зауважимо, що у першому випадку $\alpha_1+\beta_1=0.998287$, а в другому $\alpha_1+\beta_1=0.999$, тобто обидві суми є досить близькими до одиниці. Цей факт та зростання оцінки параметра β наводить на думку, що виникнення кризових явищ спричиняє втрату процесами властивості слабкої стаціонарності. Розглянемо, як поведуться оцінки ризиків для доходності курсів валют, обчислені за допомогою методу Монте-Карло за припущення, що доходності поведуться як $IGARCH(1,1)$ процес. Для цього використаємо вибірку даних про курси валют з 01.01.2006 по 30.09.2008 та проведемо аналіз результатів аналогічно до попереднього випадку. Крім цього, розглянемо два випадки: у першому, параметри процесу не переоцінюються, а в другому – переоцінюються кожного дня.

У випадку, коли параметри моделі не переоцінюються, отримано результати, які наведено в таблиці 4.11. Порівняно з попередніми методами, ці результати є кращими. Кількість помилок у всіх випадках є досить близькою до граничного допустимого числа, хоча залишається більшою за нього, крім випадку $VaR_{0,95}$ для євро. Вже з цього можемо зробити висновок, що $IGARCH(1,1)$ процес добре оцінює VaR для доходності курсів валют під час кризових явищ.

Т а б л и ц я 4.11

Результати отримані на основі методу Монте-Карло ($IGARCH(1,1)$) (кризовий період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.9445495	1.940008	5	18
Фунт	2.036848	2.030979	11	16
Злотий	3.012356	3.006430	14	15

Джерело: розроблено автором

Використовуючи $IGARCH(1,1)$ процес для оцінки VaR методом Монте-Карло та переоцінюючи невідомі параметри кожного дня, вдалося покращити оцінки ризику для всіх валют (табл. 4.12). Приміром, для фунта, обидві оцінки ризику лежать в допустимих межах. Для євро в одному випадку ($VaR_{0,05}$) ризик виявився недооціненим, проте порівняно з іншими методами така недооцінка виглядає допустимою. Для злогого ризик у двох випадках є недооціненим, але аналогічно до євро, недооцінка не є вагомим.

Т а б л и ц я 4.12

Результати отримані на основі методу Монте-Карло ($IGARCH(1,1)$), параметри процесу переоцінюються кожного дня (кризовий період).

	$VaR_{0,95}$	$VaR_{0,05}$	$n_{0,95}$	$n_{0,05}$
Євро	1.9434-2.9463	1.9416-2.9415	3	11
Фунт	2.0361-3.1327	2.0317-3.1289	4	8
Злотий	2.9277-3.8073	2.8905-3.8019	12	13

Джерело: розроблено автором

З проведеного дослідження випливає, що в періоди часу, коли поведінка курсів є близькою до стабільної, кожен з розглянутих методів дає коректну оцінку VaR . Тому на практиці достатньо використовувати найпростіший та найпоширеніший дельта-нормальний метод.

У кризові періоди жоден з розглянутих методів, які придатні для оцінки ризику в стабільні періоди, не дав задовільних результатів. Найкращі результати в цьому випадку було досягнуто, використовуючи узагальнені авторегресійні моделі умовної гетероскедастичності. Аналіз параметрів цієї моделі наводить на думку, що для оцінки ризику в кризові періоди можна використовувати інтегровані $GARCH$ моделі. Застосування $IGARCH$ моделей та переоцінка параметрів кожного дня дало змогу отри-

мати задовільні оцінки VaR для дохідності курсів усіх розглянутих в дослідженні валют. Зауважимо, що недоцільно використовувати інтегровані узагальнені авторегресійні моделі умовної гетероскедастичності в періоди часу, коли поведінка курсів є стабільною, оскільки ризики в цьому випадку будуть дуже переоцінені.

Крім того, результати проведеного дослідження дають змогу дати позитивну відповідь на питання, чи можна коректно обчислити VaR в умовах кризи на валютному ринку, а, отже, VaR як міра ризику може використовуватися і надалі у фінансовій діяльності.

4.3. Порівняння портфелів зі структурами, отриманими на основі мінімізації ризику

У 1952 році Марковіц запропонував метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі мінімізації дисперсії портфеля [108]. Завдяки своїй простоті цей метод став дуже популярним серед практиків і теоретиків у фінансовій математиці та економетриці. Основною властивістю так побудованого портфеля є те, що дохідність портфеля не можна збільшити, не збільшуючи його ризик.

В останні роки дослідження в теорії мір ризику показали, що для практичного застосування добре підходять міри ризику, що ґрунтуються на квантилях розподілів функцій втрат. Такими мірами є, як раніше зазначалося, VaR , яка не є когерентною в загальному випадку, та $CVaR$, яка є узагальненням VaR до когерентної міри.

Нашою метою є проведення аналізу портфелів фінансових активів, отриманих із задач мінімізації ризику портфеля (1.6), (4.6), (4.13) Особливу увагу ми приділимо поведінці портфелів з найменшим ризиком у кризовий період, а саме 2008-2009 роки.

Ми розглянемо два припущення стосовно поведінки дохідностей активів, з яких складено портфель: вектор дохідностей є нормально розподіленим та випадок, коли дохідності активів мають t -розподіл Стюдента з v ступенями вільності. Зауважимо, що таке припущення дасть можливість врахувати наявність

важких хвостів розподілів дохідностей активів, наявність яких є особливо вираженою у кризові періоди.

Для вибору раціональної структури портфелів фінансових активів з найменшим ризиком та їх аналізу ми використаємо ваги і характеристики портфелів (1.7)-(1.9), (4.7)-(4.10), (4.15)-(4.18) та використаємо вибіркові оцінки параметрів розподілу (1.27). При переході від припущення нормальності розподілу вектора дохідностей активів до припущення про t -розподіл Стюдента з v ступенями вільності, необхідно у (4.7)-(4.10) та (4.15)-(4.18) z_α та k_α замінити на

$$z_{\alpha,v} = \sqrt{\frac{v-2}{v}} z_{\alpha,v}^* \quad \text{та} \quad k_{\alpha,v} = \sqrt{\frac{v-2}{v}} \frac{\int_{-\infty}^{-z_{\alpha,v}^*} x t_v(x) dx}{1-\alpha}$$

відповідно, де $z_{\alpha,v}^*$ та $t_v(x)$ є відповідно α квантилю та густиною t -розподілу Стюдента з v ступенями вільності. У випадку, коли дохідності активів мають t -розподіл Стюдента з v ступенями вільності, VaR і $CVaR$ портфелів обчислюються $VaR_\alpha = z_{\alpha,v} \sqrt{D(\mathbf{w})} - M(\mathbf{w})$ та $CVaR_\alpha = k_{\alpha,v} \sqrt{D(\mathbf{w})} - M(\mathbf{w})$ [42].

Для проведення аналізу портфелів з найменшим ризиком ми використаємо ціни акцій чотирьох компаній (*BMW*, *Deutsche Bank*, *Siemens* та *Metro*) за період часу з 01.01.2007 по 31.12.2009. Для аналізу введемо дві множини акцій: $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$ та $\{BMW, Metro, Siemens\}$, оскільки криза 2008 року особливо відчутною була для банківської сфери, то природно очікувати, що і поведінка портфелів з найменшим ризиком для попередніх множин активів буде різною. Для кожної з множин використаємо припущення, що дохідності є нормально розподіленими та t розподіленими. Порівняння портфелів проведемо за такою схемою:

1. Насамперед оцінимо параметри розподілу дохідностей за 2007, 2008 та 2009 роки.
2. Побудуємо оцінки портфелів з найменшою дисперсією, з мінімальним рівнем VaR та $CVaR$ (для цих портфелів використаємо рівень довіри 95 %), використовуючи дані за 2007 та 2008 роки.

3. Припустивши, що в наступному році після року, використаного для оцінки, інвестор не змінює портфель, порівняємо портфелі в кінці наступного року.

Оцінки характеристик розподілів дохідностей активів за 2007, 2008 та 2009 роки наведено в табл. 4.13-4.15 відповідно. Очевидно, що вилучивши *Deutsche Bank* з множини доступних активів, у табл. 4.13-4.15 потрібно просто забрати відповідні рядки і стовпці. Проаналізувавши математичне сподівання дохідностей, легко бачити, що 2008 рік насправді був кризовим, оскільки всі математичні сподівання у табл. 4.14 є від'ємними.

Таблиця 4.13

Характеристики дохідності акції за 2007 рік

	Мат. сподівання	Матриця коваріацій			
<i>BMW</i>	-0,01039	2,22959	0,90007	0,52111	1,04606
<i>DBank</i>	-0,01723	0,90007	2,79541	0,61644	1,01576
<i>Metro</i>	0,06613	0,52111	0,61644	2,16982	0,85205
<i>Siemens</i>	0,14258	1,04606	1,01576	0,85205	3,04863
		<i>BMW</i>	<i>DBank</i>	<i>Metro</i>	<i>Siemens</i>

Джерело: розроблено автором

У табл. 4.16 наведено ваги портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією для множини $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$. Очевидно, що ваги портфелів з найменшою дисперсією є однаковими за припущень нормального розподілу та розподілу Стюдента.

Таблиця 4.14

Характеристики дохідності акції за 2008 рік

	Мат. сподівання	Матриця коваріацій			
<i>BMW</i>	-0,25778	10,49618	8,82608	6,57893	8,26250
<i>DBank</i>	-0,44330	8,82608	23,96940	7,22631	8,36819
<i>Metro</i>	-0,26404	6,57893	7,22631	12,19173	7,88186
<i>Siemens</i>	-0,27809	8,26250	8,36819	7,88186	13,78008
		<i>BMW</i>	<i>DBank</i>	<i>Metro</i>	<i>Siemens</i>

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.15

Характеристики дохідності акції за 2009 рік

	Мат. сподівання	Матриця коваріацій			
<i>BMW</i>	0,14973	8,34397	7,48319	3,06894	4,90097
<i>DBank</i>	0,21528	7,48319	24,61402	5,16842	7,86605
<i>Metro</i>	0,15540	3,06894	5,16842	6,21489	2,93795
<i>Siemens</i>	0,07671	4,90097	7,86605	2,93795	6,72966
		<i>BMW</i>	<i>DBank</i>	<i>Metro</i>	<i>Siemens</i>

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.16

Ваги портфелів з найменшою дисперсією для множини активів $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$

	Портфель з найменшою дисперсією	
	2007	2008
<i>BMW</i>	0,31309	0,48766
<i>DBank</i>	0,20268	0,03763
<i>Metro</i>	0,37246	0,35892
<i>Siemens</i>	0,11178	0,11579

Джерело: розроблено автором

Для портфелів з найменшим рівнем *VaR* та *CVaR* ваги наведено в табл. 4.17-4.18.

Таблиця 4.17

Ваги портфелів з найменшим рівнем *VaR* та *CVaR* для множини активів $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$ за припущення нормального розподілу вектора дохідностей.

	Нормальний розподіл			
	0,95-MVaR		0,95-MCVaR	
	2007	2008	2007	2008
<i>BMW</i>	0,28892	0,50554	0,29383	0,50191
<i>DBank</i>	0,18356	0,01736	0,18744	0,02147
<i>Metro</i>	0,37927	0,36347	0,37789	0,36255
<i>Siemens</i>	0,14825	0,11364	0,14084	0,11407

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.18

Ваги портфельів з найменшим рівнем VaR та $CVaR$
для множини активів $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$
за припущення t розподілу вектора дохідностей.

	t розподіл			
	0.95- $MVaR$		0.95- $MCVaR$	
	2007	2008	2007	2008
<i>BMW</i>	0,28761	0,50650	0,31112	0,48912
<i>DBank</i>	0,18253	0,01627	0,20112	0,03598
<i>Metro</i>	0,37964	0,36371	0,37301	0,35929
<i>Siemens</i>	0,15022	0,11352	0,11475	0,11561

Джерело: розроблено автором

Бачимо з попередніх таблиць, що частка акцій банку в портфелях є досить низькою, що зумовлене низькою середньою дохідністю акцій за 2008 рік. Виключаючи з нашої множини акцій акції *Deutsche Bank*, отримаємо наступні портфелі (табл. 4.19-4.21).

Таблиця 4.19

Ваги портфельів з найменшою дисперсією для множини активів
 $\{BMW, Metro, Siemens\}$

	Портфель з найменшою дисперсією	
	2007	2008
<i>BMW</i>	0,40057	0,51277
<i>Metro</i>	0,43450	0,36609
<i>Siemens</i>	0,16493	0,12114

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.20

Ваги портфельів з найменшим рівнем VaR та $CvaR$
для множини активів $\{BMW, Metro, Siemens\}$
за припущення нормального розподілу вектора дохідностей.

	Нормальний розподіл			
	0.95- $MVaR$		0.95- $MCVaR$	
	2007	2008	2007	2008
<i>BMW</i>	0,36682	0,51713	0,37367	0,51624
<i>Metro</i>	0,43550	0,36677	0,43529	0,36664
<i>Siemens</i>	0,19768	0,11610	0,19104	0,11712

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.21

Ваги портфельів з найменшим рівнем VaR та $CVaR$
для множини активів $\{BMW, Metro, Siemens\}$
за припущення t розподілу вектора дохідностей.

	t розподіл			
	0.95- $MVaR$		0.95- $MCVaR$	
	2007	2008	2007	2008
<i>BMW</i>	0,36500	0,51736	0,39782	0,51313
<i>Metro</i>	0,43555	0,36681	0,43458	0,36614
<i>Siemens</i>	0,19945	0,11583	0,16760	0,12073

Джерело: розроблено автором

Обчисливши ваги усіх портфельів можемо перейти до їх аналізу. Основними критеріями для порівняння поведінки портфельів будуть їхня середня дохідність, дисперсія, VaR та $CVaR$. Для обчислення середніх дохідностей портфеля, їх дисперсій, VaR та $CVaR$ підставляємо у формули для ваг портфельів отриманих з дохідностей за 2007 (2008) рік математичне сподівання та дисперсію дохідностей акцій за 2008 (2009) рік. Отримані результати для множини з чотирьох акцій наведені в табл. 4.22-4.23. Бачимо з табл. 4.22, що найкраще в 2008 році, припускаючи, що дохідності акцій є нормально розподіленими, поводитьсь портфель з найменшим рівнем VaR , а поведінка портфеля з найменшою дисперсією є найгіршою, оскільки не лише середня дохідність портфелю є найменшою, але також цей портфель має найвищий середній ризик, причому незалежно від вибраної міри ризику. У 2009 році поведінка портфельів не є такою однозначною як у попередньому випадку. Тепер портфель з найменшою дисперсією має найвищу середню дохідність, проте і середній ризик цього портфеля є найвищий. Найменшим середнім ризиком у цьому випадку характеризується портфель з найменшим рівнем $CVaR$, а поведінка портфеля з найменшим рівнем VaR є в цьому випадку найгіршою.

Таблиця 4.22

Поведінка портфель з найменшим рівнем ризику для множини активів $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$ за припущення нормального розподілу вектора дохідностей.

Нормальний розподіл							
Портфель з найменшою дисперсією (2008)				Портфель з найменшою дисперсією (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,29998	9,23620	5,29888	6,56880	0,14578	5,26481	3,62837	4,58715
Портфель з найменшим рівнем VaR (2008)				Портфель з найменшим рівнем VaR (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,29722	9,17415	5,27929	6,54494	0,14463	5,23325	3,61818	4,57409
Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2008)				Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,29778	9,18423	5,28259	6,54893	0,14486	5,21392	3,61100	4,56514

Джерело: розроблено автором

Таблиця 4.23

Поведінка портфель з найменшим рівнем ризику для множини активів $\{BMW, Deutsche Bank, Metro, Siemens\}$ за припущення t розподілу вектора дохідностей.

t розподіл							
Портфель з найменшою дисперсією (2008)				Портфель з найменшою дисперсією (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,29998	9,23620	5,04346	61,53817	0,14578	5,26481	3,43553	46,08879
Портфель з найменшим рівнем VaR (2008)				Портфель з найменшим рівнем VaR (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,29707	9,17168	5,02396	61,32100	0,14457	5,20641	3,41682	45,83289
Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2008)				Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,29976	9,22998	5,04164	61,51731	0,14569	5,22960	3,42363	45,93405

Джерело: розроблено автором

Припускаючи, що дохідності мають t розподіл, бачимо, що поведінка у 2008 році портфеля з найменшим рівнем VaR незначно покращується, а портфеля з найменшим рівнем $CVaR$ погіршується, проте співвідношення між поведінкою портфель залишається незмінним, найкраще поводить портфель з найменшим рівнем VaR , а найгіршу поведінку має портфель з найменшою дисперсією. У 2009 році змінюючи припущення про розподіл дохідностей бачимо, що найвищу середню дохідність знову має портфель з найменшою дисперсією, а найменший середній рівень

ризик, на відміну від випадку нормального розподілу, має портфель з найменшим рівнем VaR . Крім того, варто відзначити різке збільшення $CVaR$ для всіх портфель. Це явище підтверджує, що саме $CVaR$ є найбільш інформативною мірою ризику серед мір, розглянутих у цій роботі.

Тепер звернемо увагу на результати попереднього дослідження, виключаючи зі списку доступних активів акції *Deutsche Bank*, оскільки серед усіх розглянутих в роботі компаній, саме *Deutsche Bank* найбільш постраждав від кризи у 2008 році. Дослідимо спочатку портфелі, припускаючи, що дохідності акцій є нормально розподіленими. Ситуація у цьому випадку докорінно змінюється. Наприклад, у 2008 році найвищу середню дохідність та найменший середній ризик має портфель з найменшою дисперсією, а портфель з найменшим рівнем VaR є найбільш ризиковим та має найменшу середню дохідність. У 2009 році портфель з найменшим рівнем VaR має найвищу середню дохідність та водночас і найвищий середній рівень ризику. Найменший середній рівень ризику в цьому випадку має портфель з найменшою дисперсією.

Таблиця 4.24

Поведінка портфель з найменшим рівнем ризику для множини активів $\{BMW, Metro, Siemens\}$ за припущення нормального розподілу вектора дохідностей.

Нормальний розподіл							
Портфель з найменшою дисперсією (2008)				Портфель з найменшою дисперсією (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,26385	8,87220	5,16325	6,40790	0,14296	5,14727	3,58881	4,53684
Портфель з найменшим рівнем VaR (2008)				Портфель з найменшим рівнем VaR (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,26452	8,92045	5,17723	6,42525	0,14333	5,16096	3,59340	4,54269
Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2008)				Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,26439	8,90927	5,17401	6,42125	0,14326	5,15817	3,59247	4,54149

Джерело: розроблено автором

Т а б л и ц я 4.25

Поведінка портфель з найменшим рівнем ризику для множини активів $\{BMW, Metro, Siemens\}$ за припущення t розподілу вектора дохідностей.

t розподіл							
Портфель з найменшою дисперсією (2008)				Портфель з найменшою дисперсією (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,26385	8,87220	4,91292	60,28320	0,14296	5,14727	3,39815	45,57259
Портфель з найменшим рівнем VaR (2008)				Портфель з найменшим рівнем VaR (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,26456	8,92354	4,92706	60,45732	0,14335	5,16171	3,40272	45,63627
Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2008)				Портфель з найменшим рівнем $CVaR$ (2009)			
Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$	Дохідність	Дисперсія	VaR	$CVaR$
-0,26390	8,87549	4,91384	60,29439	0,14299	5,14838	3,39850	45,57749

Джерело: розроблено автором

У випадку t розподілених дохідностей найкращу поведінку у 2008 році має портфель з найменшою дисперсією, а найгіршу – портфель з найменшим рівнем VaR . У 2009 році найвищу середню дохідність забезпечує портфель з найменшим рівнем $CVaR$, а найменший середній рівень ризику – портфель з найменшою дисперсією. Знову, як і у випадку з множиною з чотирьох активів, відзначаємо суттєве збільшення $CVaR$ при переході від припущення нормального розподілу до t розподілу.

Отже, з проведеного аналізу, ми, на жаль, не отримали однозначної відповіді на питання, яка з трьох розглянутих мір ризику є найкращою в сенсі побудови портфеля з найменшим рівнем ризику. Поведінка основних характеристик портфель залежить від припущення стосовно розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель та від самої поведінки дохідностей (кризовий чи спокійний період), що впливає на характеристики розподілу, насамперед на дисперсію активів та, як наслідок, на VaR та $CVaR$. Проте, певні висновки ми можемо зробити.

По-перше, в кризові періоди, якщо портфель містить акції компаній, які найбільш чутливі до кризи (в нашому випадку *Deutsche Bank*), найгіршу поведінку має портфель з найменшою дисперсією, а отже і дисперсія, як міра ризику, є найгіршою для побудови портфеля з найменшим рівнем ризику. В цьому випадку найкращою мірою для оцінки ризиків та побудови портфелю є VaR .

По-друге, варто відзначити суттєве зростання $CVaR$ при переході від нормального розподілу до t розподілу. Це зростання зумовлене тим фактом, що $CVaR$ при рівні довіри α оцінює середні втрати з імовірністю $1-\alpha$, на відміну від VaR , яка оцінює найменші з можливих втрат. Тобто, $CVaR$ є більш інформативним ніж VaR , але є важчим для практичних обчислень.

По-третє, в жодному з розглянутих випадків, поведінка портфеля з найменшим рівнем $CVaR$ не була найгіршою, а отже, можемо зробити висновок, що $CVaR$, як міра ризику, має найстабільнішу, серед розглянутих мір, поведінку, а тому може бути використана як в кризові періоди, так і в періоди без криз.

Отже, оцінювати ризики необхідно комплексно, тобто використовуючи декілька мір ризику, оскільки кожна з розглянутих мір ризику має свої переваги і недоліки, а в часи кризи недоліки можуть дуже багато коштувати.

4.4. Порівняння мір ризику при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів

Питання вибору міри ризику для побудови портфеля фінансових активів є актуальним як для практиків фондового ринку та банківської сфери, так і для науковців-теоретиків. До мір, що найчастіше використовуються на практиці, можна віднести дисперсію, *Value-at-Risk (VaR)* та умовне *Value-at-Risk (CVaR)*. Проте поведінка та інформативність цих мір є неоднакова. Зокрема, дисперсія є найкраще вивченою та найменш інформативною мірою, а VaR є простою в обчисленні та надає більше інформації про ризик, ніж дисперсія, проте не є субадитивною. $CVaR$ надає набагато кращу інформацію про ризик, ніж дві інші згадані міри, задовольняє аксіому субадитивності, але є важкою в обчисленні. На практиці вибір міри ризику регламентується певними документами у випадку фінансових, та певними особистими переконаннями у випадку приватних інвесторів.

При зміні міри ризику суттєво змінюються властивості портфеля. Насамперед це стосується очікуваної дохідності портфеля та його ризику. Також різними є і статистичні властивості портфеля, розподіл ваг, дохідності, ризику. Навіть у випадку нормально розподілених дохідностей фінансових активів, які входять у портфель, при використанні мінімізації ризику для обчислення структури портфеля поведінка портфелів є різною [17]. Виникає питання: Чи існує критерій раціонального вибору структури портфеля не залежний від вибору міри ризику? При нормально розподілених дохідностях фінансових активів таким критерієм є максимізація відношення Шарпа [1].

Нашим завданням є порівняння портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа (1.18) (за різних мір ризику) при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель. Порівняння проведемо на основі акцій п'яти компаній, що входять у перелік *DowJones*. На першому етапі ми не будемо робити жодного припущення про розподіл дохідностей активів. На основі даних за 2013 рік ми побудуємо три портфелі з максимальним відношенням Шарпа. На другому етапі ми на основі даних за 2014 рік про дохідності активів, з яких складено портфель, оцінимо середню дохідність кожного з портфелів, а також відповідні ризики. На третьому етапі ми побудуємо розподіл дохідності кожного портфеля з огляду на припущення, що дохідності поведуться як GARCH(1, 1) процес, який часто використовують для моделювання поведінки дохідностей фінансових активів [114]. На основі отриманих результатів проаналізуємо поведінку портфелів.

Зауважимо, що в [41], [42], [108] за основу побудови портфеля вибирали задачу мінімізації ризику портфеля незалежно від його очікуваної дохідності. Часто на практиці виникає необхідність прийняти до уваги також очікувану дохідність портфеля, а саме розглянути задачу подвійної оптимізації. Загалом такі задачі не мають розв'язку, а тому у фінансовій літературі розглядають також інші методи вибору структури портфеля фінансових активів, наприклад, відношення Шарпа [126]. Відношення Шарпа описує премію за ризик на одиницю ризику. Ми припускаємо, що на ринку немає можливості безризикового розміщення коштів. Отже, чим більшим є відношення Шарпа, тим кращим є портфель.

Крім того, у випадку нормально розподілених дохідностей структура портфеля з максимальним відношенням Шарпа не залежить від вибору міри ризику [1], що є привабливою властивістю при використанні на практиці.

Запишемо задачу максимізації відношення Шарпа

$$R_w / Y_w \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1, \quad (4.21)$$

де Y_w – ризик портфеля.

За ризик Y_w ми візьмемо середньоквадратичне відхилення, VaR та $CVaR$ портфеля. Для мір ризику VaR та $CVaR$ необхідно визначити також рівень довіри, ми візьмемо $\alpha=0.95$.

Усі розглянуті задачі оптимізації залежать від параметрів розподілу дохідностей μ та Σ . Загалом ці параметри є невідомими на практиці та мають бути відповідно оцінені. Ми використаємо вибіркові оцінки (1.27). Зауважимо, що оцінки (1.27) є випадковими величинами. Отже і розв'язки оптимізаційних задач необхідно розглядати як реалізацію випадкової величини, а не як константу. Тому для аналізу портфеля фінансових активів та його характеристик необхідно використовувати статистичні та імовірнісні методи.

Проведемо аналіз трьох портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа (залежно від вибраної міри ризику), не роблячи жодного припущення стосовно розподілу дохідностей активів, з яких складено ці портфелі. Ми використаємо історичний метод оцінки характеристик портфеля, виходячи з даних про щоденні курси акцій п'яти компаній (*Coca-Cola*, *McDonald's*, *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Visa*) з переліку *DowJones* за період часу з 01.01.2013 до 31.12.2013 та на основі даних про курси цих акцій в період часу з 01.01.2014 до 31.12.2014 проаналізуємо характеристики цих портфелів. Використовуючи дані за 2013 рік, отримаємо оцінки

$$\hat{\mu} = (0.05185, 0.03782, 0.13369, 0.11317, 0.15263)',$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.987 & 0.343 & 0.315 & 0.441 & 0.494 \\ 0.343 & 0.588 & 0.181 & 0.233 & 0.303 \\ 0.315 & 0.181 & 2.502 & 0.509 & 0.435 \\ 0.441 & 0.233 & 0.509 & 1.439 & 0.654 \\ 0.494 & 0.303 & 0.435 & 0.654 & 1.808 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи оцінки $\hat{\mu}$ та $\hat{\Sigma}$, розв'яжемо оптимізаційні задачі

$$\hat{\mu}'\mathbf{w} / \sqrt{\mathbf{w}'\hat{\Sigma}\mathbf{w}} \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1, \quad (4.22)$$

$$\hat{\mu}'\mathbf{w} / \overline{VaR}_\alpha(\mathbf{w}) \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1, \quad (4.23)$$

$$\hat{\mu}'\mathbf{w} / \overline{CVaR}_\alpha(\mathbf{w}) \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (4.24)$$

У задачі (4.22) всі параметри є відомі, тому її можна розв'язати. Натомість в (4.23)-(4.24) невідомими є знаменники. Ми побудуємо історичні оцінки для вибраних мір ризику. На основі вибірки значень дохідностей фінансових активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ побудуємо вибірку значень дохідностей портфеля $\mathbf{w}'\mathbf{X}_1, \mathbf{w}'\mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{w}'\mathbf{X}_n$. Далі з отриманої вибірки побудуємо вибірку $\mathbf{w}'\mathbf{X}_{(1)} \leq \mathbf{w}'\mathbf{X}_{(2)} \leq \dots \leq \mathbf{w}'\mathbf{X}_{(n)}$, тобто сортуємо вихідну вибірку за зростанням. Для обчислення оцінки $\overline{VaR}_\alpha(\mathbf{w})$ з рівнем довіри α виберемо значення $-\mathbf{w}'\mathbf{X}_{[(1-\alpha)n]}$, де символ $[\cdot]$ означає цілу частину, а для $\overline{CVaR}_\alpha(\mathbf{w})$ середнє арифметичне значень менших за $-\mathbf{w}'\mathbf{X}_{[(1-\alpha)n]}$. Зауважимо, що в (4.22)-(4.24) ми не вимагаємо додатності ваг портфеля. Отримаємо: $\hat{\mathbf{w}}_{SRVar} = (-0.0879, 0.0914, 0.2547, 0.2845, 0.4568)'$ з очікуваної дохідністю $\hat{R}_{SRVar} = 0.1349$ та відношенням Шарпа 0.1363; $\hat{\mathbf{w}}_{SRVaR} = (0.1521, -0.0450, 0.3409, 0.0007, 0.5513)'$ з очікуваної дохідністю $\hat{R}_{SRVaR} = 0.1360$ та відношенням Шарпа 0.1029; $\hat{\mathbf{w}}_{SRCVaR} = (-0.0750, 0.1542, 0.2274, 0.2860, 0.4074)'$ з очікуваної дохідністю $\hat{R}_{SRCVaR} = 0.1269$ та відношенням Шарпа 0.063.

Таблиця 4.26

Характеристики портфелів

	Дохідність	Дисперсія	$VaR_{0.95}$	$CVaR_{0.95}$
$\hat{\mathbf{w}}_{SRVar}$	0.0571	0.9277	1.6553	2.0971
$\hat{\mathbf{w}}_{SRVaR}$	0.0670	0.9227	1.7167	2.0852
$\hat{\mathbf{w}}_{SRCVaR}$	0.0508	0.8312	1.5756	1.9735

Джерело: розроблено автором

З попередніх результатів бачимо, що портфелі є різними. Найдохіднішим є портфель з максимальним відношенням Шарпа, де за міру ризику ми вибрали VaR , а найбільшим відношенням Шарпа характеризується портфель з мірою ризику дисперсія. Оцінимо на основі даних за 2014 рік середню дохідність портфеля та його ризику (використаємо всі три міри). Результати статистичного аналізу наведено в табл. 4.26.

Порівнюючи дохідності отриманих портфелів робимо висновок, що найкращим є портфель, де за міру ризику вибрано було VaR , проте найменш ризиковим є портфель, що ґрунтується на мірі ризику $CVaR$. Крім того, якщо для портфелів обчислити їх відношення Шарпа на основі однакової міри ризику, то з'ясується, що у випадку мір VaR та $CVaR$ найбільше відношення буде у портфеля, що ґрунтується на мірі $CVaR$, в іншому випадку – у портфеля, що ґрунтується на середньоквадратичному відхиленні. Отримані результати дають змогу зробити висновок, що при порушенні припущення про нормальність портфелі з максимальним відношенням Шарпа не є однаковими для розглянутих трьох мір ризику. Найбільш дохідним виявився портфель, де за міру ризику прийняли VaR , а найменшим ризиковим – $CVaR$, що підтверджує висновки, отримані у попередньому підрозділі.

Аналіз фінансових ринків показує, що розподіли дохідностей фінансових активів є близькими до нормального лише у випадку частоти меншої за щомісячну (щоквартальна, річна). При частоті даних більших за щомісячну (щоденні) дохідностям притаманна властивість наявності важких хвостів. У таких випадках для моделювання дохідностей використовують узагальнені моделі умовної гетероскедастичності (надалі $GARCH$) [71]. Ми використаємо для аналізу портфелів фінансових активів з максимальним

відношенням багатовимірний *GARCH-BEKK* модель порядку (1,1) для моделювання вектора дохідностей \mathbf{X}_t . Порядок моделі вибираємо з тих міркувань, що раціонального підходу для визначення порядку моделі на сьогодні не існує, а на практиці найбільш поширеними є моделі порядку (1,1). Використовуючи дані про дохідності фінансових активів за 2013 рік, оцінимо параметри нашої моделі. Після цього згенеруємо вибірку з 250000 даних та на її основі побудуємо густину розподілу для дохідностей портфельів й отримаємо оцінки для очікуваної дохідності та ризику за різними мірами.

Нагадаємо, що *GARCH-BEKK*(1,1) має вигляд

$$\mathbf{X}_t = (\mathbf{H}_t)^{1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \mathbf{A}'\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}'\mathbf{A} + \mathbf{B}'\mathbf{H}_{t-1}\mathbf{B},$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ – процес білого шуму з одиничною матрицею коваріації розмірності 5×5 , \mathbf{C} – верхньотрикутна матриця розмірності 5×5 , \mathbf{A} та \mathbf{B} квадратні матриці розмірності 5×5 . Оцінку та генерацію значень ми проведемо в програмі R за допомогою пакету *mgarch*.

Отримаємо такі оцінки:

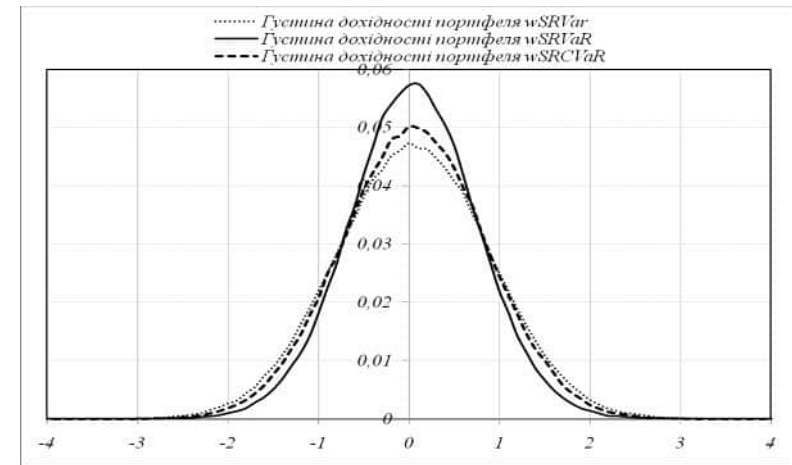
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.6830 & -0.0921 & 0.1245 & 0.0960 & 0.3710 \\ 0 & 0.1254 & -0.9493 & -0.6522 & -0.3590 \\ 0 & 0 & 0.8489 & -0.5130 & -0.3052 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3144 & -0.1541 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0100 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.0543 & -0.1378 & 0.3814 & 0.4236 & 0.2093 \\ -0.3333 & -0.3188 & 0.0865 & -0.5005 & -0.2103 \\ -0.0122 & 0.0853 & 0.0066 & -0.0214 & -0.0283 \\ 0.0868 & -0.0266 & -0.6212 & 0.0135 & -0.0950 \\ 0.1026 & 0.0263 & -0.2700 & 0.1855 & -0.0704 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.5488 & 0.4131 & 0.2980 & 0.3090 & 0.3912 \\ 0.2214 & 0.4463 & 0.1352 & 0.0698 & 0.4472 \\ -0.0907 & 0.1572 & 0.0517 & 0.0887 & 0.1797 \\ 0.0066 & -0.0529 & 0.0761 & 0.2701 & -0.2186 \\ 0.0068 & -0.0481 & 0.1310 & 0.1055 & -0.1801 \end{pmatrix}.$$

На рис. 4.2 зображено розподіли дохідності портфельів фінансових активів. Зауважимо, що розподілам притаманна властивість наявності важких хвостів, хоча і не яскраво виражена. Отриманий результат не суперечить результатам [68], що важкі хвости не мають суттєвого впливу на характеристики портфеля фінансових активів при достатній диверсифікації.

У табл. 4.27 наведено очікувану дохідність, 95 % інтервали довіри та ризику портфельів, отримані за результатами *GARCH-BEKK*(1,1) моделі. Результати, наведені в таблиці, підтверджують результати графічного аналізу. Крім того, можемо зробити висновок, що найменшим ризиком і найменшою дохідністю володіє портфель \mathbf{w}_{SRVaR} , натомість портфель зі структурою \mathbf{w}_{SRCVaR} має найвищу очікувану дохідність та ризик нижчий ніж ризик портфеля \mathbf{w}_{SRVaR} .



Джерело: розроблено автором

Рис. 4.2. Густини дохідності портфельів \mathbf{w}_{SRVaR} , \mathbf{w}_{SRVaR} , \mathbf{w}_{SRCVaR} .

Таблиця 4.27.

Характеристики портфелів w_{SRVar} , w_{SRVaR} , w_{SRCVaR} за припущення, що дохідності активів поводяться як *GARCH-BEKK*(1, 1) модель

	Очікувана дохідність	Дисперсія	$Var_{0,95}$	$CVaR_{0,95}$	Межі інтервалу довіри	
w_{SRVar}	0.000545	0.7219	1.3973	1.7511	-1.6621	1.6604
w_{SRVaR}	-0.001713	0.4984	1.1604	1.4735	-1.3938	1.3874
w_{SRCVaR}	0.00074	0.6372	1.3153	1.6458	-1.5639	1.5605

Джерело: розроблено автором

Ми показали, що при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів, структури портфелів та їх характеристики є різними. При порівнянні характеристик портфелів на основі емпіричних даних, встановлено, що найбільшу очікувану дохідність має портфель, де за міру ризику вибрано Var , а найменший ризик має портфель, що ґрунтується на мірі ризику $CVaR$. Більше того, якщо для портфелів обчислити їх відношення Шарпа на основі однакової міри ризику, то виявляється, що у випадку мір Var та $CVaR$ найбільше відношення буде у портфеля, що ґрунтується на мірі $CVaR$, в іншому випадку – у портфеля, що ґрунтується на середньоквадратичному відхиленні. За припущення, що дохідності активів поводяться як 5-вимірний *GARCH-BEKK*(1,1) процес, тобто володіють властивістю наявності важких хвостів, показано, що дохідності портфелів також матимуть важкі хвости, але менш виражені, ніж дохідності активів. Цей результат повністю узгоджується з результатами роботи [68]. У цьому випадку найменшим ризиком та найменшою дохідністю володіє портфель, де за міру ризику вибрано Var ; натомість портфель, де за міру ризику вибрано $CVaR$, має найвищу очікувану дохідність та ризик нижчий ніж ризик портфеля w_{SRVar} .

Таким чином при порушенні припущення про нормальність дохідностей активів, з яких складено портфель з максимальним відношенням Шарпа ми отримали ті ж результати, що і в попередньому розділі. Отже, використання всіх мір ризику, розглянутих нами, на практиці є обґрунтованим. Вибір міри ризику залежить від особистих переконань інвестора, хоча і найбільш привабливою є як з теоретичної, так і з практичної точок зору міра $CVaR$, яка гарантує портфелю фінансових активів, побудованих на основі цієї міри, помірну очікувану дохідність та помірний ризик.

4.5. Моделювання управління активними операціями банку в кризовий та посткризовий періоди

Розглянемо приклад використання портфелів з найменшим рівнем ризику для організації та планування роботи банківської установи.

В умовах сучасної фінансово-економічної кризи, яка значно посилюється за рахунок політичної невизначеності та непрозорості роботи Національного банку, постає питання про раціональний розподіл доходу між активними банківськими операціями та, як наслідок, раціональний розподіл ресурсів банку між його підрозділами з метою досягнення цього балансу. Очевидним та найчастіше використовуваним методом визначення балансу доходу між операціями є експертний метод. На жаль, ефективність цього методу викликає серйозні питання. По-перше, кількість експертів, які орієнтуються в сучасній банківській системі України, є невеликою, що робить їх послуги доволі дорогими, не знижуючи разом з цим імовірності помилки, та не даючи можливості перевірити якість наданих результатів. По-друге, сучасна економічна ситуація в Україні є досить незвичною у світовій банківській практиці, що, очевидно знижує ефективність експертних оцінок. Тому необхідним є розроблення методу визначення раціонального розподілу доходу між банківськими операціями, який, з одного боку, був би недорогим, а з іншого, давав достатньо достовірні результати. Тобто метод, у якому досягнуто балансу ціна-якість.

Теоретичні та прикладні аспекти управління банками загалом і банківськими операціями зокрема розглядали у своїх працях як вітчизняні, В. В. Вітлінський [5], З. М. Васильченко [2], О. В. Васюренко [3], так і закордонні, С. Мехра [122], Г. Я. ван ден Брінк [129], Ф. Пасіурас [77] вчені.

Проте зазначимо, що питання раціонального планування розподілу доходів від активних операцій та дослідження ризиковості наявного розподілу доходу між банківськими операціями є досі невирішеним.

Мета дослідження полягає у розробленні моделі раціонального розподілу доходів між активними банківськими опера-

ціями, побудові на основі цієї моделі планів діяльності банківської установи та розробленні рекомендацій стосовно розвитку окремих напрямів роботи банківської установи.

У період бурхливого розвитку банківських установ в Україні мало хто задавався питанням про раціональний розподіл доходів банку між активними операціями. За основу брали загальний дохід, та майже не приділяли уваги ризику зниження доходу від операцій [3]. В таких умовах, очевидно, досить не раціонально розподілялися кошти на розвиток напрямів діяльності банку, та, як наслідок, виникали суттєві перекося в роботі банків в сторону певного напрямку, наприклад, споживчого кредитування, шкодячи при цьому іншим видам діяльності.

Зазначимо, що такий підхід до управління банківськими установами зазнає критики [129]. Операції повинні управлятися з врахуванням інших напрямів. Наприклад, в [122] зазначено, що така банківська операція як рітейл попри всю свою привабливість, повинна розвиватися разом з іншими операціями, а не за рахунок їх скорочення. Отже, управління операціями повинно здійснюватися комплексно, що вимагає використання специфічних методів моделювання з метою покращення цього процесу. Оглядаючись основних методів, які використовуються в процесі управління банківськими операціями, описано в [77]. З практики та теорії фінансів відомо, що одним з найкращих методів моделювання залежності дохід-ризик для певного комплексу активів є методи теорії портфеля.

З огляду на вищезазначені міркування ми пропонуємо використати методи теорії портфеля (як класичної, так і сучасної) для знаходження раціонального балансу доходу від банківських операцій. Зазначимо, що фінансові установи, які зосереджують увагу на одній певній операції, значно підвищують свій ризик. Останні дослідження в теорії ризиків показують, що основним завданням організацій є зниження ризиків. Одним з найвідоміших методів зниження ризику є диверсифікація, яка в нашому випадку полягає у розподілі ресурсів організації на декількох операціях залежно від доходу, який від них очікується.

Нехай в банку операції є сегментовані за певним правилом (основним серед правил є якомога більша однорідність операцій). Нехай на основі сегментації ми отримали k груп операцій.

Розглянемо прибуток від кожної з груп операцій як ціну певного фінансового активу. Тобто, якщо за певний період часу t i -та група операцій принесла прибуток у розмірі P_{it} грошових одиниць, ми кажемо, що ціна активу i в цей період часу становила P_{it} . Надалі в аналізі ми використаємо дохідності, які обчислимо за допомогою (1.1).

Аналогічно до розділу 1, позначимо через $X_i = (X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki})'$ k -вимірний вектор дохідностей. Частку i -го активу (в нашому випадку дохід від операції) в портфелі позначимо через w_i , а портфель – вектор часток $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)'$. Використаємо класичне припущення стосовно поведінки вектора дохідностей, а саме, припустимо, що вектор X_i поводить себе як k -вимірний нормальний розподілений випадковий величина з параметрами μ та Σ . Зауважимо, що припущення нормальності розподілу дохідності є доволі неоднозначним. Оскільки в цьому дослідженні ми використали дані стосовно результатів щомісячної роботи банку, тому зроблене нами припущення в цьому контексті є правильне [74]. Зрозуміло, що одним із завдань при формуванні портфеля є досягнення якомога вищої очікуваної дохідності, проте при цьому необхідно певним чином враховувати ризик.

Ми розглянемо цю проблему в два етапи. На першому ми не будемо враховувати побажання стосовно дохідності, тобто зростання прибутку від активних операцій банку на кожну грошову одиницю. На другому етапі ми додамо, у разі необхідності, до моделі умову відносно бажаної дохідності.

Розглянемо три методи вибору раціональної структури портфеля фінансових активів, описані в (1.6), (4.6), (4.13). Зауважимо, що до всіх задач необхідно додати умову невід'ємності ваг портфеля, оскільки на відміну від активів, короткі позиції по доходу з операції не мають під собою ніякого підґрунтя. У цьому випадку розв'язки задач (1.6), (4.6), (4.13) можуть бути отримані лише чисельними (не аналітичними) методами, що робить неможливим статистичний аналіз розв'язку. Отже, з практичної точки зору, та з огляду на мету дослідження, ми розглядатимемо лише портфель з додатними вагами. Тобто в кожну з розглянутих задач оптимізації ми додаємо умову $w_i \geq 0$ для всіх i від 1 до k .

В задачах (1.6), (4.6), (4.13) розглянуто лише методи балансування доходів між операціями в банку на основі мінімізації

ризик. Ці методи мають суттєвий недолік, оскільки портфель з найменшим рівнем ризику може мати від'ємну дохідність, тобто з метою зниження ризику потрібно знизити загальний прибуток, що на практиці є абсурдною ситуацією. Отже, ці методи мають для нас більше інформативний характер. З практичної точки зору, цікавими є також методи, в яких задається мінімальний рівень очікуваної дохідності (на скільки наш прибуток має зрости в наступному періоді). Ми розглянемо задачі мінімізації ризику при заданому рівні дохідності, а саме, до задач (1.6), (4.6), (4.13) додамо умову $\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}=R$, де R – запланований на наступний період рівень зростання доходу. Задачі такого типу розглянуто в [14].

Зауважимо, що розв'язки всіх попередньо розглянутих задач залежать від невідомих на практиці параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Отже, необхідно ці параметри відповідно оцінити. Ми використаємо оцінки (1.27). Підставляючи ці оцінки у відповідні вирази, отримаємо вибіркові оцінки ваг портфелів та їх характеристик. Зазначимо, що отримані портфелі відображають раціональний (в певному розумінні) відсотковий розподіл доходу банку від активних операцій.

На основі отриманих даних стосовно одного з відділень українського банку ми виділили чотири активних операції, розподіл прибутку щодо яких становить інтерес для менеджменту банку. Цими операціями є: обслуговування корпоративного бізнесу, трансферти, комісійні операції та казначейські операції. Загалом ми дослідили доходи від операцій за останні 12 місяців (рік), на їх основі ми розрахували дохідності, яких отримали 11. Ми перевірили на нормальність отримані дохідності, використавши тест Колмогорова-Смірнова та отримали наступні p -значення: 0.9 для дохідностей від комісійних операцій та операцій обслуговування корпоративного бізнесу; 0.99 для дохідностей від трансфертів та казначейських операцій. Значення дохідностей ми підставили у (1.27) з метою отримання оцінок. Оцінки параметрів розподілу дохідностей операцій для відділення набули вигляду:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}=(1.262, 5.7008, 8.275, -12.496)',$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\begin{pmatrix} 177.657 & 29.934 & 97.236 & -235.721 \\ 29.934 & 30.525 & 34.661 & -74.767 \\ 97.236 & 34.661 & 227.657 & 34.661 \\ -235.721 & -74.767 & 34.661 & 1444.206 \end{pmatrix}.$$

На кінець грудня 2013 року структура портфеля доходів відділення мала вигляд $\mathbf{w}=(0.077, 0.748, 0.155, 0.02)'$. Очікувана дохідність такого портфеля становить 5.3 % щомісяця, тобто 63.6 % річних, при середньоквадратичному відхиленні (щомісячне) 5.94 %, VaR при рівні довіри 95 % (щомісячне) 4.46 %, $CVaR$ при рівні довіри 95 % (щомісячне) 6.94 %. Отже, при такому розподілі доходів у відділенні ми отримаємо, що очікуване щомісячне зростання загально доходу відділення становитиме 5.3 %, причому з імовірністю 5 % буде спад більший за 4.46 %, який в середньому становитиме 6.94 %. Враховуючи значення середньоквадратичного відхилення та наше початкове припущення про поведінку дохідностей, можна зробити висновок, що відсоткова зміна доходу відділення знаходитиметься в межах від -12.52 % до 23.12 % з імовірністю більшою за 99 %. Розглянемо питання наскільки фактичний портфель відрізняється від раціонального в певному сенсі. Оскільки першочерговою задачею менеджменту банку в кризові та посткризові періоди є уникати непотрібних ризиків, ми побудуємо три портфелі з найменшим ризиком (задачі (1.6), (4.6), (4.13)). Результати отримані для відділення підсумовано в таблиці 4.28. У таблицях надалі використано наступні позначення: ДК – обслуговування корпоративного бізнесу, ТР – трансферти, КД – комісійні операції, К – казначейські операції, ОД – очікуваний дохід, СКВ – середньоквадратичне відхилення.

Як видно з результатів таблиці 4.28, найбільш ризиковою операцією в цьому відділенні є комісійні доходи, які в усі раціональні портфелі з найменшим ризиком взагалі не входять. Отже, першочерговим заходом менеджменту головного банку повинен стати захід на зниження цієї ризиковості, тобто доходи від цих операцій повинні бути рівномірніше розподілені по місяцях. З іншого боку, всі інші види діяльності, за рахунок меншої ризиковості, повинні розвиватися в сторону незначного зростання. Загалом, за проведеними розрахунками, можемо сказати, що

розподіл доходів у досліджуваному відділенні є далеким від раціонального по двох останніх критеріях. Оскільки суттєве покращення в нашій моделі може бути досягнуто в значеннях VaR та $CVaR$ при зростанні очікуваного доходу. Зрозуміло, що це зауваження є важливим не лише з теоретичної точки зору. З нього також випливає, що можна зменшити ризик зниження доходу банку від вибраних нами операцій без зниження доходності. Більше того, очікуваний рівень доходу портфельів з найменшим ризиком є доволі високим, тому немає необхідності в цьому дослідженні розглядати задачі мінімізації ризику з додатковими умовами на рівень доходу.

Т а б л и ц я 4.28

Фактичний та раціональні розподіли доходу між активними операціями

	ДК	ТР	КД	К	ОД	СКВ	VaR ₉₅	CVaR ₉₅
Фактичний розподіл	0.077	0.748	0.155	0.02	5.3%	5.94%	4.46%	6.94%
Найменша дисперсія	0.083	0.844	0	0.073	5.22%	4.77%	2.63%	4.63%
Найменший рівень VaR	0.138	0.797	0	0.065	5.45%	4.84%	2.52%	4.54%
Найменший рівень $CVaR$	0.126	0.807	0	0.07	5.4%	4.82%	2,52%	4.54%

Джерело: розроблено автором

Зауважимо, що в процесі цього дослідження виникло ще одне цікаве питання. Оскільки відмовлятися від діяльності, яка приносить комісійний дохід, є непрактично, то виникає питання, яким буде мінімальний рівень ризику портфеля операцій при незмінній (тобто 0.105) частці комісійних доходів. Результати наведено в таблиці 4.29.

Отримані результати повністю узгоджуються з нашим попереднім спостереженням про те, що ризик зниження доходу від комісійних операцій є найвищим, оскільки в усіх отриманих портфелях різко зріс рівень ризику. Висновок для керівництва в цьому випадку один, необхідно збільшити частку доходу по казначейських операціях (як найменш ризиковій операції для вибраного відділення) при майже незмінних частках від інших операцій.

Таблиця 4.29

Фактичний та раціональні розподіли доходу між активними операціями при частці комісійних доходів 0.155

	ДК	ТР	КД	К	ОД	СКВ	VaR ₉₅	CVaR ₉₅
Фактичний розподіл	0.077	0.748	0.155	0.02	5.3%	5.94%	4.46%	6.94%
Найменша дисперсія	0	0.79	0.155	0.055	4.81%	5.61%	4.42%	6.76%
Найменший рівень VaR	0.062	0.738	0.155	0.045	5.45%	5.07%	4.29%	6.67%
Найменший рівень $CVaR$	0.048	0.75	0.155	0.047	5.4%	5.02%	4,3%	6.66%

Джерело: розроблено автором

Зважаючи на попереднє зауваження, що можливо зменшити рівень ризику портфеля операцій при незмінному очікуваному доході, цікавим є питання про розподіл доходу між активними операціями при рівні очікуваної доходності 5.3 % та найменшому ризику. Зазначимо, що з таким додатковим обмеженням усі портфелі з найменшим ризиком збігатимуться. Результати наведені в таблиці 4.30.

Т а б л и ц я 4.30.

Фактичний та раціональні розподіли доходу між активними операціями при рівні 5.3 % середнього щомісячного зростання доходу

	ДК	ТР	КД	К	ОД	СКВ	VaR ₉₅	CVaR ₉₅
Фактичний розподіл	0.077	0.748	0.155	0.02	5.3 %	5.94 %	4.46 %	6.94 %
Найменший ризик	0.1	0.83	0	0.07	5.3 %	4.78 %	2.56 %	4.56 %

Джерело: розроблено автором

З результатів табл. 4.30 робимо висновок, що для раціоналізації наявної ситуації першочергово потрібно, як вже було зазначено вище, знизити ризиковість комісійних операцій.

Ми провели дослідження розподілу доходу банківської установи між активними операціями. Оскільки активні операції можна розглянути як фінансові активи, ціни яких дорівнюють доходам від відповідних операцій, то зрозумілою є ідея використати для дослідження методи класичної та сучасної теорії

портфеля. Проте, на відміну від портфеля фінансових активів, перебудова портфеля операцій не може бути здійснена за короткий проміжок часу, якщо взагалі може бути зроблена, тому основним призначенням отриманих результатів є розроблення рекомендацій для менеджменту банку стосовно планування і покращення діяльності банку.

На основі даних про прибуток відділення одного з українських банків за останні 12 місяців, ми побудували модель для планування діяльності цього відділення на наступний рік. Зрозуміло, що щомісячно цю модель треба переглядати та плани уточнювати. Крім цього, досліджено якість наявного розподілу доходу між активними операціями у досліджуваному відділенні стосовно, в певному сенсі, раціональних розподілів. Зауважено, що одна з операцій є доволі ризиковою, оскільки в усіх моделях, що мінімізують ризик, її частка дорівнює 0. Тому з метою підвищення точності планування та зниження ризику зменшення доходу відділення необхідно прийняти заходи на зменшення ризиковості цієї операції, тобто зрівноваження щомісячних доходів від неї. Також зазначено, що досягнення наявного рівня очікуваної доходності можливе і при нижчому рівні ризику, однак це може бути досягнуто насамперед зниженням ризиковості попередньо згаданої операції.

Загалом зазначимо, що розроблений апарат аналізу розподілів доходів між активними операціями може бути використаний одночасно і на рівні головного банку, і на рівні філій та відділень для уточнення планів на всіх рівнях, а також для дослідження регіональних особливостей відносно активних операцій.

РОЗДІЛ 5

ПОРТФЕЛЬ З МІНІМАЛЬНИМ РІВНЕМ VALUE-AT-RISK ЗА КЛАСИЧНОГО ПРИПУЩЕННЯ ЩОДО ПОВЕДІНКИ ДОХІДНОСТЕЙ

5.1. Проблеми оцінювання ваг та характеристик портфеля

Портфелі фінансових активів відіграють важливу роль у діяльності банків та фінансових установ. Очевидно, що побудова портфеля повинна опиратися на певне поняття оптимальності. Одними з основних понять оптимальності є: максимізація прибутку, мінімізація ризику, досягнення певної рівноваги між ризиком і доходом. Якщо поняття очікуваного прибутку портфеля не викликає запитань, то проблема оцінки ризику не має єдиного розв'язку. Це пов'язане з тим, що міра ризику не може бути визначена однозначно. Здебільшого за означення ризику використовують або імовірність певних втрат, або втрати з певною імовірністю.

Однією з найвідоміших мір ризику є VaR . Ця міра є рекомендована Базельським комітетом для банківської діяльності. Отже доцільно розглянути питання побудови оптимального портфеля, використовуючи VaR як міру ризику.

Проте насамперед необхідно дослідити можливість побудови коректної оцінки портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Припустимо, що вектор X_t має k -вимірний нормальний закон розподілу з параметрами μ та Σ . Зазначимо, що припущення про нормальність доходностей зазнає в останні десятиріччя нищівної критики, оскільки показано, що денні доходності та доходності з вищою частотою (наприклад, щогодинні, щохвилинні) не є нор-

мально розподілені, а мають так звані «важкі хвости», тобто значення цих дохідностей є більш розсіяні по числовій прямій, ніж значення нормально розподіленої випадкової величини [74], [107], [111]. Проте, беручи до уваги той факт, що щомісячні та щорічні дохідності мають розподіли близькі до нормального [74], це припущення про нормальний розподіл дохідностей часто використовується у фінансовій літературі. Тобто, ми припускаємо, що

$$\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \text{ де } M\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu}, \text{ а } D(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Sigma}.$$

Для побудови портфеля ми використаємо критерій оптимальності (4.6). Тобто, ми вибираємо таку структуру портфеля фінансових активів, за якої рівень VaR портфеля при рівні довіри α є найнижчий.

Припустивши спочатку, що параметри розподілу дохідностей $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є відомими, отримаємо, що ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR мають вигляд (4.7).

Використовуючи (4.7), очевидно, не важко обчислити ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , за умови, що параметри розподілу дохідностей, в нашому випадку $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, є відомими. Проте, на практиці, дані параметри є невідомими, а, отже, мають бути відповідно оцінені. Ми використаємо вибіркві оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ (1.27). Підставляючи замість невідомих параметрів оцінки (1.27) у (4.7), отримаємо вибіркві оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR :

$$\hat{\mathbf{w}}_{VaR} = \hat{\mathbf{w}}_{GMV} + \frac{\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}} \hat{\mathbf{R}} \hat{\boldsymbol{\mu}}, \quad (5.1)$$

де

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \hat{V}_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \hat{\mathbf{R}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} - \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}}{\mathbf{1}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \hat{s} = \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}.$$

Зауважимо, що вибірка $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є випадковою, тому оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ є випадковими величинами. Отже, випадковими величинами є також оцінки невідомих параметрів $\mathbf{w}_{GMV}, V_{GMV}, \mathbf{R}$ та s . Цей факт є надзвичайно важливим для побудови вибіркової оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR ,

оскільки у знаменнику другого доданку (5.1) є вираз $\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}$. Тобто, для того, щоб оцінка (5.1) мала зміст, необхідне виконання умови

$$\hat{s} < z_\alpha^2. \quad (5.2)$$

Проте, враховуючи випадковість оцінки \hat{s} , умова (5.2), загалом може не виконуватися. Для перевірки цієї умови необхідно дослідити статистичні властивості оцінки \hat{s} . В [52] показано, що вибіркова оцінка \hat{s} за припущення нормальності розподілу дохідностей активів має нецентральний розподіл Фішера. Точніше кажучи, випадкова величина $\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s}$ має нецентральний

розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями вільності та нецентральним параметром ns [10]. Тобто, значення, які може приймати випадкова величина \hat{s} , знаходяться на проміжку $[0, +\infty)$. Тому, очевидно, умова (5.2) виконується не завжди. Зазначимо, що визначення чисельних значень нецентрального розподілу Фішера можна виконати, наприклад, використовуючи процедуру **pf**, яка входить до пакету **stats** програми статистичного аналізу даних **R**.

Отже, для того, щоб оцінити можливість побудови оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , потрібно обчислити імовірність події $\{\hat{s} < z_\alpha^2\}$. Оскільки z_α^2 залежить лише від рівня довіри α , тобто є константою, то ця імовірність повністю задається значенням функції розподілу випадкової величини \hat{s} . Зауважимо, що функція розподілу досліджуваної випадкової величини залежить від невідомого параметра s , а тому точно обчислити імовірність події $\{\hat{s} < z_\alpha^2\}$ неможливо. Ми знайдемо верхню і нижню межі для цієї імовірності. Для цього використаємо той факт, що функція розподілу нецентрального розподілу Фішера є спадною за нецентральним параметром ([91], ст. 487). Оскільки матриця коваріацій $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначеною, то очевидно, що значення параметра s є завжди більшими від нуля, а тому верхню межу для імовірності $\{\hat{s} < z_\alpha^2\}$ знаходимо як значення функції розподілу центрального розподілу Фішера (підставляємо значення

нецентрального параметра, що дорівнює 0). Для обчислення нижньої межі використаємо односторонній інтервал довіри з рівним довіри β для нецентрального параметра. Для побудови інтервалу використаємо рекурсивний алгоритм, наведений в [97]. Позначимо $F_{m,l;\lambda}(x)$ функцію розподілу нецентрального розподілу Фішера з m та l ступенями свободи і нецентральним параметром λ . Тоді:

$$P(\hat{s} < z_{\alpha}^2) \geq F_{k-1, n-k+1; \tilde{s}} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} z_{\alpha}^2 \right),$$

де $\tilde{s} = \min\{nz_{\alpha}^2, s_{u,\beta}(k-1, n-k+1)\}$ та $s_{u,\beta}(k-1, n-k+1)$ є верхньою межею одностороннього інтервалу довіри для нецентрального параметру при рівні довіри β . $s_{u,\beta}(k, n)$ обчислюємо, використовуючи на $(i+1)$ -му кроці обчислень таку рівність:

$$s_{u,\beta}(k, n; i+1) = s_{u,\beta}(k, n; i) + \frac{2F_{k,n; s_{u,\beta}(k, n; i)}(\hat{s}) - \beta/2}{F_{k,n; s_{u,\beta}(k, n; i)}(\hat{s}) - F_{k+2, n; s_{u,\beta}(k, n; i)}(\hat{s}k/(k+2))},$$

приймаючи $s_{u,\beta}(k, n; 0) = \hat{s}$. Умовою зупинки алгоритму є нерівність

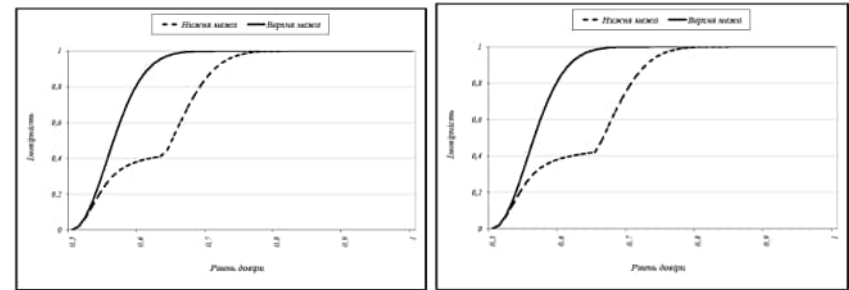
$$|s_{u,\beta}(k, n; i+1) - s_{u,\beta}(k, n; i)| \leq 0.001.$$

Використаємо описаний алгоритм для емпіричного аналізу можливості побудови оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем Var . Для цього виберемо курси акцій трьох компаній, що входять до індексу *DowJones*: *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*. Оскільки ми припустили, що дохідності активів є нормально розподілені, ми розглядаємо лише щомісячні дохідності, тобто беремо до уваги лише зміну курсу за місяць. Виберемо 61 значення ціни акцій на початку місяця за період часу з 01.09.2010 до 01.09.2015. Отримаємо вибірку з 60 спостережень, тобто $n=60$, $k=3$. Протестувавши дохідності на нормальність розподілу, використовуючи критерій Пірсона, отримаємо такі p -значення тесту: *Microsoft* – 0.175, *JPMorgan Chase* – 0.238, *Walt Disney* – 0.318. Отже, ми не можемо відхилити гіпотезу про нормальний розподіл дохідностей. Далі, обчислимо оцінку параметра s , $\hat{s} = 0.02942$, та знайдемо односторонній інтервал довіри

для нецентрального параметра, використовуючи такі значення для рівня довіри $\beta = \{0.9, 0.95, 0.99, 0.999\}$:

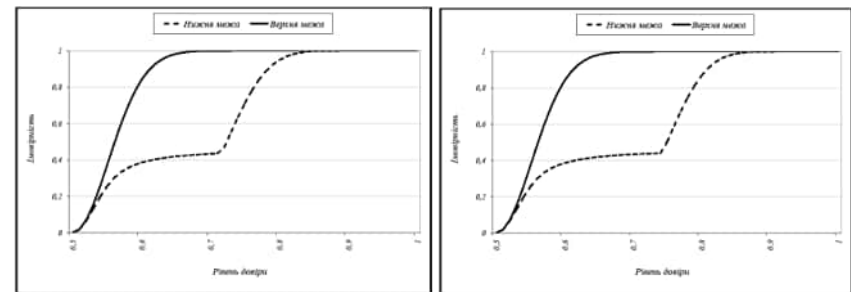
$$s_{u,0.9}(3,60) = 7.257, s_{u,0.95}(3,60) = 9.1904, s_{u,0.99}(3,60) = 13.558, \\ s_{u,0.999}(3,60) = 19.604.$$

Тепер, змінюючи значення рівня довіри для Var від 0.5 до 1 зобразимо межі для імовірності $P(\hat{s} < z_{\alpha}^2)$ графічно.



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.1. Межі імовірності $P(\hat{s} < z_{\alpha}^2)$ при $\beta=0.9;0.95$

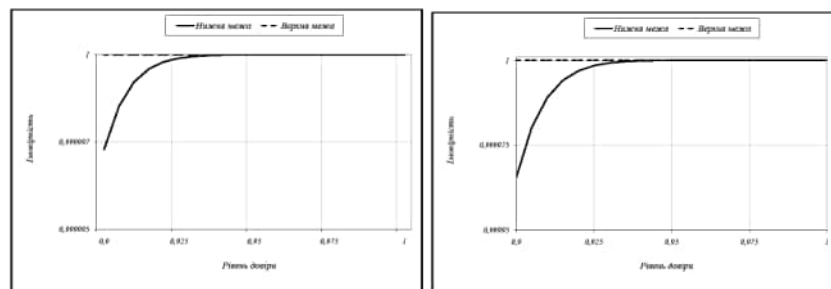


Джерело: розроблено автором

Рис. 5.2. Межі імовірності $P(\hat{s} < z_{\alpha}^2)$ при $\beta=0.99;0.999$.

З рисунків 5.1-5.2 видно, що при низьких значеннях α імовірність отримати коректну вибіркву оцінку ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем Var є навіть меншою за 0.5, проте, для значень α від 0.9 та більших ця імовірність є близькою до 1. Для того, щоб перевірити наскільки близькою є ця імовір-

ність до 1, розглянемо рисунок 5.3 на якому зображено межі для імовірності $P(\hat{s} < z_\alpha^2)$ при $\beta = \{0.99, 0.999\}$, а α змінюється в межах від 0.9 до 1. З цих рисунків видно, що значення імовірності побудови коректної оцінки ваг портфеля є досить близьким до 1, а отже оцінка (5.1) може бути використана для практичних задач побудови портфеля з найменшим рівнем VaR , оскільки на практиці для α зазвичай використовують значення більші за 0.9.



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.3. Межі імовірності $P(\hat{s} < z_\alpha^2)$ при $\beta = 0.99; 0.999$ та $\alpha \in [0.9; 1]$.

Ми розглянули питання побудови та оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Оскільки параметри дохідностей є на практиці невідомі, то для практичних задач використовуються їхні оцінки, які є випадковими величинами. Враховуючи випадковий фактор, виникає запитання про можливість побудови коректної оцінки ваг портфеля. Ми показали, що оцінка (5.1) має зміст тоді і лише тоді, коли виконується умова (5.2). При статистичному аналізі цієї умови виявлено, що загалом ця умова виконується не завжди, тому що вибіркова оцінка параметра s має нецентральний розподіл Фішера, а, отже, приймає значення з проміжку $[0, +\infty)$. Тому питання про коректність побудованої оцінки зводиться до обчислення імовірності події, що умова (5.2) виконується. Оскільки розподіл оцінки \hat{s} залежить від невідомого параметра s , то попередню імовірність неможливо обчислити точно. З'ясувалося, що можна побудувати інтервал довіри для цієї імовірності. На емпіричному прикладі, викорис-

товуючи курси акцій трьох компаній, що входять до індексу *DowJones: Microsoft, JPMorgan Chase, Walt Disney*, показано, що при рівнях довіри для VaR , які знаходяться в межах від 0.5 до 0.6, імовірність отримати коректну оцінку портфеля є меншою за 0.5. Для значень від 0.9 до 1 ця імовірність є дуже близькою до 1, з чого випливає, що оцінка (5.1) може бути використана для вирішення практичних задач, оскільки на практиці розглядаються лише рівні довіри для VaR , які є більшими або рівними 0.9, а саме 0.9, 0.95, 0.99, 0.999.

5.2. Властивості вибірових оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем Value-at-Risk

Під час планування діяльності будь-якої фінансової установи, одним з основних завдань є оцінка фінансового ризику. Відомо, що ціни фінансових активів постійно змінюються, тому для визначення ризику важливим є передбачення їх майбутньої ціни. Ця задача не може бути розв'язана. Лише використовуючи певні припущення щодо поведінки ціни активу, можна наближено оцінити її значення у майбутньому. Причому, проблема передбачення стає важчою при наближенні припущень до реальних умов, а її результати втрачають свою точність. Відзначимо, що точкові оцінки є абсолютно не точними, тобто, імовірність того, що майбутня ціна активу співпаде з побудованою оцінкою дорівнює нулю. Крім того, процес оцінки ризику кожного активу зокрема займає багато часу, тому частіше оперують портфелями фінансових активів.

Ваги всіх розглянутих нами портфельів залежать від параметрів дохідності фінансових активів, тобто від математичного сподівання та дисперсії. Ці характеристики є невідомими на практиці, а, отже, невідомими є і ваги портфельів з раціональною структурою. Тому для проведення розрахунків необхідно відповідно оцінити ці параметри. Одним з найбільш розповсюджених методів є історичний метод. Тобто, оцінки параметрів будуються на основі

історичних даних (1.27). Очевидно, що оцінки характеристик активів є випадковими величинами, тому випадковими величинами будуть також і оцінки ваг портфеля. Отже, на практиці, інвестор змушений оперувати в своїх розрахунках не сталими вагами портфелю, а вагами, які є випадковими величинами. Тому для проведення аналізу портфелю необхідно вивчити властивості його характеристик (дохідності, дисперсії, VaR). Очевидно, що і характеристики портфеля є випадковими величинами, тому розподіл характеристик є важливим для статистичного аналізу. У випадку портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією, припускаючи, що дохідності активів з яких складено портфель, є незалежними та нормально розподіленими випадковими величинами, розподіл оцінок характеристик знайдено в [50]. Наша мета полягає у встановленні розподілу оцінок характеристик портфелю фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Нехай, як і раніше, ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо через $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})'$ k -вимірний вектор дохідностей. Частку i -го активу в портфелі позначимо через w_i , а портфель – вектор часток $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)'$. Припустимо, що вектор X_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ .

Розглянемо задачу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR (4.6). Розв'язок такої задачі має вигляд (4.7) з характеристиками (4.8)-(4.10).

Зауважимо, що розв'язки задачі (4.6) залежать від невідомих на практиці параметрів μ та Σ . Отже, необхідно ці параметри відповідно оцінити. Ми використаємо найвідоміші вибіркові оцінки невідомих параметрів розподілу (1.27). Підставляючи оцінки (1.27) у (4.7)-(4.10) отримаємо вибіркові оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR та його характеристик, які позначимо \hat{w}_{VaR} , \hat{R}_{VaR} , \hat{V}_{VaR} , \hat{M}_{VaR} . Враховуючи, що вибіркові оцінки (1.27) є випадковими величинами, то випадковими величинами є і оцінки характеристик портфеля. Тому, для повного статистичного аналізу характеристик портфеля необхідно знайти закон розподілу оцінок. Зауважимо, що оцінки характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR (4.8)-(4.10) залежать

від оцінок характеристик портфеля з найменшою дисперсією, розподіли характеристик якого знайдено у роботі [52]

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi_{n-k}^2,$$

$$\hat{R}_{GMV} | \hat{s} = s^* \sim N\left(R_{GMV}, \frac{1 + \frac{n}{n-1}s^*}{n} V_{GMV}\right),$$

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1, ns},$$

де через $F_{k-1, n-k+1, ns}$ позначено нецентральний розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями свободи та нецентральним параметром ns , а $\chi_{n-k}^2 - \chi^2$ -розподіл з $n-k$ ступенями свободи. Причому випадкова величина \hat{V}_{GMV} незалежна від \hat{R}_{GMV} та \hat{s} .

Використовуючи попередні результати, можемо знайти стохастичне представлення оцінок характеристик за умови, що оцінка параметра s є відома. Для цього введемо спочатку такі позначення: $\hat{R}_{VaR}^* = (\hat{R}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$, $\hat{V}_{VaR}^* = (\hat{V}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$, $\hat{M}_{VaR}^* = (\hat{M}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$.

Теорема 5.1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо X_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що X_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ . Нехай X_1, X_2, \dots, X_n є незалежними реалізаціями X_t і $n > k$. Тоді*

$$а) \hat{R}_{VaR}^* \stackrel{d}{=} R_{GMV} + \sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}} \xi_1 + \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}} \sqrt{\xi_2},$$

$$б) \hat{V}_{VaR}^* \stackrel{d}{=} \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1} \xi_2,$$

$$в) \hat{M}_{VaR}^* \stackrel{d}{=} R_{GMV} + \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}} V_{GMV} \xi_1 + \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*) \frac{V_{GMV}}{n-1}} \sqrt{\xi_2},$$

де символ $\stackrel{d}{=}$ означає рівність за розподілом, а випадкові величини $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi_{n-k}^2$ є незалежними.

Теорема 5.1 має одне важливе застосування. При використанні методу Монте-Карло для аналізу характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не потрібно генерувати матрицю даних розміру $k \times n$, а достатньо згенерувати лише дві випадкові незалежні величини, що мають добре вивчені закони розподілу.

За допомогою теореми 5.1 можна обчислити густини випадкових величин \hat{R}_{VaR}^* , \hat{V}_{VaR}^* , \hat{M}_{VaR}^* . Ці величини є лінійною комбінацією незалежних випадкових величин ξ_1 та ξ_2 , густини яких є відомими. Введемо для зручності такі позначення:

$$a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad b(s^*) = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1},$$

$$c(s^*) = \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*) \frac{V_{GMV}}{n-1}},$$

$$\tilde{s}^* = \frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}$$

та

$$M(x; m, a, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} |b_1|} \int_0^\infty t^{m-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} \right) (t - (x-a) \frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2})^2 \right\} dt. \quad (5.3)$$

Тепер, використовуючи результати теореми 5.1 та теореми про згортку, отримаємо.

Теорема 5.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в

момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$а) f_{\hat{R}_{VaR}^*}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} a(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \exp \left\{ -\frac{(x - R_{GMV})^2}{2(a(s^*)^2 + \tilde{s}^*)} \right\}.$$

$$\cdot M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\tilde{s}^*}, a(s^*)),$$

$$б) f_{\hat{V}_{VaR}^*}(x) = \frac{1}{(2b(s^*))^{\frac{n-k}{2}} \Gamma((n-k)/2)} x^{\frac{n-k-2}{2}} \exp \left\{ -\frac{x}{2b(s^*)} \right\},$$

$$в) f_{\hat{M}_{VaR}^*}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} c(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \exp \left\{ -\frac{(x + R_{GMV})^2}{2(c(s^*)^2 + \tilde{s}^*)} \right\}.$$

$$\cdot M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\tilde{s}^*}, c(s^*)).$$

Для доведення Теореми 5.2 доведемо наступну лему.

Лема 5.1. Нехай випадкові величини ξ_1 та ξ_2 є незалежні, $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi_{n-k}^2$. Тоді для довільних дійсних чисел a , b_1 та довільного додатного дійсного числа b_2 , густина випадкової величини $\xi = a + b_1 \xi_1 + b_2 \sqrt{\xi_2}$ має вигляд

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}} b_2^m \Gamma(m/2)} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2(b_1^2 + b_2^2)} \right\} M(x; m, a, b_1, b_2),$$

де функція $M(x; m, a, b_1, b_2)$ задається рівністю (5.3).

Доведення. Очевидно, що випадкова величина $\tilde{\xi}_1 = a + b_1 \xi_1$ є нормально розподілена з параметрами a та b_1^2 . Позначимо її

густину через $f_{\xi_1}(x)$. Густину випадкової величини $b_2\sqrt{\xi_2}$ позначимо $f_{b_2\sqrt{\xi_2}}(x)$. Оскільки, $\xi_2 \sim \chi_m^2$, то

$$f_{b_2\sqrt{\xi_2}}(x) = f_{\xi_2}(x^2/b_2^2) \frac{2x}{b_2^2} = \frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}} b_2^m \Gamma(m/2)} x^{m-1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2b_2^2}\right\}.$$

Беручи до уваги той факт, що ξ_1 та $\sqrt{\xi_2}$ є незалежними випадковими величинами, густину випадкової величини ζ обчислюємо як згортку густин $f_{\xi_1}(x)$ та $f_{b_2\sqrt{\xi_2}}(x)$, тобто

$$\begin{aligned} f_{\zeta}(x) &= \int_0^{\infty} f_{\xi_1}(x-t) f_{b_2\sqrt{\xi_2}}(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|} \exp\left\{-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2\right\} \frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}} b_2^m \Gamma(m/2)} t^{m-1} \exp\left\{-\frac{t^2}{2b_2^2}\right\} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1| 2^{\frac{m-2}{2}} b_2^m \Gamma(m/2)} \exp\left\{-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2 - \frac{t^2}{2b_2^2}\right\} t^{m-1} dt. \end{aligned}$$

Степінь експоненти в останньому інтегралі можемо записати як

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2 - \frac{t^2}{2b_2^2} = \\ &= -\frac{1}{2b_1^2}(t^2 + (x-a)^2 - 2t(x-a)) - \frac{t^2}{2b_2^2} = \\ &= -\frac{1}{2b_1^2}\left(t^2 + (x-a)^2 - 2t(x-a) - \frac{b_1^2 t^2}{b_2^2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)\left(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2}\right)^2 - \frac{(x-a)^2}{2(b_1^2 + b_2^2)}. \end{aligned}$$

Підставляючи степінь експоненти у вираз для $f_{\zeta}(x)$, отримаємо твердження леми.

Доведення теореми 5.2.

а) Впливає з леми 5.1 при

$$a=R_{GMV}, b_1 = \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}} V_{GMV}, b_2 = \frac{s^*}{\sqrt{z_{\alpha}^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}} \text{ і } m=n-k.$$

в) Впливає з леми 5.1 при

$$a=-R_{GMV}, b_1 = -\sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}} V_{GMV}, b_2 = \sqrt{(z_{\alpha}^2 - s^*)} \frac{V_{GMV}}{n-1} \text{ і } m=n-k.$$

б) Для обчислення густини випадкової величини \hat{V}_{VaR}^* використовуємо той факт, що $\xi_2 \sim \chi_{n-k}^2$ та наступну рівність:

$$f_{\hat{V}_{VaR}^*}(x) = \frac{1}{b(s^*)} f_{\xi_2}(x/b(s^*)) = \frac{1}{(2b(s^*))^{(n-k)/2} \Gamma((n-k)/2)} x^{\frac{n-k-2}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2b(s^*)}\right\}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі 5.2 знайдено розподіли характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR лише у випадку виконання умови $\hat{s} = s^*$, тобто при досить суттєвих обмеженнях. Цікавіше було б розглянути безумовний розподіл оцінок характеристик. На жаль, безумовний розподіл у цьому випадку не може бути знайдений, оскільки оцінки ваг портфеля (4.7) коректні тоді і лише коли виконується наступна нерівність (5.2) [16], тобто $\hat{s} < z_{\alpha}^2$.

Враховуючи важливість умови (5.2), цікавим є розподіл оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за виконання (5.2).

Теорема 5.3. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у*

момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) f_{\hat{R}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{VaR}^*} (x | s^*) ds^*,$$

$$б) f_{\hat{V}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{V}_{VaR}^*} (x | s^*) ds^*,$$

$$в) f_{\hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{M}_{VaR}^*} (x | s^*) ds^*,$$

$$\text{де } K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)},$$

$F_{a,b;\lambda}(x)$ та $f_{a,b;\lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b степенями свободи та нецентральним параметром λ .

Доведення теореми 5.3 впливає з наступної лема та факту,

$$\text{що } \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1; ns}.$$

Лема 5.2. Нехай X та Y є абсолютно неперервні випадкові величини з густинами $f_X(\cdot)$ та $f_Y(\cdot)$ відповідно. Тоді:

$$f_{X|Y \leq y}(x|y) = \frac{1}{F_Y(y)} \int_{-\infty}^y f_{X|Y=t}(x|t) f_Y(t) dt,$$

де $F_Y(\cdot)$ є функцією розподілу випадкової величини Y .

Доведення. Нехай $F_{X|Y \leq y}(x|y)$ є функцією розподілу випадкової величини X за умови $Y \leq y$. Тоді

$$F_{X|Y \leq y}(x|y) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})}{P(\{Y \leq y\})} = \frac{1}{F_Y(y)} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s,t) ds dt,$$

де $f(s,t)$ є густиною двовимірної випадкової величини (X, Y) . Використовуючи рівність

$$f(s,t) = f_{X|Y=t}(s|t) f_Y(t),$$

отримаємо

$$F_{X|Y \leq y}(x|y) = \frac{1}{F_Y(y)} \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f_{X|Y=t}(s|t) f_Y(t) dt \right) ds.$$

З означення густини випливає, що:

$$f_{X|Y \leq y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y \leq y}(x|y)}{\partial x} = \frac{1}{F_Y(y)} \int_{-\infty}^y f_{X|Y=t}(x|t) f_Y(t) dt.$$

Лему доведено.

З теореми 5.3 отримуємо наступну рівність

$$M(g(\hat{R}_{VaR}) | \hat{s} < z_\alpha^2) = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) \cdot E(g(\hat{R}_{VaR}^*) | s^*) ds^* \quad (5.4)$$

для довільної функції $g(\cdot)$ такої, що відповідний інтеграл існує.

Аналогічні рівності виконуються для \hat{V}_{VaR} та \hat{M}_{VaR} .

Теорема 5.3 та (5.4) мають важливе застосування. Для ілюстрації цього позначимо

$$Q_1(x) = K(x) \int_0^x \frac{s^*}{\sqrt{x-s^*}} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) ds^*,$$

$$Q_2(x) = K(x) \int_0^x s^* f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) ds^*,$$

$$Q_3(x) = K(x) \int_0^x \sqrt{x-s^*} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) ds^*.$$

Підставляючи в (5.4) $g(x)=x$ та $g(x)=x^2$, отримаємо наступний результат.

Теорема 5.4. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) M(\hat{R}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) = R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} Q_1(z_\alpha^2),$$

$$б) D(\hat{R}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) = \infty,$$

$$в) M(\hat{V}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) = \infty,$$

$$г) M(\hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) = -R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} Q_3(z_\alpha^2),$$

$$д) D(\hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} Q_2(z_\alpha^2)\right) V_{GMV} + \frac{n-k}{n-1} V_{GMV} (z_\alpha^2 - Q_2(z_\alpha^2)) - \frac{2V_{GMV}}{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)^2} (Q_3(z_\alpha^2))^2.$$

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з (5.4), теореми 5.1 та з того, що

$$M(\xi_1) = 0, M(\xi_1^2) = D(\xi_1) = 1, M(\sqrt{\xi_2}) = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} \text{ та } M(\xi_2) = n-k.$$

Зауважимо, що математичне сподівання оцінки дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не існує. Більше того, для оцінки VaR математичне сподівання існує, а, отже, поведінка цієї міри ризику є кращою, ніж поведінка дисперсії, що є її перевагою. Також, варто звернути увагу на те, що дисперсія дохідності портфеля не існує, отже, можливі значення дохідності є сильно розсіяні по числовій осі, тобто, розподіл дохідності портфеля має так звані важкі хвости. Отже, навіть припустивши, що дохідності фінансових активів, з яких ми формуємо портфель, є нормально розподіленими, ми отримали, що сукупна дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR такою властивістю не володіє, на відміну від дохідності портфелю з найменшою дисперсією.

Ми провели статистичний аналіз характеристик оцінок портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Вибір VaR як міри ризику для побудови портфеля зумовлено тим, що дисперсія не є оптимальним вибором міри. Вона має декілька суттєвих недоліків. Проте VaR була використана для побудови портфеля фінансових активів відносно недавно [42]. Тому дотепер не було вивчено статистичних властивостей оцінок характеристик портфеля отриманого на основі цієї міри.

Ми припускаємо, що дохідності фінансових активів, з яких формується портфель, є нормально розподіленими випадковими величинами, незалежними в часі. Використовуючи це припущення, ми знайшли стохастичне зображення оцінок дохідності, дисперсії та VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Цей результат спрощує використання методу Монте-Карло для аналізу портфеля, та, крім цього, дає змогу знайти густини розподілів характеристик портфеля за умови, що оцінка параметру s є відома. Звичайно, така умова є дуже строгою. Більш інформативним, очевидно, є безумовний розподіл величини. Проте в цьому випадку говорити про безумовний розподіл характеристик портфеля не можна, оскільки оцінка портфеля є коректна лише у випадку виконання умови (5.2). Тому ми також знайшли умовні густини розподілів характеристик портфеля за виконання умови (5.2). Як наслідок, з цього результату отримано, що математичне сподівання оцінки дисперсії портфеля не існує. Крім того, математичне сподівання оцінки VaR портфеля існує. Цей факт є ще

однією перевагою VaR над дисперсією. Також ми показали, що дисперсія дохідностей портфеля не існує, отже, навіть припускаючи нормальність дохідностей активів, з яких складається портфель, дохідність портфеля буде мати важкі хвости, тобто її значення є сильніше розсіяні по числовій прямій, ніж значення нормально розподіленої випадкової величини.

5.3. Співвідношення дохідність-дисперсія портфеля фінансових активів з найменшим рівнем Value-at-Risk

При побудові портфеля фінансових активів основну увагу приділяють таким його характеристикам як дохідність та ризик. Як зазначено вище, характеристики портфеля залежать від параметрів розподілу дохідності його компонент, а саме, від математичного сподівання та дисперсії, які на практиці є невідомими. Отже, для чисельного представлення дохідності та ризику портфеля, необхідно спочатку оцінити параметри розподілу дохідності активів. Очевидно, що використовуючи історичний метод побудови оцінок, ми отримуємо в результаті випадкові величини. З огляду на це випадковими величинами будуть і оцінки характеристик портфеля. Тому необхідно розглядати портфель як випадкову величину. Як відомо, основними характеристиками випадкової величини є математичне сподівання і дисперсія, незважаючи на те, що за міру ризику вибрано VaR . Тому, нашою метою є встановлення спільного розподілу вибіркового оцінок дохідності та дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Цей розподіл дасть змогу провести повний аналіз цих двох випадкових величин та у разі необхідності встановити ступінь залежності (не лише лінійної) між ними.

З метою отримання точних результатів ми припускаємо, що дохідності активів є нормально розподілені та незалежні в часі. Отже, нехай ми формуємо портфель з k акцій. Позначимо через $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})'$ k -вимірний вектор дохідностей. Частку i -го фінансового активу в портфелі позначимо через w_i , а портфель –

вектор часток $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)'$. Припустимо, що вектор \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$.

Розглянемо задачу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR (4.6). Розв'язок такої задачі має вигляд (4.7), очікувана дохідність такого портфеля має вигляд (4.8), а дисперсія (4.9).

Як сказано вище, параметри розподілу дохідності активів, з яких складено портфель, $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, є невідомими на практиці величинами. Отже, ми підставляємо в (4.7)-(4.9) оцінки (1.27) замість невідомих параметрів. Очевидно так побудовані оцінки $\hat{\mathbf{w}}_{VaR}$, \hat{R}_{VaR} та \hat{V}_{VaR} є випадковими величинами. Зважаючи на те, що оцінки ваг і характеристик портфеля є коректними лише за виконання умови (5.2), розглядати безумовний розподіл випадкового вектора $(\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR})'$ є некоректно, оскільки з додатною імовірністю цей вектор є невизначеним. Тому доцільніше розглядати розподіл випадкового вектора $(\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^*)'$ за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$, тобто, що виконується умова (5.2). Для спрощення подальшої викладки позначимо $\hat{R}_{VaR}^* = (\hat{R}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$, $\hat{V}_{VaR}^* = (\hat{V}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$, та знайдемо спочатку розподіл випадкового вектора $(\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^*)'$.

Теорема 5.5. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді*

$$f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^*}(x_1, x_2) = \frac{(n-1)(z_\alpha^2 - s^*)}{V_{GMV} z_\alpha^2 \sqrt{1 + s^* n / (n-1)} V_{GMV}} f_{n-k} \left(\frac{(n-1)x_2 (z_\alpha^2 - s^*)}{V_{GMV} z_\alpha^2} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^*n/(n-1)}{n} V_{GMV}}} \left(x_1 - R_{GMV} - \frac{s^* \sqrt{x_2}}{z_\alpha} \right) \right], \quad (5.5)$$

де $\phi(x)$ густина стандартного нормального розподілу, $f_{n-k}(x)$ густина випадкової величини з χ^2 розподілом та з $n-k$ ступенями вільності.

Доведення. У [18] в теоремі 1 наведено стохастичне представлення випадкових величин \hat{R}_{VaR}^* , \hat{V}_{VaR}^*

$$\begin{cases} \hat{R}_{VaR}^* = R_{GMV} + \sqrt{\hat{s}^*} \xi_1 + a(s^*) \sqrt{\xi_2} \\ \hat{V}_{VaR}^* = b(s^*) \xi_2 \end{cases}, \quad (5.6)$$

де випадкові величини $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi_{n-k}^2$ є незалежними та $a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}$, $b(s^*) = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1}$, $\hat{s}^* = \frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}$.

Розв'язавши систему (5.6) відносно ξ_1 та ξ_2 отримаємо:

$$\begin{cases} \xi_2 = \frac{1}{b(s^*)} \hat{V}_{VaR}^* \\ \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\hat{s}^*}} \left(\hat{R}_{VaR}^* - R_{GMV} - a(s^*) \sqrt{\frac{\hat{V}_{VaR}^*}{b(s^*)}} \right) \end{cases}$$

Отже, Якобіан переходу від змінних $(\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^*)$ до (ξ_1, ξ_2) має вигляд:

$$\left| \mathfrak{J} \left(\begin{matrix} \xi_1, \xi_2 \\ \hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^* \end{matrix} \right) \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{R}_{VaR}^*} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{V}_{VaR}^*} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{R}_{VaR}^*} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \hat{V}_{VaR}^*} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\hat{s}^*}} & -\frac{a(s^*)}{2\sqrt{\hat{V}_{VaR}^*} b(s^*) \hat{s}^*} \\ 0 & \frac{1}{b(s^*)} \end{vmatrix} = \frac{1}{b(s^*) \sqrt{\hat{s}^*}}.$$

Тому спільна густина \hat{R}_{VaR}^* , \hat{V}_{VaR}^* має вигляд:

$$f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^*}(x_1, x_2) = \frac{1}{b(s^*) \sqrt{\hat{s}^*}} f_{n-k} \left(\frac{x_2}{b(s^*)} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{\hat{s}^*}} \left(x_1 - R_{GMV} - a(s^*) \sqrt{\frac{x_2}{b(s^*)}} \right) \right].$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що в теоремі 5.5 знайдено спільний розподіл випадкових величин \hat{R}_{VaR}^* , \hat{V}_{VaR}^* за умови, що $\hat{s} = s^*$, тобто, що значення оцінки \hat{s} є відомим. Проте, на практиці, неможливо визначити значення оцінки наперед. Тому нас цікавить більш загальний результат, а саме спільний розподіл випадкових величин \hat{R}_{VaR}^* , \hat{V}_{VaR}^* за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$. Цей розподіл знайдено в теоремі 5.6.

Теорема 5.6. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^* | \hat{s} < z_\alpha^2}(x_1, x_2) = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{V}_{VaR}^*}(x_1, x_2 | s^*) ds^*, \quad (5.7)$$

$$\text{де } K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)},$$

$F_{a,b;\lambda}(x)$ та $f_{a,b;\lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ .

Доведення. Доведення теореми 5.6 випливає з леми 5.2. Теорему доведено.

Загалом спільний розподіл випадкового вектора є достатньою умовою не лише для проведення повного статистичного аналізу, але і для тестування гіпотез. Наприклад, використовуючи умовний спільний розподіл випадкового вектора $(\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR})$, за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$ ми можемо протестувати наступну гіпотезу

$$H_0: R_{VaR}=r \text{ і } V_{VaR}=v \text{ проти } H_1: R_{VaR} \neq r \text{ або } V_{VaR} \neq v. \quad (5.8)$$

Проте, на практиці, ця задача не є простою, навіть використовуючи сучасні комп'ютерні статистичні програми. Ця проблема виникає тому, що розподіл вектора не є загальновідомим. Для проведення перевірки гіпотези (5.8) ми пропонуємо використання спільної множини довіри для вектора (R_{VaR}, V_{VaR}) .

Наступним нашим завданням є побудова спільної множини довіри з рівнем довіри $1-\beta$ для вектора (R_{VaR}, V_{VaR}) . Позначимо $\tilde{\beta} = 1 - \sqrt[3]{1-\beta}$ та для спрощення подальших викладок введемо такі позначення:

$$g_1(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{v - s} z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\hat{s}}{n}}{n-1}} \right) \sqrt{\frac{V}{v}},$$

$$g_2(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{v - s} z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\hat{s}}{n}}{n-1}} \right) \sqrt{\frac{V}{v}},$$

$$r_l = v \left(1 - \frac{1}{V} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; \tilde{\beta}/2}^2} \right),$$

$$r_u = v \left(1 - \frac{1}{V} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; 1-\tilde{\beta}/2}^2} \right),$$

$$s_u^*(v) = v - \frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}^2}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right).$$

Також позначимо через s_l та s_u нижню та верхню межу $1-\tilde{\beta}$ інтервалу довіри для параметра s обчисленого на основі рекурсивної процедури в [52].

Теорема 5.7. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді $1-\beta$ спільна множина довіри для (R_{VaR}, V_{VaR}) дорівнює множині, яка складається з усіх пар точок (R, V) , що задовольняють систему нерівностей*

$$\begin{cases} R \geq g_1(\max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2) \\ R \leq g_2(\max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(z_\alpha^2) \leq \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(s_u^*(z_\alpha^2), z_\alpha^2), \text{ при } \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} < s_u^*(z_\alpha^2) \leq \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(\min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(z_\alpha^2) > \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \end{cases}$$

$$\text{та } V \in \left[\frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s_l} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; 1-\tilde{\beta}/2}^2}, \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s_u} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; \tilde{\beta}/2}^2} \right].$$

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо результат роботи [52], а саме спільну множину довіри для (R_{GMV}, V_{GMV}, s) , яка має вигляд:

$$\hat{R}_{GMV} - z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\hat{s}}{n}}{n-1}} \sqrt{V_{GMV}} \leq R_{GMV} \leq \hat{R}_{GMV} + z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1 + \frac{\hat{s}}{n}}{n-1}} \sqrt{V_{GMV}}, \quad (5.9)$$

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; 1-\tilde{\beta}/2}^2} \leq V_{GMV} \leq \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; \tilde{\beta}/2}^2}, \quad (5.10)$$

$$s_l \leq s \leq s_u. \quad (5.11)$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} R_{VaR} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} \\ V_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s} V_{GMV} \end{cases},$$

відносно $(R_{GMV}, V_{GMV})'$, отримаємо

$$\begin{cases} R_{GMV} = R_{VaR} - \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{z_\alpha^2 - s}{z_\alpha^2}} V_{VaR} \\ V_{GMV} = \frac{z_\alpha^2 - s}{z_\alpha^2} V_{VaR} \end{cases}$$

Підставимо отримані рівності в (5.9)-(5.10) отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{z_\alpha^2 - s} z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha} &\leq R_{VaR} \leq \\ &\leq \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{z_\alpha^2 - s} z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2} \leq V_{VaR} \leq \frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2}, \quad (5.13)$$

$$s_l \leq s \leq s_u. \quad (5.14)$$

Зауважимо, що нерівності (5.12)-(5.13) задають спільну множину довіри для $(R_{VaR}, V_{VaR})'$ при заданому значенні s , що задовольняє нерівність (5.14). Для того, щоб позбутися залежності від s нам необхідно обчислити об'єднання інтервалів (5.12)-(5.13) по $s \in [s_l, s_u]$. З нерівності (5.13) при заданому значенні V_{VaR} можливі значення для s задаються наступним інтервалом

$$\frac{z_\alpha^2}{V_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2} \leq z_\alpha^2 - s \leq \frac{z_\alpha^2}{V_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2}$$

або

$$z_\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{V_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2} \right) \leq s \leq z_\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{V_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2} \right). \quad (5.15)$$

З нерівностей (5.14)-(5.15) при сталому значенні V_{VaR} отримаємо,

$$\Omega_{VaR} = \left\{ s \in R \mid \max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \leq s \leq \min \{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \right\},$$

множину допустимих значень s .

Тепер для обчислення нижньої та верхньої меж інтервалу для R_{VaR} при сталому значенні V_{VaR} нам необхідно мінімізувати $g_1(s, z_\alpha^2)$ та максимізувати $g_2(s, z_\alpha^2)$ по $s \in \Omega_{VaR}$ відповідно.

Розглянемо спочатку задачу мінімізації, тобто

$$g_1(s, z_\alpha^2) \rightarrow \min \text{ за умови } s \in \Omega_{VaR}.$$

Похідна від $g_1(s, z_\alpha^2)$ по s становить

$$\frac{\partial g_1(s, z_\alpha^2)}{\partial s} = \frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha} \left(1 + \frac{z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) > 0$$

для всіх $s \in \Omega_{VaR}$. Отже, мінімуму функція $g_1(s, z_\alpha^2)$ досягає на нижній межі множини Ω_{VaR} . Тому нижня межа для R_{VaR} становить

$$R_{VaR} \geq g_1(\max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2) \quad (5.16)$$

при

$$\frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2} \leq V_{VaR} \leq \frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2}.$$

Далі потрібно розв'язати наступну задачу

$$g_2(s, z_\alpha^2) \rightarrow \max \text{ за умови } s \in \Omega_{VaR}.$$

Обчислимо спочатку першу похідну від функції $g_2(s, z_\alpha^2)$ по s та прирівняємо її до 0.

$$\frac{\partial g_2(s, z_\alpha^2)}{\partial s} = \frac{\sqrt{V_{VaR}}}{z_\alpha} \left(1 - \frac{z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) = 0. \quad (5.17)$$

Розв'язавши рівняння (5.17) відносно s отримаємо

$$s_u^*(z_\alpha^2) = z_\alpha^2 - \frac{z_{1-\beta/2}^2}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right).$$

Оскільки друга похідна функції $g_2(s, z_\alpha^2)$ по s завжди менша за 0, тобто

$$\frac{\partial^2 g_2(s, z_\alpha^2)}{\partial s^2} = - \frac{z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \sqrt{V_{VaR}}}{4(z_\alpha^2 - s)^{3/2} z_\alpha} < 0,$$

то свого максимуму функція $g_2(s, z_\alpha^2)$ досягає в точці $s_u^*(z_\alpha^2)$.

Враховуючи, що допустимі значення $s \in \Omega_{VaR}$, отримаємо

$$\begin{cases} R_{VaR} \leq g_2(\max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), & \text{при } s_u^*(z_\alpha^2) \leq \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \\ R_{VaR} \leq g_2(s_u^*(z_\alpha^2), z_\alpha^2), & \text{при } \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} < s_u^*(z_\alpha^2) \leq \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \\ R_{VaR} \leq g_2(\min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), & \text{при } s_u^*(z_\alpha^2) > \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \end{cases} \quad (5.18)$$

при

$$\frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; 1-\beta/2}^2} \leq V_{VaR} \leq \frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; \beta/2}^2}.$$

Склавши разом (5.16) та (5.18) отримаємо твердження теореми.

Результат теореми 5.7 суттєво спрощує перевірку гіпотези (5.8). Зокрема, для тестування (5.8) достатньо перевірити чи належать значення (r, v) спільній множині довіри для $(R_{VaR}, V_{VaR})'$, отриманій в теоремі 5.7, чи ні. Якщо задані значення множині не належать то нульову гіпотезу відхиляємо, тобто отримуємо, що задані значення суттєво відрізняються від отриманих.

Ми дослідили спільні властивості характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Оскільки ваги портфеля залежать від параметрів розподілу дохідностей фінансових активів, то ми оперуємо не константами, а випадковими величинами. Ми знайшли спільну густину розподілу вибірових оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля фінансових активів. Це дає нам змогу провести повний статистичний аналіз вибірових оцінок характеристик портфеля, а отже, і самого портфеля. Крім цього, спільний розподіл дає змогу на основі тесту (5.8) перевірити чи суттєво відрізняються значення очікуваної дохідності та дисперсії портфеля, що спостерігаються на практиці від значень, які інвестор волів би отримати. Проте, з'ясувалося, використання спільної густини на практиці є доволі складним завданням, оскільки функція густини не є загальновідомою та, як наслідок, невивченою. Ми запропонували простіший алгоритм перевірки гіпотези (5.8). Для цього було побудовано спільну множину довіри для пари очікувана дохідність-дисперсія. Тепер перевірка гіпотези є еквівалентною перевірці чи потрапляють значення, задані інвестором, в цю множину довіри чи ні. Якщо значення не потрапляють, то з певним рівнем довіри можна стверджувати, що справжня дохідність або дисперсія портфеля суттєво відрізняється від необхідних значень.

5.4. Співвідношення дохідність-ризик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем Value-at-Risk

Застосування VaR для оцінки ризику портфеля фінансових активів описано в [4], [32], [42], [68], [93]. Одновимірні імовірнісні

властивості оцінок ваг портфеля з найменшим рівнем VaR та його характеристик досліджувалися в роботах [16], [18]. У [18] знайдено та досліджено властивості розподілів вибірових оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR . Крім цього, показано, що для вибіркової оцінки дохідності не існують моменти порядку вищого за другий, а для оцінки дисперсії – за перший. Для дослідження взаємозв'язку між цими двома випадковими величинами в [26] знайдено спільний закон розподілу та побудовано спільну множину довіри. Результат роботи [26] становить теоретичний інтерес, оскільки дисперсія не є доброю мірою для опису ризику. З практичного погляду важливішим є встановлення взаємозв'язку між вибіровими оцінками дохідності та VaR .

Наше завдання полягає у встановленні спільного розподілу вибірових оцінок дохідності та VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR та побудова спільної множини довіри. Ці результати дадуть змогу інвестору, який використовує такий портфель у практичній діяльності чи для аналізу ринку, проводити спільні статистичні тести відносно дохідності та ризику портфеля [27].

Спочатку ми знайдемо спільний розподіл вибірових оцінок дохідності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Безумовний розподіл, очевидно, не надає повної інформації про поведінку оцінок характеристик портфеля, а тому основну увагу зосереджено на дослідженні спільного умовного розподілу за виконання умови $z_\alpha^2 > \hat{s}$. Використаємо для спрощення такі позначення $\hat{R}_{VaR}^* = (\hat{R}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$, $\hat{M}_{VaR}^* = (\hat{M}_{VaR} | \hat{s} = s^*)$.

Теорема 5.8. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді*

$$f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{M}_{VaR}^*}(x_1, x_2 | s^*) = \frac{(n-1)\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}{V_{GMV} z_\alpha^2 \sqrt{\frac{n-1}{n} + s^*}} f_{n-k} \left(\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}{\sqrt{V_{GMV} z_\alpha^2}} (x_1 + x_2) \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^*n/(n-1)}{n} V_{GMV}}} \left(\frac{(z_\alpha^2 - s^*)x_1 - s^*x_2}{z_\alpha^2} - R_{GMV} \right) \right],$$

де $\varphi(x)$ – густина стандартного нормального розподілу, $f_{n-k}(x)$ – густина випадкової величини з χ розподілом з $n-k$ ступенями вільності.

Доведення. Зі стохастичного зображення випадкових величин \hat{R}_{VaR}^* , \hat{M}_{VaR}^* знайдених у теоремі 5.1, отримаємо

$$\begin{cases} \hat{R}_{VaR}^* = R_{GMV} + \sqrt{s^*} \xi_1 + a(s^*) \sqrt{\xi_2} \\ \hat{M}_{VaR}^* = -R_{GMV} - \sqrt{s^*} \xi_1 + c(s^*) \sqrt{\xi_2} \end{cases}, \quad (5.19)$$

де випадкові величини $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi_{n-k}^2$ є незалежними та $a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}$, $c(s^*) = \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*) \frac{V_{GMV}}{n-1}}$, $s^* = \frac{1+s^*n/(n-1)}{n} V_{GMV}$.

Розв'язок системи (5.19) відносно ξ_1 та $\sqrt{\xi_2}$ має вигляд:

$$\begin{cases} \sqrt{\xi_2} = \frac{\hat{R}_{VaR}^* + \hat{M}_{VaR}^*}{a(s^*) + c(s^*)} \\ \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{s^*}} \left(-\hat{M}_{VaR}^* - R_{GMV} + \frac{c(s^*)}{a(s^*) + c(s^*)} (\hat{R}_{VaR}^* + \hat{M}_{VaR}^*) \right) \end{cases}.$$

Якобіан переходу від змінних $(\hat{R}_{VaR}^*, \hat{M}_{VaR}^*)$ до $(\xi_1, \sqrt{\xi_2})$ дорівнює:

$$\left| \mathfrak{S} \left(\begin{pmatrix} \xi_1, \sqrt{\xi_2} \\ \hat{R}_{VaR}^*, \hat{M}_{VaR}^* \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{R}_{VaR}^*} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \hat{M}_{VaR}^*} \\ \frac{\partial \sqrt{\xi_2}}{\partial \hat{R}_{VaR}^*} & \frac{\partial \sqrt{\xi_2}}{\partial \hat{M}_{VaR}^*} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{c(s^*)}{\sqrt{s^*} (a(s^*) + c(s^*))} & -\frac{a(s^*)}{\sqrt{s^*} (a(s^*) + c(s^*))} \\ \frac{1}{a(s^*) + c(s^*)} & \frac{1}{a(s^*) + c(s^*)} \end{array} \right| = \frac{1}{(a(s^*) + c(s^*)) \sqrt{s^*}}.$$

Отже, спільна густина випадкових величин $\hat{R}_{VaR}^*, \hat{M}_{VaR}^*$

$$f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{M}_{VaR}^*}^*(x_1, x_2 | s^*) = \frac{1}{(a(s^*) + c(s^*)) \sqrt{s^*}} f_{n-k} \left(\frac{x_1 + x_2}{a(s^*) + c(s^*)} \right) \square \left(\frac{1}{\sqrt{s^*}} \left(-R_{GMV} + \frac{c(s^*)x_1 - a(s^*)x_2}{a(s^*) + c(s^*)} \right) \right).$$

Підставивши в попередню рівність замість $a(s^*), c(s^*)$ та \hat{s}^* відповідні вирази, отримаємо твердження теореми.

У теоремі 5.8 знайдено розподіл випадкового вектора $(\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR})'$ за умови, що $\hat{s} = s^*$. Проте значення оцінки \hat{s} наперед невідоме, а тому в наступній теоремі знайдено розподіл вектора $(\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR})'$ за умови $z_\alpha^2 > \hat{s}$.

Теорема 5.9. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді*

$$f_{\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2}^*(x_1, x_2) = \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{VaR}^*, \hat{M}_{VaR}^*}^*(x_1, x_2 | s^*) ds^*, \quad (5.20)$$

$$\text{де } K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)}, F_{a,b;\lambda}(x) \text{ та}$$

$f_{a,b;\lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ .

Доведення. Доведення теореми 5.6 впливає з леми 5.2. Теорему доведено.

Результат теореми 5.9 дає можливість протестувати гіпотезу:

$$H_0: R_{VaR} = r \text{ і } M_{VaR} = m \text{ проти } H_1: R_{VaR} \neq r \text{ або } M_{VaR} \neq m. \quad (5.21)$$

Попередньо ми знайшли спільний розподіл вибірових оцінок доходності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR $f_{\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2}(\cdot, \cdot)$, з допомогою якого можемо провести перевірку гіпотези (5.21), а також побудувати спільну множину довіри. Проте обидва цих процеси займуть відносно багато часу навіть за умови використання сучасних комп'ютерів і програм, оскільки функція $f_{\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2}(\cdot, \cdot)$ має досить складний вигляд.

Тому ми пропонуємо інший підхід до побудови спільної множини довіри без використання спільного розподілу. Для отримання цього результату ми використаємо спільну множину довіри для вектора $(R_{GMV}, V_{GMV}, s)'$, побудовану в роботі [52]. Введемо наступні позначення, $\tilde{\beta} = 1 - \sqrt[3]{1 - \beta}$, де $1 - \beta$ рівень довіри спільної множини довіри для вектора $(R_{VaR}, M_{VaR})'$,

$$g_1(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{v - s} z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R + M}{v},$$

$$g_2(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{v - s} z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R + M}{v},$$

$$r_l(v) = v \left(1 - \frac{v}{(R+M)^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^2} \right),$$

$$r_u(v) = v \left(1 - \frac{v}{(R+M)^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^2} \right),$$

$$s_u^*(v) = v - \frac{z_{1-\tilde{\beta}/2}^2}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right),$$

s_l та s_u – нижня та верхня межі $1-\tilde{\beta}$ інтервалу довіри для параметра s , обчисленого на основі рекурсивної процедури в [52].

Теорема 5.10. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді $1-\beta$ спільна множина довіри для $(R_{VaR}, M_{VaR})'$ дорівнює множині, яка складається з усіх пар точок (R, M) , що задовольняють систему нерівностей*

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^2}} \leq R+M \leq \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^2}}$$

та

$$\begin{cases} R \geq g_1(\max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2) \\ R \leq g_2(\max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(z_\alpha^2) \leq \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(s_u^*(z_\alpha^2), z_\alpha^2), \text{ при } \max\{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} < s_u^*(z_\alpha^2) \leq \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(\min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(z_\alpha^2) > \min\{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \end{cases}$$

Доведення. У [52] побудовано спільну множину довіри для вектора $(R_{GMV}, V_{GMV}, s)'$, а саме:

$$\hat{R}_{GMV} - z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \sqrt{V_{GMV}} \leq R_{GMV} \leq \hat{R}_{GMV} + z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \sqrt{V_{GMV}}, \quad (5.22)$$

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^2} \leq V_{GMV} \leq \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^2}, \quad (5.23)$$

$$s_l \leq s \leq s_u. \quad (5.24)$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} R_{VaR} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} \\ M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV} \end{cases},$$

відносно $(R_{GMV}, V_{GMV})'$, отримаємо

$$\begin{cases} R_{GMV} = R_{VaR} - \frac{s}{z_\alpha^2} (R_{VaR} + M_{VaR}) \\ V_{GMV} = \frac{z_\alpha^2 - s}{z_\alpha^4} (R_{VaR} + M_{VaR})^2 \end{cases}.$$

Звідси та з (5.22)-(5.24) маємо

$$\begin{aligned} \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{z_\alpha^2 - s} z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2} &\leq R_{VaR} \leq \\ &\leq \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{z_\alpha^2 - s} z_{1-\tilde{\beta}/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\tilde{\beta}/2}^2}} \leq R_{VaR} + M_{VaR} \leq \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\tilde{\beta}/2}^2}}, \quad (5.26)$$

$$s_l \leq s \leq s_u. \quad (5.27)$$

З (5.25)-(5.26) отримаємо спільну множину довіри для $(R_{VaR}, M_{VaR})'$ при заданому значенні s , яке попадає в інтервал (5.27). Для

завершення доведення теореми обчислимо об'єднання інтервалів (5.25)-(5.26) по $s \in [s_l, s_u]$. При заданому значенні $R_{VaR} + M_{VaR}$ можливі значення для s з (5.26) задаються інтервалом

$$\frac{z_\alpha^4}{(R_{VaR} + M_{VaR})^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2} \leq z_\alpha^2 - s \leq \frac{z_\alpha^4}{(R_{VaR} + M_{VaR})^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2}$$

або

$$z_\alpha^2 \left(1 - \frac{z_\alpha^2}{R_{VaR} + M_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2} \right) \leq s \leq z_\alpha^2 \left(1 - \frac{z_\alpha^2}{R_{VaR} + M_{VaR}} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2} \right). \quad (5.28)$$

Отже, множина допустимих значень для s має вигляд:

$$\Omega_{VaR} = \left\{ s \in R \mid \max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \leq s \leq \min \{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \right\}.$$

Для обчислення нижньої та верхньої меж інтервалу для R_{VaR} при сталому значенні $R_{VaR} + M_{VaR}$ нам необхідно мінімізувати $g_1(s, z_\alpha^2)$ та максимізувати $g_2(s, z_\alpha^2)$ при $s \in \Omega_{VaR}$.

Розглянемо спочатку задачу

$$g_1(s, z_\alpha^2) \rightarrow \min \text{ за умови } s \in \Omega_{VaR}.$$

Маємо

$$\frac{\partial g_1(s, z_\alpha^2)}{\partial s} = \frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2} \left(1 + \frac{z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) > 0$$

для всіх $s \in \Omega_{VaR}$. Отже, мінімальне значення функція $g_1(s, z_\alpha^2)$ досягає на нижній межі множини Ω_{VaR} . Таким чином,

$$R_{VaR} \geq g_1(\max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2) \quad (5.29)$$

при

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2}} \leq R_{VaR} + M_{VaR} \leq \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2}}.$$

Для обчислення верхньої межі для R_{VaR} розглянемо задачу

$$g_2(s, z_\alpha^2) \rightarrow \max \text{ за умови } s \in \Omega_{VaR}.$$

Маємо

$$\frac{\partial g_2(s, z_\alpha^2)}{\partial s} = \frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2} \left(1 - \frac{z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) = 0. \quad (5.30)$$

Звідси розв'язок рівняння (5.30), s_u^* , має вигляд:

$$s_u^*(z_\alpha^2) = z_\alpha^2 - \frac{z_{1-\beta/2}^2}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right).$$

Оскільки,

$$\frac{\partial^2 g_2(s, z_\alpha^2)}{\partial s^2} = -\frac{z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}}}{4(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} \frac{R_{VaR} + M_{VaR}}{z_\alpha^2} < 0,$$

то максимум функції $g_2(s, z_\alpha^2)$ досягається в точці $s_u^*(z_\alpha^2)$. Врахувавши, що $s \in \Omega_{VaR}$, отримаємо

$$\begin{cases} R_{VaR} \leq g_2(\max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), & \text{при } s_u^*(z_\alpha^2) \leq \max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} \\ R_{VaR} \leq g_2(s_u^*(z_\alpha^2), z_\alpha^2), & \text{при } \max \{s_l, r_l(z_\alpha^2)\} < s_u^*(z_\alpha^2) \leq \min \{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \\ R_{VaR} \leq g_2(\min \{s_u, r_u(z_\alpha^2)\}, z_\alpha^2), & \text{при } s_u^*(z_\alpha^2) > \min \{s_u, r_u(z_\alpha^2)\} \end{cases} \quad (5.31)$$

за умови

$$\frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;1-\beta/2}^2}} \leq R_{VaR} + M_{VaR} \leq \frac{z_\alpha^2}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k;\beta/2}^2}}.$$

З (5.29) та (5.31) випливає твердження теореми 5.10.

Використовуючи результат цієї теореми, ми можемо не лише побудувати спільну множину довіри для (R_{VaR}, M_{VaR}) , але й провести перевірку гіпотези (5.21), причому результати перевірки

будуть отримані значно швидше, ніж використовуючи твердження теореми 5.9.

Ми дослідили спільні властивості доходності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Оскільки параметри розподілу доходностей фінансових активів портфеля є невідомими, то ми оперуємо оцінками характеристик портфеля, які є випадковими величинами. З метою покращення результатів планування і моделювання майбутньої поведінки портфеля ми знайшли спільний умовний розподіл вибірових оцінок доходності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за умови $z_{\alpha}^2 > \hat{s}$. Використовуючи знайдений розподіл, інвестор має змогу провести перевірку гіпотези (5.21) та встановити чи значення характеристик портфеля отримані на практиці статистично суттєво відрізняються від бажаних значень. На практиці використання знайденого розподілу для вирішення задач інвестором є доволі громіздким процесом. Ми побудували спільну множину довіри для доходності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , використання якої суттєво спрощує перевірку гіпотези (5.21) та економить час інвестора.

5.5. Емпіричні результати й теоретичні приклади

Проведемо аналіз результатів, отриманих в теоремах 5.3-5.4, на прикладі реальних даних. Виберемо дані про щомісячні курси п'яти акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* (тобто $k=5$). Обчислимо їхні доходності та виберемо п'ять вибірок розміру $n=12$ (з 01.10.2014 до 01.09.2015), $n=24$ (з 01.10.2013 до 01.09.2015), $n=36$ (з 01.10.2012 до 01.09.2015), $n=48$ (з 01.10.2011 до 01.09.2015), $n=60$ (з 01.10.2010 до 01.09.2015). Припустимо, що вибрані доходності є реалізаціями нормально розподіленої випадкової величини. Щоб підтвердити коректність цього припущення використаємо тест Колмогорова-Смірнова. Отримані p -значення цього тесту наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1
 p -значення тесту Колмогорова-Смірнова для вибірок щомісячних доходностей акцій *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel*.

	$n=12$	$n=24$	$n=36$	$n=48$	$n=60$
<i>Microsoft</i>	0.782	0.711	0.864	0.827	0.931
<i>JPMorgan Chase</i>	0.784	0.502	0.829	0.458	0.195
<i>Walt Disney</i>	0.421	0.606	0.443	0.503	0.400
<i>Boeing</i>	0.635	0.982	0.996	0.997	0.893
<i>Intel</i>	0.953	0.993	0.9997	0.992	0.998

Джерело: розроблено автором

Оцінимо для кожної з вибірок параметри розподілу та параметри ефективної множини, а саме, R_{GMV} , V_{GMV} , s .

а) $n=12$:

$$\mu = (-0.8589, 0.1657, 0.9274, 0.0039, -1.8703)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 71.906 & 37.097 & 32.247 & -6.175 & 27.422 \\ 37.097 & 42.136 & 33.734 & -7.361 & 13.767 \\ 32.247 & 33.734 & 47.320 & 15.499 & 3.940 \\ -6.175 & -7.361 & 15.499 & 31.961 & -2.921 \\ 27.422 & 13.767 & 3.940 & -2.921 & 37.865 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMV} = -0.61945, V_{GMV} = 6.77082, s = 0.10776;$$

б) $n=24$:

$$\mu = (0.9517, 0.7207, 1.8073, 0.3384, 0.8073)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 42.304 & 23.436 & 16.672 & -0.779 & 17.292 \\ 23.436 & 32.027 & 19.975 & -2.277 & 9.088 \\ 16.672 & 19.975 & 33.155 & 15.330 & 7.550 \\ -0.779 & -2.277 & 15.330 & 29.667 & -0.603 \\ 17.292 & 9.088 & 7.550 & -0.603 & 38.148 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMV} = 0.24393, V_{GMV} = 10.97819, s = 0.13707;$$

в) $n=36$:

$$\mu = (0.9450, 1.1595, 1.7879, 1.6802, 0.5699)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 39.341 & 15.617 & 14.743 & 0.629 & 18.494 \\ 15.617 & 31.316 & 16.183 & 0.160 & 9.309 \\ 14.743 & 16.183 & 29.281 & 12.643 & 10.575 \\ 0.629 & 0.160 & 12.643 & 29.430 & 1.891 \\ 18.494 & 9.309 & 10.575 & 1.891 & 34.568 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMV}=1.19329, V_{GMV}=12.41579, s=0.03893;$$

г) $n=48$:

$$\mu=(1.0811, 1.4855, 2.4870, 1.5517, 0.5524)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 38.130 & 24.141 & 12.857 & 3.888 & 20.935 \\ 24.141 & 57.387 & 16.442 & 7.169 & 17.497 \\ 12.857 & 16.442 & 27.148 & 10.557 & 10.709 \\ 3.888 & 7.169 & 10.557 & 28.063 & 6.946 \\ 20.935 & 17.497 & 10.709 & 6.946 & 36.527 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMV}=1.54758, V_{GMV}=15.40815, s=0.09575;$$

д) $n=60$:

$$\mu=(0.8918, 0.7984, 1.8345, 1.0831, 0.6181)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 36.510 & 24.278 & 13.315 & 6.154 & 17.562 \\ 24.278 & 60.648 & 23.218 & 13.041 & 13.433 \\ 13.315 & 23.218 & 33.398 & 15.354 & 10.827 \\ 6.154 & 13.041 & 15.354 & 30.697 & 6.868 \\ 17.562 & 13.433 & 10.827 & 6.868 & 36.276 \end{pmatrix},$$

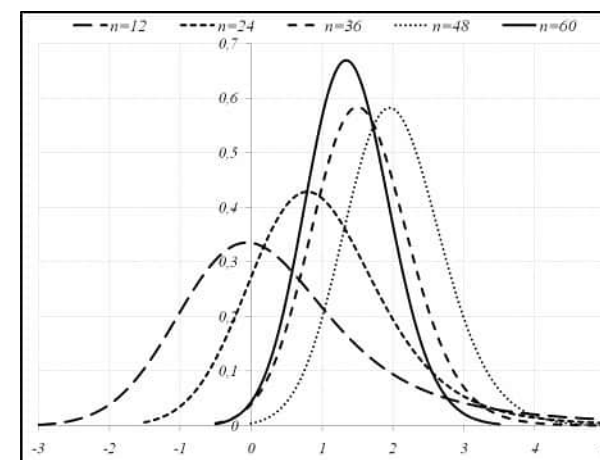
$$R_{GMV}=1.06586, V_{GMV}=16.90393, s=0.04604.$$

Припустимо, що для кожної з вибірок отримані значення параметрів розподілу є точними. Виберемо значення рівня довіри для VaR $\alpha=0.95$. Легко бачити, що у всіх розглянутих випадках умова (4.11) виконується, оскільки $z_{\alpha}^2=2.6896$. Отже, ми маємо змогу побудувати портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Підставляючи отримані значення у вирази для густин розподілу оцінок характеристик портфеля фінансових активів з

найменшим рівнем VaR можемо дослідити властивості цих випадкових величин.

Розглянемо спочатку властивості вибіркової оцінки очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри для VaR $\alpha=0.95$. Графічно густини оцінки залежно від обсягу вибірки n зображено на рис. 5.4.

З рис. 5.4 важко зробити висновок про точність оцінки, проте візуально виглядає, що дисперсія оцінки зменшується зі зростанням n , а це є неправильно, оскільки з теореми 5.4 маємо, що дисперсія вибіркової оцінки очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не існує. Наступним кроком нашого аналізу є дослідження густини розподілу випадкової величини $\hat{R}_{VaR}(n) - R_{VaR}(n)$, де $R_{VaR}(n)$ точне значення очікуваної дохідності отримано з параметрів розподілу та параметрів ефективної множини. Ці значення наведено в табл. 5.2.



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.4. Густина розподілу вибіркової оцінки очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR складеного з акцій *Microsoft, JPMorgan Chase, Walt Disney, Boeing, Intel* на основі вибірок щомісячних дохідностей об'єму $n=12, 24, 36, 48, 60$.

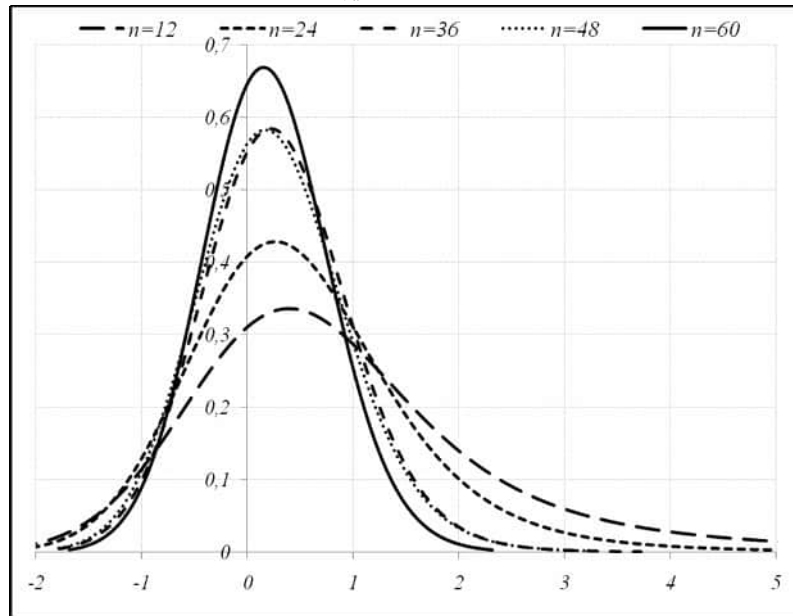
Таблиця 5.2

Точні значення очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR, складених з акцій *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel*

$R_{VaR}(n)$	$n=12$	$n=24$	$n=36$	$n=48$	$n=60$
	-0.44494	0.52819	1.27754	1.78095	1.18218

Джерело: розроблено автором

На основі даних з табл 5.2 зобразимо (рис. 5.5) графічно густину випадкової величини $\hat{R}_{VaR}(n) - R_{VaR}(n)$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.5. Густина розподілу випадкової величини

$\hat{R}_{VaR}(n) - R_{VaR}(n)$ при $n=12, 24, 36, 48, 60$.

З рис. 5.5 можемо зробити висновок, що при зростанні об'єму вибірки оцінка очікуваної дохідності стає точнішою, зменшується її зміщення. Також густина стає симетричною, оскільки при $n=12$ та $n=24$ для густин притаманна явно виражена несиметричність. З рис. 5.5 також можна зробити висновок, що зменшується довжина

інтервалу довіри для значення очікуваної дохідності. Перевіримо цей висновок. Побудуємо 95 % інтервали довіри для значення очікуваних дохідностей наших портфелів, аналогічно до [24]. Для побудови інтервалу довіри з рівнем довіри β потрібно розв'язати інтегральне рівняння

$$\int_{y_1}^{y_2} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \beta, \quad (5.31)$$

де інтервал $[y_1, y_2]$ буде шуканим інтервалом довіри. Добре відомо, що рівняння (5.31) має, до речі, безліч розв'язків. Тому для побудови інтервалу необхідно накласти додаткові умови на y_1, y_2 , наприклад,

$$\int_{-\infty}^{y_1} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \frac{1-\beta}{2}, \quad (5.32)$$

$$\int_{y_2}^{\infty} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = \frac{1-\beta}{2}$$

Таблиця 5.3

95 % інтервали довіри для очікуваної дохідності п'яти портфелів з найменшим рівнем VaR, складених з акцій *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* та їх довжини

	Нижня межа 95 % інтервалу довіри	Верхня межа 95 % інтервалу довіри	Довжина 95 % інтервалу довіри
$n=12$	-1.78383	6.13840	7.92223
$n=24$	-0.72554	3.57220	4.29774
$n=36$	0.25121	3.03237	2.78116
$n=48$	0.72274	3.51520	2.79246
$n=60$	0.22317	2.60686	2.38369

Джерело: розроблено автором

Задача (5.31)-(5.32) має єдиний розв'язок, який аналітичними методами знайти неможливо. Побудуємо 95 % інтервал довіри для дохідності, розв'язавши задачу (5.31)-(5.32) методом золотого перерізу з точністю 0.000001, яку перепишемо у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{y_1} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = 0.025, \quad \int_{y_2}^{\infty} f_{\hat{R}_{VaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x)dx = 0.025.$$

Інтервали довіри для очікуваної дохідності п'яти розглянутих портфелів з найменшим рівнем VaR та їх довжини наведено в табл. 5.3. Результати частково підтверджують наше спостереження про те, що довжини інтервалів довіри зменшуються з ростом обсягу вибірки n . Лише при переході від $n=36$ до $n=48$ довжина інтервалу довіри несуттєво зросла. Це пов'язано з тим, що параметри розподілів у цих випадках є різними. Щоб переконатися у справедливості нашого зауваження стосовно довжини інтервалів довіри, ми припустимо, що параметри розподілу дохідностей не змінюються зі зміною об'єму вибірки. Нехай незалежно від n ми отримаємо, що

$$\mu = (0.8918, 0.7984, 1.8345, 1.0831, 0.6181)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 36.510 & 24.278 & 13.315 & 6.154 & 17.562 \\ 24.278 & 60.648 & 23.218 & 13.041 & 13.433 \\ 13.315 & 23.218 & 33.398 & 15.354 & 10.827 \\ 6.154 & 13.041 & 15.354 & 30.697 & 6.868 \\ 17.562 & 13.433 & 10.827 & 6.868 & 36.276 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMI} = 1.06586, V_{GMI} = 16.90393, s = 0.04604.$$

Таблиця 5.4

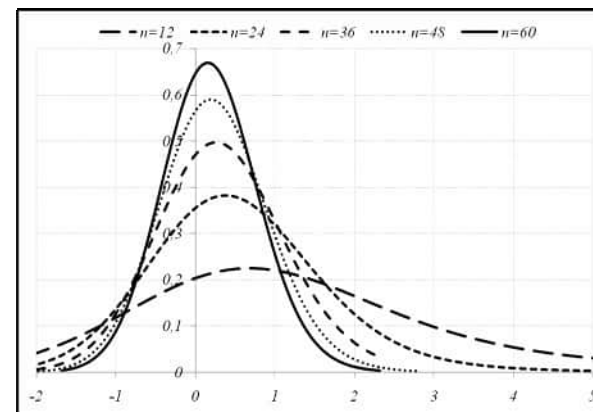
95 % інтервали довіри для очікуваної дохідності п'яти портфелів з найменшим рівнем VaR , складених з акцій *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* та їх довжини за припущення незалежності параметрів розподілу дохідностей від об'єму вибірки n

	Нижня межа 95 % інтервалу довіри	Верхня межа 95 % інтервалу довіри	Довжина 95 % інтервалу довіри
$n=12$	-0.83552	9.88779	10.72331
$n=24$	-0.26267	4.22563	4.4883
$n=36$	-0.022998	3.259296	3.305292
$n=48$	0.12217	2.84377	2.7216
$n=60$	0.22317	2.60686	2.38369

Джерело: розроблено автором

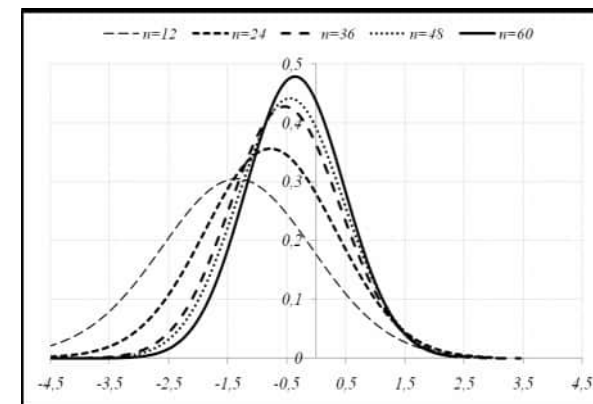
У цьому випадку графік розподілу випадкової величини $\hat{R}_{VaR}(n) - R_{VaR}(n)$ зображено на рис. 5.6. Бачимо, що зі зростанням об'єму вибірки n суттєво покращуються властивості оцінки

очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Також дані стосовно інтервалів довіри, наведених в табл. 5.4, повністю підтверджують, що довжини інтервалів довіри обернено пропорційні до об'єму вибірки n .



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.6. Густина розподілу випадкової величини $\hat{R}_{VaR}(n) - R_{VaR}(n)$ при $n=12, 24, 36, 48, 60$ за припущення незалежності параметрів розподілу дохідностей від об'єму вибірки.



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.7. Густина розподілу випадкової величини $\hat{M}_{VaR}(n) - M_{VaR}(n)$ при $n=12, 24, 36, 48, 60$.

У випадку оцінки VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR покращення властивостей розподілу зі зростанням об'єму вибірки є ще більш вираженим, ніж у випадку очікуваної дохідності. Це пов'язано насамперед з тим, що для оцінки VaR портфеля існує дисперсія. На рис. 5.7 зображено густину випадкової величини $\hat{M}_{VaR}(n) - M_{VaR}(n)$. Легко бачити, що зі зростанням n дисперсія та зміщення оцінки зменшується. Зауважимо, що навіть при $n=12$ функція густини оцінки VaR портфеля є близька до симетричної.

Таблиця 5.5.

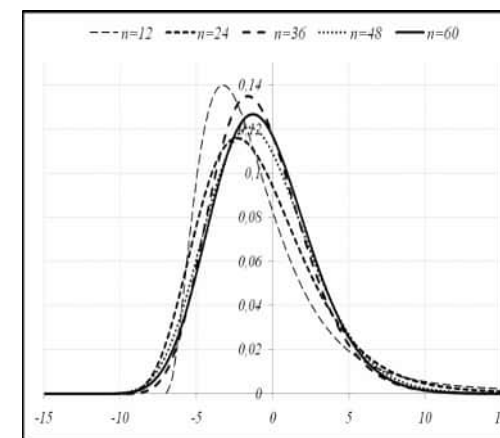
95 % інтервали довіри для VaR п'яти портфелів з найменшим рівнем VaR , складених з акцій *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* та їх довжини

	Нижня межа 95 % інтервалу довіри	Верхня межа 95 % інтервалу довіри	Довжина 95 % інтервалу довіри	Дисперсія оцінки VaR портфеля
$n=12$	0.70394	5.98902	5.28508	1.755542
$n=24$	2.01861	6.46015	4.44154	1.278619
$n=36$	2.20634	5.86194	3.65560	0.869186
$n=48$	2.57501	6.11963	3.54462	0.817038
$n=60$	3.64167	6.90784	3.26617	0.694121

Джерело: розроблено автором

95 % інтервали довіри для значень VaR портфелів та дисперсії вибіркової оцінки VaR , отримані методом описаним в [25], наведено в табл. 5.5. Зауважимо, що ці таблиці повністю підтверджують спостереження з графічного вигляду густин оцінок VaR портфелів фінансових активів з найменшим рівнем VaR , а саме, довжини інтервалів довіри та дисперсії оцінок є обернено пропорційні до об'єму вибірки n . У випадку припущення, що параметри розподілу дохідностей не змінюються зі зміною об'єму вибірки, ці властивості будуть ще більш виражені, тому ми не будемо наводити аналіз густин оцінок VaR портфелів фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Для густини вибіркової оцінки дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR результати зображено на рис. 5.8 та табл. 5.6. Результати графічного аналізу доволі важко трактувати, оскільки для оцінки дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не існує математичного сподівання.



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.8. Густина розподілу випадкової величини

$\hat{V}_{VaR}(n) - V_{VaR}(n)$ при $n=12, 24, 36, 48, 60$.

Стосовно інтервалів довіри та їх довжин, висновок є аналогічним до результатів, отриманих у випадку оцінки очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Окремо треба виділити випадок $n=36$. Проте, припустивши, що параметри розподілу не залежать від об'єму вибірки n , отримаємо, що, як і у випадку вибіркової оцінки очікуваної дохідності портфелів фінансових активів з найменшим рівнем VaR , довжина інтервалів довіри є обернено пропорційна до об'єму вибірки n .

Таблиця 5.6

95 % інтервали довіри для дисперсії п'яти портфелів з найменшим рівнем VaR , складених з акцій *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* та їх довжини

	Нижня межа 95 % інтервалу довіри	Верхня межа 95 % інтервалу довіри	Довжина 95 % інтервалу довіри
$n=12$	1.32817	24.32967	23.00150
$n=24$	4.84033	20.30251	15.46218
$n=36$	6.60820	18.61751	12.00931
$n=48$	9.40678	22.73896	13.33218
$n=60$	10.88385	23.41424	12.53039

Джерело: розроблено автором

5.6. Перехід до умовного Value-at-Risk як міри ризику портфеля

При правильному виборі моделі поведінки доходностей активів, навіть в кризові періоди часу, VaR дає непогане уявлення про ризик [23]. Проте, як зазначалося вище, міра ризику VaR має певні недоліки. Одним із них є те, що VaR є лише квантилею розподілу і тому повністю не відображає інформацію, яка стоїть за його значенням. Також VaR не є субадитивною мірою ризику [119]. Крім цього, зважаючи на анонсований перехід до Базель III при оцінці банківських ризиків, де за основну міру ризику вибрано CVaR, природно виникає необхідність дослідити властивості характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем CVaR. Ваги та характеристики портфеля фінансових активів з найменшим рівнем CVaR наведено у (4.15)-(4.18). Легко бачити, що ці величини можна отримати з ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR (4.7)-(4.10) просто замінивши z_α на k_α . Тому імовірнісні властивості вибіркового оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем CVaR можна отримати як наслідки з теорем 5.1-5.10.

Позначимо:

$$\hat{R}_{CVaR}^* = (\hat{R}_{CVaR} | \hat{s} = s^*), \quad \hat{V}_{CVaR}^* = (\hat{V}_{CVaR} | \hat{s} = s^*), \\ \hat{M}_{CVaR}^* = (\hat{M}_{CVaR} | \hat{s} = s^*).$$

Наслідок 5.1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) \hat{R}_{CVaR}^* = R_{GMV} + \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}} V_{GMV} \xi_1 + \frac{s^*}{\sqrt{k_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}} \sqrt{\xi_2},$$

$$б) \hat{V}_{CVaR}^* = \frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1} \xi_2,$$

$$в) \hat{M}_{CVaR}^* = R_{GMV} + \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n}} V_{GMV} \xi_1 + \sqrt{\frac{(k_\alpha^2 - s^*) V_{GMV}}{n-1}} \sqrt{\xi_2},$$

де символ $\overset{d}{=}$ означає рівність за розподілом, а випадкові величини $\xi_1 \sim N(0,1)$ та $\xi_2 \sim \chi_{n-k}^2$ є незалежними.

Аналогічно до (5.3), позначимо

$$\tilde{a}(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{k_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad \tilde{b}(s^*) = \frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1}, \\ \tilde{c}(s^*) = \sqrt{\frac{(k_\alpha^2 - s^*) V_{GMV}}{n-1}}. \quad (5.33)$$

Наслідок 5.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) f_{\hat{R}_{CVaR}^*}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} \tilde{a}(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \exp\left\{-\frac{(x - R_{GMV})^2}{2(\tilde{a}(s^*)^2 + \tilde{s}^*)}\right\}.$$

$$\cdot M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\tilde{s}^*}, \tilde{a}(s^*)),$$

$$б) f_{\hat{V}_{CVaR}^*}(x) = \frac{1}{(2\tilde{b}(s^*))^{\frac{n-k}{2}} \Gamma((n-k)/2)} x^{\frac{n-k-2}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2\tilde{b}(s^*)}\right\},$$

$$в) f_{\hat{M}_{CVaR}^*}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} \tilde{c}(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \exp\left\{-\frac{(x + R_{GMV})^2}{2(\tilde{c}(s^*)^2 + \tilde{s}^*)}\right\}.$$

$$\cdot M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\tilde{s}^*}, \tilde{c}(s^*)).$$

Наслідок 5.3. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є

k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ . Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) f_{\hat{R}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2} = K(k_\alpha^2) \int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{CVaR}^*} (x | s^*) ds^*,$$

$$б) f_{\hat{V}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2} = K(k_\alpha^2) \int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{V}_{CVaR}^*} (x | s^*) ds^*,$$

$$в) f_{\hat{M}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2} = K(k_\alpha^2) \int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{M}_{CVaR}^*} (x | s^*) ds^*,$$

$$\text{де } K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)}, F_{a,b;\lambda}(x) \text{ та } f_{a,b;\lambda}(x)$$

є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ .

Наслідок 5.4. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ . Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) M(\hat{R}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2) = R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} Q_1(k_\alpha^2),$$

$$б) D(\hat{R}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2) = \infty,$$

$$в) M(\hat{V}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2) = \infty,$$

$$г) M(\hat{M}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2) = -R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)} Q_3(k_\alpha^2),$$

д)

$$D(\hat{M}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} Q_2(k_\alpha^2) \right) V_{GMV} + \frac{n-k}{n-1} V_{GMV} (k_\alpha^2 - Q_2(k_\alpha^2)) - \frac{2V_{GMV}}{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)^2} (Q_3(k_\alpha^2))^2,$$

де

$$Q_1(x) = K(x) \int_0^x \frac{s^*}{\sqrt{x-s^*}} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) ds^*,$$

$$Q_2(x) = K(x) \int_0^x s^* f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) ds^*,$$

$$Q_3(x) = K(x) \int_0^x \sqrt{x-s^*} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) ds^*.$$

Наслідок 5.5. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ . Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$f_{\hat{R}_{CVaR}^*, \hat{V}_{CVaR}^*} (x_1, x_2) = \frac{(n-1)(k_\alpha^2 - s^*)}{V_{GMV} k_\alpha^2 \sqrt{\frac{1+s^*n/(n-1)}{n}} V_{GMV}} f_{n-k} \left(\frac{(n-1)x_2 (k_\alpha^2 - s^*)}{V_{GMV} k_\alpha^2} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^*n/(n-1)}{n} V_{GMV}}} \left(x_1 - R_{GMV} - \frac{s^* \sqrt{x_2}}{k_\alpha} \right) \right],$$

де $\varphi(x)$ густина стандартного нормального розподілу, $f_{n-k}(x)$ густина випадкової величини з χ^2 розподілом та з $n-k$ ступенями вільності.

Наслідок 5.6. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель в момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$f_{\hat{R}_{CVaR}, \hat{V}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2}(x_1, x_2) = \\ = K(k_\alpha^2) \int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{CVaR}, \hat{V}_{CVaR}}(x_1, x_2 | s^*) ds^*,$$

$$\text{де } K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)}, F_{a,b;\lambda}(x) \text{ та } f_{a,b;\lambda}(x)$$

є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ .

Наслідок 5.7. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді $1-\beta$ спільна множина довіри для (R_{CVaR}, V_{CVaR}) дорівнює множині, яка складається з усіх пар точок (R, V) , які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} R \geq g_1(\max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\}, k_\alpha^2) \\ R \leq g_2(\max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\}, k_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(k_\alpha^2) \leq \max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(s_u^*(k_\alpha^2), k_\alpha^2), \text{ при } \max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\} < s_u^*(k_\alpha^2) \leq \min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(\min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\}, k_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(k_\alpha^2) > \min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\} \end{cases}$$

$$\text{та } V \in \left[\frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s_l} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; 1-\beta/2}^2}, \frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s_u} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; \beta/2}^2} \right], \text{ де}$$

$$g_1(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{v-s} z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \sqrt{\frac{V}{v}},$$

$$r_l = v \left(1 - \frac{1}{V} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; \beta/2}^2} \right),$$

$$g_2(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{v-s} z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \sqrt{\frac{V}{v}},$$

$$r_u = v \left(1 - \frac{1}{V} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k; 1-\beta/2}^2} \right),$$

$$s_u^*(v) = v - \frac{z_{1-\beta/2}^2}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right).$$

Наслідок 5.8. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$f_{\hat{R}_{CVaR}, \hat{M}_{CVaR}}(x_1, x_2 | s^*) = \frac{(n-1)\sqrt{k_\alpha^2 - s^*}}{V_{GMV} k_\alpha^2 \sqrt{\frac{n-1}{n} + s^*}} f_{n-k} \left(\frac{\sqrt{n-1}\sqrt{k_\alpha^2 - s^*}}{\sqrt{V_{GMV} k_\alpha^2}} (x_1 + x_2) \right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1+s^*n/(n-1)}{n}} V_{GMV}} \left(\frac{(k_\alpha^2 - s^*)x_1 - s^*x_2}{k_\alpha^2} - R_{GMV} \right) \right],$$

де $\varphi(x)$ – густина стандартного нормального розподілу, $f_{n-k}(x)$ – густина випадкової величини з χ розподілом з $n-k$ ступенями вільності.

Наслідок 5.9. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$\begin{aligned} & f_{\hat{R}_{CVaR}, \hat{M}_{CVaR} | \hat{s} < k_\alpha^2}(x_1, x_2) = \\ & = K(k_\alpha^2) \int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{CVaR}, \hat{M}_{CVaR}}(x_1, x_2 | s^*) ds^*, \end{aligned}$$

$$\text{де } K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)}, F_{a,b;\lambda}(x) \text{ та } f_{a,b;\lambda}(x)$$

є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ .

Наслідок 5.10. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді $1-\beta$ спільна множина довіри для $(R_{CVaR}, M_{CVaR})'$ дорівнює множині, яка складається з усіх пар точок (R, M) , які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} R \geq g_1(\max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\}, k_\alpha^2) \\ R \leq g_2(\max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\}, k_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(k_\alpha^2) \leq \max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(s_u^*(k_\alpha^2), k_\alpha^2), \text{ при } \max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\} < s_u^*(k_\alpha^2) \leq \min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\} \\ R \leq g_2(\min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\}, k_\alpha^2), \text{ при } s_u^*(k_\alpha^2) > \min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\} \end{cases}$$

та

$$\frac{k_\alpha^2}{\sqrt{k_\alpha^2 - \max\{s_l, r_l(k_\alpha^2)\}}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k, 1-\beta/2}^2}} \leq R + M \leq \frac{k_\alpha^2}{\sqrt{k_\alpha^2 - \min\{s_u, r_u(k_\alpha^2)\}}} \sqrt{\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k, \beta/2}^2}},$$

де

$$g_1(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s - \sqrt{v-s} z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R+M}{v},$$

$$g_2(s, v) = \hat{R}_{GMV} + \left(s + \sqrt{v-s} z_{1-\beta/2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1}} \right) \frac{R+M}{v},$$

$$r_l(v) = v \left(1 - \frac{v}{(R+M)^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k, \beta/2}^2} \right),$$

$$r_u(v) = v \left(1 - \frac{v}{(R+M)^2} \frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{\chi_{n-k, 1-\beta/2}^2} \right),$$

$$s_u^*(v) = v - \frac{z_{1-\beta/2}^2}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{\hat{s}}{n-1} \right).$$

Використовуючи дані, використані в попередньому підрозділі, дослідимо поведінку вибіркової оцінки ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем $CVaR$.

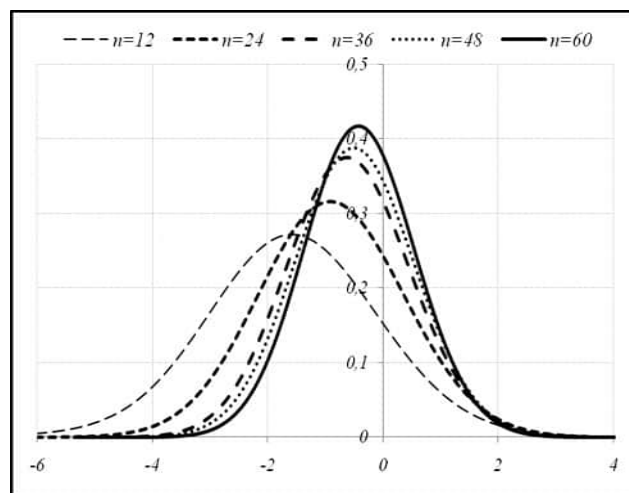
Таблиця 5.7

95 % інтервали довіри для $CVaR$ п'яти портфелів з найменшим рівнем $CVaR$, складених з акцій *Microsoft, JPMorgan Chase, Walt Disney, Boeing, Intel*

	Нижня межа 95 % інтервалу довіри	Верхня межа 95 % інтервалу довіри	Довжина 95 % інтервалу довіри
$n=12$	1.37682	7.26772	5.89090
$n=24$	3.12647	8.09449	4.96802
$n=36$	3.38217	7.55739	4.17522
$n=48$	3.96033	7.99738	4.03705
$n=60$	5.10476	8.84676	3.74200

Джерело: розроблено автором

Результати, отримані в табл. 5.7 та рис 5.9, повністю аналогічні до результатів, отриманих у випадку оцінки ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR .



Джерело: розроблено автором

Рис. 5.9. Густина розподілу випадкової величини $\hat{M}_{CVaR}(n) - M_{CVaR}(n)$ при $n=12, 24, 36, 48, 60$.

З рис. 5.7 та рис. 5.9 бачимо, що математичне сподівання вибіркової оцінки ризику портфелів з найменшим рівнем VaR та $CVaR$ при рівні довіри $\alpha=0.95$ відрізняються від точних значень,

причому ця різниця зменшується зі зростанням обсягу вибірки n . Дослідимо, як відрізняється математичне сподівання вибіркової оцінки очікуваної дохідності та ризику портфелів фінансових активів з найменшим рівнем VaR та $CVaR$ від точного значення при різних рівнях довіри. Для ілюстрації виберемо такі значення для параметрів $R_{GMV}=1.06586$, $V_{GMV}=16.90393$, $s=0.04604$, $n=60$, $k=5$.

На рис. 5.10 представлено точні значення R_{VaR} , M_{VaR} і математичні сподівання вибіркової оцінки цих параметрів залежно від рівня довіри. Відхилення математичного сподівання вибіркової оцінки очікуваної дохідності від точного значення є більшим при низьких значеннях рівня довіри. Зі зростанням α це відхилення стає меншим. Такий результат є очікуваним, оскільки при зростанні рівня довіри, ваги портфеля з найменшим рівнем VaR прямують до ваг портфеля з найменшою дисперсією, а вибіркова оцінка очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією є незміщеною. З іншого боку, для низьких значень рівня довіри ваги портфеля з найменшим рівнем VaR сильно відрізняються від ваг портфеля з найменшою дисперсією і за рахунок того, що вплив похибки оцінювання математичних сподівань для дохідностей є сильнішою, ніж вплив похибки оцінювання дисперсій та коваріацій [62], ми отримуємо, що зміщення оцінки \hat{R}_{VaR} зростає зі зменшенням α . Для зміщення оцінки \hat{M}_{VaR} результат є іншим. Це можна пояснити тим, що оцінка дисперсії портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією є зміщеною [117]. Отже, при високих рівнях довіри зміщення оцінки \hat{M}_{VaR} зростає зі зростанням α (при $\alpha=0.95$ $M(\hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) - M_{VaR} = -0.35511$; при $\alpha=0.99$ $M(\hat{M}_{VaR} | \hat{s} < z_\alpha^2) - M_{VaR} = -0.43698$).

На рис. 5.11 зображено залежність від вибраного рівня зміщення вибіркової оцінки очікуваної дохідності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем $CVaR$ від точних значень. Зауважимо, що зміщення оцінки \hat{R}_{CVaR} зменшується швидше ніж \hat{R}_{VaR} , оскільки $k_\alpha > z_\alpha$.

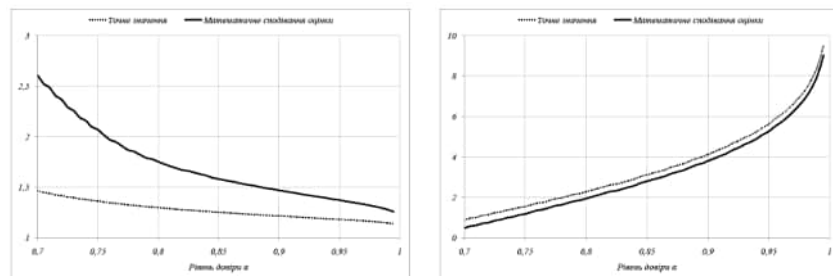


Рис. 5.10. Умовне математичне сподівання оцінок \hat{R}_{VaR} (зліва) та \hat{M}_{VaR} (справа) за умови $\hat{s} < z_{\alpha}^2$ та відповідні їм точні значення при $R_{GMI}=1.06586$, $V_{GMI}=16.90393$, $s=0.04604$, $n=60$, $k=5$.

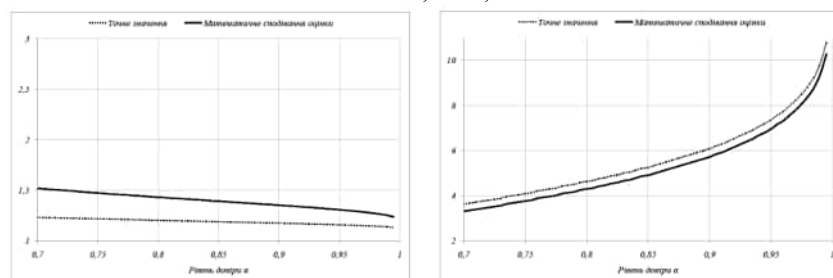


Рис. 5.11. Умовне математичне сподівання оцінок \hat{R}_{CVaR} (зліва) та \hat{M}_{CVaR} (справа) за умови $\hat{s} < k_{\alpha}^2$ та відповідні їм точні значення при $R_{GMI}=1.06586$, $V_{GMI}=16.90393$, $s=0.04604$, $n=60$, $k=5$.

РОЗДІЛ 6

ПОРТФЕЛЬ З МІНІМАЛЬНИМ РІВНЕМ VALUE-AT-RISK ЗА НЕВИКОНАННЯ КЛАСИЧНИХ ПРИПУЩЕНЬ ЩОДО ПОВЕДІНКИ ДОХІДНОСТЕЙ

Властивості вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля за автокорельованих дохідностей

Основними припущеннями класичної теорії Марковіца щодо поведінки дохідностей фінансових активів, з яких складається портфель, є припущення про нормальність їхнього розподілу та неавтокорельованість. На практиці дохідності фінансових активів часто притаманна наявність автокореляції (див. напр. [65], [72], [100], [109]). З іншого боку, для щомісячних дохідностей припущення про нормальність їх розподілу є повністю коректним на практиці [74]. Крім того, в [128] показано, що у більшості випадків використання нормального розподілу не призводить до суттєвих втрат для інвестора. В [86] показано, що використання припущення про нормальний розподіл дохідностей фінансових активів, з яких складено портфель, при обчисленні VaR для щоденних дохідностей індексу S&P 500 дає добре наближення для точних значень. У [68] зазначено, що при можливості використання достатньо великої кількості фінансових активів у портфелі ефект наявності важких хвостів може бути згладжений.

Зважаючи на вищенаведене, нашою метою є дослідження впливу автокорельованості дохідностей фінансових активів на властивості вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Зауважимо, що наявність автокореляції в дохідностях фінансових активів доволі часто

зумовлена впливом держави на фінансовий ринок. Також, при наявності кризових явищ в економіці є тенденція до зростання автокореляції дохідності активів, причому досвід кризи 2008-2009 років показує, що автокореляції навіть можуть досягати значення 0.8. Очевидно, що попередні зауваження є актуальними для економіки нашої держави.

Нехай ми формуємо портфель з k елементів. Позначимо $\mathbf{X}_t=(X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{kt})$ k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких ми формуємо портфель. Припустимо, що вектор \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний гаусівський процес з середнім $M(\mathbf{X}_t)=\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h)=\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена.

Дослідимо спочатку властивості вектора вибіркового оцінок невідомих параметрів розподілу дохідностей. Позначимо $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\Gamma(0))')$ – вектор невідомих параметрів та $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\Gamma}(0))')$ – вибіркова оцінка для $\boldsymbol{\theta}$. Оператор vech визначений для довільної квадратної симетричної матриці $\mathbf{A}=(a_{ij})$ розмірності $k \times k$ та перетворює її на $k(k+1)/2$ вектор за правилом $\text{vech}(\mathbf{A})=(a_{11}, \dots, a_{k1}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{ki}, \dots, a_{kk})'$. Основні властивості матричних операторів описані в [85].

Асимптотичний розподіл вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, за наших припущень щодо поведінки дохідностей фінансових активів, з яких ми формуватимемо портфель, можемо знайти, використовуючи результати наведені в [60], [84], а саме вектор $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ є асимптотично нормально розподілений з середнім $\boldsymbol{\theta}$ та матрицею коваріацій $\boldsymbol{\Omega}$, тобто

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{d} N_{k(k+3)/2}(\mathbf{0}_{k(k+3)/2}, \boldsymbol{\Omega}),$$

де символ \xrightarrow{d} означає збіжність за розподілом, а $\mathbf{0}_m$ – m -вимірний вектор складений з нулів.

Для стаціонарних процесів Гауса матриця $\boldsymbol{\Omega}$ має вигляд [60]

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) & \mathbf{0}_{k \times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2 \times k} & \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

де $\mathbf{0}_{m \times l}$ – нульова матриця розмірності $m \times l$, \mathbf{I}_{k^2} – одинична матриця розмірності $k^2 \times k^2$, $\mathbf{D}_k^+ = (\mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{D}_k'$, \mathbf{D}_k – матриця розмірності $k^2 \times k(k+1)/2$ така, що $\mathbf{D}_k \text{vech} \mathbf{A} = \text{vec} \mathbf{A}$, де \mathbf{A} довільна квадратна симетрична матриця розмірності $k \times k$, оператор vec перетворює довільну $m \times l$ матрицю \mathbf{B} у вектор шляхом перестановки стовпців матриці один під інший, тобто $\text{vec} \mathbf{B} = (b_{11}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{1i}, \dots, b_{mi}, \dots, b_{ml})'$, \mathbf{K}_k – $k^2 \times k^2$ матриця така, що для довільної $k \times k$ матриці \mathbf{C} виконується $\mathbf{K}_k \text{vec} \mathbf{C} = \text{vec} \mathbf{C}'$. Зрозуміло, що припускається, що ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (6.1), є збіжними.

Оскільки ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR є функцією від вектора $\boldsymbol{\theta}$, тобто $\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, то використовуючи дельта-метод твердження 2.1 (див. [60]), отримаємо, що

$$\sqrt{n}(\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} N_k(\mathbf{0}_k, \mathbf{G}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}),$$

де матриця \mathbf{G} розміру $k(k+3)/2 \times k(k+3)/2$ складена з часткових похідних функції \mathbf{f} по вектору параметрів $\boldsymbol{\theta}$, тобто $\mathbf{G} = (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu}, \partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0)))'$. Для спрощення подальших викладок введемо позначення

$$a_1 = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}, \quad a_2 = V_{GMV} - a_1 R_{GMV}, \quad \mathbf{v}'_1 = -a_1 \frac{R_{GMV}}{z_\alpha^2 - s} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} - a_1 \mathbf{w}'_{GMV}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{a_1}{2(z_\alpha^2 - s)} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R},$$

$$\mathbf{v}'_3 = (a_1 R_{GMV} - V_{GMV}) \mathbf{w}'_{GMV} + \frac{a_1}{2} \left(\frac{R_{GMV}^2}{z_\alpha^2 - s} - V_{GMV} \right) \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}, \quad (6.3)$$

$$q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \mathbf{b}, \quad \mathbf{Q}_h(\mathbf{a}) = \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \mathbf{a}, \quad \mathbf{tQ}_h(\mathbf{a}) = \mathbf{a}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma'(h) \Gamma(0)^{-1} \quad (6.4)$$

де \mathbf{a} та \mathbf{b} довільні k -вимірні вектори.

У наступній лемі знайдено похідні $\mathbf{G} = (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu}, \partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0)))'$.

Лема 6.1. Нехай $\theta = (\mu', \text{vech}(\Gamma(0)))'$ та $\mathbf{f}(\theta) = \mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\mu$, де \mathbf{w}_{GMV} задано рівніс-

тю (1.7), V_{GMV} – (1.9), $\mathbf{R} = \Gamma(0)^{-1} - \frac{\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}$,

$s = \mu' \mathbf{R} \mu$, тоді

$$\partial \mathbf{f}(\theta) / \partial \mu = a_1 \mathbf{R} + 2v_2 \mu' \mathbf{R},$$

$$\partial \mathbf{f}(\theta) / \partial (\text{vech} \Gamma(0)) = \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \times$$

$$\times (a_1 (\mu \otimes \mathbf{I}_k) + a_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \mu) \mathbf{v}'_1 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{v}'_3 + (\mu \otimes \mu) \mathbf{v}'_2).$$

Доведення. Враховуючи, що ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR залежать від ваг та характеристик портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією \mathbf{w}_{GMV} (1.7), V_{GMV} (1.9), $\mathbf{R} = \Gamma(0)^{-1} - \frac{\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}$, $s = \mu' \mathbf{R} \mu$, які відповідно є теж функціями від θ та використовуючи правила матричного диференціального числення [85], отримаємо

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \mu &= \partial \mathbf{w}'_{GMV} / \partial \mu + \partial \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\mu \right) / \partial \mu = \\ &= \mathbf{0} + \sqrt{V_{GMV}} \partial \left(\frac{\mu' \mathbf{R}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) / \partial \mu = \sqrt{V_{GMV}} \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s} \frac{\partial \mu' \mathbf{R}}{\partial \mu} - \frac{\partial \sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\partial \mu} \mu' \mathbf{R}}{z_\alpha^2 - s} = \\ &= \sqrt{V_{GMV}} \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s} \mathbf{R} + \frac{1}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R} \mu \mu' \mathbf{R}}{z_\alpha^2 - s}. \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial (\text{vech} \Gamma(0)) &= \partial \mathbf{w}'_{GMV} / \partial (\text{vech} \Gamma(0)) + \frac{\partial \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\mu \right)'}{\partial (\text{vech} \Gamma(0))} = \\ &= \partial \mathbf{w}'_{GMV} / \partial (\text{vech} \Gamma(0)) + \frac{\partial \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right)}{\partial (\text{vech} \Gamma(0))} \mu' \mathbf{R} + \frac{\partial (\mu' \mathbf{R})}{\partial (\text{vech} \Gamma(0))} \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}. \end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{w}'_{GMV} / \partial (\text{vech} \Gamma(0)) &= \frac{1}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}} \frac{\partial \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} - \frac{1}{(\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})^2} \frac{\partial \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} = \\ &= \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \left(\frac{\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}} - \frac{(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})^2} \right) = \\ &= \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \left((\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) V_{GMV} - (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{w}'_{GMV} V_{GMV} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \frac{\partial (\mu' \mathbf{R})}{\partial (\text{vech} \Gamma(0))} &= \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(\frac{\partial \mu' \Gamma(0)^{-1}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} - \frac{\partial \left(\frac{\mu' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}} \right)}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(\frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} (\mu \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{1}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}} \frac{\partial (\mu' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1})}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})^2} \frac{\partial (\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} (\mu' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(\frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \left((\mu \otimes \mathbf{I}_k) + \frac{(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) (\mu' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1})}{(\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1})^2} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \frac{\partial(\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \mathbf{1}\Gamma(0)^{-1} - \frac{\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \frac{\partial(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1})}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \Big) = \\
& = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(-\frac{\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + \right. \\
& \left. + \frac{\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1} + (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \right) = \\
& = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(-R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \right. \\
& \left. + (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{w}'_{GMV} \right), \\
& \frac{\partial\left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\right)}{\partial(\text{vech}\Gamma(0))} = \frac{1}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \frac{\partial\sqrt{V_{GMV}}}{\partial(\text{vech}\Gamma(0))} - \frac{1}{z_\alpha^2 - s} \frac{\partial\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\partial(\text{vech}\Gamma(0))} \sqrt{V_{GMV}} = \\
& = \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{z_\alpha^2 - s} \frac{1}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \frac{\partial s}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} = \\
& = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(-\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}} V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \right).
\end{aligned}$$

Ми використали, що $\frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})$.

Отже, ми отримали

$$\partial\mathbf{w}'_{var}/\partial\boldsymbol{\mu} = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}$$

та

$$\begin{aligned}
& \partial\mathbf{w}'_{var}/\partial(\text{vech}\Gamma(0)) = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(\frac{\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} - \frac{(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{z_\alpha^2 - s} \frac{1}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2\frac{\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \frac{(\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R} - \right. \\
& \left. - \frac{V_{GMV}^{3/2}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(-\frac{\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\boldsymbol{\mu}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1})^2} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1} + (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}\Gamma(0)^{-1}\mathbf{1}} \right) \right) = \\
& = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R} - \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}}{(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R} + \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}^2}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R} - \frac{V_{GMV}^{3/2}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\boldsymbol{\mu}'\mathbf{R} + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{w}'_{GMV} - \right. \\
& \left. - \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) - \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{w}'_{GMV} \right) = \\
& = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}\Gamma(0)} \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + \left(V_{GMV} - \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{w}'_{GMV} - V_{GMV} \mathbf{w}'_{GMV} - \frac{V_{GMV}^{3/2}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}^2}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \right) + \\
& +(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) \left(-\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{w}'_{GMV} - \frac{\sqrt{V_{GMV}} R_{GMV}}{(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \right) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Використовуючи позначення (6.2)-(6.3) отримаємо твердження леми.

Теорема 6.1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний гаусівський процес із середнім $\mathbf{M}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma} = \Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (6.1), є збіжними, $s < z_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n} (\hat{\mathbf{w}}'_{VaR} - \mathbf{w}'_{VaR}) \xrightarrow{d} N_k(\mathbf{0}_k, \boldsymbol{\Omega}_{VaR}),$$

де

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}_{VaR} = & a_1^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} + 4 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \Gamma(h) \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + \\
& + 2a_1 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + 2a_1 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \Gamma(h) \mathbf{R} + \\
& + \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \left((a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_1 a_2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} + \right. \\
& + (a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + (a_1 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_1 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) + \\
& + 2(a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})) \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_2 + 2(a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_2 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) + \\
& \left. + 2(a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \mathbf{v}'_3 + 2(a_1 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_3 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) + \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})) \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \mathbf{v}'_1 + (a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_1 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) + \\
& + a_1^2 (\mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu})) + a_1 a_2 (\mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1})) + \\
& + a_1 a_2 (\mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu})) + a_2^2 (\mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1})) + \\
& + (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_1 + 2q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_3 + \\
& + 2q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_1 + 2q_h^2(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_2 + 2q_h^2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_3 + 2q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 + \\
& + 2q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_1 + 2q_h^2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_2 + 2q_h^2(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_3).
\end{aligned}$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо позначення (6.2)-(6.4), лему 6.1, рівність [85]

$$\partial(\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))' / \partial(\text{vech}(\Gamma(0))) = -\mathbf{D}'_k (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k,$$

та той факт, що

$$\mathbf{G}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2,$$

де

$$\mathbf{S}_1 = (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu})' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu}),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_2 = & (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0)))' \mathbf{D}'_k (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}'_k \\
& (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))).
\end{aligned}$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 = & (a_1 \mathbf{R} + 2\mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R})' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) (a_1 \mathbf{R} + 2\mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}) = \\
& = a_1^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} + 4 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \Gamma(h) \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + \\
& + 2a_1 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + 2a_1 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \Gamma(h) \mathbf{R}. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

З властивостей матриць (для довільної квадратної матриці \mathbf{A} розміру $k \times k$) [105] $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) = \mathbf{N}_k$, $\mathbf{N}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{N}_k$, $\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_k^2 = \mathbf{N}_k'$, $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_k = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\mathbf{D}_k$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \mathbf{N}_k \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \\ & \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' = \\ & = (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{N}_k \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}). \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що для довільних k -вимірних векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} і для довільної $k \times k$ матриці \mathbf{A} справедливими є наступні рівності $\mathbf{K}_k(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$, $\mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{A})$, $\mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$ та використовуючи прості алгебраїчні перетворення, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_2 & = (a_1(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_3) \times \\ & \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \times \\ & \times (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' \times \\ & \times (a_1(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_3) = \\ & = (a_1(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_3)' \times \\ & \times (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1}) \right) \times \\ & \times (a_1(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_3) = \\ & = (a_1(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_1(\mathbf{I}_k \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{1}) + \\ & + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_1 + 2(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_2 + 2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_3)' \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1}) \right) \times \\ & \times (a_1(\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})\mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\mathbf{v}'_3) = \\ & = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \left((a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_1 a_2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} + \right. \\ & + (a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + (a_1 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_1 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) + \\ & + 2(a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})) \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_2 + 2(a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_2 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) + \\ & + 2(a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \mathbf{v}'_3 + 2(a_1 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_3 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) + \\ & + (a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})) \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \mathbf{v}'_1 + (a_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_1 \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) + \\ & + a_1^2 (\mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu})) + a_1 a_2 (\mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1})) + \\ & + a_1 a_2 (\mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\boldsymbol{\mu})) + a_2^2 (\mathbf{Q}_h(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{t} \mathbf{Q}_h(\mathbf{1})) + \\ & + (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_1 + 2q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_3 + \\ & + 2q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_1 + 2q_h^2(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_2 + 2q_h^2(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_3 + 2q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 + \\ & \left. + 2q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_1 + 2q_h^2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_2 + 2q_h^2(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_3 \right). \quad (6.6) \end{aligned}$$

Склавши разом (6.5) та (6.6), отримаємо твердження теореми.

■ *Зауваження 6.1.* Як було зазначено вище, портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR може бути побудований тоді і лише тоді, коли виконується умова $s < z_\alpha^2$. Проте виконання цієї умови не забезпечує загалом виконання умови $\hat{s} < z_\alpha^2$, тобто навіть якщо точне значення параметра s є меншим за z_α^2 , то значення випадкової оцінки \hat{s} може бути більшим за z_α^2 [17]. Отже, вибіркова оцінка ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не завжди є коректна. Оскільки нашим завданням є дослідження асимптотичних властивостей вибіркової оцінки ваг портфеля, то

не важко показати, що асимптотично умова $\hat{s} < z_\alpha^2$ виконується з імовірністю 1, за умови виконання $s < z_\alpha^2$. Оскільки параметр s також, як і ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR, є функцією від вектора θ , то вибіркова оцінка \hat{s} за наших припущень стосовно поведінки доходностей активів, з яких ми формуємо портфель, є асимптотично нормально розподілена з середнім s та дисперсією σ/\sqrt{n} , тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\hat{s} < z_\alpha^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{n} \frac{\hat{s} - s}{\sigma} < \sqrt{n} \frac{z_\alpha^2 - s}{\sigma}\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\sqrt{n} \frac{z_\alpha^2 - s}{\sigma}\right) = 1.$$

■ *Зауваження 6.2.* У теоремі 6.1 ми знайшли безумовний розподіл вибіркової оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR. З огляду на попереднє зауваження, інформативнішим буде умовний розподіл за виконання умови $\hat{s} < z_\alpha^2$. Проте, з огляду на зауваження 1 та на властивість неперервності імовірності, ці два розподіли збігатимуться. Справді

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) | 0 < \hat{s} < z_\alpha^2}(\mathbf{y}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) | -\sqrt{ns} < \sqrt{n}(\hat{s} - s) < \sqrt{n}(z_\alpha^2 - s)}(\mathbf{y}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P\left(\left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap B_n\right)}{P(B_n)}, \end{aligned}$$

де $B_n = \{-\sqrt{ns} < \sqrt{n}(\hat{s} - s) < \sqrt{n}(z_\alpha^2 - s)\}$ є зростаючою послідовністю інтервалів такою, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ збігається зі всім імовірнісним простором. Оскільки, крім цього, маємо, що

$$\left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap B_n \subset \left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap B_{n+1}$$

і

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap B_n &= \left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \\ &= \left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\}, \end{aligned}$$

то, використавши властивість неперервності імовірності, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap B_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\} \cap B_n\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\}\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) | 0 < \hat{s} < z_\alpha^2}(\mathbf{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left\{\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_{VaR}) \leq \mathbf{y}\right\}\right),$$

що доводить справедливість зауваження 6.2.

Наступним кроком нашого дослідження є встановлення розподілу вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR.

Позначимо вектори $\mathbf{V}_1 = (R_{VaR}, V_{VaR})'$ та $\mathbf{V}_2 = (R_{VaR}, M_{VaR})'$. Зауважимо, що ці вектори можна представити у вигляді функцій від θ , тобто $\mathbf{V}_1 = \mathbf{f}_1(\theta)$ та $\mathbf{V}_2 = \mathbf{f}_2(\theta)$. З дельта-методу [60] отримаємо, що

$$\sqrt{n}(\mathbf{f}_1(\hat{\theta}) - \mathbf{f}_1(\theta)) \xrightarrow{d} N_2(\mathbf{0}_2, \mathbf{G}'_1 \Omega \mathbf{G}_1),$$

$$\sqrt{n}(\mathbf{f}_2(\hat{\theta}) - \mathbf{f}_2(\theta)) \xrightarrow{d} N_2(\mathbf{0}_2, \mathbf{G}'_2 \Omega \mathbf{G}_2),$$

де матриці \mathbf{G}_1 та \mathbf{G}_2 мають розмірність $2 \times k(k+3)/2$ та складені з часткових похідних функцій \mathbf{f}_1 та \mathbf{f}_2 відповідно по вектору параметрів θ , тобто $\mathbf{G}_i = (\partial \mathbf{V}_i / \partial \boldsymbol{\mu}, \partial \mathbf{V}_i / \partial \text{vech}(\Gamma(0)))'$.

Теорема 6.2. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо,*

що $\Sigma = \Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, які входять у вираз для Ω (6.1), є збіжними, $s < z_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{V}_{VaR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ V_{VaR} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{a}_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4\tilde{a}_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \right. \\ &\quad + 2\tilde{a}_3^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2\tilde{a}_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\ &\quad + 2\tilde{a}_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \tilde{a}_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad \left. + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \tilde{a}_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right), \\ \sigma_2^2 &= V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(4b_1^2 \left(q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \right) + \right. \\ &\quad + 2b_3^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2b_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2b_1 b_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2b_1 b_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\ &\quad + 2b_2 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2b_2 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + b_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad \left. + 2b_1 b_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2b_1 b_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + b_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right), \\ \sigma_{12} &= V_{GMV}^{3/2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(2b_1 \left(\left(2\tilde{a}_1 R_{GMV}^2 - R_{GMV} \sqrt{V_{GMV}} \right) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\tilde{a}_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \left(\sqrt{V_{GMV}} - 2\tilde{a}_1 R_{GMV} \right) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - 2\tilde{a}_1 R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right) + \right. \\ &\quad + 2\tilde{a}_3 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2\tilde{a}_1 b_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2b_1 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 b_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\ &\quad + 2b_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \tilde{a}_2 b_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad + 2b_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 b_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + b_2 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad \left. + (2\tilde{a}_3 b_1 + 2\tilde{a}_1 b_3 + \tilde{a}_2 b_2) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + (2\tilde{a}_3 b_2 + 2\tilde{a}_2 b_3) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right) \end{aligned}$$

$$+ \tilde{a}_2 b_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + (2\tilde{a}_1 b_2 + 2\tilde{a}_2 b_1) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}),$$

$$b_1 = \frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s)^2}, \quad b_2 = -2b_1 R_{GMV}, \quad b_3 = b_1 \left(R_{GMV}^2 - (z_\alpha^2 - s) V_{GMV} \right),$$

$$\tilde{a}_1 = \frac{2z_\alpha^2 - s}{2(z_\alpha^2 - s)^{3/2}}, \quad \tilde{a}_2 = \sqrt{V_{GMV}} - 2\tilde{a}_1 R_{GMV},$$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}_1 R_{GMV}^2 - R_{GMV} \sqrt{V_{GMV}} - \frac{s}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} V_{GMV}$$

та функція $q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \mathbf{b}$ задана в (6.4).

Доведення. З правил матричного диференціального числення [85] та, враховуючи (1.8)-(1.9), маємо

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{w}_{GMV}, \quad \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}_k, \quad \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 2\mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \frac{\partial (\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \left(V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right),$$

$$\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \frac{\partial (\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \left(-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right),$$

$$\frac{\partial s}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \frac{\partial (\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right),$$

$$\partial (\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))' / \partial (\text{vech}(\Gamma(0))) = -\mathbf{D}'_k \left(\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \right) \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k.$$

Використовуючи правила диференціювання, отримаємо

$$\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{\partial \sqrt{V_{GMV}}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} + \frac{\partial \left(\frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right)}{\partial \boldsymbol{\mu}} \sqrt{V_{GMV}} =$$

$$= \mathbf{w}_{GMV} + 2\tilde{a}_1 \sqrt{V_{GMV}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} &= \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} + \frac{\partial \sqrt{V_{GMV}}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} + \frac{\partial \left(\frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right)}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \sqrt{V_{GMV}} = \\ &= \frac{\partial (\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \sqrt{V_{GMV}} (\tilde{a}_1 (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \tilde{a}_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \tilde{a}_3 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})). \end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо

$$\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s} + \frac{\partial \left(\frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s} \right)}{\partial \boldsymbol{\mu}} V_{GMV} = 2b_1 V_{GMV} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} &= \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s} + \frac{\partial \left(\frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s} \right)}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} V_{GMV} = \\ &= \frac{\partial (\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} V_{GMV} (b_1 (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_3 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})). \end{aligned}$$

Оскільки $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}'_1 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_1$, то

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k'^+ \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k'^+ \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right), \\ \sigma_{12} &= \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k'^+ \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\mathbf{w}'_{GMV} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} = V_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

$$\mathbf{w}'_{GMV} \Gamma(h) \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} = V_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

і

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

отримаємо

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \\ &= V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left((V_{GMV} - 4\tilde{a}_1 R_{GMV} \sqrt{V_{GMV}} + 4\tilde{a}_1^2 R_{GMV}^2) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4\tilde{a}_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &+ 2\tilde{a}_1 (\sqrt{V_{GMV}} - 2a_1 R_{GMV}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 (\sqrt{V_{GMV}} - 2a_1 R_{GMV}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) = \\ &= V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\tilde{a}_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4\tilde{a}_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = 4b_1^2 V_{GMV}^2 (\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) (\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}) = \\
& = 4b_1^2 V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = \\
& = 4b_1^2 V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})), \\
& \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \\
& = 2b_1 V_{GMV} (\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) (\mathbf{w}_{GMV} + 2\tilde{a}_1 \sqrt{V_{GMV}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}) = \\
& = 2b_1 V_{GMV}^{3/2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left((2\tilde{a}_1 R_{GMV}^2 - R_{GMV} \sqrt{V_{GMV}}) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \right. \\
& \left. + 2\tilde{a}_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + (\sqrt{V_{GMV}} - 2\tilde{a}_1 R_{GMV}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - 2\tilde{a}_1 R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right).
\end{aligned}$$

Враховуючи, що для довільної квадратної матриці \mathbf{A} розміру $k \times k$ виконується $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) = \mathbf{N}_k$, $\mathbf{N}_k (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{N}_k$, $\mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{D}_k = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{D}_k$, $\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_k^2 = \mathbf{N}_k'$, отримаємо

$$\begin{aligned}
& \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \mathbf{N}_k \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' = \\
& (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' = \\
& = (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \mathbf{N}_k \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}).
\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи, що для довільних k -вимірних векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} і для довільної $k \times k$ матриці \mathbf{A} справедливими є наступні рівності $\mathbf{K}_k(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$, $\mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{A})$, $\mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})$ маємо

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \mathbf{D}_k' \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right) = \\
& = V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2\tilde{a}_3^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2\tilde{a}_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\
& + 2\tilde{a}_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \tilde{a}_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\
& + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \tilde{a}_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})), \\
& \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \mathbf{D}_k' \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right) = \\
& = V_{GMV}^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2b_3^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2b_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2b_1 b_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2b_1 b_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\
& + 2b_2 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2b_2 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + b_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\
& + 2b_1 b_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2b_1 b_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + b_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})), \\
& \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \mathbf{D}_k' \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0)} \right) = \\
& = V_{GMV}^{3/2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2\tilde{a}_3 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2\tilde{a}_1 b_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2b_1 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 b_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\
& + 2b_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 b_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \tilde{a}_2 b_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\
& + 2b_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 b_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + b_2 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})).
\end{aligned}$$

Підставивши відповідні доданки та згрупувавши вирази отримаємо твердження теореми.

У теоремі 6.2 знайдено спільний розподіл вибіркового оцінок очікуваної дохідності та дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . На практиці інвестора більше цікавить взаємозв'язок оцінок очікуваної дохідності та ризику портфеля. Це питання висвітлено у наступній теоремі.

Теорема 6.3. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Sigma = \Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, які входять у вираз для Ω (6.1), є збіжними, $s < z_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{M}_{VaR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ M_{VaR} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_3^2 &= V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (c_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4c_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 c_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 c_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \\ &+ 2c_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2c_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2c_1 c_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2c_1 c_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\ &+ 2c_2 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_2 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + c_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\ &+ 2c_1 c_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 c_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + c_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})), \\ \sigma_{13} &= V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (4\tilde{a}_1 c_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 c_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 c_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \\ &+ (-V_{GMV} - 2(c_1 - \tilde{a}_1) \sqrt{V_{GMV}} R_{GMV} + 4\tilde{a}_1 c_1 R_{GMV}^2) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \\ &+ 2\tilde{a}_3 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2\tilde{a}_1 c_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2c_1 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 c_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \\ &+ 2c_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \tilde{a}_2 c_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \\ &+ 2c_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 c_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + c_2 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})), \\ c_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}}, \quad c_2 = -\sqrt{V_{GMV}} - 2c_1 R_{GMV}, \end{aligned}$$

$$c_3 = c_1 R_{GMV}^2 + R_{GMV} \sqrt{V_{GMV}} - \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2} V_{GMV}.$$

Доведення. Маємо

$$\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = -\mathbf{w}_{GMV} + 2c_1 \sqrt{V_{GMV}} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu},$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} &= -\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} + \frac{\partial \sqrt{V_{GMV}}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \sqrt{z_\alpha^2 - s} + \frac{\partial (\sqrt{z_\alpha^2 - s})}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \sqrt{V_{GMV}} = \\ &= \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \sqrt{V_{GMV}} (c_1 (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + c_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + c_3 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})). \end{aligned}$$

Оскільки $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \mathbf{G}'_1 \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G}_1$, то

$$\begin{aligned} \sigma_3^2 &= \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right), \\ \sigma_{13} &= \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right). \end{aligned}$$

Отримаємо

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \\
& = V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\left(V_{GMV} + 4c_1 R_{GMV} \sqrt{V_{GMV}} + 4c_1^2 R_{GMV}^2 \right) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4c_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\
& \left. + 2c_1 \left(-\sqrt{V_{GMV}} - 2c_1 R_{GMV} \right) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 \left(-\sqrt{V_{GMV}} - 2c_1 R_{GMV} \right) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \right) = \\
& = V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(c_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4c_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 c_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 c_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \right),
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \\
& = V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(4\tilde{a}_1 c_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 c_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 c_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \right. \\
& \left. + \left(-V_{GMV} - 2(c_1 - \tilde{a}_1) \sqrt{V_{GMV}} R_{GMV} + 4\tilde{a}_1 c_1 R_{GMV}^2 \right) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \right).
\end{aligned}$$

Нарешті

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^{+'} \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right) = \\
& = V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(2c_3^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2c_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2c_1 c_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2c_1 c_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \right. \\
& \left. + 2c_2 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_2 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + c_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\
& \left. + 2c_1 c_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2c_1 c_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + c_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right), \\
& \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^{+'} \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = V_{GMV} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(2\tilde{a}_3 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + 2\tilde{a}_1 c_1 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2c_1 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2\tilde{a}_1 c_3 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + \right. \\
& \left. + 2c_2 \tilde{a}_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_2 c_3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \tilde{a}_2 c_2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\
& \left. + 2c_1 \tilde{a}_2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\tilde{a}_1 c_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + c_2 \tilde{a}_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right).
\end{aligned}$$

Склавши відповідні вирази разом, отримаємо твердження теореми.

■ *Зауваження 6.3.* Аналогічно до зауваження 6.2, не важко показати, що умовні розподіли випадкових векторів $\mathbf{V}_1 = (R_{VaR}, V_{VaR})'$ та $\mathbf{V}_2 = (R_{VaR}, M_{VaR})'$ за умови, що $\hat{s} < z_\alpha^2$ збігаються з безумовними знайденими в теоремах 6.2 та 6.3 відповідно.

Результати, отримані в теоремах 6.2 та 6.3, дають змогу інвестору точніше планувати свою фінансову діяльність при наявності автокореляцій у дохідностях активів, що включені в його портфель. З одного боку, на основі результатів теорем 6.2 та 6.3 неважко побудувати інтервали довіри для кожної з характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR зокрема. Більше того, можливо побудувати множини довіри для пар характеристик очікувана дохідність-дисперсія та очікувана дохідність- VaR . Також інвестор у будь-який момент часу має змогу протестувати чи отримані значення характеристик портфеля статистично суттєво відрізняються від бажаних значень, причому в тестах можливо врахувати взаємозв'язок між різними характеристиками портфеля.

6.2. Властивості вибірових оцінок ваг та характеристик портфеля за наявності важких хвостів у розподілах дохідностей

Розглянемо властивості вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR у випадку, коли порушено припущення класичної теорії портфеля щодо нормальності розподілу дохідностей активів, з яких складено порт-

фель. Ми припускаємо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл.

k -вимірний випадковий вектор \mathbf{Y} має багатовимірний еліптичний розподіл, якщо його характеристична функція має вигляд:

$$M(\exp(i\mathbf{x}'\mathbf{Y})) = \exp(i\boldsymbol{\mu}'\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}) \text{ для } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \quad (6.7)$$

де $\mathbf{D} = \boldsymbol{\Sigma}/\gamma^2$, $\gamma = (-\psi'(0)/2)^{1/2}$ та функція ψ називається характеристичним генератором еліптичного розподілу. Такий клас розподілів включає в себе широке коло розподілів, що часто використовуються на практиці, серед яких багатовимірний нормальний розподіл, багатовимірний t -розподіл, багатовимірний розподіл Лапласа та багатовимірний стійкий симетричний розподіл. Розподіли з класу багатовимірних еліптичних розподілів часто використовуються у фінансовій літературі (див. напр. [47], [61], [67], [81]).

Нашим завданням є дослідити розподіли вибірових оцінок ваг та характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за умови, що вектор дохідностей фінансових активів, з яких складено портфель, має багатовимірний еліптичний розподіл та його елементи є неавтокорельованими.

Зазначимо, що за нашого припущення задача вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR матиме вигляд:

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = \frac{d_\alpha}{\gamma} \sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1, \quad (6.8)$$

де d_α – є α квантилю випадковою величини $\frac{\mathbf{I}'\mathbf{X} - \mathbf{I}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{I}'\mathbf{D}\mathbf{I}}}$ для деякого

вектора $\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$, та не залежить від вибору \mathbf{I} [75]. Зважаючи на це, ваги та характеристики портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR матимуть вигляд:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad (6.9)$$

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}}, \quad (6.10)$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_{VaR} = \frac{\tilde{d}_\alpha^2}{\tilde{d}_\alpha^2 - s} V_{GMV}, \quad (6.11)$$

$$M_{VaR} = \sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \quad (6.12)$$

де $\tilde{d}_\alpha = \frac{d_\alpha}{\gamma}$. Аналогічно зміняться і вирази для вибірових оцінок

ваг та характеристик портфеля.

Як і в попередньому розділі ми розглянемо вибірові оцінки ваг та характеристик портфеля як функції вектора $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))'$. Використовуючи результати [81], [113], отримаємо, що при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu} \\ \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) - \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}),$$

де

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0}_{k \times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2 \times k} & \frac{\psi''(0)}{(\psi'(0))^2} \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Розглянувши ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR як функцію від вектора $\boldsymbol{\theta}$, тобто $\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, отримаємо, що

$$\sqrt{n} (\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{d} N_k(\mathbf{0}_k, \mathbf{G}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{G}),$$

де матриця $\mathbf{G} = (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu}, \partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))'$.

Позначимо, аналогічно до (6.2)-(6.3),

$$a_1 = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}}, \quad a_2 = V_{GMV} - a_1 R_{GMV}, \quad \mathbf{v}'_1 = a_1 \frac{R_{GMV}}{\tilde{d}_\alpha^2 - s} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} - a_1 \mathbf{w}'_{GMV}, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{v}'_2 = -\frac{a_1}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R},$$

$$\mathbf{v}'_3 = (a_1 R_{GMV} - V_{GMV}) \mathbf{w}'_{GMV} - \frac{a_1}{2} \left(\frac{R_{GMV}^2}{\tilde{d}_\alpha^2 - s} + V_{GMV} \right) \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}, \quad (6.15)$$

Теорема 6.4. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} (\hat{\mathbf{w}}'_{VaR} - \mathbf{w}'_{VaR}) \xrightarrow{d} N_k(\mathbf{0}_k, \boldsymbol{\Omega}_{VaR}),$$

де

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_{VaR} = & a_1^2 \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} + 4 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + 2 a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} + 2 a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + \\ & + \frac{\psi''(0)}{(\psi'(0))^2} \left((a_1^2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + 2 a_1 a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \right. \\ & + (a_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + 2 (a_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + 2 (a_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{v}'_3 + \mathbf{v}_3 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + (a_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + a_1^2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + a_1 a_2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \\ & + a_1 a_2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + a_2^2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \\ & + ((\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_1 + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_3 + \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_1) + \\ & + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_3) + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_1) + \\ & + 2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_2 + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_3 \Big), \end{aligned}$$

де $a_1, a_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3$ задані в (6.14)-(6.15).

Доведення. Доведення є аналогічним до доведення теореми 6.1. Маємо

$$\mathbf{G}' \boldsymbol{\Omega} \mathbf{G} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2,$$

де

$$\mathbf{S}_1 = (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu}),$$

$$\mathbf{S}_2 = (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}))' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k' (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})).$$

З леми 1 отримаємо,

$$\mathbf{S}_1 = (a_1 \mathbf{R} + 2 \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R})' \boldsymbol{\Sigma} (a_1 \mathbf{R} + 2 \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}) =$$

$$= a_1^2 \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} + 4 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + 2 a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} + 2 a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}.$$

Використавши міркування аналогічні як при доведенні теореми 6.1, отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_2 = & (a_1 (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{v}'_3)' \times \\ & \frac{\psi''(0)}{(\psi'(0))^2} \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k' \mathbf{D}_k' \times \\ & \times (a_1 (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}_k) + a_2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{I}_k) + (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{v}'_2 + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \mathbf{v}'_3) = \\ = & \frac{\psi''(0)}{(\psi'(0))^2} \left((a_1^2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + 2 a_1 a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \right. \\ & + (a_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + 2 (a_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + 2 (a_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{v}'_3 + \mathbf{v}_3 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + (a_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + a_1^2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + a_1 a_2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \\ & + a_1 a_2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + a_2^2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})(\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2 \right) \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1' + 2(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3' + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1') + \\
& + 2(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2 (\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3') + 2(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1') + \\
& + 2(\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2 \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2' + 2(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1})^2 \mathbf{v}_3\mathbf{v}_3'.
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Перед тим як дослідити розподіл вибіркового оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR доведемо наступну лему.

Лема 6.2. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор доходностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7) та доходності не є автокорельованими. Припустимо, що Σ є додатно визначена. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \right),$$

$$\begin{aligned}
\text{де } R_{GMV} &= \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}, \quad V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{R} = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}, \\
\lambda &= \psi''(0)/(\psi'(0))^2.
\end{aligned}$$

Доведення. З доведення теореми 6.2 маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \mathbf{w}_{GMV}, \quad \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}_k, \quad \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 2\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \\
\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} &= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} (V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV}V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} (-V_{GMV}^2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})),$$

$$\frac{\partial s}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})),$$

$$\partial(\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))' / \partial(\text{vech}(\Gamma(0))) = -\mathbf{D}'_k (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}'_k.$$

Використовуючи дельта-метод [60], отримаємо,

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= ((\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma))) \Omega((\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma)))', \\
\sigma_{12} &= ((\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma))) \Omega((\partial V_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma)))', \\
\sigma_{13} &= ((\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma))) \Omega((\partial s/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s/\partial(\text{vech}\Sigma)))', \\
\sigma_2^2 &= ((\partial V_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma))) \Omega((\partial V_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma)))', \\
\sigma_{23} &= ((\partial V_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma))) \Omega((\partial s/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s/\partial(\text{vech}\Sigma)))', \\
\sigma_3^2 &= ((\partial s/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s/\partial(\text{vech}\Sigma))) \Omega((\partial s/\partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s/\partial(\text{vech}\Sigma)))'.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= (\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu})' \Sigma (\partial R_{GMV}/\partial \boldsymbol{\mu}) + \\
& + \lambda (\partial R_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma))' \mathbf{D}'_k (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\Sigma \otimes \Sigma) \mathbf{D}_k^+ (\partial R_{GMV}/\partial(\text{vech}\Sigma)) = \\
& = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} + \lambda (V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV}V_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \left(\frac{\partial(\text{vec}\Sigma^{-1})'}{\partial \text{vech}\Sigma} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = V_{GMV} + \lambda (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) \times \\
& \times \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k^+ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k^+ \times \\
& \times (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})).
\end{aligned}$$

Використавши властивості матриць (див. доведення теореми 6.1), отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_1^2 &= V_{GMV} + \lambda (V_{GMV} (\mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{\mu}') - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}')) \times \\
& \times (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = V_{GMV} + \lambda (V_{GMV} (\mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{\mu}') - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}')) \times \\
& \times (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) + \\
& + \lambda (V_{GMV} (\mathbf{1}' \otimes \boldsymbol{\mu}') - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}')) \times \\
& \times (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (V_{GMV} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = V_{GMV} + \lambda (V_{GMV}^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + R_{GMV}^2 V_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 - \\
& - 2R_{GMV} V_{GMV}^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) + \lambda (V_{GMV}^2 \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 + R_{GMV}^2 V_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 - \\
& - 2R_{GMV} V_{GMV}^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) = V_{GMV} + \lambda \left(\frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} - \left(\frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \right)^2 \right) = \\
& = V_{GMV} + \lambda s V_{GMV}.
\end{aligned}$$

Аналогічно для σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} , σ_2^2 та σ_3^2 , отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_2^2 &= (\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu}) + \\
& + \lambda (\partial V_{GMV} / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma}))' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ (\partial V_{GMV} / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma})) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \lambda (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \left(\frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} \right) \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = \lambda (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \otimes \mathbf{1}')) (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = \lambda 2V_{GMV}^4 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 = 2\lambda V_{GMV}^2. \\
\sigma_3^2 &= (\partial s / \partial \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\partial s / \partial \boldsymbol{\mu}) + \\
& + \lambda (\partial s / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma}))' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ (\partial s / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma})) = \\
& = 4\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \lambda (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}))' \left(\frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} \right) \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
& = 4s + \lambda (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) \times \\
& \times (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
& = 4s + \lambda (2R_{GMV}^4 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 - 8R_{GMV}^3 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + 8R_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2 + \\
& + 4R_{GMV}^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - 8R_{GMV} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + 2(\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2) = \\
& = 4s + 2\lambda (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - R_{GMV}^2 / V_{GMV})^2 = 4s + 2\lambda s^2. \\
\sigma_{12} &= (\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\partial R_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu}) + \\
& + \lambda (\partial V_{GMV} / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma}))' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ (\partial R_{GMV} / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma})) = \\
& = \lambda (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \left(\frac{\partial (\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = \lambda (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \times \\
& \quad \times (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) = \\
& = \lambda ((-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) + \\
& \quad + (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (V_{GMV} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))) = \\
& = \lambda (-2V_{GMV}^3 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + 2R_{GMV} V_{GMV}^3 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2) = 0. \\
& \quad \sigma_{13} = (\partial R_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\partial s / \partial \boldsymbol{\mu}) + \\
& \quad + \lambda (\partial R_{GMV} / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma}))' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ (\partial s / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma})) = \\
& = (2\mathbf{R}\boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} + \lambda (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \left(\frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} \right)' \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
& = 2 \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \left(\frac{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} \right) \right)' \boldsymbol{\Sigma} \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}} + \\
& \quad + \lambda (V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \times \\
& \quad \times (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
& = 0 + \lambda (2R_{GMV}^2 V_{GMV} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - 2R_{GMV} V_{GMV} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - \\
& - 2R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2 + 2V_{GMV} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - 2R_{GMV}^3 V_{GMV} (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 + \\
& \quad + 4R_{GMV}^2 V_{GMV} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - 2R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2) = 0.
\end{aligned}$$

Нарешті

$$\begin{aligned}
& \sigma_{23} = (\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma} (\partial s / \partial \boldsymbol{\mu}) + \\
& \quad + \lambda (\partial V_{GMV} / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma}))' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ (\partial s / \partial (\text{vech} \boldsymbol{\Sigma})) = \\
& = \lambda (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \left(\frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} \right)' \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial(\text{vec} \boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech} \boldsymbol{\Sigma}} (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
& = \lambda (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \\
& \quad (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) = \\
& = \lambda ((-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})) + \\
& \quad + (-V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}))) = \\
& = \lambda (-2V_{GMV}^2 R_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 + 4R_{GMV} V_{GMV}^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} - 2V_{GMV}^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2) = 0.
\end{aligned}$$

Лему доведено.

У наступній теоремі знайдено розподіл вибіркового оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Теорема 6.5. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$ і $n > k$. Тоді

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{V}_{VaR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ V_{VaR} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{M}_{VaR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ M_{VaR} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_1^2 = V_{GMV} \left(1 + \frac{s(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)(4\tilde{d}_\alpha^2 - 2s + \lambda\tilde{d}_\alpha^4)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} \right),$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2\tilde{d}_\alpha^4 V_{GMV}^2}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \left(1 + \frac{\lambda s^2 + 2s}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \right),$$

$$\sigma_{12} = \frac{\tilde{d}_\alpha^2 s V_{GMV}^{3/2}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{7/2}} (\lambda\tilde{d}_\alpha^4 + 4\tilde{d}_\alpha^2 - 2s),$$

$$\sigma_3^2 = V_{GMV} \tilde{d}_\alpha^2 \frac{2 + \lambda\tilde{d}_\alpha^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)},$$

$$\sigma_{13} = -\frac{\tilde{d}_\alpha^4 V_{GMV}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \left(1 + \frac{\lambda s}{2} \right),$$

$$\partial e \quad R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, \quad V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}},$$

$$\lambda = \psi''(0) / (\psi'(0))^2.$$

Доведення. З леми 6.2 та використовуючи дельта-метод [60], отримаємо

$$\sigma_1^2 = \left(\left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial R_{VaR}}{\partial s} \right) \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \partial R_{VaR} / \partial R_{GMV} \\ \partial R_{VaR} / \partial V_{GMV} \\ \partial R_{VaR} / \partial s \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2^2 = \left(\left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial s} \right) \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \partial V_{VaR} / \partial R_{GMV} \\ \partial V_{VaR} / \partial V_{GMV} \\ \partial V_{VaR} / \partial s \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3^2 = \left(\left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial s} \right) \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \partial M_{VaR} / \partial R_{GMV} \\ \partial M_{VaR} / \partial V_{GMV} \\ \partial M_{VaR} / \partial s \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{12} = \left(\left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial V_{VaR}}{\partial s} \right) \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \partial R_{VaR} / \partial R_{GMV} \\ \partial R_{VaR} / \partial V_{GMV} \\ \partial R_{VaR} / \partial s \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{13} = \left(\left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial R_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial V_{GMV}} \right), \left(\frac{\partial M_{VaR}}{\partial s} \right) \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \partial R_{VaR} / \partial R_{GMV} \\ \partial R_{VaR} / \partial V_{GMV} \\ \partial R_{VaR} / \partial s \end{pmatrix}.$$

З правил диференційного числення [85], [105] випливає:

$$\frac{\partial R_{VaR}}{\partial R_{GMV}} = 1, \quad \frac{\partial V_{VaR}}{\partial R_{GMV}} = 0, \quad \frac{\partial M_{VaR}}{\partial R_{GMV}} = -1,$$

$$\frac{\partial R_{VaR}}{\partial V_{GMV}} = \frac{s}{2\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}}}, \quad \frac{\partial V_{VaR}}{\partial V_{GMV}} = \frac{\tilde{d}_\alpha^2}{\tilde{d}_\alpha^2 - s}, \quad \frac{\partial M_{VaR}}{\partial V_{GMV}} = \frac{\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}},$$

$$\frac{\partial R_{VaR}}{\partial s} = \frac{\sqrt{V_{GMV}}(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{3/2}}, \quad \frac{\partial V_{VaR}}{\partial s} = V_{GMV} \frac{\tilde{d}_\alpha^2}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2},$$

$$\frac{\partial M_{VaR}}{\partial s} = -\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= V_{GMV}(1 + \lambda s) + V_{GMV} \frac{s^2 \lambda}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} + V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2 (2s + \lambda s^2)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} = \\ &= \frac{2V_{GMV}(1 + \lambda s)(\tilde{d}_\alpha^2 - s) + s^2 \lambda V_{GMV}}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} + V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2 (2s + \lambda s^2)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} = \\ &= \frac{2V_{GMV}(\tilde{d}_\alpha^2 - s) + s \lambda V_{GMV}(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} + V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2 (2s + \lambda s^2)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} = \\ &= V_{GMV} + s \lambda V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} + s V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} + V_{GMV} \lambda s^2 \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} = \\ &= V_{GMV} + s \lambda V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s) \tilde{d}_\alpha^4}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} + s V_{GMV} \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} = \end{aligned}$$

$$V_{GMV} \left(1 + \frac{s(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)(4\tilde{d}_\alpha^2 - 2s + \lambda \tilde{d}_\alpha^4)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^3} \right),$$

$$\sigma_2^2 = 2\lambda V_{GMV}^2 \frac{\tilde{d}_\alpha^4}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} + 2V_{GMV}^2 \frac{\tilde{d}_\alpha^2}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^4} (2s + \lambda s^2) =$$

$$= \frac{2\tilde{d}_\alpha^4 V_{GMV}^2}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \left(1 + \frac{\lambda s^2 + 2s}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \right),$$

$$\sigma_3^2 = V_{GMV}(1 + \lambda s) + V_{GMV} \lambda \frac{\tilde{d}_\alpha^2 - s}{2} + V_{GMV} \frac{(2s + \lambda s^2)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} =$$

$$= \frac{2V_{GMV} + 2\lambda s V_{GMV} + \tilde{d}_\alpha^2 \lambda V_{GMV} - s \lambda V_{GMV}}{2} + V_{GMV} \frac{(2s + \lambda s^2)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} =$$

$$= V_{GMV} \frac{2\tilde{d}_\alpha^2 + \lambda s \tilde{d}_\alpha^2 + \tilde{d}_\alpha^4 \lambda - 2s - \lambda s^2 - s \tilde{d}_\alpha^2 \lambda + 2s + \lambda s^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} =$$

$$= V_{GMV} \tilde{d}_\alpha^2 \frac{2 + \lambda \tilde{d}_\alpha^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)},$$

$$\sigma_{13} = -V_{GMV}(1 + \lambda s) + \frac{s}{2} \lambda V_{GMV} - \frac{V_{GMV}(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)(\lambda s^2 + 2s)}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} =$$

$$= -V_{GMV} \left(1 + \frac{s\lambda}{2} + \frac{s(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)(1 + \lambda s/2)}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \right) = -V_{GMV} \left(1 + \frac{s\lambda}{2} \right) \left(1 + \frac{s(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \right) =$$

$$= -\frac{\tilde{d}_\alpha^4 V_{GMV}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \left(1 + \frac{\lambda s}{2} \right),$$

$$\sigma_{12} = \lambda \frac{s \tilde{d}_\alpha^2 V_{GMV}^{3/2}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{3/2}} + V_{GMV}^{3/2} \frac{\tilde{d}_\alpha^2 (2\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{7/2}} (2s + \lambda s^2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{s\tilde{d}_\alpha^2 V_{GMV}^{3/2}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{3/2}} \left(\lambda + (s\lambda + 2) \frac{(2\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} \right) = \\
&= \frac{s\tilde{d}_\alpha^2 V_{GMV}^{3/2}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{3/2}} \frac{\lambda\tilde{d}_\alpha^4 - 2s\lambda\tilde{d}_\alpha^2 + s^2\lambda + 2s\lambda\tilde{d}_\alpha^2 - s^2\lambda + 4\tilde{d}_\alpha^2 - 2s}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2} = \\
&= \frac{\tilde{d}_\alpha^2 s V_{GMV}^{3/2}}{(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^{7/2}} (\lambda\tilde{d}_\alpha^4 + 4\tilde{d}_\alpha^2 - 2s).
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

- *Зауваження 6.4.* Відповідно до зауважень 6.2 та 6.3 ми отримуємо, що асимптотично розподіл вибірових оцінок ваг та характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не залежить від виконання умови $s < \tilde{d}_\alpha^2$, тобто умовні розподіли оцінок за вищезгаданої умови збігаються з безумовними знайденими в теоремах 6.4-6.5.

6.3. Властивості вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля за припущення, що дохідності активів поведуться як довільний стаціонарний процес

У попередніх розділах ми припускали, що не виконується одне з припущень класичної теорії портфеля щодо поведінки дохідностей фінансових активів, з яких складено портфель. Ми припускали, що дохідності є автокорельованими [30], проте нормально розподіленими, також ми розглянули випадок, коли дохідностям притаманні важкі хвости, проте вони не є автокорельованими. Виникає запитання, як можна моделювати поведінку ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , якщо дохідності є і автокорельованими та їхнім розподілам

притаманна властивість важких хвостів. Для цього ми припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний стаціонарний процес із середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена. Нагадаємо, що ми формуємо портфель на основі оптимізаційної задачі

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (6.16)$$

Якщо у випадку нормально розподілених дохідностей (6.16) ми могли записати у вигляді (4.6), тобто

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1,$$

то тепер ми цього зробити не можемо, оскільки за нашого припущення квантиль нормального стандартного розподілу z_α потрібно замінити на квантиль відповідного процесу, загалом на $d_\alpha(\mathbf{w})$, що задовольняє умову

$$P \left\{ \frac{X_{\mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Gamma}(0) \mathbf{w}}} < d_\alpha(\mathbf{w}) \right\} = 1 - \alpha. \quad (6.17)$$

У такому випадку задача вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR (6.16) набуде вигляду

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = d_\alpha(\mathbf{w}) \sqrt{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (6.18)$$

Зауважимо, що $d_\alpha(\mathbf{w})$ залежить від вектора ваг портфеля \mathbf{w} . Ми припустимо, що $d_\alpha(\mathbf{w})$ не є функцією від \mathbf{w} , тобто $d_\alpha(\mathbf{w}) = d_\alpha$. Це припущення виконується для широкого класу стаціонарних процесів, наприклад, для векторних авторегресійних процесів з біжучим середнім ($VARMA$), залишки якого мають багатовимірний еліптичний розподіл. Крім цього, таке припущення може бути використане при розгляді верхньої межі VaR для довільного стаціонарного процесу, використовуючи нерівність Чебишева [42].

У такому випадку отриманий портфель буде описувати найгірший сценарій. Крім того, з (6.17) випливає, що $d_\alpha(\mathbf{w})$ враховує також моменти процесу \mathbf{X}_t порядку вищого за 2. Проте у [92] показано, що ці моменти не мають суттєвого впливу на поведінку портфеля, якщо розподіл вектора \mathbf{X}_t не сильно відрізняється від нормального розподілу. Підсумовуючи вищесказане, зауважимо, що квантиль нормального стандартного розподілу z_α є добрим наближенням для $d_\alpha(\mathbf{w})$, що мотивовано багатьма ученими, зокрема [68], [86], [128]. Отже, розв'язки оптимізаційної задачі (6.18) за нашого припущення стосовно $d_\alpha(\mathbf{w})$ та за виконання необхідної та достатньої умови $d_\alpha^2 > s$ матимуть вигляд:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad (6.19)$$

$$R_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}}, \quad (6.20)$$

$$V_{VaR} = \mathbf{w}'_{VaR} \boldsymbol{\Gamma}(0) \mathbf{w}_{VaR} = \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} V_{GMV}, \quad (6.21)$$

$$M_{VaR} = \sqrt{d_\alpha^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \quad (6.22)$$

де \mathbf{w}_{GMV} , R_{GMV} , V_{GMV} задані у (1.7)-(1.9), $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$, $s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}$.

Використати на практиці результати (6.19)-(6.22) інвестор не має можливості, оскільки параметри процесу \mathbf{X}_t , $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ невідомі. Тому їх потрібно спочатку відповідно оцінити. Ми використаємо вибіркві оцінки (1.27). Підставляючи в (6.19)-(6.22) замість невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ їхні оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)$, отримаємо вибіркві оцінки ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , які позначимо $\hat{\mathbf{w}}_{VaR}$, \hat{R}_{VaR} , \hat{V}_{VaR} , \hat{M}_{VaR} . Так побудовані оцінки будуть коректними лише за виконання умови $d_\alpha^2 > \hat{s}$, де \hat{s} є вибірковою оцінкою параметра s . Як було зазна-

чено у розділі 5.1, виконання умови $d_\alpha^2 > s$ не гарантує виконання умови $d_\alpha^2 > \hat{s}$. Оцінимо імовірність події $\{d_\alpha^2 > \hat{s}\}$. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{d_\alpha^2 > \hat{s}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\sqrt{n} \frac{\hat{s} - s}{\sigma_{3,s}} < \sqrt{n} \frac{d_\alpha^2 - s}{\sigma_{3,s}}\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\sqrt{n} \frac{d_\alpha^2 - s}{\sigma_{3,s}}\right) = 1,$$

де $\sigma_{3,s}$ наведено в лемі 6.2. У лемі 6.2 також обґрунтовано можливість переходу до нормального розподілу в попередній рівності. Ми показали, що необхідною та достатньою умовою виконання $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{d_\alpha^2 > \hat{s}\} = 1$ є умова $d_\alpha^2 > s$, що відповідно вказує нам, що вибіркві оцінки ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR (6.19)-(6.22) є асимптотично коректними з імовірністю 1.

Позначимо $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0)))'$ – вектор невідомих параметрів та $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)))'$ – вибіркві оцінка для $\boldsymbol{\theta}$. В [59], [60], [84] доведено, що за виконання певних умов на вектор дохідностей \mathbf{X}_t оцінка $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0)))'$ є асимптотично нормально розподілена з середнім $\boldsymbol{\theta}$ та коваріаційною матрицею $\boldsymbol{\Omega}/n$. Однією з основних умов коректності отриманих результатів є існування четвертого моменту вектора \mathbf{X}_t , що звичайно виконується для фінансових даних, особливо з невисокою частотою. З [59] ми отримуємо

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\pi \mathbf{Q}(0), \quad (6.23)$$

де $\mathbf{Q}(0)$ матриця спектральної густини з частотою 0, тобто

$$\mathbf{Q}(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(h), \quad (6.24)$$

де

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(h) = \text{Cov}([\mathbf{X}'_{t+h}, [\text{vech}((\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})')]]', [\mathbf{X}'_t, [\text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})')]])$$

автоковаріаційна матриця зі зміщенням h процесу $\{[\mathbf{X}'_t, [\text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})')]]\}$, який є стаціонарним, оскільки \mathbf{X}_t стаціонарний процес. Для побудови оцінки матриці $\mathbf{Q}(0)$ викорис-

таємо теорію оцінювання матриць спектральної густини [59]. Оскільки $\mathbf{Q}(0)$ є матрицею спектральної густини зі зміщенням 0 процесу $\{[\mathbf{X}'_t, [\text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})')]]'\}$, то конзистентною оцінкою $\mathbf{Q}(0)$ є

$$\hat{\mathbf{Q}}(0) = \frac{1}{2m} \sum_{s=1}^m \left(\hat{\mathbf{q}}\left(\frac{2\pi s}{n}\right) + \hat{\mathbf{q}}\left(-\frac{2\pi s}{n}\right) \right),$$

де зі зростанням m зменшується варіація оцінки та

$$\hat{\mathbf{q}}(\lambda) = \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})') - \text{vech}(\hat{\Gamma}(0)) \end{pmatrix} \exp(-i\lambda t) \right) \times \\ \times \left(\sum_{t=1}^n \begin{pmatrix} \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})') - \text{vech}(\hat{\Gamma}(0)) \end{pmatrix} \exp(i\lambda t) \right)',$$

де i – уявна одиниця.

Теорема 6.6. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний стаціонарний процес з середнім $\mathbf{M}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що ряди, які входять у (6.24) є збіжними, $s < d_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} (\hat{\mathbf{w}}'_{VaR} - \mathbf{w}'_{VaR}) \xrightarrow{d} N_k(\mathbf{0}_k, \boldsymbol{\Omega}_{VaR}),$$

де

$$\boldsymbol{\Omega}_{VaR} = ((\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))',$$

а $\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \boldsymbol{\mu}$ та $\partial \mathbf{w}'_{VaR} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))$ задані в лемі 6.1.

Доведення. Доведення впливає з властивостей вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\Gamma}(0))')$ та дельта методу [60].

Для дослідження розподілу вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR доведемо спочатку наступну лему.

Лема 6.3. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний стаціонарний процес із середнім $\mathbf{M}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що ряди, які входять у (6.24) є збіжними, $s < d_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{GMV} \\ \hat{V}_{GMV} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{GMV} \\ V_{GMV} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{1,GMV}^2 & \sigma_{12,GMV} & \sigma_{13,GMV} \\ \sigma_{12,GMV} & \sigma_{2,GMV}^2 & \sigma_{23,GMV} \\ \sigma_{13,GMV} & \sigma_{23,GMV} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_1^2 = ((\partial R_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial R_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))', \\ \sigma_{12} = ((\partial R_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))', \\ \sigma_{13} = ((\partial R_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial R_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial s / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))', \\ \sigma_2^2 = ((\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))', \\ \sigma_{23} = ((\partial V_{GMV} / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial V_{GMV} / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial s / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))', \\ \sigma_3^2 = ((\partial s / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))' \boldsymbol{\Omega} ((\partial s / \partial \boldsymbol{\mu})' (\partial s / \partial \text{vech}(\Gamma(0))))'$$

3

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{w}_{GMV}, \quad \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} = 2\mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

$$\frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} = V_{GMV} \frac{\partial (\text{vec}(\Gamma(0))^{-1})'}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} ((\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})),$$

$$\frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = -V_{GMV}^2 \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}),$$

$$\frac{\partial s}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} = \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech}\Gamma(0)} ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu})).$$

Доведення. Доведення випливає з властивостей вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\Gamma}(0))')$ і дельта методу [60].

У лемі 6.3 знайдено асимптотичний розподіл вибірових оцінок параметрів ефективної множини Марковіца. Зважаючи на те, що характеристики портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR є функціями від параметрів ефективної множини Марковіца, то можемо знайти розподіл вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Теорема 6.7. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний стаціонарний процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріації $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що ряди, які входять у (6.24), є збіжними, $s < d_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$a) \sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{V}_{VaR} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ V_{VaR} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{1,VaR}^2 & \sigma_{12,VaR} & \sigma_{1s,VaR} \\ \sigma_{12,VaR} & \sigma_{2,VaR}^2 & \sigma_{2s,VaR} \\ \sigma_{1s,VaR} & \sigma_{2s,VaR} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{1,VaR}^2 &= \sigma_{1,GMV}^2 + 2\sigma_{12,GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} + 2\sigma_{13,GMV} \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} + \\ &+ \sigma_{2,GMV}^2 \frac{1}{4V_{GMV}} \frac{s^2}{d_\alpha^2 - s} + 2\sigma_{23,GMV} \frac{s(2d_\alpha^2 - s)}{4(d_\alpha^2 - s)^2} + \sigma_{3,GMV}^2 \frac{(2d_\alpha^2 - s)^2}{4(d_\alpha^2 - s)^3} V_{GMV}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12,VaR} &= \sigma_{2,GMV}^2 \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{sd_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} + \sigma_{23,GMV} \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^{5/2}} \sqrt{V_{GMV}} + \\ &+ \sigma_{12,GMV} \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} + \sigma_{13,GMV} \frac{d_{1-\alpha}^2}{(d_{1-\alpha}^2 - s)^2} V_{GMV} + \sigma_{3,GMV}^2 \frac{d_{1-\alpha}^2 (2d_{1-\alpha}^2 - s)}{2(d_{1-\alpha}^2 - s)^{7/2}} V_{GMV}^{3/2}, \\ \sigma_{2,VaR}^2 &= \sigma_{2,GMV}^2 \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^2} + 2\sigma_{23,GMV} \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^3} V_{GMV} + \sigma_{3,GMV}^2 \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^4} V_{GMV}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1s,VaR} &= \sigma_{13,GMV} + \sigma_{23,GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} + \sigma_{3,GMV}^2 \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}}, \\ \sigma_{2s,VaR} &= \sigma_{23,GMV} \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} + \sigma_{3,GMV}^2 \frac{d_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV}; \end{aligned}$$

$$b) \sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{M}_{VaR} \\ \hat{s} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ M_{VaR} \\ s \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{1,VaR}^2 & \sigma_{13,VaR} & \sigma_{1s,VaR} \\ \sigma_{13,VaR} & \sigma_{3,VaR}^2 & \sigma_{3s,VaR} \\ \sigma_{1s,VaR} & \sigma_{3s,VaR} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{13,VaR} &= -\sigma_{1,GMV}^2 + \sigma_{2,GMV}^2 \frac{s}{4V_{GMV}} - \sigma_{3,GMV}^2 \frac{2d_\alpha^2 - s}{4(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV} + \\ &+ \sigma_{12,GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{d_\alpha^2 - 2s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} - \sigma_{13,GMV} \frac{3d_\alpha^2 - 2s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} + \sigma_{23,GMV} / 2, \\ \sigma_{3,VaR}^2 &= \sigma_{1,GMV}^2 - 2\sigma_{12,GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} + 2\sigma_{13,GMV} \frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} + \\ &+ \sigma_{2,GMV}^2 \frac{1}{4V_{GMV}} (d_\alpha^2 - s) - 2\sigma_{23,GMV} / 4 + \sigma_{3,GMV}^2 \frac{1}{4(d_\alpha^2 - s)} V_{GMV}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{3s, VaR} = -\sigma_{13, GMV} + \sigma_{23, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} - \sigma_{3, GMV}^2 \frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}},$$

$\sigma_{1, GMV}^2, \sigma_{2, GMV}^2, \sigma_{3, GMV}^2, \sigma_{12, GMV}, \sigma_{13, GMV}$ та $\sigma_{23, GMV}$ задані в лемі 6.3.

Доведення. З лемі 6.3 маємо

$$\sqrt{n}((\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})' - (R_{GMV}, V_{GMV}, s)') \xrightarrow{d} N_3(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_{EF}).$$

$$a) \sqrt{n}((\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}, \hat{s})' - (R_{VaR}, V_{VaR}, s)') \xrightarrow{d} N_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_{RV, VaR})$$

з $\mathbf{\Omega}_{RV, VaR} = \mathbf{G}_1 \mathbf{\Omega}_{EF} \mathbf{G}_1'$ де

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} \partial R_{VaR} / \partial R_{GMV} & \partial R_{VaR} / \partial V_{GMV} & \partial R_{VaR} / \partial s \\ \partial V_{VaR} / \partial R_{GMV} & \partial V_{VaR} / \partial V_{GMV} & \partial V_{VaR} / \partial s \\ \partial s / \partial R_{GMV} & \partial s / \partial V_{GMV} & \partial s / \partial s \end{pmatrix}.$$

З (6.20)-(6.21) отримаємо

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} & \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} \\ 0 & \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} & \frac{d_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{\Omega}_{EF} \mathbf{G}_1' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} & \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} \\ 0 & \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} & \frac{d_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1, GMV}^2 & \sigma_{12, GMV} & \sigma_{13, GMV} \\ \sigma_{12, GMV} & \sigma_{2, GMV}^2 & \sigma_{23, GMV} \\ \sigma_{13, GMV} & \sigma_{23, GMV} & \sigma_{3, GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} & \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} & 0 \\ \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} & \frac{d_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1, VaR}^2 & \sigma_{12, VaR} & \sigma_{1s, VaR} \\ \sigma_{12, VaR} & \sigma_{2, VaR}^2 & \sigma_{2s, VaR} \\ \sigma_{1s, VaR} & \sigma_{2s, VaR} & \sigma_{3, GMV}^2 \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{1, VaR}^2 &= \sigma_{1, GMV}^2 + 2\sigma_{12, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} + 2\sigma_{13, GMV} \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} + \\ &+ \sigma_{2, GMV}^2 \frac{1}{4V_{GMV}} \frac{s^2}{d_\alpha^2 - s} + 2\sigma_{23, GMV} \frac{s(2d_\alpha^2 - s)}{4(d_\alpha^2 - s)^2} + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{(2d_\alpha^2 - s)^2}{4(d_\alpha^2 - s)^3} V_{GMV}, \\ \sigma_{12, VaR} &= \sigma_{2, GMV}^2 \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{sd_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} + \sigma_{23, GMV} \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^{5/2}} \sqrt{V_{GMV}} + \\ &+ \sigma_{12, GMV} \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} + \sigma_{13, GMV} \frac{d_{1-\alpha}^2}{(d_{1-\alpha}^2 - s)^2} V_{GMV} + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{d_{1-\alpha}^2 (2d_{1-\alpha}^2 - s)}{2(d_{1-\alpha}^2 - s)^{7/2}} V_{GMV}^{3/2}, \\ \sigma_{2, VaR}^2 &= \sigma_{2, GMV}^2 \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^2} + 2\sigma_{23, GMV} \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^3} V_{GMV} + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{d_\alpha^4}{(d_\alpha^2 - s)^4} V_{GMV}^2, \\ \sigma_{1s, VaR} &= \sigma_{13, GMV} + \sigma_{23, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}}, \\ \sigma_{2s, VaR} &= \sigma_{23, GMV} \frac{d_\alpha^2}{d_\alpha^2 - s} + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{d_\alpha^2}{(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV}. \end{aligned}$$

б) Доведення аналогічне до а). Маємо

$$\sqrt{n}((\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR}, \hat{s})' - (R_{VaR}, M_{VaR}, s)') \xrightarrow{d} N_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}_{RM, VaR})$$

з $\mathbf{\Omega}_{RM, VaR} = \mathbf{G}_2 \mathbf{\Omega}_{EF} \mathbf{G}_2'$, де

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} \partial R_{VaR} / \partial R_{GMV} & \partial R_{VaR} / \partial V_{GMV} & \partial R_{VaR} / \partial s \\ \partial M_{VaR} / \partial R_{GMV} & \partial M_{VaR} / \partial V_{GMV} & \partial M_{VaR} / \partial s \\ \partial s / \partial R_{GMV} & \partial s / \partial V_{GMV} & \partial s / \partial s \end{pmatrix}.$$

з (6.20), (6.22) отримаємо

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} & \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} \\ -1 & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} & -\frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{\Omega}_{EF} \mathbf{G}_1' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} & \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} \\ -1 & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} & -\frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,GMV}^2 & \sigma_{12,GMV} & \sigma_{13,GMV} \\ \sigma_{12,GMV} & \sigma_{2,GMV}^2 & \sigma_{23,GMV} \\ \sigma_{13,GMV} & \sigma_{23,GMV} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} & \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} & 0 \\ \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} & -\frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{1, VaR}^2 & \sigma_{13, VaR} & \sigma_{1s, VaR} \\ \sigma_{13, VaR} & \sigma_{3, VaR}^2 & \sigma_{3s, VaR} \\ \sigma_{1s, VaR} & \sigma_{3s, VaR} & \sigma_{3, GMV}^2 \end{pmatrix},$$

де

$$\sigma_{1, VaR}^2 = \sigma_{1, GMV}^2 + 2\sigma_{12, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} + 2\sigma_{13, GMV} \frac{2d_\alpha^2 - s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} +$$

$$+ \sigma_{2, GMV}^2 \frac{1}{4V_{GMV}} \frac{s^2}{d_\alpha^2 - s} + 2\sigma_{23, GMV} \frac{s(2d_\alpha^2 - s)}{4(d_\alpha^2 - s)^2} + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{(2d_\alpha^2 - s)^2}{4(d_\alpha^2 - s)^3} V_{GMV},$$

$$\sigma_{13, VaR} = -\sigma_{1, GMV}^2 + \sigma_{2, GMV}^2 \frac{s}{4V_{GMV}} - \sigma_{3, GMV}^2 \frac{2d_\alpha^2 - s}{4(d_\alpha^2 - s)^2} V_{GMV} +$$

$$+ \sigma_{12, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{d_\alpha^2 - 2s}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} - \sigma_{13, GMV} \frac{3d_\alpha^2 - 2s}{2(d_\alpha^2 - s)^{3/2}} \sqrt{V_{GMV}} + \sigma_{23, GMV} / 2,$$

$$\sigma_{3, VaR} = \sigma_{1, GMV}^2 - 2\sigma_{12, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} + 2\sigma_{13, GMV} \frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} +$$

$$+ \sigma_{2, GMV}^2 \frac{1}{4V_{GMV}} (d_\alpha^2 - s) - 2\sigma_{23, GMV} / 4 + \sigma_{3, GMV}^2 \frac{1}{4(d_\alpha^2 - s)} V_{GMV},$$

$$\sigma_{3s, VaR} = -\sigma_{13, GMV} + \sigma_{23, GMV} \frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} - \sigma_{3, GMV}^2 \frac{1}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}}.$$

■ *Зауваження 6.5.* Результати теорем 6.6-6.7 дають інвестору змогу, не докладаючи великих зусиль, провести аналіз та побудувати передбачення для свого портфеля при досить широких припущеннях щодо поведінки дохідностей фінансових активів, з яких складено портфель. Проте загалом це не зовсім так. Насамперед, перед використанням результатів теорем 6.6-6.7 необхідно провести аналіз вибірових оцінок параметрів розподілу вектора дохідностей активів та вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля. Залежно від їх властивостей збіжність до граничного розподілу може бути доволі повільною.

6.4. Управління портфелем фінансових активів з найменшим рівнем VaR за невиконання припущень класичної теорії портфеля

Інвестор у своїй роботі змушений використовувати не точкові значення ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , а їх оцінки, які є випадковими величинами. Тому, в більшості випадків, процес прийняття рішення опирається на одну з реалізацій випадкової величини. Для покращення ефективності процесу прийняття рішення необхідно мати додаткові відомості про випадкову величину, яка відображає певну характеристику портфеля. Найповнішу інформацію про випадкову величину надає функція її розподілу чи густини. У випадку невиконання класичних припущень щодо поведінки доходностей фінансових активів, з яких складено портфель, тобто у випадку, коли доходності є автокорельованими та їх розподілам притаманні важкі хвости, неможливо знайти точний розподіл, проте інвестор може використати результати [51], в якій знайдено асимптотичні розподіли вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Зазначимо, що збіжність точного розподілу, отриманого методом Монте-Карло, до асимптотичного залежить від властивостей вибірових оцінок досліджуваних характеристик портфеля за припущень щодо поведінки доходностей та не завжди є швидкою. Проте у фінансовій літературі досить часто, у випадку коли точні властивості фінансових показників є невідомі, пропонують використовувати асимптотичні властивості.

Основним результатом, отриманим у [51] для вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , є їх асимптотичні розподіли. Припускаючи, що доходності поведуться як k -вимірний стаціонарний процес ми отримуємо, що вибірові оцінки ваг і характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR є асимптотично нормально розподілені, тобто

$$\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{1,VaR}^2)$$

$$\sqrt{n}(\hat{V}_{VaR} - V_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{2,VaR}^2)$$

$$\sqrt{n}(\hat{M}_{VaR} - M_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{3,VaR}^2)$$

$$\sqrt{n}(\hat{w}_{VaR,i} - w_{VaR,i}) \xrightarrow{d} N(0, (\Omega_{VaR})_{ii}), \text{ для всіх } i=1, \dots, k.$$

Методи оцінки параметрів розподілу вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR наведено у [51]. Використовуючи ці результати, ми хочемо запропонувати методи управління портфелем фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Важливим елементом управління портфелем є планування його очікуваної доходності та ризику. З теорії імовірності відомо, що точкові оцінки не є добрим орієнтиром у плануванні, тому ми зосередимося на побудові інтервальних оцінок, аналогічно до [28]. Зауважимо, що інвестор більше зацікавлений в односторонніх інтервалах довіри для вибраних характеристик, оскільки йому для планування діяльності набагато важливішим є знання верхньої межі ризику та нижньої очікуваної доходності. Проте з метою порівняння верхніх меж одно- та двосторонніх інтервалів довіри ми наведемо обидві схеми побудови.

Нехай обсяг вибірки історичних значень доходності, на основі яких ми будемо оцінки, становить n , тоді розподіл вибірової оцінки ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR буде близьким до $N(M_{VaR}, \sigma_{3,VaR}^2/m)$, а очікуваної доходності до $N(R_{VaR}, \sigma_{1,VaR}^2/m)$. На основі цього спостереження інтервали довіри з рівнем довіри β матимуть вигляд:

$$\text{двосторонній для ризику: } \left[\hat{M}_{VaR} - z_{1-\beta/2} \frac{\hat{\sigma}_{3,VaR}}{\sqrt{n}}; \hat{M}_{VaR} + z_{1-\beta/2} \frac{\hat{\sigma}_{3,VaR}}{\sqrt{n}} \right],$$

$$\text{односторонній для ризику: } \left[-\infty; \hat{M}_{VaR} + z_{1-\beta} \frac{\hat{\sigma}_{3,VaR}}{\sqrt{n}} \right],$$

$$\text{двосторонній для доходності: } \left[\hat{R}_{VaR} - z_{1-\beta/2} \frac{\hat{\sigma}_{1,VaR}}{\sqrt{n}}; \hat{R}_{VaR} + z_{1-\beta/2} \frac{\hat{\sigma}_{1,VaR}}{\sqrt{n}} \right],$$

односторонній для дохідності: $\left[\hat{R}_{VaR} - z_{1-\beta} \frac{\hat{\sigma}_{1,VaR}}{\sqrt{n}}; +\infty \right)$,

де $z_{1-\beta}$ – $1-\beta$ квантиль стандартного нормального розподілу. Ми замінили в інтервалах довіри невідомі параметри на їх оцінки та отримали оцінки інтервалів довіри, які з заданою імовірністю β описують майбутню поведінку очікуваної дохідності та ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Аналогічно можемо побудувати інтервали для дисперсії портфеля.

Інтервали довіри також дають можливість відповісти на запитання чи характеристики портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR суттєво відрізняються від певного заданого значення. Для цього потрібно побудувати інтервали довіри з рівнем довіри, який відповідає рівню довіри статистичної значимості різниці між значеннями відповідних характеристик та перевірити чи попадає задане значення характеристики у відповідний інтервал. Якщо так, то робимо висновок, що вибрана характеристика портфеля і задане для неї значення суттєво не відрізняються, в іншому випадку – різниця між значеннями є суттєвою, що вказує на те, що сподівання інвестора відносно характеристики портфеля не справдилися.

Результати, отримані у [51], дають змогу провести і спільний статистичний тест щодо характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Наприклад, для тестування наступної гіпотези

$$H_0: R_{VaR}=R_0 \text{ і } M_{VaR}=M_0 \text{ проти } H_1: R_{VaR} \neq R_0 \text{ або } M_{VaR} \neq M_0$$

ми можемо використати наступну статистику

$$T_{RM} = n((\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR}) - (R_0, M_0)) \hat{\Omega}_{RM;1}^{-1} ((\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR}) - (R_0, M_0))',$$

де

$$\hat{\Omega}_{RM;1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{1,VaR}^2 & \hat{\sigma}_{13,VaR} \\ \hat{\sigma}_{13,VaR} & \hat{\sigma}_{3,VaR}^2 \end{pmatrix}.$$

За виконання гіпотези H_0 статистика T_{RM} має χ^2 розподіл з 2 ступенями вільності. Асимптотична множина довіри для вектора $(R_{VaR}, M_{VaR})'$ з рівнем довіри $1-\beta$

$$CR_{1-\beta}(R, M) = \{R \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$$

$$n((\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR}) - (R_0, M_0)) \hat{\Omega}_{RM;1}^{-1} ((\hat{R}_{VaR}, \hat{M}_{VaR}) - (R_0, M_0))' \leq \chi_{2;1-\beta}^2 \}.$$

Аналогічно можемо побудувати множину довіри для вектора $(R_{VaR}, V_{VaR})'$ та провести спільний статистичний тест

$$H_0: R_{VaR}=R_0 \text{ і } V_{VaR}=V_0 \text{ проти } H_1: R_{VaR} \neq R_0 \text{ або } V_{VaR} \neq V_0$$

ми можемо використати наступну статистику

$$T_{RV} = n((\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}) - (R_0, V_0)) \hat{\Omega}_{RV;1}^{-1} ((\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}) - (R_0, V_0))',$$

де

$$\hat{\Omega}_{RV;1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{1,VaR}^2 & \hat{\sigma}_{12,VaR} \\ \hat{\sigma}_{12,VaR} & \hat{\sigma}_{2,VaR}^2 \end{pmatrix}.$$

За виконання гіпотези H_0 статистика T_{RV} має χ^2 розподіл з 2 ступенями вільності. Асимптотична множина довіри для вектора $(R_{VaR}, V_{VaR})'$ з рівнем довіри $1-\beta$

$$CR_{1-\beta}(R, V) = \{R \in \mathbb{R}, V > 0:$$

$$n((\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}) - (R_0, V_0)) \hat{\Omega}_{RV;1}^{-1} ((\hat{R}_{VaR}, \hat{V}_{VaR}) - (R_0, V_0))' \leq \chi_{2;1-\beta}^2 \}.$$

Для проведення статистичних тестів відносно значень ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR ми можемо використати наступну схему

$$H_0: \mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_0 \text{ проти } H_1: \mathbf{w}_{VaR} \neq \mathbf{w}_0$$

з наступною статистикою

$$T_{\mathbf{w}} = n(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_0)' \hat{\Omega}_{VaR}^{-1} (\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_0),$$

яка за виконання гіпотези H_0 має χ^2 розподіл з k ступенями вільності. Асимптотична множина довіри для вектора \mathbf{w}_{VaR} з рівнем довіри $1-\beta$ має вигляд:

$$CR_{1-\beta}(R, V) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k: \mathbf{w}'\mathbf{1}=1 \text{ і } n(\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_0)' \hat{\Omega}_{VaR}^{-1} (\hat{\mathbf{w}}_{VaR} - \mathbf{w}_0) \leq \chi_{k;1-\beta}^2 \}.$$

Зазначимо, що отримані в [51] результати дають змогу проводити контроль значень ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR з метою якомога швидшого реагування на зміни, які відбуваються на ринку. В теорії контролю використовують контрольні карти, які відображають поведінку показника, який ми контролюємо в часі. Використовуючи досвід використання контрольних карт, інвестор має змогу отримати досить широку інформації про показник на основі побудованих карт. Найчастіше на практиці використовуються контрольні карти Шухарда, експоненційно зважені контрольні карти з біжучим середнім та карти побудовані на основі кумулятивних сум [80]. Хоча всі вищенаведені карти сильно відрізняються між собою, методи їх побудови є досить подібними. У всіх випадках нам необхідно знати розподіл характеристики, що контролюється. Ми розглянемо метод контролю ризику портфеля на основі контрольних карт Шухарда (контроль очікуваної дохідності та дисперсії портфеля проводиться аналогічно). Зазначимо, що використання таких контрольних карт для контролю дохідності портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією розглянуто в [15]. Питання застосування інших контрольних карт для контролю дохідності портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією розглянуто в [20]-[21], а питання контролю ваг портфеля досліджене в [78]-[79]. У нашому випадку нам необхідно побудувати карту для контролю ризику портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Для цього нам необхідно знайти межі карти. При виборі меж контрольних карт Шухарда важливе значення має вибір критичного значення. Доволі часто значення вибирають константою, а саме 2 чи 3, але в такому випадку важко передбачити поведінку карти. Існує інший метод, описаний у фінансовій літературі та використаний в [80], в якому критичне значення вибирається на основі певних початкових припущень відносно поведінки карти. Відомо, що критичне значення залежить лише від початкових умов карти та квантилі стандартного нормального розподілу. Вибравши класичні умови щодо контролю фінансових показників, середня довжини карти до першого сигналу має становити 60, отримаємо, що критичне значення дорівнює $c=2.394$. Тобто, межі карти в

нашому випадку становлять $\hat{M}_{VaR} - c \frac{\hat{\sigma}_{3,VaR}}{\sqrt{n}}$ та $\hat{M}_{VaR} + c \frac{\hat{\sigma}_{3,VaR}}{\sqrt{n}}$. Зоб-

ражаючи значення оцінки ризику у вигляді динамічного ряду, можемо використати всі відомі методи контролю для нашого портфеля і, як наслідок, вчасно перебудувати портфель при найменших підозрах про суттєву зміну характеристик елементів, з яких складено портфель.

Отже, на основі знайдених розподілів вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , ми розробили методи планування характеристик портфеля на основі побудови одно- та двосторонніх інтервалів довіри, а також методи тестування на суттєвість різниці між гіпотетичним та практичним значеннями характеристик. Зауважимо, що використання асимптотичних властивостей фінансових показників широко розповсюджене на практиці, оскільки часто неможливо отримати точніші імовірнісні результати. Також розроблено методи контролю за характеристиками портфеля на основі контрольних карт Шухарда. Використання контрольних карт дає змогу вчасно реагувати на зміни зовнішніх умов та якомога швидше приводити портфель до вигляду передбаченого інвестором.

6.5. Емпіричні результати та теоретичні приклади

Приклад 6.1. Нормально розподілені та неавтокорельовані дохідності. Дослідимо питання збіжності розподілу вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за припущення, що дохідності активів, з яких складено портфель, є нормально розподіленими та неавтокорельованими. В теоремі 5.3 знайдено точний розподіл вибірових оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR . Знайдені густини залежать від обсягу вибірки історичних значень та є доволі важкими для моделювання. Використовуючи дані з розділу 5.5, дослідимо, наскільки добрим є наближення асимптотичним розпо-

ділом, який є нормальним, до точного. Асимптотичний розподіл оцінок характеристик портфеля знайдемо з теореми 6.5. Оформимо його у вигляді наслідку.

Наслідок 6.1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Припустимо, що $s < z_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{V}_{VaR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ V_{VaR} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right),$$

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{R}_{VaR} \\ \hat{M}_{VaR} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_{VaR} \\ M_{VaR} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{d} N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right),$$

де

$$\sigma_1^2 = V_{GMV} \left(1 + \frac{s(2z_\alpha^2 - s)(4z_\alpha^2 - 2s + z_\alpha^4)}{2(z_\alpha^2 - s)^3} \right),$$

$$\sigma_2^2 = \frac{2z_\alpha^4 V_{GMV}^2}{(z_\alpha^2 - s)^2} \left(1 + \frac{s^2 + 2s}{(z_\alpha^2 - s)^2} \right),$$

$$\sigma_{12} = \frac{z_\alpha^2 s V_{GMV}^{3/2}}{(z_\alpha^2 - s)^{7/2}} (z_\alpha^4 + 4z_\alpha^2 - 2s),$$

$$\sigma_3^2 = V_{GMV} z_\alpha^2 \frac{2 + z_\alpha^2}{2(z_\alpha^2 - s)},$$

$$\sigma_{13} = -\frac{z_\alpha^4 V_{GMV}}{(z_\alpha^2 - s)^2} \left(1 + \frac{s}{2} \right),$$

$$\text{де } R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}.$$

Доведення. Оскільки багатовимірний нормальний розподіл належить класу багатовимірних еліптичних розподілів, та для багатовимірного нормального розподілу виконується

$$\psi''(0)/(\psi'(0))^2 = 1 \text{ та } \gamma = 1,$$

то твердження наслідку випливає з теореми 6.5.

На прикладі вибіркової оцінки очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR проведемо аналіз результатів наслідку 6.1. Використаємо дані з розділу 5.5, тобто виберемо дані про щомісячні курси п'яти акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* (тобто $k=5$). Обчислимо їхні дохідності та виберемо вибірку розміру $n=60$ (з 01.10.2010 до 01.09.2015). Отримаємо

$$\boldsymbol{\mu} = (0.8918, 0.7984, 1.8345, 1.0831, 0.6181)',$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 36.510 & 24.278 & 13.315 & 6.154 & 17.562 \\ 24.278 & 60.648 & 23.218 & 13.041 & 13.433 \\ 13.315 & 23.218 & 33.398 & 15.354 & 10.827 \\ 6.154 & 13.041 & 15.354 & 30.697 & 6.868 \\ 17.562 & 13.433 & 10.827 & 6.868 & 36.276 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMV} = 1.06586, V_{GMV} = 16.90393, s = 0.04604.$$

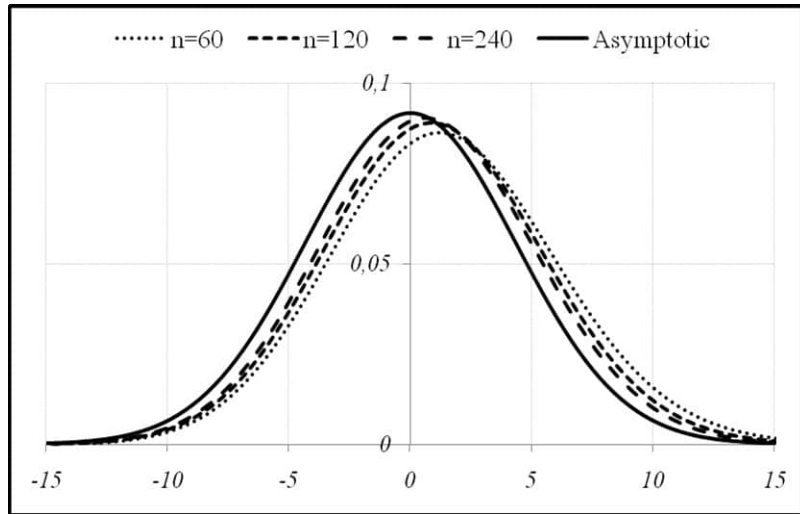
Припустимо, що параметри розподілу дохідностей не змінюються зі зміною об'єму вибірки. За таких припущень отримаємо, що

$$\sqrt{n} (\hat{R}_{VaR} - R_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, 18.907).$$

На рис. 6.1. зображено точні розподіли випадкової величини $\sqrt{n} (\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ при $n = \{60, 120, 240\}$ та асимптотичний розподіл. Зауважимо, що асимптотичний розподіл досить непогано наближає точні розподіли випадкової величини $\sqrt{n} (\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$. Враховуючи, що асимптотичний розподіл є простим у використанні, на відміну від точних розподілів, це обґрунтовує можливість його використання на практиці. Зауважимо, що подібні результати ми

отримуємо також для вибіркової оцінки дисперсії та VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Далі, використовуючи попередні дані, дослідимо швидкість збіжності емпіричних розподілів ваг портфеля з найменшим рівнем VaR складеного з п'яти акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel*. Використовуючи результат теореми 6.4 та доведення наслідку 6.1, отримаємо асимптотичний розподіл ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за припущення, що дохідності активів є нормально розподіленими та неавтокорельованими.



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.1. Точний $n=\{60, 120, 240\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$.

Наслідок 6.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Припустимо, що $s < z_\alpha^2$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbf{w}}'_{VaR} - \mathbf{w}'_{VaR}) \xrightarrow{d} N_k(\mathbf{0}_k, \boldsymbol{\Omega}_{VaR}),$$

де

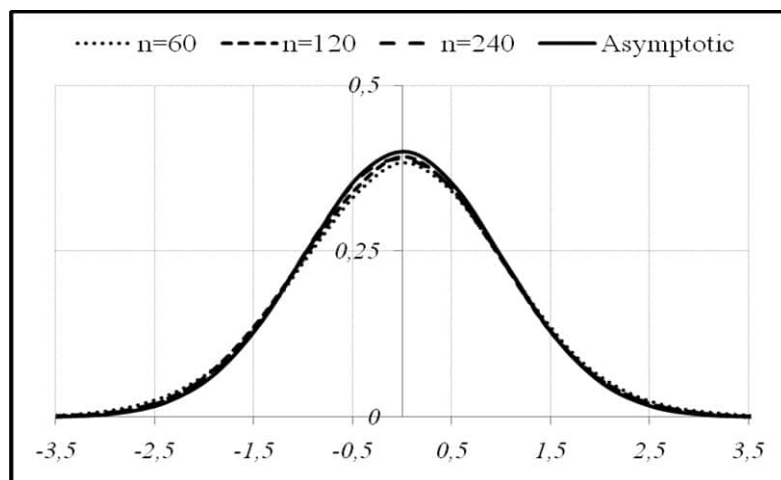
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_{VaR} = & a_1^2 \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} + 4 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + 2 a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \mathbf{v}'_2 \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} + 2 a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{v}_2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} + \\ & + (a_1^2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + 2 a_1 a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \\ & + (a_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + 2 (a_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 q_h (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + 2 (a_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{v}'_3 + \mathbf{v}_3 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + (a_1 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})) ((\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_1 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1})) + \\ & + a_1^2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + a_1 a_2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \\ & + a_1 a_2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + a_2^2 (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) + \\ & + ((\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2) \mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_1 + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}) (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_3 + \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_1) + \\ & + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_3) + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}) (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_1) + \\ & + 2 (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}'_2 + 2 (\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1})^2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}'_3, \end{aligned}$$

де $a_1, a_2, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3$ задані в (6.2)-(6.3).

Використовуючи щомісячні дохідності п'яти акцій, які ми включили в портфель з 01.10.2010 до 01.09.2015, отримаємо асимптотичну матрицю коваріацій.

$$\boldsymbol{\Omega}_{VaR} = \begin{pmatrix} 0.991 & -0.308 & -0.170 & -0.059 & -0.454 \\ -0.308 & 0.639 & -0.299 & -0.055 & 0.024 \\ -0.170 & -0.299 & 1.168 & -0.518 & -0.180 \\ -0.059 & -0.055 & -0.518 & 0.821 & -0.189 \\ -0.454 & 0.024 & -0.180 & -0.189 & 0.800 \end{pmatrix}.$$

На рис. 6.2 зображено емпіричні $n=\{60, 120, 240\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{w}'_{VaR;1} - w'_{VaR;1})$. Бачимо, що наближення є доволі точними.



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.2. Емпіричний $n=\{60, 120, 240\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{w}'_{VaR;1} - w'_{VaR;1})$.

Приклад 6.2. Припустимо, що дохідності активів, з яких ми складаємо портфель, є неавтокорельованими та мають багатовимірний розподіл Стюдента з 5 ступенями свободи (t_5 розподіл). Нехай ми включаємо в портфель п'ять акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *McDonald's*, *Johnson & Johnson*, *Intel*, *Pfizer*, *Merck & Co* (тобто $k=5$). На основі щотижневих дохідностей за період часу з 03.01.2011 по 28.12.2015 перевіримо коректність нашого припущення щодо розподілу дохідностей використавши тест Колмогорова-Смірнова. Отримані p -значення цього тесту наведені в табл. 6.1.

Оцінимо вектор математичних сподівань та матрицю коваріацій вектора дохідностей і параметри ефективної множини.

$$\mu=(0.165, 0.194, 0.189, 0.234, 0.146)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3.697 & 1.582 & 1.836 & 1.510 & 1.656 \\ 1.582 & 3.241 & 2.436 & 2.427 & 2.434 \\ 1.836 & 2.436 & 10.356 & 2.847 & 2.978 \\ 1.510 & 2.427 & 2.847 & 6.065 & 3.470 \\ 1.656 & 2.434 & 2.978 & 3.470 & 6.377 \end{pmatrix},$$

$$R_{GMV}=0.1833, V_{GMV}=2.4386, s=0.0016.$$

Таблиця 6.1
 p -значення тесту Колмогорова-Смірнова для вибірок щотижневих дохідностей акцій *McDonald's*, *Johnson & Johnson*, *Intel*, *Pfizer*, *Merck & Co*.

	<i>McDonald's</i>	<i>Johnson&Johnson</i>	<i>Intel</i>	<i>Pfizer</i>	<i>Merck&Co</i>
p -значення	0.503	0.566	0.419	0.350	0.249

Джерело: розроблено автором

Припустимо, що отримані значення параметрів розподілу є точними. Виберемо значення рівня довіри для VaR $\alpha=0.95$. Легко бачити, що у всіх розглянутих випадках умова $s < \tilde{d}_\alpha^2$ виконується, оскільки $\tilde{d}_\alpha^2=2.436$. Отже, ми маємо змогу побудувати портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR .

Для вибірових оцінок ваг побудованого портфеля асимптотична матриця коваріацій матиме вигляд:

$$\Omega_{VaR} = \begin{pmatrix} 2.376 & -1.652 & -0.212 & -0.215 & -0.296 \\ -1.652 & 4.099 & -0.462 & -1.098 & -0.887 \\ -0.212 & -0.462 & 1.033 & -0.171 & -0.187 \\ -0.215 & -1.098 & -0.171 & 2.287 & -0.804 \\ -0.296 & -0.887 & -0.187 & -0.804 & 2.174 \end{pmatrix},$$

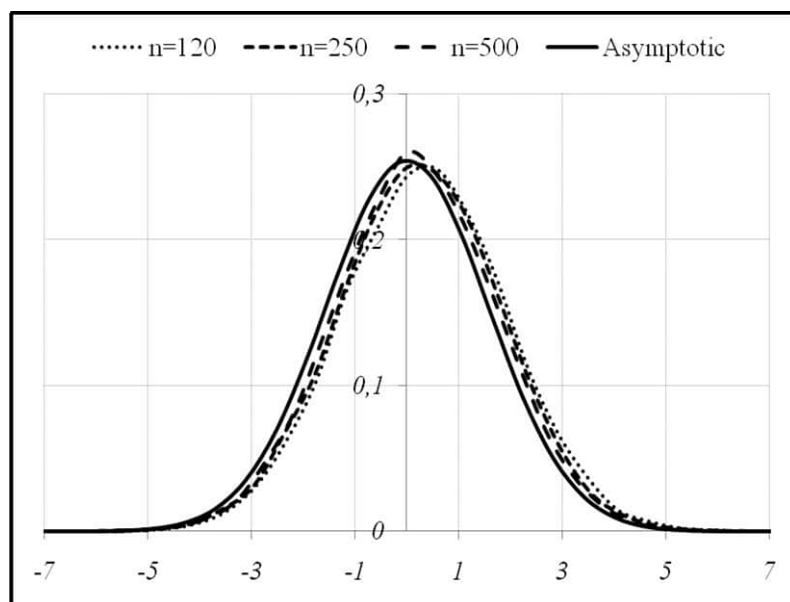
а для вибірових характеристик портфеля, отримаємо:

$$\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, 2.4567),$$

$$\sqrt{n}(\hat{V}_{VaR} - V_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, 35.734),$$

$$\sqrt{n}(\hat{M}_{VaR} - M_{VaR}) \xrightarrow{d} N(0, 11.3576).$$

На рис. 6.3 зображено емпіричні $n=\{120, 250, 500\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель має багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи. У цьому випадку швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного є досить високою, навіть при обсязі вибірки $n=250$ наближення є добрим.

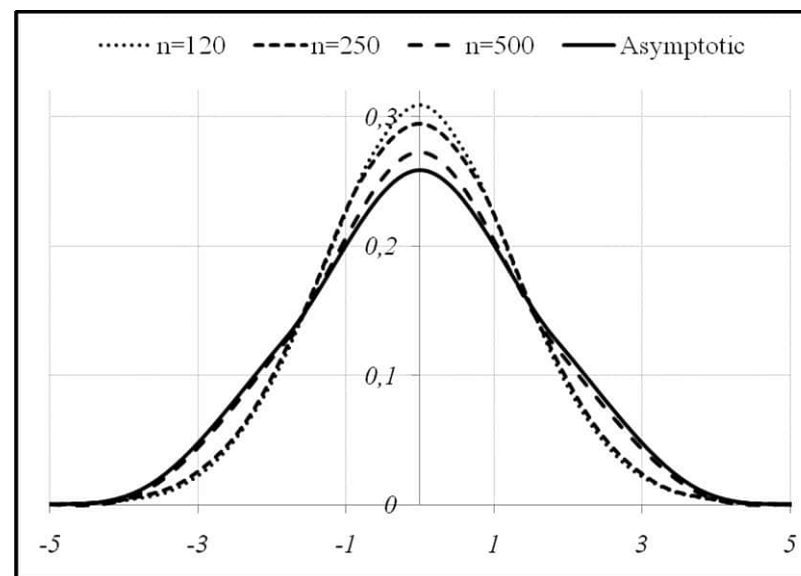


Джерело: розроблено автором

Рис. 6.3. Емпіричний $n=\{120, 250, 500\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$.

На рис. 6.4 зображено емпіричні $n=\{120, 250, 500\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{w}'_{VaR,1} - w'_{VaR,1})$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено

портфель, має багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи. Як і у попередньому випадку, наближення є доволі добрими.



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.4. Емпіричний $n=\{120, 250, 500\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{w}'_{VaR,1} - w'_{VaR,1})$.

Приклад 6.3. Припустимо, що дохідності активів, з яких ми складаємо портфель, є нормально розподіленими та автокорельованими. Нехай ми включаємо в портфель три акції, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Walt Disney*, *Chevron Corporation*, *United Technologies Corporation* (тобто $k=3$). На основі щоденних дохідностей за період часу з 01.06.2015 по 28.12.2015 перевіримо коректність нашого припущення щодо розподілу дохідностей та наявності автокореляцій дохідностей. Використаємо тест Колмогорова-Смірнова для перевірки розподілу та тест Бокса для перевірки на автокорельованість. Отримані p -значення тесту Колмогорова-Смірнова наведені в табл. 6.2, а тесту Бокса – в табл. 6.3.

Бачимо, що при жодному статистично обґрунтованому рівні довіри ми не можемо відхилити гіпотезу про нормальність розподілу дохідностей, натомість гіпотезу про неавтокорельованість дохідностей ми маємо підстави відхилити при рівні довіри 90 %.

Припустимо, що вектор дохідностей вибраних акцій поводить ся як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0,0,0)'$ та дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$. Ми припускаємо, що параметри $VARMA(1,1)$ процесу \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$ є відомими. Їх ми отримуємо, використовуючи щоденні дохідності вибраних акцій за період часу з 01.06.2015 по 28.12.2015.

Таблиця 6.2

p -значення тесту Колмогорова-Смірнова перевірки на нормальність розподілу для вибірок щоденних дохідностей акцій *Walt Disney*, *Chevron Corporation*, *United Technologies Corporation*.

	<i>Walt Disney</i>	<i>Chevron Corporation</i>	<i>United Technologies Corporation</i>
p -значення	0.553	0.508	0.294

Джерело: розроблено автором

Таблиця 6.3

p -значення тесту Бокса перевірки на відсутність автокореляцій зі зміщенням 1 для вибірок щоденних дохідностей акцій *Walt Disney*, *Chevron Corporation*, *United Technologies Corporation*.

	<i>Walt Disney</i>	<i>Chevron Corporation</i>	<i>United Technologies Corporation</i>
p -значення	0.076	0.004	0.058

Джерело: розроблено автором

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.734 & -0.617 & -1.258 \\ 1.903 & -0.767 & -1.700 \\ 0.850 & 0.296 & -1.583 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1.760 & -0.752 & -1.411 \\ 1.855 & -1.008 & -1.835 \\ 0.826 & 0.237 & -1.738 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.620 & 0.905 & 0.948 \\ 0.905 & 3.057 & 0.802 \\ 0.948 & 0.802 & 1.441 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'$$

З отриманої моделі визначимо параметри дохідності

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1.884 & 1.328 & 1.195 \\ 1.328 & 3.765 & 1.171 \\ 1.195 & 1.171 & 1.758 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma}(1) = \begin{pmatrix} 0.121 & 0.350 & 0.114 \\ 0.181 & 0.521 & 0.083 \\ 0.196 & 0.309 & 0.111 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.032, -0.152, -0.198)'$$

Враховуючи властивості $VARMA(1,1)$ процесу, матриці коваріацій зі зміщенням $h > 1$ та $h < 0$ визначаються через матриці \mathbf{A}_1 , $\boldsymbol{\Gamma}(0)$ та $\boldsymbol{\Gamma}(1)$.

Ваги портфеля з найменшою дисперсією і параметри ефективної множини для вектора дохідностей, що поводить ся як $VARMA(1,1)$ процес з параметрами \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$, які ми знайшли вище, становлять:

$$\mathbf{w}_{GMV} = (0.395, 0.095, 0.510)',$$

$$R_{GMV} = -0.128, \quad V_{GMV} = 1.480, \quad s = 0.023.$$

Виберемо значення рівня довіри для VaR $\alpha = 0.95$. Використовуючи результати теорем 6.1-6.3, отримуємо наступні асимптотичні коваріаційні матриці $\boldsymbol{\Omega}_{VaR}$ для ваг портфеля, $\boldsymbol{\Omega}_{RV}$ – для вектора $(R_{VaR}, V_{VaR})'$ та $\boldsymbol{\Omega}_{RM}$ – для вектора $(R_{VaR}, M_{VaR})'$.

$$\boldsymbol{\Omega}_{VaR} = \begin{pmatrix} 1.719 & -0.413 & -1.306 \\ -0.413 & 0.764 & -0.350 \\ -1.306 & -0.350 & 1.656 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{RV} = \begin{pmatrix} 1.833 & 0.029 \\ 0.029 & 4.668 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{RM} = \begin{pmatrix} 1.833 & -1.813 \\ -1.813 & 3.909 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо середнє та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ і $\sqrt{n}(\hat{w}_{VaR,i} - w_{VaR,i})$ для кожного $i=1,2,3$ та кожного n . Результати моделювання наведено у таблиці 6.4.

Таблиця 6.4

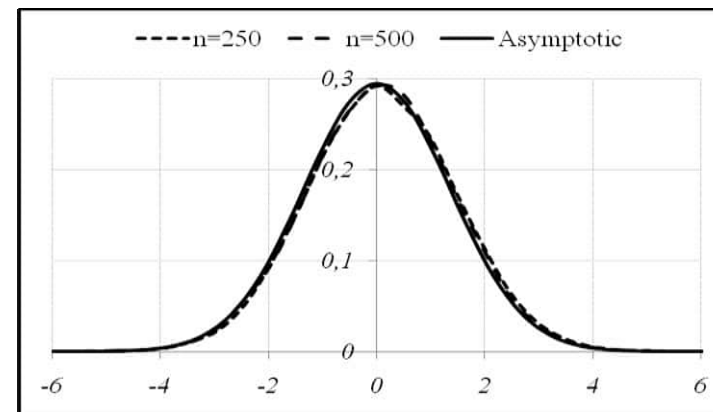
Середнє значення і дисперсія випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ та $\sqrt{n}(\hat{w}_{VaR,i} - w_{VaR,i})$ для кожного $i=1,2,3$ при $n \in \{120, 250, 500\}$.

	n=120		n=250		n=500		Асимптотичні	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
R_{VaR}	0.1296	1.8693	0.0874	1.8564	0.0554	1.8448	0	1.8332
$w_{VaR,1}$	0.0214	1.7912	0.0096	1.76079	0.01587	1.7274	0	1.7191
$w_{VaR,2}$	-0.0001	0.7955	0.0095	0.7792	0.00008	0.7747	0	0.7638
$w_{VaR,3}$	-0.0213	1.7147	-0.0191	1.7030	-0.0270	1.6638	0	1.6560

Джерело: розроблено автором

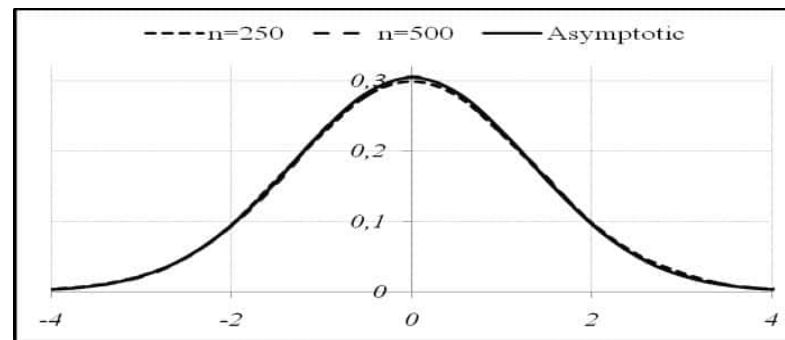
З таблиці 6.4 бачимо, що середні та дисперсії, отримані емпірично методом імітаційного моделювання, є близькі до асимптотичних значень, особливо при обсягах вибірки n більших за 250.

На рис. 6.5. зображено емпіричні $n=\{250, 500\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками і параметрами $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{\Sigma}$, та $\mathbf{\Phi}_0$. У цьому випадку швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного є доволі швидкою. Зважаючи на це, інвестор, що будує свій портфель на основі мінімізації VaR , може використовувати отримані результати на практиці. Подібну поведінку спостерігаємо і у випадку розподілів вибіркових оцінок ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR (рис. 6.6).



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.5. Емпіричний $n=\{250, 500\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.6. Емпіричний $n=\{250, 500\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{w}_{VaR,i} - w_{VaR,i})$.

Приклад 6.4. Нехай ми включимо в портфель три активи (тобто $k=3$). Припустимо, що дохідності активів, з яких ми складаємо портфель, поведуться як $VARMA(1,1)$ процес з залиш-

ками, що мають багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}, \quad (6.25)$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)'$ та дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$. Ми припускаємо, що параметри $VARMA(1,1)$ процесу \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$ є відомими. Їх ми візьмемо з попереднього прикладу

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.734 & -0.617 & -1.258 \\ 1.903 & -0.767 & -1.700 \\ 0.850 & 0.296 & -1.583 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1.760 & -0.752 & -1.411 \\ 1.855 & -1.008 & -1.835 \\ 0.826 & 0.237 & -1.738 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.620 & 0.905 & 0.948 \\ 0.905 & 3.057 & 0.802 \\ 0.948 & 0.802 & 1.441 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'.$$

З отриманої моделі, використовуючи метод Монте-Карло з 10000 повторень, в кожному повторенні генеруємо вибірки з 10000 елементів з нашого процесу, визначимо параметри дохідності

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.030, -0.151, -0.197)', \quad \boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1.884 & 1.330 & 1.204 \\ 1.330 & 3.767 & 1.179 \\ 1.204 & 1.179 & 1.770 \end{pmatrix}.$$

Ваги портфеля з найменшою дисперсією та параметри ефективної множини для вектора дохідностей, що поводить як $VARMA(1,1)$ процес з залишками, що мають багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи з параметрами \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$, становлять

$$\mathbf{w}_{GMV} = (0.397, 0.096, 0.507)',$$

$$R_{GMV} = -0.126, \quad V_{GMV} = 1.486, \quad s = 0.023.$$

Виберемо значення рівня довіри для $VaR \alpha = 0.95$. Використовуючи результати теорем 6.6-6.7, отримуємо такі асимптотичні коваріаційні матриці $\boldsymbol{\Omega}_{VaR}$ для ваг портфеля, $\boldsymbol{\Omega}_{RV}$ – для вектора $(R_{VaR}, V_{VaR})'$ та $\boldsymbol{\Omega}_{RM}$ – для вектора $(R_{VaR}, M_{VaR})'$, враховуючи той факт, що $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(0))')$ є асимптотично нормально розподілена з середнім $\boldsymbol{\theta}$ та коваріаційною матрицею $\boldsymbol{\Omega}/n$, де [59]

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\pi \mathbf{Q}(0),$$

3

$$\mathbf{Q}(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(h),$$

та

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(h) =$$

$= \text{Cov}([\mathbf{X}'_{t+h}, [\text{vech}((\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})')]]', [\mathbf{X}'_t, [\text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})')]]']')$
автоковаріаційна матриця зі зміщенням h процесу $\{[\mathbf{X}'_t, [\text{vech}((\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})')]]'\}$,

$$\boldsymbol{\Omega}_{VaR} = \begin{pmatrix} 3.559 & -0.890 & -2.669 \\ -0.890 & 1.575 & -0.685 \\ -2.669 & -0.685 & 3.355 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{RV} = \begin{pmatrix} 1.866 & 0.038 \\ 0.038 & 15.200 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}_{RM} = \begin{pmatrix} 1.866 & -1.844 \\ -1.844 & 7.950 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо середнє та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ і $\sqrt{n}(\hat{w}_{VaR,i} - w_{VaR,i})$ для кожного $i=1,2,3$ та кожного n . Результати моделювання наведено у таблиці 6.5.

Таблиця 6.5

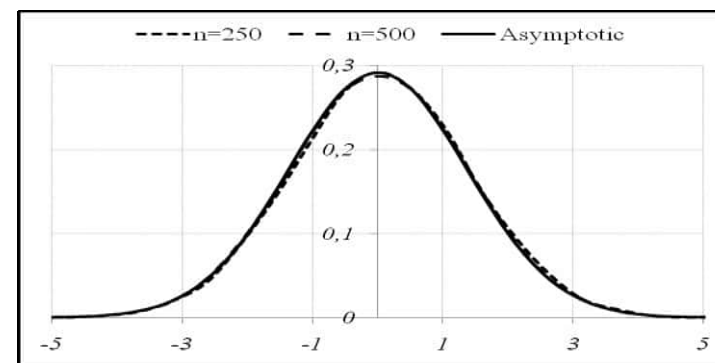
Середнє значення та дисперсія випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ та $\sqrt{n}(\hat{w}_{VaR,i} - w_{VaR,i})$ для кожного $i=1,2,3$ за припущення, що вектор дохідностей, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з залишками, що мають багатовимірний розподіл Стьюдента з п'ятьма ступенями свободи.

	n=120		n=250		n=500		Асимптотичні	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
R_{VaR}	0.0929	1.8835	0.0434	1.8773	0.0081	1.8678	0	1.8664
$w_{VaR,1}$	0.0338	3.0294	0.0098	3.1242	0.0047	3.2984	0	3.5595
$w_{VaR,2}$	-0.0125	1.3203	-0.0150	1.4024	-0.0237	1.4577	0	1.5753
$w_{VaR,3}$	-0.0213	2.7970	0.0052	2.9292	0.0189	3.0877	0	3.3548

Джерело: розроблено автором

З табл. 6.5 бачимо, що середні та дисперсії отримані емпірично методом імітаційного моделювання є близькі до асимптотичних значень, особливо при обсягах вибірки n більших за 250 для оцінки дохідності та 500 для ваг.

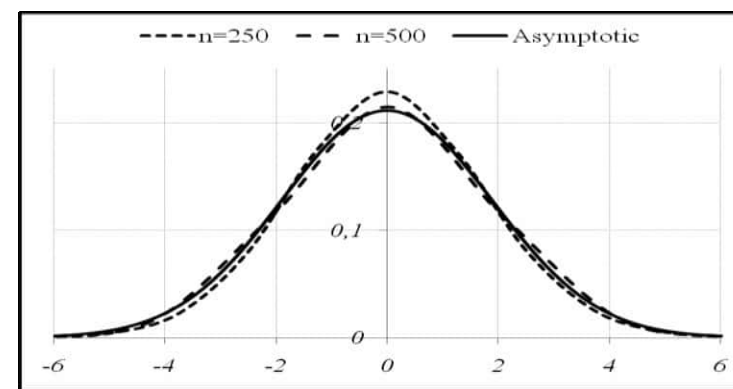
На рис. 6.7 зображено емпіричні $n=\{250, 500\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з залишками, що мають багатовимірний розподіл Стьюдента з п'ятьма ступенями свободи (6.25). Швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного є доволі швидкою. Зважаючи на це, інвестор, що буде свій портфель на основі мінімізації VaR , може використовувати отримані результати на практиці.



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.7. Емпіричний $n=\{250, 500\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{R}_{VaR} - R_{VaR})$.

Дещо повільнішу, хоча і достатньо швидко, збіжність спостерігаємо (рис. 6.8) для ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з залишками, що мають багатовимірний розподіл Стьюдента з п'ятьма ступенями свободи (6.25).



Джерело: розроблено автором

Рис. 6.8. Емпіричний $n=\{500, 1000\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{w}'_{VaR,1} - w'_{VaR,1})$.

РОЗДІЛ 7

СУМІСНІСТЬ НОВІТНЬОЇ ТА КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЙ ПОРТФЕЛЯ

7.1. Мінімізація Value-at-Risk портфеля фінансових активів як узагальнення класичної теорії портфеля

На сьогодні немає одного загально визнаного методу побудови портфеля фінансових активів. Найвідомішими методами є класичний метод Марковіца та метод мінімізації *Value-at-Risk* портфеля. Зрозуміло, що цікавим є питання сумісності цих методів.

У [42] зауважено, що портфель з найменшим рівнем *VaR* є ефективним за Марковіцем, але не збігається із портфелем з найменшою дисперсією. Крім цього, показано, що портфелі зі структурою, отриманою методом максимізації корисності на основі *VaR* [14] та методом максимізації відношення Шарпа при *VaR* як мірі ризику [1] також є ефективними за Марковіцем. Виникає запитання чи є метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі мінімізації *VaR* еквівалентний методу Марковіца чи він є узагальненням методу Марковіца чи навпаки, метод Марковіца є більш загальний?

Нашим завданням є дослідження методів Марковіца та мінімізації *VaR* вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на еквівалентність.

Нагадаємо, що класична задача раціонального вибору структури портфеля фінансових активів Марковіца має вигляд (1.5). Використовуючи позначення (1.7)-(1.9) для ваг і характеристик портфеля з найменшою дисперсією, розв'язок задачі (1.5) можемо записати у вигляді [14]:

$$\mathbf{w}_{R_0} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_0 - R_{GMV}}{s} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

$$\text{де } \mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}.$$

Характеристики портфеля фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{R_0} , R_{R_0} та V_{R_0} мають вигляд (1.11), а *VaR* при рівні довіри α становить

$$M_{R_0}(\alpha) = z_\alpha \sqrt{V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}} - R_0.$$

У [117] розглянуто задачу безумовної, відносно очікуваної доходності, мінімізації *VaR* портфеля. У наших позначеннях ця задача може бути записана у вигляді (4.6). Розв'язок задачі (4.6) має вигляд (4.7) з характеристиками (4.8)-(4.10).

Зауважимо, що задача умовної мінімізації *VaR* портфеля вигляду

$$\begin{cases} M_w(\alpha) = z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \\ R_w = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{w} = R_0 \end{cases} \quad \text{за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (7.1)$$

є еквівалентною задачі умовної мінімізації дисперсії портфеля (1.5) при $R_0 \geq R_{VaR}(\alpha)$. Отже, при виконанні попередньої умови на R_0 розв'язки задач (1.5) та (4.6) збігаються. Нехай вибраний рівень довіри $\alpha < 1$ є фіксованим. Тоді, враховуючи те, що $R_{VaR}(\alpha) > R_{GMV}$ для всіх $\alpha < 1$, виникає запитання про еквівалентність задач (1.5) та (4.6) у випадку коли, $R_{VaR}(\alpha) > R_0 \geq R_{GMV}$. За такого вибору очікуваної доходності R_0 , зрозуміло, що розв'язок задачі (4.6) не існує, тобто усі ефективні за Марковіцем портфелі з доходністю меншою за $R_{VaR}(\alpha)$ не є ефективними у просторі очікувана доходність-*VaR*. Сформулюємо отриманий результат у вигляді твердження.

Твердження 7.1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ та вибраний рівень довіри $\alpha < 1$ є фіксованим. Тоді усі ефективні за Марковіцем портфелі з доходністю меншою за $R_{VaR}(\alpha)$ не є ефективними, у просторі очікувана

дохідність- VaR . Зокрема не є ефективним портфель з найменшою дисперсією.

Розглянемо цю проблему з іншого боку. Чи кожен портфель з найменшим рівнем VaR є ефективним за Марковіцем? Відповідь на це запитання наведено у наступному твердженні.

Твердження 7.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо X_t – k -вимірний вектор дохідностей у момент часу t . Припустимо, що $X_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Тоді для довільного α , що задовольняє умову (4.11), портфель з найменшим рівнем VaR (портфель, зі структурою $\mathbf{w}_{VaR}(\alpha)$) є ефективним за Марковіцем.

Доведення. Підставивши в умову задачі (1.5) значення $R_0 = R_{VaR}(\alpha)$, отримаємо:

$$\mathbf{w}_{R_0} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_{VaR}(\alpha) - R_{GMV}}{s} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}_{VaR}(\alpha).$$

Отже, портфель зі структурою $\mathbf{w}_{VaR}(\alpha)$ можна отримати як розв'язок задачі (1.5), що і доводить його ефективність за Марковіцем.

Ми дослідили питання сумісності методів Марковіца та мінімізації VaR портфеля вибору раціональної структури портфеля фінансових активів за класичних умов щодо поведінки вектора дохідностей активів, з яких ми складаємо портфель. Показано, що два цих методи не є еквівалентними. З цією метою розглянуто множини ефективних портфелів, які отримуються при використанні кожного з методів. Доведено, що існують ефективні за Марковіцем портфелі, які не є ефективними в умовах використання мінімізації VaR при виборі структури портфеля (таким портфелем зокрема є портфель з найменшою дисперсією), а також, що всі ефективні портфелі в умовах використання мінімізації VaR при виборі структури портфеля є ефективними за Марковіцем. Тобто, множина ефективних за Марковіцем портфелів є ширшою ніж множина ефективних портфелів, отримана при використанні методу мінімізації VaR при виборі раціональної структури портфеля.

7.2. Максимізація відношення Шарпа портфеля фінансових активів у контексті мінімізації ризику

Класична теорія портфеля була розроблена Г. Марковіцем [108]. Її сутність полягає в пошуку раціонального розподілу коштів між фінансовими активами з метою отримання певного рівня прибутку за найменшого ризику. Тож основним завданням при побудові портфеля є оцінка його ризику. При цьому актуалізується питання вибору величини, яка б дала можливість якомога точніше виміряти ризик.

У класичній теорії для описання ризику використовують дисперсію. І хоч такий вибір мало узгоджується із практичним розумінням ризику, класична теорія портфеля завдяки своїй простоті зайняла важливе місце як у фінансовій науці, так і у практиці фінансової діяльності. Згодом з'явилося поняття портфеля із найменшим ризиком, коли дисперсія портфеля мінімізується без накладання додаткових умов на очікуваний дохід, та поняття ефективної множини. Поняття ефективної множини було аналітично описано Р. Мертоном [110].

Зазначимо, що раціонально задати рівень дохідності портфеля доволі непросто, особливо коли діють додаткові умови. До того ж при виборі раціональної структури портфеля необхідно відповідно урахувати співвідношення між очікуваним доходом і ризиком. Усе це призвело до вироблення інших критеріїв вибору структури портфеля.

Вибір раціональної структури портфеля часто здійснюється за критеріями максимізації очікуваної корисності портфеля [116]. Корисність у цьому випадку визначається за допомогою спеціального коефіцієнта, який описує ставлення інвестора до ризику.

При побудові інвестиційного портфеля одним із найпопулярніших критеріїв вибору раціональної структури є максимізація відношення Шарпа [101], [126]. Відомо, що портфель із максимальним відношенням Шарпа належить до ефективної множини. Вадою цього методу є проблема вибору міри ризику. Як і в класичному означенні, за ризик тут приймається дисперсія портфеля.

У кінці минулого століття дисперсія як міра ризику зазнала нищівної критики. Тому для його обчислення було запропоновано квантильну міру Value-at-Risk [46], яка нині є найпоширенішим інструментом оцінки ризику. Додатковим параметром квантильної міри є рівень довіри, який класично прийнято позначати α .

Зважаючи на популярність двох попередньо описаних методів, виникає питання про їх еквівалентність.

Уперше до питання вибору раціональної структури портфеля із найменшим рівнем VaR звернулися Г. Александер і М. Баптіста [42], які показали, що такий портфель належить ефективній множині Марковіца. Змінюючи значення рівня довіри α від 1 до найменшого, за якого задача мінімізації має сенс, тобто виконується умова (4.11), можна отримати ефективну множину Марковіца. Отже, результат мінімізації ризику портфеля залежить від вибору міри ризику. Однак при переході від дисперсії до VaR деякі портфелі втрачають свою ефективність [29]. Цей недолік не притаманний відношенню Шарпа. Портфель, побудований на основі максимізації відношення Шарпа, завжди буде ефективним, якщо мірою ризику буде VaR , тобто він належатиме відповідній ефективній множині. Отже, повинен існувати такий рівень довіри α_{SR} , за якого портфель із максимальним відношенням Шарпа збігатиметься із портфелем, що має найменший рівень VaR за рівня довіри α_{SR} . Зауважимо, що порівняння портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа (1.18) (за різних мір ризику) при невиконанні припущення про нормальність розподілу доходностей активів, з яких складено портфель, досліджено у [12].

Наше завдання полягає у дослідженні можливості переходу від задачі максимізації відношення Шарпа портфеля до задачі мінімізації VaR портфеля, знаходженні рівня довіри α_{SR} , за якого ці дві задачі будуть еквівалентними, визначенні ймовірнісних характеристик вибіркової оцінки α_{SR} .

Перед формуванням портфеля, тобто перед розподілом коштів між активами, необхідно вибрати певний критерій, який, з одного боку, відобразить очікування від портфеля, а з іншого – задасть метод побудови портфеля. Загалом класичною задачею при формуванні портфеля є досягнення якомога більшої очікуваної доходності за якомога меншого ризику. Формально, прийнявши за ризик портфеля його дисперсію, оптимізаційну задачу можемо записати

у вигляді (1.4). Зауважимо, що сформована таким чином задача не має розв'язку в загальному випадку. Спочатку необхідно звести її до задачі одновимірної оптимізації. Г. Марковіц [108] для вирішення цієї проблеми запропонував обмежити знизу бажаний рівень очікуваної доходності портфеля та мінімізувати його ризик або, що еквівалентно, обмежити ризик портфеля зверху і максимізувати його очікувану доходність. За такого підходу оптимізується лише одна із характеристик портфеля. В. Шарп [126] для досягнення оптимізації портфеля запропонував використати відношення очікуваної доходності портфеля до його ризику. І чим більшим є таке відношення, тим кращим буде портфель. Приймаючи за міру ризику портфеля його дисперсію, оптимізаційна проблема Шарпа матиме вигляд (1.13), де відношення Шарпа, за наявності безризикового розміщення коштів з доходністю r_0 , визначається у (1.12).

Як було зазначено вище, дисперсії як мірі ризику притаманні численні недоліки. З огляду на це у практичній діяльності фінансових установ великої популярності набули квантильні міри ризику, до яких належить VaR . Зважаючи на це, виникає запитання щодо обчислення відношення Шарпа із використанням VaR як міри ризику, а також як критерію при виборі раціональної структури портфеля.

Припустимо, що на ринку не існує можливості безризикового розміщення коштів, тобто $r_0=0$. З означення відношення Шарпа (1.12) маємо, що перехід від використання дисперсії до VaR при обчисленні ризику призведе до зміни значення цього відношення і набуде вигляду:

$$SR_w = R_w / (z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w). \quad (7.1)$$

Цікавим є також запитання зміни раціональної структури портфеля фінансових активів при переході від оптимізаційної задачі вибору структури (1.13) до наступної задачі

$$R_w / (z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w) \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (7.2)$$

Неважко показати, що оптимізаційні задачі (1.13) та (7.2) є еквівалентними, а отже, структура портфеля активів залишиться незмінною при переході від (1.13) до (7.2).

Теорема 7.1. Припустимо, що $z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w > 0$.

Тоді оптимізаційні задачі (1.13) і (7.2) є еквівалентними.

Доведення. Задача (7.2) є еквівалентна задачі

$$(z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w) / R_w \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1,$$

яка, своєю чергою, може бути записана у вигляді:

$$(z_\alpha \sqrt{V_w}) / R_w - 1 \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Використовуючи прості арифметичні операції, отримаємо, що попередня задача є еквівалентною задачі

$$R_w / \sqrt{V_w} \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1,$$

що і потрібно було довести.

Результатом теореми 7.1 є те, що при переході від дисперсії як міри ризику до VaR не потрібно змінювати структуру портфеля фінансових активів, вибрану на основі максимізації відношення Шарпа. Цей факт, очевидно, важливий для використання на практиці. З іншого боку, як показано в [125], для ваг портфеля із найбільшим відношенням Шарпа неможливо побудувати незміщену оцінку та, крім цього, невідомо, чи існує принаймні асимптотична незміщена оцінка для ваг таким чином побудованого портфеля. Цей результат викликає серйозні сумніви щодо можливості використання окресленого методу при виборі раціональної структури портфеля. Проте, як наголошено вище, з допомогою мінімізації VaR за різних рівнів довіри можна отримати будь-який портфель із ефективної множини Марковіца. Іншими словами, існує такий рівень довіри α_{SR} , за якого структура портфеля із найменшим рівнем VaR та портфеля із найбільшим відношенням Шарпа збігаються.

Теорема 7.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор

дохідностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ і всі елементи вектора $\boldsymbol{\mu}$ не є однаковими. Тоді за рівня довіри

$$\alpha_{SR} = \Phi\left(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}\right), \quad (7.3)$$

де $\Phi(\cdot)$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу, розв'язки задачі максимізації відношення Шарпа та задачі мінімізації VaR портфеля збігаються.

Доведення. Розглянемо дві можливі оптимізаційні задачі для вибору раціональної структури портфеля:

1) максимізація відношення Шарпа

$$R_w / \sqrt{V_w} \rightarrow \max \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1;$$

2) мінімізація VaR портфеля за рівня довіри α

$$z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1.$$

Нагадаємо, що очікувана дохідність портфеля становить $R_w = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$, а дисперсія – $V_w = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. З огляду на це, розв'язки попередніх задач оптимізації можна записати у такому вигляді:

$$\mathbf{w}_{VaR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}.$$

Причому, дисперсія портфелів обчислюється так:

$$V_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s) \cdot \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}, \quad V_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Прирівнюючи попередні вирази, отримаємо

$$\frac{z_\alpha^2}{(z_\alpha^2 - s) \cdot \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Звідси

$$\frac{z_\alpha^2}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} = z_\alpha^2 \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} - s \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Отже,

$$z_\alpha^2 \left(\frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} - \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} \right) = -s \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} - \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} &= \frac{1}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} \left(\frac{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} - \boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} \right) = \\ &= -\frac{1}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} \left(\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}'\frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\boldsymbol{\mu} \right) = -\frac{1}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} \boldsymbol{\mu}' \left(\Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \right) \boldsymbol{\mu} = \\ &= -\frac{1}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} s, \end{aligned}$$

отримаємо

$$-z_\alpha^2 \frac{1}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2} s = -s \frac{\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

З попередньої рівності випливає, що

$$z_\alpha^2 = \boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}.$$

Враховавши, що z_α є α квантилем стандартного нормального розподілу, отримаємо твердження теореми.

Використання результату теореми 7.2 дає змогу побудувати портфель із максимальним відношенням Шарпа, мінімізуючи VaR портфеля. Утім, отримані результати не можуть бути застосовані на практиці, оскільки параметри розподілу вектора доходностей $\boldsymbol{\mu}$ і Σ зазвичай є невідомими. Тому для практичного використання отриманих результатів ці параметри необхідно відповідно оцінити.

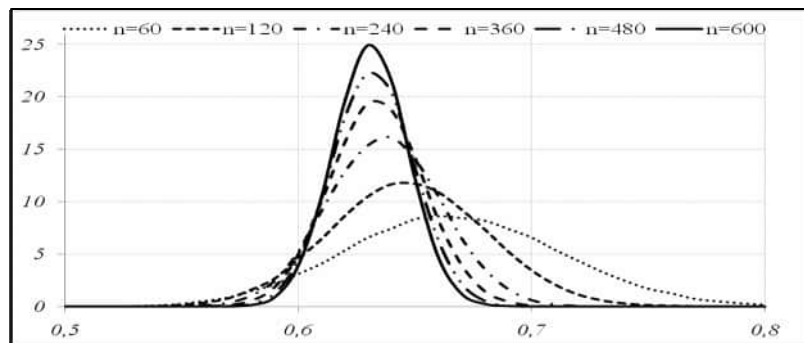
Ми використаємо вибіркові оцінки параметрів розподілу (1.27). Підставляючи оцінки (1.27) у вираз (7.3), отримаємо оцінку для рівня довіри α_{SR} , яку позначимо $\hat{\alpha}_{SR}$. Оскільки вибіркові оцінки (1.27) є в загальному випадку випадковими величинами, то $\hat{\alpha}_{SR}$ – це також випадкова величина. Дослідимо ймовірнісні властивості цієї оцінки, а саме, її точність, за припущення, що доходності активів, з яких складено портфель, є неавтокорельованими та нормально розподіленими. Для цього припустимо спочатку, що значення параметрів розподілу є відомими і обчислимо точне значення для рівня довіри α_{SR} . На наступному кроці припустимо, що вектор доходностей нормально розподілений із вибраними параметрами, та на основі згенерованої вибірки оцінимо значення $\hat{\alpha}_{SR}$. Повторимо цей алгоритм, наприклад, 100 000 разів і дослідимо розподіл значень $\hat{\alpha}_{SR}$ відносно точного значення. Значення невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та Σ виберемо на основі п'яти щомісячних курсів акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel* (тобто $k=5$). Обчислимо їхні доходності та виберемо вибірку розміру $n=60$ (з 01.10.2010 до 01.09.2015), отримаємо

$$\boldsymbol{\mu} = (0.8918, 0.7984, 1.8345, 1.0831, 0.6181)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 36.510 & 24.278 & 13.315 & 6.154 & 17.562 \\ 24.278 & 60.648 & 23.218 & 13.041 & 13.433 \\ 13.315 & 23.218 & 33.398 & 15.354 & 10.827 \\ 6.154 & 13.041 & 15.354 & 30.697 & 6.868 \\ 17.562 & 13.433 & 10.827 & 6.868 & 36.276 \end{pmatrix}.$$

На основі цих параметрів отримаємо, що значення рівня довіри, за якого структури портфелів із максимальним відношенням Шарпа і найменшим рівнем VaR збігаються, становить $\alpha_{SR}=0.63176$.

На рис. 7.1 зображено розподіл значень оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ залежно від обсягу вибірок, на основі яких проведено оцінювання. Зазначимо, що навіть за невеликого обсягу вибірки ($n=60$, $n=120$) значення оцінок рівня довіри знаходяться в доволі вузькому інтервалі. Зі зростанням обсягів вибірок значення ще більше ущільнюються.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.1. Розподіл значень $\hat{\alpha}_{SR}$ за припущення нормальності розподілу вектора дохідностей активів, з яких складено портфель.

Середні значення та дисперсії (табл. 7.1), отримані на основі вибірок, підтверджують попередні спостереження, що вибіркові оцінки для рівня довіри α_{SR} є доволі точними.

Таблиця 7.1

Середні значення та дисперсії $\hat{\alpha}_{SR}$ за припущення нормальності розподілу вектора дохідностей активів, з яких складено портфель.

Обсяг вибірки n	Середнє	Дисперсія
60	0.6723	0.002093
120	0.6524	0.001120
240	0.6421	0.000594
360	0.6387	0.000402
480	0.6370	0.000305
600	0.6360	0.000246

Джерело: розроблено автором

Ми розглянули можливість побудови портфеля фінансових активів із максимальним відношенням Шарпа на основі критерію мінімізації VaR . Зважаючи на поширення відношення Шарпа як

показника якості портфеля, проведено аналіз впливу вибору міри ризику на структуру портфеля, побудованого на основі критерію максимізації відношення Шарпа. Доведено, що за класичних припущень щодо поведінки дохідності, перехід від дисперсії до VaR при вимірюванні ризику не впливає на структуру портфеля із максимальним відношенням Шарпа. Зрозуміло, що отриманий результат є підтвердженням важливості цього інструменту в теорії портфеля. Водночас виникло запитання про місце портфеля із максимальним відношенням Шарпа у множині портфелів із найменшим рівнем VaR .

Як зазначається в [42], змінюючи рівень довіри від найменшого можливого значення до 1, можна отримати ефективну, за Марковіцем, множину портфелів, одним із яких є портфель із максимальним відношенням Шарпа. Отже, за певного рівня довіри цей портфель є портфелем із найменшим рівнем VaR . Ми представили аналітичний вираз для обчислення рівня довіри α_{SR} , який залежить лише від параметрів розподілу вектора дохідностей, тобто від об'єктивних показників. Зауважимо, що значення цих параметрів на практиці є невідомими, а тому у своїх розрахунках ми змушені використовувати оцінки цих значень, які в загальному випадку є випадковими величинами. Отже, виникає необхідність дослідити ймовірнісні властивості побудованої оцінки рівня довіри α_{SR} . На прикладі п'яти щомісячних курсів акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft*, *JPMorgan Chase*, *Walt Disney*, *Boeing*, *Intel*, за період часу з 01.10.2010 до 01.09.2015 показано, що точність вибіркової оцінки для параметра α_{SR} є задовільною навіть за невеликого обсягу вибірки ($n=120$) та доволі швидко зростає у разі збільшення обсягу вибірки. Крім того, враховуючи отримані середні значення і дисперсії оцінки рівня довіри α_{SR} , ми дійшли висновку, що задачу максимізації відношення Шарпа на практиці можна замінити задачею мінімізації VaR , яка є універсальнішим методом побудови портфеля фінансових активів.

7.3. Властивості вибіркової оцінки рівня довіри α_{SR} , при якому задачі максимізації відношення Шарпа та мінімізації VaR еквівалентні

Як зазначалося вище, використати результат теореми 7.2 на практиці інвестор не має змоги, спершу необхідно оцінити невідомі параметри розподілу вектора доходностей. Зважаючи на те, що оцінки параметрів розподілу є випадковими величинами, то випадковою величиною будуть і оцінки рівня довіри α_{SR} . Для кращого розуміння можливості використання цієї оцінки на практиці, необхідно дослідити її імовірнісні властивості. З теорії імовірності та статистики відомо, що імовірнісні властивості вибірових оцінок залежать від імовірнісних властивостей вибірки, на основі якої побудовано оцінку. Ми розглянемо декілька припущень щодо поведінки вектора доходностей активів, з яких ми формуємо портфель. Спочатку ми припустимо, що доходності є неавтокорельованими та нормально розподіленими. Далі ми розглянемо випадок, коли доходності мають багатовимірний еліптичний розподіл та є неавтокорельованими. Наступним кроком нашого дослідження буде розгляд імовірнісних властивостей вибіркової оцінки рівня довіри α_{SR} за припущення, що вектор доходностей поводить як стаціонарний процес Гауса. Останнім кроком дослідження буде узагальнення отриманих результатів до випадку, коли вектор доходностей активів, з яких складено портфель, поводить як довільний стаціонарний процес, для якого квантиль розподілу доходності портфеля не залежить від ваг портфеля.

7.3.1. Нормально розподілені та неавтокорельовані доходності активів

Нехай ми формуємо портфель з k активів. Нехай нам відома вибірка попередніх значень векторів доходностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$. На основі цієї вибірки ми будемо вибірові оцінки не-

відомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ (1.27) та підставимо отримані значення в (7.3). Отримаємо вибірову оцінку рівня довіри α_{SR} :

$$\hat{\alpha}_{SR} = \Phi\left(\sqrt{\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}}\right). \quad (7.4)$$

Теорема 7.3. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді густина оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ матиме вигляд*

$$f_{\hat{\alpha}_{SR}}(x) = 2 \frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi(\Phi^{-1}(x))} f_{k,n-k;n\delta} \left(\frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} (\Phi^{-1}(x))^2 \right),$$

де $\delta = \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, $\varphi(\cdot)$ та $\Phi(\cdot)$ густина і функція розподілу стандартного нормального розподілу, $f_{k,n-k;n\delta}(\cdot)$ – густина нецентрального розподілу Фішера з k та $n-k$ ступеня свободи та нецентральним параметром $n\delta$.

Доведення. З теореми 3.2.13 [113], ми отримаємо

$$\frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} \sim F_{k,n-k;n\delta},$$

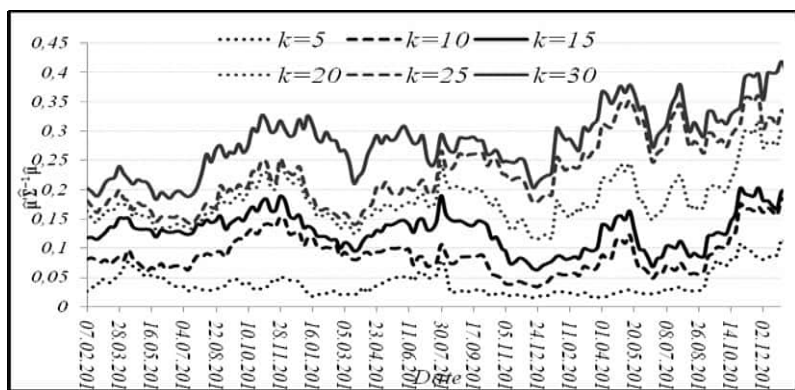
де $\delta = \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$, $F_{k,n-k;n\delta}(\cdot)$ – функція розподілу нецентрального розподілу Фішера з k та $n-k$ ступеня свободи та нецентральним параметром $n\delta$. Отже,

$$\begin{aligned} f_{\hat{\alpha}_{SR}}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} Pr(\hat{\alpha}_{SR} \leq x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} Pr\left(\frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} \leq \frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} (\Phi^{-1}(x))^2\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_{k,n-k;n\delta} \left(\frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} (\Phi^{-1}(x))^2 \right) = \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi(\Phi^{-1}(x))} f_{k,n-k;\delta} \left(\frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} (\Phi^{-1}(x))^2 \right).$$

З теореми 7.3 випливає, що густина оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ залежить лише від трьох параметрів, кількості активів у портфелі k , обсягу вибірки n , та квадратичної форми $\delta = \mu' \Sigma^{-1} \mu$. Оскільки параметри k та n здебільшого на практиці є відомими, інвестору потрібно прокалібрувати функцію густини відповідно до можливих значень δ для того, щоб дослідити властивості розподілу $\hat{\alpha}_{SR}$, використовуючи симуляції.

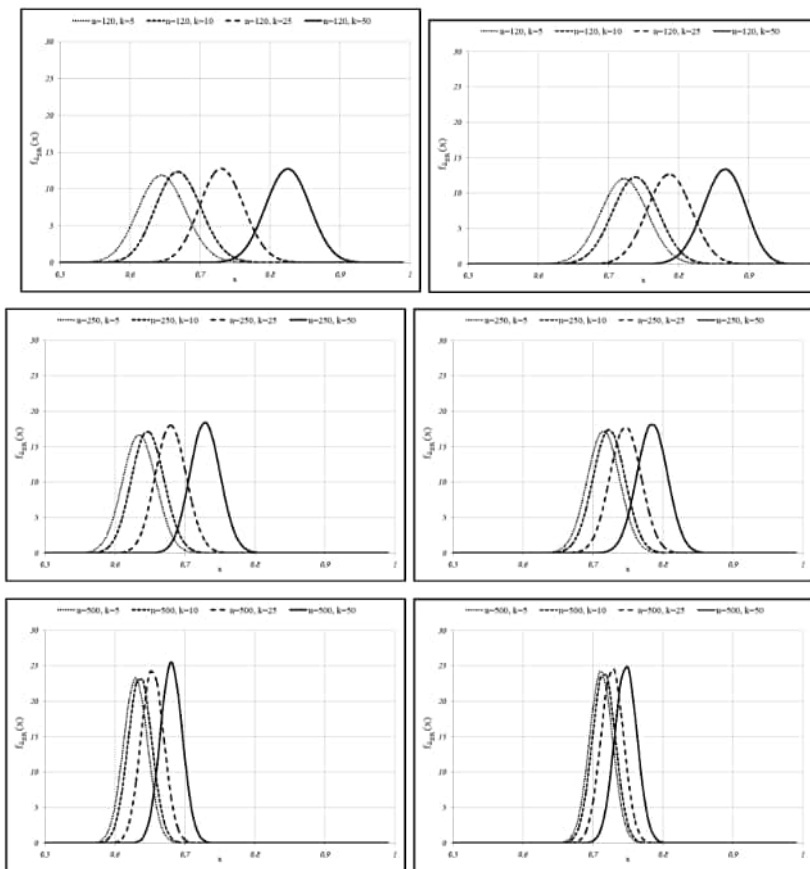
Для дослідження можливих значень параметра δ розглянемо щотижневі дохідності 30 акцій включених в індекс *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015. У цьому випадку нас не цікавить розподіл вектора дохідностей, тому ми не проводимо статистичних тестів. Використовуючи ці дані, ми, для різних значень $k \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$, оцінимо значення параметра δ на основі методу біжучого вікна розміру $n=110$. Результати представлені на рис. 7.2.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.2. Оцінка параметра $\delta = \mu' \Sigma^{-1} \mu$ для портфелів, складених з $k \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ активів, обчислена на основі щотижневих дохідностей 30 акцій включених в індекс *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015, використовуючи метод біжучого вікна розміру $n=110$.

З рис 7.2 бачимо, що значення оцінки параметра δ є меншими за 0.45 і вони зростають при зростанні кількості активів у портфелі k . Тому ми для дослідження властивостей розподілу оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ використаємо значення параметра $\delta \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$, $k \in \{5, 10, 25, 50\}$ та $n \in \{120, 250, 500\}$.



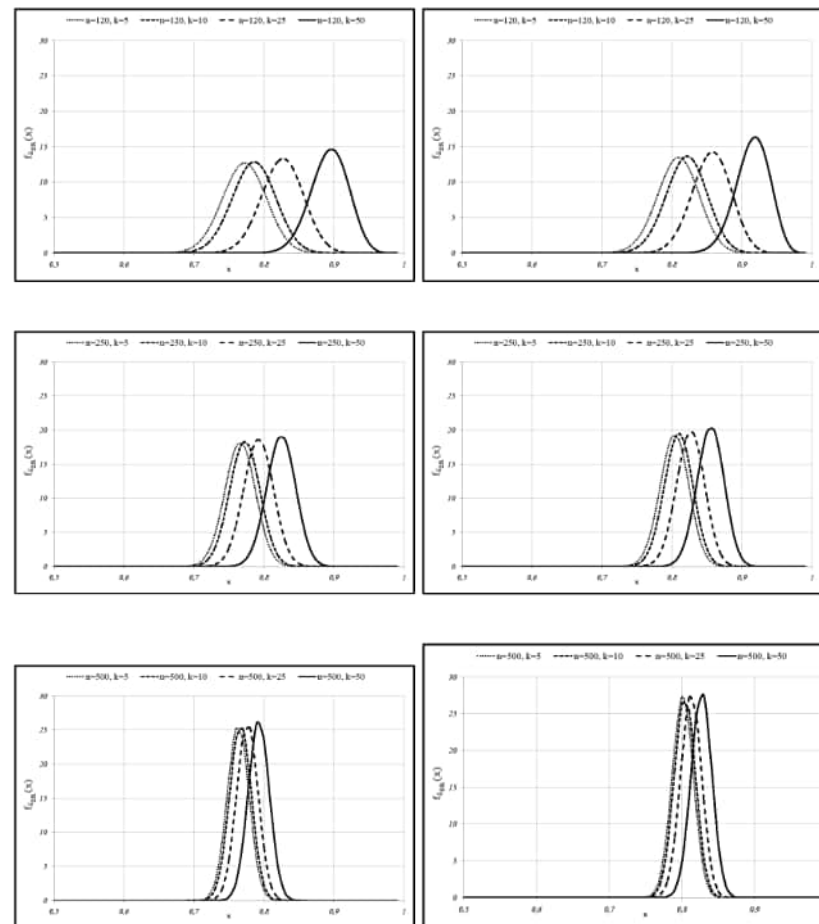
Джерело: розроблено автором

Рис. 7.3. Густина $\hat{\alpha}_{SR}$ для $k \in \{5, 10, 25, 50\}$, $n \in \{120, 250, 500\}$, $\delta=0.1$ (зліва) та $\delta=0.3$ (справа).

На рис. 7.3-7.4 зображено густини оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ при значеннях $k \in \{5, 10, 25, 50\}$, $n \in \{120, 250, 500\}$. Для кожного значення k та n ми розглянули різні значення для δ , які узгоджуються з емпіричними результатами (рис. 7.2), а саме $\delta \in \{0.1, 0.3\}$ – рис. 7.3 та $\delta \in \{0.5, 0.7\}$ – рис. 7.4.

На всіх графіках густини є симетричними. Це спостерігається також у випадку портфеля з великою кількістю активів ($k=50$) та невеликим обсягом вибірки історичних спостережень ($n=120$). Цей результат вказує на те, що точна густина оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$ може бути добре наближена нормальним розподілом навіть у випадку невеликих за обсягом вибірок історичних даних, використаних для побудови оцінки.

У табл. 7.2 обчислені імовірності того, що оцінка $\hat{\alpha}_{SR}$ набуває значення більшого за 0.9, 0.95 та 0.99 при різних значеннях параметрів k , n та δ . Ми отримали, що ці імовірності є близькі до нуля у майже всіх розглянутих випадках. Суттєве відхилення від нуля спостерігається лише у випадку $k=50$ та $\delta=0.7$. Цей результат показує, що портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа може бути менш ризиковим у випадку портфеля з великою кількістю активів, для яких значення параметра δ теж буде достатньо високим. Однак, у цьому випадку, портфель з максимальним відношенням Шарпа відповідатиме портфелю з мінімальним рівнем VaR при рівні довіри меншим за 90 % з високою імовірністю. Ця властивість є небажаною на практиці. Тому при практичному використанні портфеля фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа, зважаючи на його популярність, цей факт повинен бути врахований.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.4. Густина $\hat{\alpha}_{SR}$ для $k \in \{5, 10, 25, 50\}$, $n \in \{120, 250, 500\}$, $\delta=0.5$ (зліва) та $\delta=0.7$ (справа).

Таблиця 7.2

Значення імовірності $P(\hat{\alpha}_{SR} > \alpha)$ при $\delta \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7\}$,
 $k \in \{5, 10, 25, 50\}$ та $n \in \{120, 250, 500\}$.

n=120								
α	k=5				k=10			
	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$
0.9	0	0	0	0.0005	0	0	0	0.0019
0.95	0	0	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0	0	0	0	0	0	0
n=250								
α	k=5				k=10			
	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$
0.9	0	0	0	0	0	0	0	0
0.95	0	0	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0	0	0	0	0	0	0
n=500								
α	k=5				k=10			
	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$
0.9	0	0	0	0	0	0	0	0
0.95	0	0	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0	0	0	0	0	0	0
n=120								
α	k=25				k=50			
	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$
0.9	0	0.0001	0.0048	0.0528	0.0074	0.1137	0.4142	0.7376
0.95	0	0	0	0.0001	0	0.0007	0.0108	0.0642
0.99	0	0	0	0	0	0	0	0
n=250								
α	k=25				k=50			
	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$
0.9	0	0	0	0	0	0	0.0001	0.0076
0.95	0	0	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0	0	0	0	0	0	0
n=500								
α	k=5				k=50			
	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$	$\delta=0.1$	$\delta=0.3$	$\delta=0.5$	$\delta=0.7$
0.9	0	0	0	0	0	0	0	0
0.95	0	0	0	0	0	0	0	0
0.99	0	0	0	0	0	0	0	0

Джерело: розроблено автором

Оскільки точний розподіл вибіркової оцінки рівня довіри α_{SR} є близьким до нормального (рис. 7.3-7.4), то виникає запитання, які параметри нормального розподілу треба вибрати, щоб наближення було якомога точнішим. Ми знайдемо асимптотичний розподіл вибіркової оцінки параметра α_{SR} , припустивши, що дохідності активів, з яких ми складаємо портфель, є нормально розподіленими і неавтокорельованими, та порівняємо його з точним.

Теорема 7.4. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та дохідності є неавтокорельованими. Припустимо, що $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\alpha^2)$$

3

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} + 2) \square^2 \left(\sqrt{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}} \right). \quad (7.5)$$

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60], отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\alpha^2),$$

де

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)', \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right)' \right) \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} \partial \alpha_{SR} / \partial \boldsymbol{\mu} \\ \partial \alpha_{SR} / \partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}) \end{pmatrix},$$

та матриця $\boldsymbol{\Omega}$ асимптотична коваріаційна матриця випадкової величини $\sqrt{n} \left(\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}') \right)' - \left(\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}') \right)' \right)$, яка з [60] дорівнює

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0}_{k \times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2 \times k} & \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \end{pmatrix}.$$

З того, що $\frac{d\Phi(\sqrt{x})}{dx} = \frac{\square(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \frac{\Phi(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right) \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \\ \frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} &= \frac{\Phi(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} = \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} = \\ &= \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right) \frac{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \boldsymbol{\Sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) + \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right)' = \\ &= \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right)^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \\ &+ \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right)^2 (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})' \frac{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}). \end{aligned}$$

Оскільки з [85]

$$\partial(\text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}))' / \partial(\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})) = -\mathbf{D}_k' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k',$$

та з доведення теореми 6.1

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k \mathbf{D}_k^+ \mathbf{N}_k (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k' = \\ = (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbf{N}_k (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) = \mathbf{N}_k (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \end{aligned}$$

і з [105] для довільних k -вимірних векторів \mathbf{a} та \mathbf{b} і для довільної матриці \mathbf{A} розмірності $k \times k$

$$\mathbf{K}_k(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{A}), \mathbf{K}_k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}),$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2 &= \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right)^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right)^2 2(\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu})' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) = \\ &= \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right)^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(\frac{\square(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}})}{2\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}} \right)^2 (\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + 2) \square^2(\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Використати результати теореми 7.4 на практиці неможливо, оскільки вираз для асимптотичної дисперсії σ_α^2 залежить від невідомих параметрів розподілу вектора доходностей активів, з яких складено портфель $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Ми використаємо вибіркові оцінки цих параметрів (1.27) та отримаємо вибіркову оцінку дисперсії σ_α^2

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} + 2) \square^2(\sqrt{\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}}). \quad (7.6)$$

Конзистентність цієї оцінки доведено в наступній теоремі.

Теорема 7.5. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та доходності є неавтокорельованими. Припустимо, що $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} + 2 \right) \square^2 \left(\sqrt{\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}} \right) \rightarrow \sigma_\alpha^2.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з доведення теореми 7.4 та з теореми 1.14 в [67].

Результати теорем 7.4-7.5 дають можливість побудувати $(1-\beta)$ інтервал довіри для параметра α_{SR}

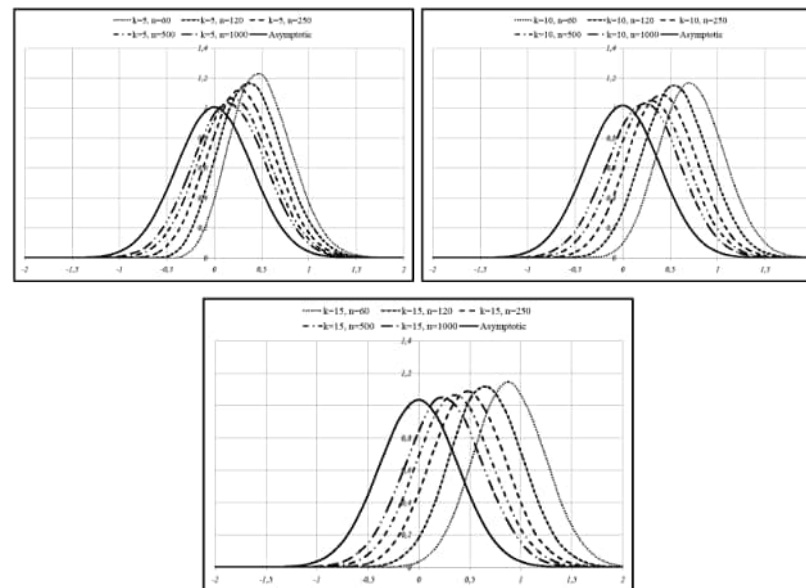
$$\left[\Phi \left(\sqrt{\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}} - \frac{\hat{\sigma}_\alpha}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2} \right), \Phi \left(\sqrt{\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}} + \frac{\hat{\sigma}_\alpha}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2} \right) \right].$$

Проілюструємо отримані результати на реальних даних. Ми виберемо щотижневі спостереження 15 акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft* (0.091, 0.102), *Coca-Cola* (0.618, 0.892), *Walt Disney* (0.773, 0.342), *Boeing* (0.774, 0.228), *McDonald's* (0.582, 0.173), *Intel* (0.590, 0.225), *Procter & Gamble* (0.721, 0.786), *Pfizer* (0.746, 0.107), *Cisco Systems* (0.364, 0.510), *AT&T* (0.971, 0.140), *General Electric* (0.349, 0.111), *Home Depot* (0.642, 0.265), *Merck & Co* (0.679, 0.168), *The Travelers Companies* (0.672, 0.224), *Verizon Communications* (0.796, 0.092) за період часу з 25.11.2013 до 28.12.2015 (110 спостережень). У дужках після назв компаній вказано p -значення тестів Колмогорова-Смірнова на нормальність розподілу доходностей та Бокса-Пірса на неавтокорельованість (зі зміщенням 1) доходностей. При рівні довіри 95 % для проведених тестів наше припущення про незалежність та неавтокорельованість доходностей є коректним. Побудуємо портфелі з $k=5, 10, 15$ акцій та порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR})$ при різних значеннях обсягу вибірки для побудови оцінок ($n=60, 120, 250, 500, 1000$) з асимптотичним (рис. 7.5). З вибраних даних отримаємо

$$k=5: \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR}) \xrightarrow{d} N(0, 0.15709), \quad k=10:$$

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR}) \xrightarrow{d} N(0, 0.15369),$$

$$k=15: \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR}) \xrightarrow{d} N(0, 0.14835).$$



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.5. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR})$ при $n \in \{60, 120, 250, 500, 1000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$.

З рис. 7.5 бачимо, що збіжність емпіричних розподілів до асимптотичного є доволі повільною. У всіх випадках присутнє доволі суттєве зміщення досліджуваної випадкової величини, причому зміщення зростає зі зростанням кількості активів у портфелі k .

З огляду на доведення теореми 7.3, результат, представлений на рис. 7.5, є очікуваним. Справді, оскільки

$$\frac{n}{n-1} \frac{n-k}{k} \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} \sim F_{k, n-k; n\delta},$$

то

$$M \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} \right) = \frac{k(n-1)}{(n-k-2)n} + \frac{n-1}{n-k-2} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}.$$

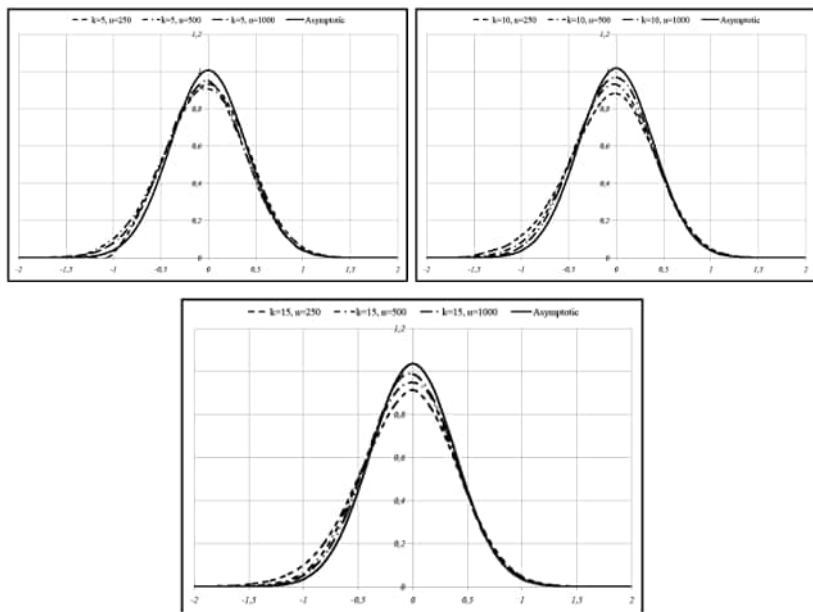
Отже, незміщена оцінка для величини $\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ матиме вигляд:

$$\frac{n-k-2}{n-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{k}{n}.$$

Зауважимо, що попередня оцінка може приймати і від'ємні значення з додатною імовірністю, особливо коли обсяг вибірки історичних значень n не є великим. Тому ми, будуючи виправлену оцінку параметра α_{SR} , ігноруватимемо вибірки, для яких незміщена оцінка для величини $\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$ прийматиме від'ємні значення

$$\hat{\alpha}_{SR}^* = \Phi \left(\sqrt{\frac{n-k-2}{n-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}} - \frac{k}{n}} \right).$$

Порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR}^* - \alpha_{SR})$ при різних значеннях обсягу вибірки для побудови оцінок ($n=250, 500, 1000$) з асимптотичним (рис. 7.6).



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.6. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини

$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR}^* - \alpha_{SR})$ при $n \in \{250, 500, 1000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$.

З рис. 7.6 бачимо, що швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного значно зростає. Тому на практиці при використанні результатів теорем 7.4-7.6 доцільніше використовувати виправлену оцінку параметра $\alpha_{SR} - \hat{\alpha}_{SR}^*$. Зауважимо також, що властивості виправленої оцінки $\hat{\alpha}_{SR}^*$ є кращими ніж $\hat{\alpha}_{SR}$, причому властивості виправленої оцінки зі зростанням кількості активів k у портфелі стають кращими, на відміну від оцінки $\hat{\alpha}_{SR}$.

Раніше ми зауважили, що портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа за припущення, що дохідності активів є неавтокорельовані та нормально розподілені та при відсутності можливості безризикового розміщення коштів, є дуже ризиковим. Перевіримо це спостереження, побудувавши інтервали довіри для параметра α_{SR} , використовуючи щотижневі дохідності активів вибраних нами раніше 15 акцій, що входять до індексу *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015. Використаємо метод біжучого вікна з довжиною 110 спостережень.

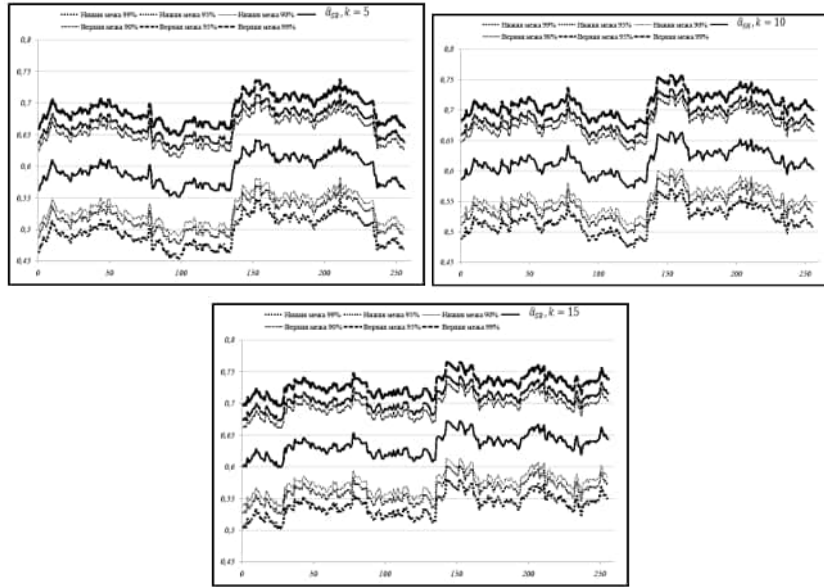
Інтервали довіри представлені на рис. 7.7 повністю підтверджують наші попередні спостереження. Бачимо, що верхні межі всіх побудованих інтервалів довіри для параметра α_{SR} є у всіх випадках меншими за 0.8.

■ **Зауваження 7.1.** Якщо на ринку є можливість безризикового розміщення коштів з дохідністю r_0 , то вираз для обчислення α_{SR} (7.3) набуде вигляду:

$$\alpha_{TP} = \Phi \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right). \quad (7.7)$$

У цьому випадку ми розглядаємо тангенціальний портфель (1.15).

Припустивши, що на ринку є можливість безризикового розміщення коштів з дохідністю r_0 ми можемо знайти вираз для дохідності безризикового активу, при якому портфель фінансових активів з найменшим рівнем *VaR* при рівні довіри α збігатиметься з тангенціальним портфелем.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.7. $(1-\beta)$ інтервали довіри, при $\beta \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$, для параметра α_{SR} у випадку $k \in \{5, 10, 15\}$ активів у портфелі, обчислені методом біжучого вікна з довжиною 110 спостережень з використанням щотижневих дохідностей 15 акцій, що входять до індексу *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015.

Теорема 7.6. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $s < z_\alpha^2$ і всі елементи вектора $\boldsymbol{\mu}$ не є однаковими. Тоді за дохідності безризикового активу

$$r_0(\alpha) = R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s} \quad (7.8),$$

розв'язки задачі максимізації відношення Шарпа та задачі мінімізації VaR портфеля збігаються для вибраного рівня довіри α .

Доведення. Ваги тангенціального портфеля мають вигляд (1.15):

$$\mathbf{w}_T = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}.$$

Перепишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_T &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \left(\frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \right) = \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - r_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + r_0\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})} = \\ &= \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{1}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))} \left(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \right) \boldsymbol{\mu} = \\ &= \mathbf{w}_{GMV} + \frac{1}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}. \end{aligned}$$

Ваги портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α мають вигляд (4.7):

$$\mathbf{w}_{VaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}.$$

Прирівнюючи ваги портфелів \mathbf{w}_T та \mathbf{w}_{VaR} , отримаємо

$$\mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{1}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}.$$

Звідси

$$\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\sqrt{V_{GMV}}} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}.$$

Використовуючи позначення (1.8)-(1.9), можемо записати

$$\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\sqrt{V_{GMV}}} = (R_{GMV} - r_0) \frac{1}{V_{GMV}}.$$

Звідси отримуємо твердження теореми.

Аналогічно, як і у випадку з α_{SR} , використати вираз для $r_0(\alpha)$ на практиці неможливо. Спочатку необхідно оцінити параметри ефективної множини. Підставляючи вибіркові оцінки параметрів ефективної множини у (7.8), отримуємо вибіркову оцінку для рівня доходності безризикового активу

$$\hat{r}_0(\alpha) = \hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}. \quad (7.9)$$

У наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки рівня доходності безризикового активу $r_0(\alpha)$ за припущення, що доходності активів, з яких ми складаємо портфель, є нормально розподіленими та неавтокорельованими.

Теорема 7.7. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та доходності є неавтокорельованими. Припустимо, що $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{r}_0(\alpha) - r_0(\alpha)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_r^2)$$

3

$$\sigma_r^2 = V_{GMV} z_\alpha^2 \frac{2 + z_\alpha^2}{2(z_\alpha^2 - s)}. \quad (7.10)$$

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60] та лему 6.2 $(\psi''(0)/(\psi'(0))^2 = 1$ та $\gamma=1$), отримуємо

$$\sqrt{n}(\hat{r}_0(\alpha) - r_0(\alpha)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_r^2),$$

де

$$\sigma_r^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s+2s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s} \end{pmatrix},$$

та матриця

$$\begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s+2s^2 \end{pmatrix}$$

асимптотична матриця коваріацій вектора $(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})'$ [94].

Маємо

$$\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}} = 1, \quad \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}} = -\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}}, \quad \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s} = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 &= \left(1, -\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}}, \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s+2s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{z_\alpha^2 - s}/2\sqrt{V_{GMV}} \\ \sqrt{V_{GMV}}/2\sqrt{z_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} = \\ &= \left(V_{GMV}(1+s) + \frac{V_{GMV}(z_\alpha^2 - s)}{2} + \frac{V_{GMV}(2s + s^2)}{2(z_\alpha^2 - s)} \right) = \\ &= V_{GMV} z_\alpha^2 \frac{2 + z_\alpha^2}{2(z_\alpha^2 - s)}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

На практиці ми змушені використовувати оцінку дисперсії (7.10), тобто

$$\hat{\sigma}_r^2 = \hat{V}_{GMV} z_\alpha^2 \frac{2 + z_\alpha^2}{2(z_\alpha^2 - \hat{s})}. \quad (7.11)$$

Теорема 7.8. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та дохідності є неавтокорельованими. Припустимо, що $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\sigma}_r^2 = \hat{V}_{GMV} z_\alpha^2 \frac{2 + z_\alpha^2}{2(z_\alpha^2 - \hat{s})} \rightarrow \sigma_r^2.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з доведення теореми 7.7 та з теореми 1.14 в [67].

Результати теорем 7.7-7.8 дають можливість побудувати двосторонній та односторонній $(1-\beta)$ інтервали довіри для рівня дохідності безризикового активу $r_0(\alpha)$, за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α збігатиметься з тангенціальним портфелем

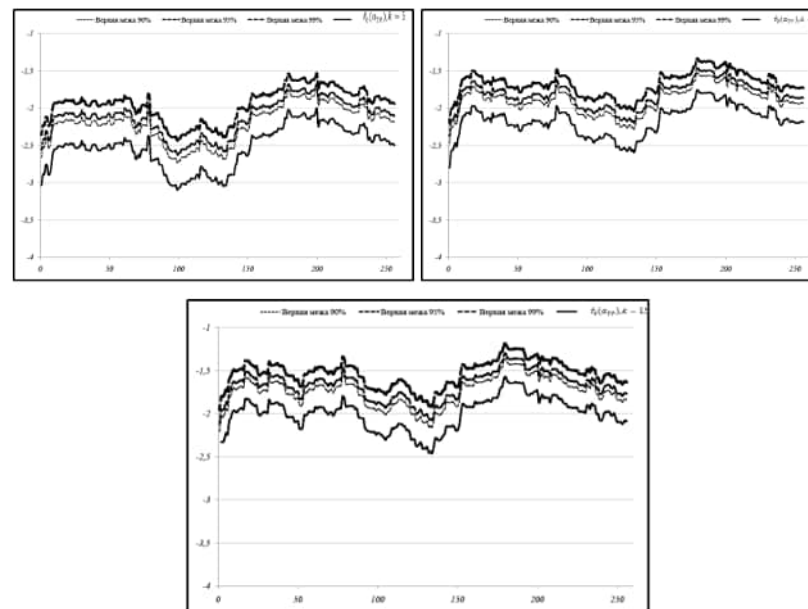
$$\left[\hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}} - \frac{\hat{\sigma}_r}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}, \hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}} + \frac{\hat{\sigma}_r}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2} \right],$$

$$\left(-\infty, \hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}} + \frac{\hat{\sigma}_r}{\sqrt{n}} z_{1-\beta} \right]. \quad (7.12)$$

Використаємо побудований односторонній інтервал довіри для рівня дохідності безризикового активу $r_0(\alpha)$, за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α збігатиметься з тангенціальним портфелем (7.12) для дослідження, якою має бути дохідність без ризикового активу, щоб тангенціальний портфель фінансових активів був статистично еквівалентним портфелю фінансових активів з найменшим рівнем VaR за рівня довіри $\alpha=0.95$. Для цього побудуємо інтервали довіри для рівня дохідності безризикового активу $r_0(\alpha)$, використовуючи щотижневі

дохідності активів вибраних раніше 15 акцій, що входять до індексу *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015. Використаємо метод біжучого вікна з довжиною 110 спостережень.

З рис. 7.8 робимо висновок, що портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа є дуже ризиковим і цей ризик не можна зменшити використанням безризикового активу з дохідністю $r_0 \geq 0$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.8. Односторонні $(1-\beta)$ інтервали довіри, при $\beta \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$, для рівня дохідності безризикового активу $r_0(\alpha)$, за якого тангенціальний портфель фінансових активів є статистично еквівалентним портфелю фінансових активів з найменшим рівнем VaR за рівня довіри $\alpha=0.95$, у випадку $k \in \{5, 10, 15\}$ активів у портфелі, обчислені методом біжучого вікна з довжиною 110 спостережень з використанням щотижневих дохідностей 15 акцій, що входять до індексу *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015.

■ **Зауваження 7.2.** Позначимо α_{TP} – рівень довіри, за якого тангенціальний портфель фінансових активів збігається з порт-

фелем з найменшим рівнем VaR . Оскільки VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR становить (4.10)

$$M_{VaR} = \sqrt{z_\alpha^2 - s} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV},$$

то з (7.8) випливає, що

$$P\{X_{TP} < r_0(\alpha_{TP})\} = 1 - \alpha_{TP},$$

тобто імовірність того, що дохідність тангенціального портфеля X_{TP} буде меншою за дохідність безризикового активу $r_0(\alpha_{TP})$ дорівнює $1 - \alpha_{TP}$.

7.3.2. Неавтокорельовані дохідності активів, що мають багатовимірний еліптичний розподіл

Припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких ми формуємо портфель, має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). У цьому випадку задача вибору раціональної структури портфеля на основі мінімізації його VaR матиме вигляд (6.8). За нашого припущення, рівень довіри, за якого тангенціальний портфель (за наявності можливості безризикового розміщення коштів з дохідністю r_0) знайдено в наступній теоремі.

Теорема 7.9. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$ і $n > k$. Тоді*

$$\alpha_{TP} = F\left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})}\right),$$

де F – одновимірна стандартизована функція розподілу елементів вектора \mathbf{X}_t .

Доведення. Враховуючи, що за припущення, що вектор дохідностей активів має багатовимірний еліптичний розподіл, задача мінімізації VaR портфеля матиме вигляд (6.8):

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = \frac{d_\alpha}{\gamma} \sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1,$$

де d_α – α квантилю випадковою величиною $\frac{\Gamma \mathbf{X}_w - \Gamma \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\Gamma \mathbf{D} \Gamma}}$ для деякого вектора $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, та не залежить від вибору \mathbf{l} [75], то прирівнявши дисперсії портфеля, структура якого є розв'язком цієї задачі з дисперсією тангенціального портфеля (1.17), отримаємо

$$d_\alpha^2 = \gamma^2 (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1}),$$

що доводить теорему.

Для того, щоб результати теореми 7.9 можна було використати на практиці, ми розглянемо вибіркочну оцінку рівня довіри α_{TP}

$$\hat{\alpha}_{TP} = F\left(\gamma \sqrt{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0\mathbf{1})' \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0\mathbf{1})}\right).$$

У наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл оцінки $\hat{\alpha}_{TP}$.

Теорема 7.10. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n} (\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \sim N(0, \sigma_{\alpha,el}^2),$$

$$\sigma_{\alpha,el}^2 = \frac{\gamma^2}{2} \left(2 + \lambda (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})\right) f^2\left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{1})}\right), \quad (7.13)$$

де $\lambda = \psi''(0) / (\psi'(0))^2$, f – одновимірна стандартизована густина елементів вектора \mathbf{X}_t .

Доведення. Доведення аналогічне до доведення теореми 7.3. З дельта-методу маємо

$$\sigma_{\alpha;el}^2 = \left(\left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)', \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right)' \right) \boldsymbol{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}}, \frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right),$$

де матриця $\boldsymbol{\Omega}$ асимптотична коваріаційна матриця випадкової величини $\sqrt{n} \left(\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}', \text{vech}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}') \right)' - \left(\boldsymbol{\mu}', \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}') \right)' \right)$ та з [81], [113],

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{0}_{k \times k(k+1)/2} \\ \mathbf{0}_{k(k+1)/2 \times k} & \lambda \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \end{pmatrix}.$$

З доведення теореми 7.3, маємо

$$\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \gamma \left(\frac{f \left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right) \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}),$$

$$\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} = \gamma \left(\frac{f \left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right) \frac{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Sigma}^{-1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \boldsymbol{\Sigma} \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) + \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) (\boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial \alpha_{SR}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma})} \right) = \\ &= \gamma^2 \left(\frac{f \left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) + \end{aligned}$$

$$+ \gamma^2 \left(\frac{f \left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \times$$

$$\times 2 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right)' (\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) =$$

$$\frac{\gamma^2}{2} \left(2 + \lambda (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) f^2 \left(\gamma \sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right).$$

Теорему доведено.

На практиці ми змушені використовувати оцінку параметра (7.13)

$$\hat{\sigma}_{\alpha;el}^2 = \frac{\gamma^2}{2} \left(2 + \lambda (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1}) \right) f^2 \left(\gamma \sqrt{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})} \right). \quad (7.14)$$

Конзистентність оцінки (7.14) доведено в наступній теоремі.

Теорема 7.11. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\hat{\sigma}_{\alpha;el}^2 = \frac{\gamma^2}{2} \left(2 + \lambda (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1}) \right) f^2 \left(\gamma \sqrt{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})} \right) \rightarrow \sigma_{\alpha;el}^2,$$

де $\lambda = \psi''(0) / (\psi'(0))^2$.

Доведення. Твердження теореми випливає з доведення теореми 7.11 та з теореми 1.14 в [67].

Для ілюстрації отриманих результатів виберемо 20 акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Walt Disney* (0.276, 0.101), *Boeing* (0.446, 0.151), *McDonald's* (0.299, 0.123), *Johnson & Johnson* (0.533, 0.574), *Intel* (0.538, 0.677), *Procter & Gamble* (0.190, 0.791), *Pfizer* (0.649, 0.164), *Cisco Systems* (0.077, 0.856), *Wal-Mart* (0.200, 0.193), *American Express* (0.377, 0.140), *3M* (0.235, 0.551), *AT&T*

(0.270, 0.224), *Goldman Sachs* (0.286, 0.537), *General Electric* (0.105, 0.101), *Merck & Co* (0.445, 0.236), *The Travelers Companies* (0.324, 0.568), *United Technologies Corporation* (0.449, 0.063), *Verizon Communications* (0.475, 0.495), *Caterpillar* (0.181, 0.354), *UnitedHealth Group* (0.287, 0.719) за період часу з 05.03.2012 до 28.12.2015 (200 спостережень). У дужках після назв компаній вказано p -значення тестів Колмогорова-Смірнова на t_5 розподіл дохідностей та Бокса-Пірса на неавтокорельованість (зі зміщенням 1) дохідностей. При рівні довіри 95 % для проведених тестів наше припущення про неавтокорельованість дохідностей є коректним. Ми припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, має багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи. Припустимо також, що на ринку немає можливості безризикового розміщення коштів, тобто $r_0=0$. Побудуємо портфель з $k=5, 10, 15, 20$ акцій та порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ з асимптотичним, при різних значеннях обсягу вибірки для побудови оцінок ($n=60, 120, 250, 500, 1000$) (рис. 7.9).

З вибраних даних отримаємо

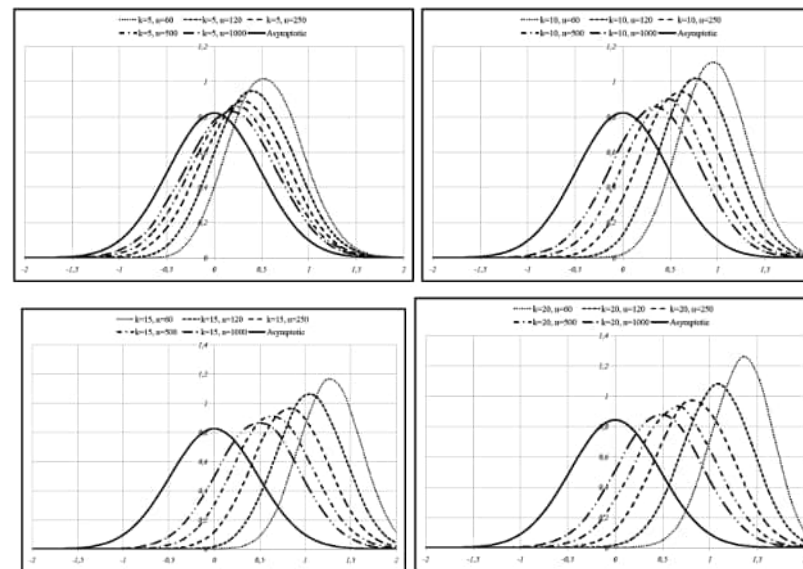
$$k=5: \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, 0.23541),$$

$$k=10: \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, 0.23458),$$

$$k=15: \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, 0.23344),$$

$$k=20: \sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, 0.22348).$$

З рис. 7.9 бачимо, що збіжність емпіричних розподілів до асимптотичного є доволі повільною, аналогічно, як і у випадку неавтокорельованих та нормально розподілених дохідностей. У всіх випадках присутнє доволі суттєве зміщення досліджуваної випадкової величини, причому зміщення зростає зі зростанням кількості активів у портфелі k .



Джерело: розроблено автором

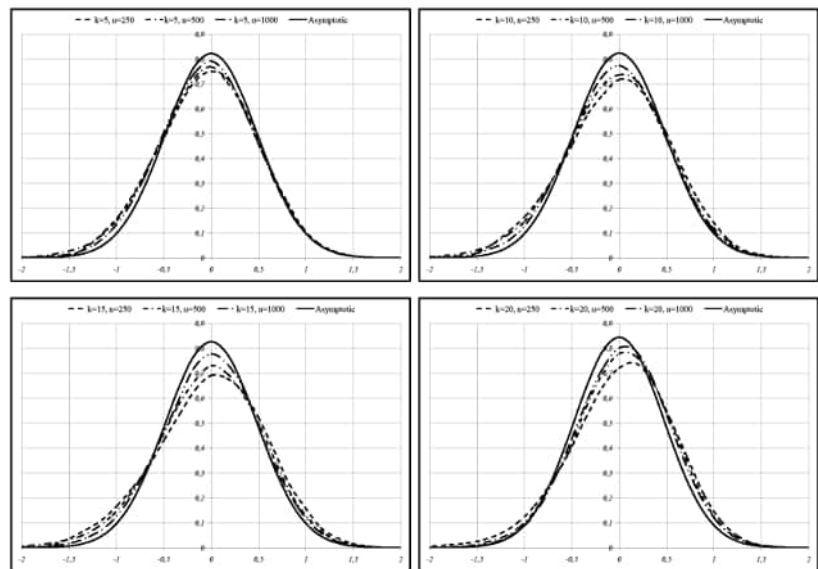
Рис. 7.9. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{SR} - \alpha_{SR})$ при $n \in \{60, 120, 250, 500, 1000\}$ та $k \in \{5, 10, 15, 20\}$.

Використаємо виправлену оцінку параметра α_{TP} (при її побудові ми ігноруватимемо ті вибірки, для яких значення під коренем буде від'ємним)

$$\hat{\alpha}_{TP}^* = \Phi \left(\gamma \sqrt{\frac{n-k-2}{n-1}} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0 \mathbf{1}) - \frac{k}{n} \right),$$

та дослідимо збіжність розподілу випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ до асимптотичного розподілу, знайденого в теоремі 7.10 (рис. 7.10).

З рис. 7.10 бачимо, що аналогічно до випадку нормально розподілених дохідностей, швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного суттєво зростає. Тому на практиці доцільним є використання виправленої оцінки $\hat{\alpha}_{TP}^*$ при дослідженні властивостей параметра α_{TP} .



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.10. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ при $n \in \{250, 500, 1000\}$ та $k \in \{5, 10, 15, 20\}$.

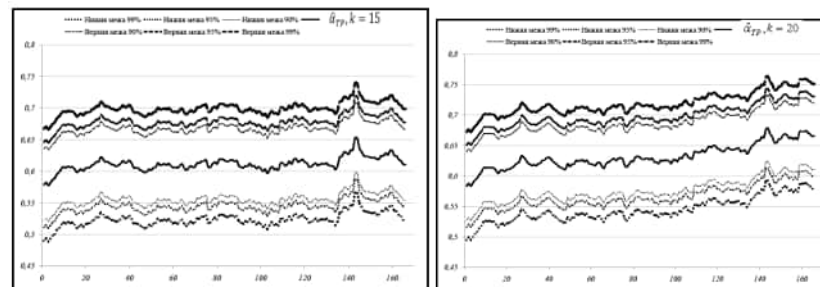
Результати теорем 7.10-7.11 дають можливість інвестору побудувати $(1-\beta)$ інтервал довіри для параметра α_{TP}

$$\left[\Phi\left(\gamma\sqrt{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0\mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0\mathbf{1})} - \frac{\hat{\sigma}_{\alpha,el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}\right), \Phi\left(\gamma\sqrt{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0\mathbf{1})' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r_0\mathbf{1})} + \frac{\hat{\sigma}_{\alpha,el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}\right) \right]$$

та проводити статистичні тести на основі побудованих інтервалів довіри стосовно значень досліджуваного параметра.

У випадку нормально розподілених дохідностей ми показали, що для вибраних даних ризик портфеля з максимальним відношенням Шарпа є дуже високим, оскільки такий портфель відповідає портфелю з найменшим рівнем VaR при рівні довіри мен-

шому за 80 %. Проведемо аналогічне дослідження за припущення, що вектор дохідностей має багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи. Розглянемо два випадки $k \in \{15, 20\}$. Використаємо метод біжучого вікна з довжиною 200 спостережень та використаємо дані про щотижневі дохідності вибраних нами акцій за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015. Результати представлено на рис. 7.11. Отримані результати є подібними до випадку нормально розподілених дохідностей. Портфель з максимальним відношенням Шарпа за відсутності безризикового розміщення коштів є дуже ризиковим, оскільки він відповідає портфелю з найменшим рівнем VaR при рівні довіри $\alpha < 0.8$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.11. $(1-\beta)$ інтервали довіри, при $\beta \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$, для параметра α_{SR} у випадку $k \in \{15, 20\}$ активів у портфелі, обчислені методом біжучого вікна з довжиною 200 спостережень з використанням щотижневих дохідностей 20 акцій, що входять до індексу Dow Jones за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015.

Ми в своїх емпіричних результатах не включали можливість безризикового розміщення коштів з дохідністю r_0 . За такої можливості, ми можемо знайти вираз для дохідності безризикового активу, при якому портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α збігатиметься з тангенціальним портфелем.

Теорема 7.12. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t*

має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$, $n > k$ і всі елементи вектора μ не є однаковими. Тоді за дохідності безризикового активу

$$r_{0,el}(\alpha) = R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s} \quad (7.15),$$

для рівня довіри α розв'язки задачі максимізації відношення Шарпа та задачі мінімізації VaR портфеля збігаються.

Доведення. Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 7.6, врахувавши, що задача вибору раціональної структури портфеля на основі мінімізації його VaR матиме вигляд (6.8).

Вибіркова оцінка рівня довіри $r_{0,el}(\alpha)$ (7.15) має вигляд:

$$\hat{r}_{0,el}(\alpha) = \hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s}}. \quad (7.16)$$

Знайдемо асимптотичний розподіл вибіркової оцінки рівня дохідності безризикового активу $r_0(\alpha)$ (7.16) за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких ми складаємо портфель, має багатовимірний еліптичний розподіл та дохідності є неавтокорельованими.

Теорема 7.13. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$ і всі елементи вектора μ не є однаковими. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{r}_{0,el}(\alpha) - r_{0,el}(\alpha)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{r,el}^2)$$

3

$$\sigma_{r,el}^2 = V_{GMV} \gamma^{-2} d_\alpha^2 \frac{2 + \gamma^{-2} d_\alpha^2 \lambda}{2(\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s)}, \quad (7.17)$$

де $\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$.

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60] та лему 6.2, отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{r}_{0,el}(\alpha) - r_{0,el}(\alpha)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{r,el}^2),$$

де

$$\sigma_{r,el}^2 = \left(\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s} \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial r_0(\alpha)/\partial R_{GMV} \\ \partial r_0(\alpha)/\partial V_{GMV} \\ \partial r_0(\alpha)/\partial s \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\sigma_{r,el}^2 = \left(1, -\frac{\sqrt{\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}}, \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s}} \right) \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s}/2\sqrt{V_{GMV}} \\ \sqrt{V_{GMV}}/2\sqrt{\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} = V_{GMV}(1 + s\lambda) + \frac{\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s}{2} V_{GMV} \lambda + (4s + 2s^2 \lambda) \frac{V_{GMV}}{4(\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s)} = V_{GMV} \gamma^{-2} d_\alpha^2 \frac{2 + \gamma^{-2} d_\alpha^2 \lambda}{2(\gamma^{-2} d_\alpha^2 - s)}.$$

Теорему доведено.

Вибіркова оцінка дисперсії (7.17) має вигляд:

$$\hat{\sigma}_{r,el}^2 = \hat{V}_{GMV} \gamma^{-2} d_\alpha^2 \frac{2 + \gamma^{-2} d_\alpha^2 \lambda}{2(\gamma^{-2} d_\alpha^2 - \hat{s})}. \quad (7.18)$$

Неважко показати, що (7.18) є конзистентною оцінкою параметра (7.17).

Теорема 7.14. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$ і всі елементи вектора $\boldsymbol{\mu}$ не є однаковими. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\sigma}_{r;el}^2 = \hat{V}_{GMV} \gamma^{-2} d_\alpha^2 \frac{2 + \gamma^{-2} d_\alpha^2 \lambda}{2(\gamma^{-2} d_\alpha^2 - \hat{s})} \rightarrow \sigma_{r;el}^2.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з доведення теореми 7.13 та з теореми 1.14 в [67].

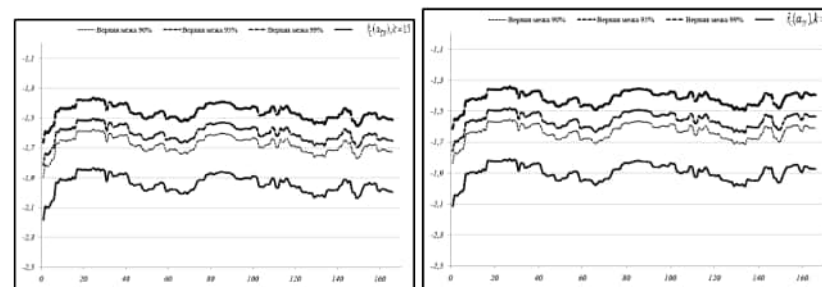
Використовуючи результати, отримані в теоремах 7.13-7.14, ми маємо змогу побудувати двосторонній та односторонній $(1-\beta)$ інтервали довіри для рівня дохідності безризикового активу $r_{0;el}(\alpha)$, за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких сформовано портфель, має багатовимірний еліптичний розподіл та дохідності є неавтокорельованими, за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α збігатиметься з тангенціальним портфелем

$$\left[\hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s}} - \frac{\hat{\sigma}_{r;el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}, \hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s}} + \frac{\hat{\sigma}_{r;el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2} \right],$$

$$\left[-\infty, \hat{R}_{GMV} - \sqrt{\hat{V}_{GMV}} \sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s}} + \frac{\hat{\sigma}_{r;el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta} \right]. \quad (7.19)$$

З допомогою побудованого одностороннього інтервалу довіри для рівня дохідності безризикового активу $r_{0;el}(\alpha)$, за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α збігатиметься з тангенціальним портфелем (7.19) знайдемо дохідність безризикового активу, за якої тангенціальний портфель фінансових активів є статистично еквівалентним портфелю фінансових активів з найменшим рівнем VaR за рівня довіри $\alpha=0.95$. Побудуємо інтервали довіри для рівня дохідності безризикового активу $r_{0;el}(\alpha)$, використовуючи щотижневі дохідності активів вибраних раніше 20 акцій, що входять до індексу *Dow Jones* за період

часу з 01.01.2009 до 28.12.2015. Використаємо метод біжучого вікна з довжиною 200 спостережень.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.12. Односторонні $(1-\beta)$ інтервали довіри, при $\beta \in \{0.1, 0.05, 0.01\}$, для рівня дохідності безризикового активу $r_{0;el}(\alpha)$, за якого тангенціальний портфель фінансових активів є статистично еквівалентним портфелю фінансових активів з найменшим рівнем VaR за рівня довіри $\alpha=0.95$, у випадку $k \in \{15, 20\}$ активів у портфелі, обчислені методом біжучого вікна з довжиною 200 спостережень з використанням щотижневих дохідностей 20 акцій, що входять до індексу *Dow Jones* за період часу з 01.01.2009 до 28.12.2015.

З рис. 7.12, як і у випадку неавтокорельованих та нормально розподілених дохідностей активів, робимо висновок, що портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа є дуже ризиковим і цей ризик не можна зменшити використанням безризикового активу з дохідністю $r_0 \geq 0$.

7.3.3. Дохідності активів, що поводяться як стаціонарний процес Гауса

Нехай ми формуємо портфель з k активів. Припустимо тепер, що вектор дохідностей активів \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена. За такого припущення вирази (7.3) та (7.8) не зміняться, тобто ми матимемо

$$\alpha_{TP} = \Phi\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right), \quad r_0(\alpha) = R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s}.$$

Для того, щоб дослідити асимптотичні імовірнісні властивості вибірових оцінок параметрів (7.3) та (7.8) за нашого припущення нам необхідно знайти їх похідні по вектору параметрів розподілу вектора доходностей $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\mu}', (\text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))))'$. Знайдемо ці похідні в наступній лемі.

Лема 7.1. *Нехай*

$$\alpha_{TP} = \Phi\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right), \quad r_0(\alpha) = R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s},$$

тоді

$$\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \left(\frac{\square\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}),$$

$$\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{w}_{GMV} + 2a_1 \mathbf{R} \boldsymbol{\mu},$$

$$\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} =$$

$$= \left(\frac{\square\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right) \frac{\partial (\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} ((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})),$$

$$\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = a_1 \frac{\partial (\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})),$$

де

$$a_1 = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}}, \quad a_2 = \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s} - R_{GMV}, \quad \mathbf{w}_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}},$$

$$R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}, \quad V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu},$$

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \mathbf{1}}.$$

Доведення. Похідні $(\partial \alpha_{TP} / \partial \boldsymbol{\mu})$ та $(\partial \alpha_{TP} / \partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0))$ знайдені в доведенні теореми 7.4. Обчислимо $(\partial r_0(\alpha) / \partial \boldsymbol{\mu})$ та $(\partial r_0(\alpha) / \partial \text{vech} \boldsymbol{\Gamma}(0))$. Використовуючи правила матричного диференційного числення [85], [105] та доведення теореми 6.2, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\mu}} &= \frac{\partial (R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s})}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} - \frac{\partial \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \\ &= \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} - \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} &= \frac{\partial (R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \\ &= \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} - \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \frac{\partial s}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} = \\ &= \frac{\partial (\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \left(V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) \right) = \\ &= \frac{\partial (\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s} - R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \left(R_{GMV}^2 - 2R_{GMV}\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s} + V_{GMV}(z_\alpha^2 - s) \right) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \\
& = \frac{\partial(\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \left(\frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s} - R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}} (\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s} - R_{GMV})^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right).
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

У наступній теоремі досліджено асимптотичні імовірнісні властивості випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ та $\sqrt{n}(\hat{r}_0(\alpha) - r_0(\alpha))$, де $\hat{\alpha}_{TP}$ та $\hat{r}_0(\alpha)$ вибіркові оцінки параметрів α_{TP} та $r_0(\alpha)$ відповідно.

Теорема 7.15. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріації $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, які входять у вираз для Ω (6.1) є збіжними, $s < z_\alpha^2$ і всі елементи вектора $\boldsymbol{\mu}$ не є однаковими. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{\alpha, gp}^2) \quad \text{та} \quad \sqrt{n}(\hat{r}_0(\alpha) - r_0(\alpha)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{r, gp}^2),$$

де

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha, gp}^2 &= \frac{\square^2 \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{2(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \times \\
& \times \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(2q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) + q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2 \right),
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
\sigma_{r, gp}^2 &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left((V_{GMV} - 2a_1 R_{GMV})^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\
& + 2a_1 (V_{GMV} - 2a_1 R_{GMV}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + 2a_1^2 (q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + a_2^4 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + \\
& + a_2^2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) + 2a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \\
& \left. + 2a_2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) (q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \right)
\end{aligned}$$

з $q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \mathbf{b}$ задана в (6.4), $a_1 = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}$,

$$a_2 = \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{z_\alpha^2 - s} - R_{GMV}, \quad \mathbf{w}_{GMV} = \frac{\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}, \quad R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}},$$

$$V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{R} = \Gamma(0)^{-1} - \frac{\Gamma(0)^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1}}{\mathbf{1}' \Gamma(0)^{-1} \mathbf{1}}, \quad \varphi(\cdot) \text{ густини-}$$

на стандартного нормального розподілу.

Доведення. З леми 7.1, дельта-методу [60], правил матричного диференційного числення [85], [105] та (6.1), врахувавши, що

$$\partial(\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))' / \partial(\text{vech}(\Gamma(0))) = -\mathbf{D}_k' (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}_k^+ \mathbf{D}_k',$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha, gp}^2 &= \left(\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) + \left(\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right)' \times \\
& \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right) = \\
& = \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \Gamma(0)^{-1} \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \right) \Gamma(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right)' \frac{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial (\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) = \\
& = \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) \right) + \\
& + \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) \times \\
& \times (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \right) \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) = \\
& = \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) \right) + \\
& + 2 \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) \times \\
& \times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \otimes \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}) \right) \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \otimes (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right) = \\
& = \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{\square \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \right)^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} \boldsymbol{\Gamma}(h) \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right)^2 = \\
& = \frac{\square^2 \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{2(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \times \\
& \times \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(2q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})) + q_h((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}), (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}))^2 \right).
\end{aligned}$$

Аналогічно для $\sigma_{r:gp}^2$ отримаємо

$$\begin{aligned}
\sigma_{r:gp}^2 & = \left(\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \left(\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) + \left(\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \right)' \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \right) = \\
& = (\mathbf{w}_{GMV} + 2a_1 \mathbf{R}\boldsymbol{\mu})' \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Gamma}(h) \right) (\mathbf{w}_{GMV} + 2a_1 \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}) + \\
& + a_1^2 ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))' \frac{\partial \text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1})}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\Gamma}(h) \otimes \boldsymbol{\Gamma}(h)) \right) \times \\
& \times \mathbf{D}_k^+ \frac{\partial (\text{vec}(\boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1}))'}{\partial \text{vech}(\boldsymbol{\Gamma}(0))} \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right).
\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}'_{GMV} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{w}_{GMV} & = V_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}), \\
\mathbf{w}'_{GMV} \boldsymbol{\Gamma}(h) \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} & = V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} = V_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

і

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

запишемо

$$\begin{aligned} \sigma_{r;gp}^2 &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(V_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 2a_1 (V_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) + \right. \\ &\quad \left. 2a_1 (V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) + \right. \\ &\quad \left. + 4a_1^2 (q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \right) + \\ &\quad + a_1^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k \right) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \right) \right) \times \\ &\quad \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) = \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(V_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) - 4a_1 R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4a_1^2 R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + 2a_1 V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - 4a_1^2 R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2a_1 V_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - 4a_1^2 R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \right) + \\ &\quad + a_1^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \right) \right) \times \\ &\quad \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) + \\ &\quad + a_1^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) = \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\left(V_{GMV}^2 - 4a_1 R_{GMV} V_{GMV} + 4a_1^2 R_{GMV}^2 \right) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + (2a_1 V_{GMV} - 4a_1^2 R_{GMV}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + (2a_1 V_{GMV} - 4a_1^2 R_{GMV}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \right) + \\ &\quad + 2a_1^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2 (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \right) \right) \times \\ &\quad \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2a_2 (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) = \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\left(V_{GMV} - 2a_1 R_{GMV} \right)^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + 2a_1 (V_{GMV} - 2a_1 R_{GMV}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \right) + \\ &\quad + 2a_1^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + a_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 + a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + 2a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2^3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + \right. \\ &\quad \left. + a_2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + 2a_2^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + a_2^3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + 2a_2^3 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + a_2^4 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 \right) = \\ &= \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\left(V_{GMV} - 2a_1 R_{GMV} \right)^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + 4a_1^2 q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + 2a_1 (V_{GMV} - 2a_1 R_{GMV}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \right. \\ &\quad \left. + 2a_1^2 \left(q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + a_2^4 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + a_2^2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) + 2a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + 2a_2 (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) (q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + a_2^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) \right) \right). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Використовуючи результати теореми 7.15 дослідимо швидкість збіжності емпіричних розподілів випадкової величини $\hat{\alpha}_{TP}$ до знайденого асимптотичного розподілу. Припустимо, що дохідності активів, з яких ми складемо портфель, поведуться як VARMA(1,1) процес з нормально розподіленими залишками. Для оцінки параметрів моделі використаємо дані з прикладу 6.3, тобто ми включатимемо в портфель три акції, що входять до індексу Dow Jones, а саме, Walt Disney, Chevron Corporation, United Technologies Corporation ($k=3$) та використаємо дані про щоденні дохідностей цих активів за період часу з 01.06.2015 по 28.12.2015. Отримаємо

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0,0,0)'$ та дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$, причому

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.734 & -0.617 & -1.258 \\ 1.903 & -0.767 & -1.700 \\ 0.850 & 0.296 & -1.583 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1.760 & -0.752 & -1.411 \\ 1.855 & -1.008 & -1.835 \\ 0.826 & 0.237 & -1.738 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.620 & 0.905 & 0.948 \\ 0.905 & 3.057 & 0.802 \\ 0.948 & 0.802 & 1.441 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varphi}_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'.$$

Припустивши, що отримані значення параметрів $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$ є точними, визначимо параметри дохідності

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.032, -0.152, -0.198)',$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1.884 & 1.328 & 1.195 \\ 1.328 & 3.765 & 1.171 \\ 1.195 & 1.171 & 1.758 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Gamma}(1) = \begin{pmatrix} 0.121 & 0.350 & 0.114 \\ 0.181 & 0.521 & 0.083 \\ 0.196 & 0.309 & 0.111 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку точне значення параметра α_{TP} становить

$$\alpha_{TP} = 0.57312.$$

З теореми 7.15, асимптотичний розподіл вибіркової оцінки рівня довіри α_{TP} , за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR збігається із тангенціальним портфелем, є

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, 0.14367).$$

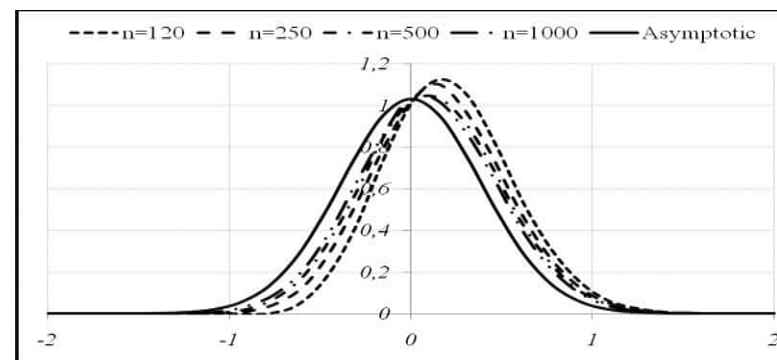
Обчислимо середнє та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ для кожного $n \in \{120, 250, 500, 1000\}$. Результати моделювання наведені у табл. 7.3.

Таблиця 7.3

Середнє значення і дисперсія відхилень $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ від асимптотичного значення.

	Середнє	Дисперсія
$n=120$	0.2087	0.1213
$n=250$	0.1543	0.1327
$n=500$	0.1153	0.1411
$n=1000$	0.0907	0.1449
Асимптотичні	0	0.1496

Джерело: розроблено автором



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.13. Емпіричний $n \in \{120, 250, 500, 1000\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$.

З таблиці 7.3 бачимо, що дисперсії, отримані емпірично, методом імітаційного моделювання, є близькі до асимптотичних значень, проте середні є зміщені, аналогічно до випадків нормально та еліптично розподілених та неавтокорельованих дохідностей. Більш наочні результати представлені на рис. 7.13, де зображено емпіричні $n = \{120, 250, 500, 1000\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводить як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками та параметрами \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , Σ , та $\boldsymbol{\phi}_0$. Зауважимо, що зі зростанням кількості активів у портфелі (k) зростатиме і зміщення розподілу випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ від асимптотичного розподілу. Тому наступним кроком нашого дослідження є розгляд поведінки виправленої оцінки параметра $\alpha_{TP} - \alpha_{TP}^*$.

Обчислимо середнє та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ для кожного $n \in \{250, 500, 1000\}$. Результати моделювання наведено у табл. 7.4.

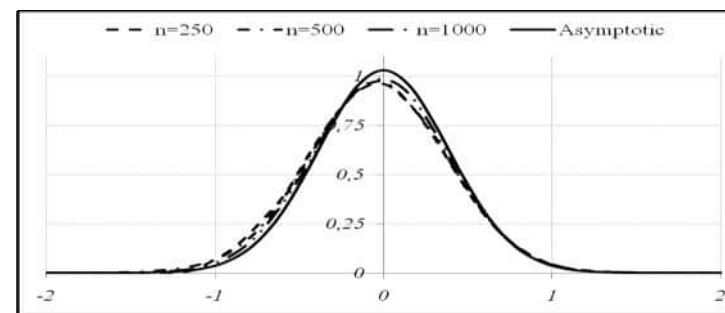
Таблиця 7.4

Середнє значення і дисперсія відхиленя $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ від асимптотичного значення.

	Середнє	Дисперсія
$n=250$	-0.0373	0.1666
$n=500$	-0.0395	0.1711
$n=1000$	-0.0161	0.1608
Асимптотичні	0	0.1495

Джерело: розроблено автором

З таблиці 7.4 бачимо, що дисперсії, отримані емпірично методом імітаційного моделювання, є близькі до асимптотичних значень, хоч і збігаються до нього дещо повільніше, ніж у випадку вибіркової невиправленої оцінки. Натомість збіжність середніх значень є набагато швидшою. Ці спостереження повністю підтверджуються графічним зображенням емпіричних та асимптотичної густин випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ (рис. 7.14).



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.14. Емпіричний $n \in \{120, 250, 500, 1000\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$.

7.3.4. Дохідності активів, що поведуться як довільний стаціонарний процес

Припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, \mathbf{X}_t , поводить як k -вимірний стаціонарний процес із середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена. При обчисленні VaR портфеля нам необхідно визначити квантиль відповідного процесу, $d_\alpha(\mathbf{w})$, задану у (6.17). З нашого припущення задача вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR матиме вигляд (6.18). Нагадаємо, що в загальному випадку, $d_\alpha(\mathbf{w})$ залежить від вектора ваг портфеля \mathbf{w} . Ми припустимо, що $d_\alpha(\mathbf{w})$ не є функцією від \mathbf{w} , тобто $d_\alpha(\mathbf{w}) = d_\alpha$. Це припущення виконується для широкого класу стаціонарних процесів, наприклад, для векторних авторегресійних процесів з біжучим середнім ($VARMA$), залишки якого мають багатовимірний еліптичний розподіл. Крім цього, таке припущення може бути використане при розгляді верхньої межі VaR для довільного стаціонарного процесу, використовуючи нерівність Чебишева [42]. Також, як зазначено вище, квантиль нормального стандартного розподілу z_α є добрим наближенням для $d_\alpha(\mathbf{w})$, що мотивовано багатьма вченими, зок-

рема [68], [86], [128]. Тому за нашого припущення рівень довіри, за якого тангенціальний портфель збігається із портфелем фінансових активів з найменшим рівнем VaR обчислюємо з

$$\alpha_{TP} = F\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right), \quad (7.20)$$

де $F(\cdot)$ – функція розподілу стандартизованої дохідності портфеля $(X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu})/(\mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w})^{1/2}$, тобто

$$F(x) = P\left\{\frac{X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}}} < x\right\}.$$

Дохідність безризикового активу, за якої тангенціальний портфель фінансових активів збігається із портфелем з найменшим рівнем VaR обчислюємо з

$$r_0(\alpha) = R_{GMV} - \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{d_\alpha^2 - s}, \quad (7.21)$$

де R_{GMV} , V_{GMV} задані у (1.7)-(1.9), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$.

Асимптотичні розподіли вибірових оцінок параметрів (7.20)-(7.21) наведено у наступній теоремі.

Теорема 7.16. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний стаціонарний процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\boldsymbol{\Gamma}(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що ряди, які входять у (6.24), є збіжними і $s < d_\alpha^2$ і всі елементи вектора $\boldsymbol{\mu}$ не є однаковими. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{\alpha;stp}^2) \quad \text{та} \quad \sqrt{n}(\hat{r}_0(\alpha) - r_0(\alpha)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{r;stp}^2),$$

де

$$\sigma_{\alpha;stp}^2 = \frac{f^2\left(\sqrt{s + \frac{(R_{GMV} - r_0)^2}{V_{GMV}}}\right)}{2\left(s + \frac{(R_{GMV} - r_0)^2}{V_{GMV}}\right)} \times$$

$$\times \left(4a_\alpha^2 \sigma_{1,GMV}^2 + a_\alpha^4 \sigma_{2,GMV}^2 + \sigma_{3,GMV}^2 - 4a_\alpha^3 \sigma_{12,GMV} - 2a_\alpha^2 \sigma_{23,GMV} + 4a_\alpha \sigma_{13,GMV}\right),$$

$$\sigma_{r;stp}^2 = \sigma_{1,GMV}^2 + \frac{1}{4a_r^2} \sigma_{2,GMV}^2 + \frac{a_r^2}{4} \sigma_{3,GMV}^2 - \frac{1}{a_r} \sigma_{12,GMV} - \frac{1}{2} \sigma_{23,GMV} + a_r \sigma_{13,GMV},$$

$$a_\alpha = \frac{R_{GMV} - r_0}{V_{GMV}}, \quad a_r = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}},$$

R_{GMV} , V_{GMV} задані у (1.8)-(1.9), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$,

$\sigma_{1,GMV}^2$, $\sigma_{2,GMV}^2$, $\sigma_{3,GMV}^2$, $\sigma_{12,GMV}$, $\sigma_{13,GMV}$ та $\sigma_{23,GMV}$ задані в лемі 6.3 та $f(\cdot)$ – густина розподілу стандартизованої дохідності портфеля $(X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu})/(\mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w})^{1/2}$, тобто

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} P\left\{\frac{X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Gamma}(0)\mathbf{w}}} < x\right\}.$$

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60], отримаємо

$$\sigma_{\alpha;stp}^2 = \left(\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial s}\right) \boldsymbol{\Omega}_{EF} \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial s} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{r;stp}^2 = \left(\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s}\right) \boldsymbol{\Omega}_{EF} \begin{pmatrix} \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s} \end{pmatrix},$$

де матриця $\boldsymbol{\Omega}_{EF}$ – асимптотична коваріаційна матриця випадкового вектора $\sqrt{n}\left(\left(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s}\right)' - (R_{GMV}, V_{GMV}, s)'\right)$ за умови, що вектор

дохідностей, з яких складено портфель, поводитья як стаціонарний процес (лема 6.3).

З доведення теореми 7.7 маємо

$$\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial R_{GMV}} = 1, \quad \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial V_{GMV}} = -\frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}}, \quad \frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial s} = \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sigma_{r,stp}^2 &= \left(1, -\frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}}, \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sigma_{1,GMV}^2 & \sigma_{12,GMV} & \sigma_{13,GMV} \\ \sigma_{12,GMV} & \sigma_{2,GMV}^2 & \sigma_{23,GMV} \\ \sigma_{13,GMV} & \sigma_{23,GMV} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{d_\alpha^2 - s}/2\sqrt{V_{GMV}} \\ \sqrt{V_{GMV}}/2\sqrt{d_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{1,GMV}^2 - \frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sigma_{12,GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sigma_{13,GMV} \\ \sigma_{12,GMV} - \frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sigma_{2,GMV}^2 + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sigma_{23,GMV} \\ \sigma_{13,GMV} - \frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sigma_{23,GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{d_\alpha^2 - s}/2\sqrt{V_{GMV}} \\ \sqrt{V_{GMV}}/2\sqrt{d_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} = \\ &= \sigma_{1,GMV}^2 - \frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sigma_{12,GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sigma_{13,GMV} - \frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2\sqrt{V_{GMV}}} \sigma_{12,GMV} + \\ &+ \frac{d_\alpha^2 - s}{4V_{GMV}} \sigma_{2,GMV}^2 - \frac{1}{4} \sigma_{23,GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{2\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sigma_{13,GMV} - \frac{1}{4} \sigma_{23,GMV} + \frac{V_{GMV}}{4(d_\alpha^2 - s)} \sigma_{3,GMV}^2 = \\ &= \sigma_{1,GMV}^2 + \frac{d_\alpha^2 - s}{4V_{GMV}} \sigma_{2,GMV}^2 + \frac{V_{GMV}}{4(d_\alpha^2 - s)} \sigma_{3,GMV}^2 - \end{aligned}$$

$$-\frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{\sqrt{V_{GMV}}} \sigma_{12,GMV} - \frac{1}{2} \sigma_{23,GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{d_\alpha^2 - s}} \sigma_{13,GMV}.$$

Далі, врахувавши, що

$$(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0) (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) = s + (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV},$$

отримаємо

$$\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial R_{GMV}} = \frac{f\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \frac{(R_{GMV} - r_0)}{V_{GMV}},$$

$$\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial V_{GMV}} = -\frac{f\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}} \frac{(R_{GMV} - r_0)^2}{V_{GMV}^2},$$

$$\frac{\partial \alpha_{TP}}{\partial s} = \frac{f\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right)}{2\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}},$$

тому

$$\sigma_{\alpha,stp}^2 = \frac{f^2\left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})}\right)}{4\left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})\right)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 2\frac{(R_{GMV} - r_0)}{V_{GMV}}, -\frac{(R_{GMV} - r_0)^2}{V_{GMV}^2}, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1,GMV}^2 & \sigma_{12,GMV} & \sigma_{13,GMV} \\ \sigma_{12,GMV} & \sigma_{2,GMV}^2 & \sigma_{23,GMV} \\ \sigma_{13,GMV} & \sigma_{23,GMV} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 2(R_{GMV} - r_0)/V_{GMV} \\ -(R_{GMV} - r_0)^2/V_{GMV}^2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f^2 \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{4 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right)} \times \\
&\times \left(\begin{array}{l} 2\sigma_{1,GMV}^2 (R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} - \sigma_{12,GMV} (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \sigma_{13,GMV} \\ 2\sigma_{12,GMV} (R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} - \sigma_{2,GMV}^2 (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \sigma_{23,GMV} \\ 2\sigma_{13,GMV} (R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} - \sigma_{23,GMV} (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \sigma_{3,GMV}^2 \end{array} \right) \times \\
&\times \left(\begin{array}{l} 2(R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} \\ -(R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 \\ 1 \end{array} \right) = \\
&= \frac{f^2 \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{4 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right)} \times \\
&\times \left(4\sigma_{1,GMV}^2 (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 - 2\sigma_{12,GMV} (R_{GMV} - r_0)^3 / V_{GMV}^3 + \right. \\
&+ 2\sigma_{13,GMV} (R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} - 2\sigma_{12,GMV} (R_{GMV} - r_0)^3 / V_{GMV}^3 + \\
&+ \sigma_{2,GMV}^2 (R_{GMV} - r_0)^4 / V_{GMV}^4 - \sigma_{23,GMV} (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \\
&+ 2\sigma_{13,GMV} (R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} - \sigma_{23,GMV} (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \sigma_{3,GMV}^2 \left. \right) = \\
&= \frac{f^2 \left(\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})} \right)}{4 \left((\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1})' \boldsymbol{\Gamma}(0)^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_0 \mathbf{1}) \right)} \times \\
&\times \left(4\sigma_{1,GMV}^2 (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \sigma_{2,GMV}^2 (R_{GMV} - r_0)^4 / V_{GMV}^4 + \sigma_{3,GMV}^2 - \right. \\
&- 4\sigma_{12,GMV} (R_{GMV} - r_0)^3 / V_{GMV}^3 - 2\sigma_{23,GMV} (R_{GMV} - r_0)^2 / V_{GMV}^2 + \\
&+ 4\sigma_{13,GMV} (R_{GMV} - r_0) / V_{GMV} \left. \right).
\end{aligned}$$

Теорему доведено.

Для ілюстрації результатів теореми 7.16, припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких ми складаємо портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес із залишками, що мають багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)'$ і дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$. Ми припускаємо, що параметри $VARMA(1,1)$ процесу \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$ є відомими. Їх значення ми візьмемо з попереднього прикладу.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.734 & -0.617 & -1.258 \\ 1.903 & -0.767 & -1.700 \\ 0.850 & 0.296 & -1.583 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1.760 & -0.752 & -1.411 \\ 1.855 & -1.008 & -1.835 \\ 0.826 & 0.237 & -1.738 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.620 & 0.905 & 0.948 \\ 0.905 & 3.057 & 0.802 \\ 0.948 & 0.802 & 1.441 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'.$$

З отриманої моделі визначимо параметри дохідності, використовуючи метод Монте-Карло з 10000 повторень, в кожному повторенні згенеруємо вибірки з 10000 елементів з нашого процесу

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.030, -0.151, -0.197)', \quad \boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1.884 & 1.330 & 1.204 \\ 1.330 & 3.767 & 1.179 \\ 1.204 & 1.179 & 1.770 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку точне значення параметра α_{TP} становить

$$\alpha_{TP} = 0.58869.$$

З теореми 7.16, асимптотичний розподіл вибіркової оцінки рівня довіри α_{TP} , за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR збігається з тангенціальним портфелем, є

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP}) \xrightarrow{d} N(0, 0.23442).$$

Обчислимо середнє та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ для кожного $n \in \{120, 250, 500, 1000\}$. Результати моделювання наведено у табл. 7.5.

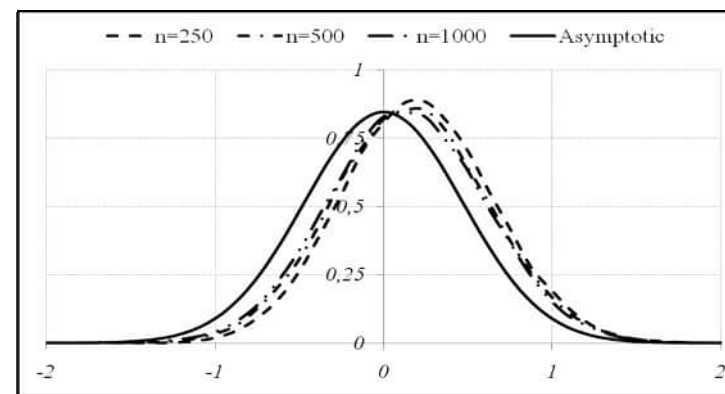
Таблиця 7.5

Середнє значення і дисперсія відхилень $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ від асимптотичного значення.

	Середнє	Дисперсія
$n=120$	0.2691	0.1727
$n=250$	0.2034	0.1972
$n=500$	0.1606	0.2110
$n=1000$	0.1349	0.2161
Асимптотичні	0	0.2223

Джерело: розроблено автором

З таблиці 7.5 бачимо, що дисперсії, отримані емпірично методом імітаційного моделювання, збігаються повільніше до асимптотичного значення, ніж у випадку коли дохідності поведуться як $VARMA(1, 1)$ процес з нормально розподіленими залишками. Середні є зміщені, аналогічно до попередньо розглянутих випадків. На рис. 7.15 зображено емпіричні $n \in \{250, 500, 1000\}$ та асимптотичний розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками та параметрами \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\mathbf{\Sigma}$, та $\mathbf{\phi}_0$. Графічні дані підтверджують наші попередні спостереження.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.15. Емпіричний $n \in \{250, 500, 1000\}$ та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$.

Таблиця 7.6

Середнє значення і дисперсія відхилень $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ від асимптотичного значення.

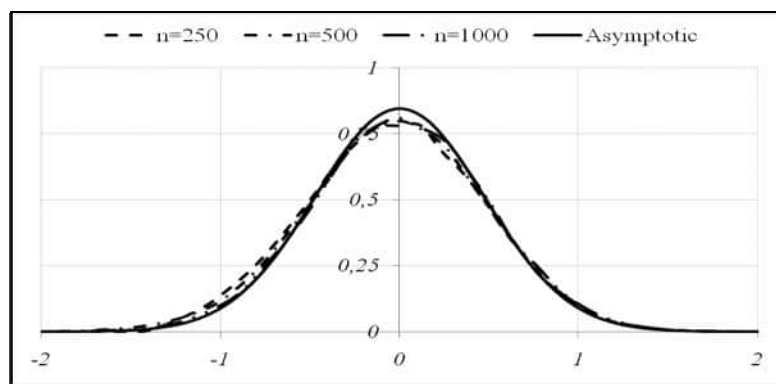
	Середнє	Дисперсія
$n=250$	-0.0250	0.2461
$n=500$	-0.0225	0.2529
$n=1000$	0.0063	0.2412
Асимптотичні	0	0.2223

Джерело: розроблено автором

Зважаючи на суттєве зміщення середніх випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$, дослідимо поведінку виправленої оцінки параметра $\alpha_{TP} - \alpha_{TP}^*$. Зауважимо, що за нашого припущення, імовірнісні властивості оцінки $\hat{\alpha}_{TP}$ є невідомими, для обґрунтування використання виправленої оцінки ми використаємо властивості вибіркової оцінки, отримані у випадку нормально розподілених дохідностей.

Обчислимо середнє та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ для кожного $n \in \{250, 500, 1000\}$. Результати моделювання наведено у табл. 7.6.

З табл. 7.6 бачимо, що дисперсії отримані емпірично, методом імітаційного моделювання, є близькі до асимптотичних значень, проте збігаються повільніше ніж у випадку невивірленої оцінки. Середні значення у розглянутих випадках є близькими до 0. Для кращого представлення, зобразимо емпіричні та асимптотичну густину випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$ графічно (рис. 7.16).



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.16. Емпіричні $n \in \{250, 500, 1000\}$

та асимптотичний розподіл випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP}^* - \alpha_{TP})$.

Зважаючи на результати моделювання поведінки оцінок параметра α_{TP} виправданним є використання на практиці виправленої оцінки $\hat{\alpha}_{TP}^*$, незалежно від припущення щодо поведінки вектора дохідностей, з яких ми складаємо портфель.

7.4. Взаємозв'язок мінімізації Value-at-Risk та рівня дохідності портфеля фінансових активів

Одним з основних завдань як фінансової установи, так і інвестора, є мінімізація ризику. Низка праць присвячена питанню

мінімізації ризику. Зважаючи на популярність міри ризику VaR , питання мінімізації VaR портфеля фінансових активів досліджене в [41], [42]. Проблема невизначеності параметрів при побудові портфеля розглянута в [15], [16], [18], [75]. Зазначимо, що у вищевведених працях основну увагу приділяли лише питанню мінімізації VaR портфеля. Проте очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем ризику може виявитися нижчою за потрібний інвестору рівень. Більше того, рівень очікуваного доходу портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR не обов'язково повинен бути додатним. Все це призводить до необхідності розгляду задачі мінімізації VaR портфеля з урахуванням очікуваної дохідності. Однією з можливостей такого підходу є вибір раціональної структури портфеля шляхом максимізації відношення Шарпа, в якому за міру ризику вибрано VaR . Цей підхід розглянуто в [1]. Зазначимо, що хоча такий підхід враховує обидві характеристики портфеля, проте не гарантує досягнення потрібного рівня очікуваної дохідності портфеля.

Ми дослідимо задачу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі критерію мінімізації VaR портфеля при заданому рівні очікуваної дохідності, тобто задачу, розглянуту в [42], [51] з додатковою умовою на рівень очікуваної дохідності. Такий метод вибору структури портфеля є важливий для практичних цілей, як і безумовна мінімізація ризику, оскільки, наприклад, для планування діяльності фінансової установи необхідно не лише визначення мінімального рівня ризику, але й врахування рівня очікуваного доходу на наступний період. Тобто, обидві задачі є важливими для практичної діяльності. Виникає запитання, чи можна звести задачу мінімізації VaR портфеля при заданому рівні дохідності до задачі безумовної мінімізації VaR портфеля.

Наша мета полягає у дослідженні можливості зведення задачі мінімізації VaR портфеля при заданому рівні очікуваної дохідності до задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR портфеля, визначення рівня довіри для VaR , при якому очікувана дохідність портфеля, отриманого з задачі безумовної мінімізації ризику портфеля, буде дорівнювати наперед заданому рівню очікуваної дохідності, дослідження взаємозв'язку між рівнем очікуваної дохідності та рівнем довіри для VaR і дос-

лідженню статистичних властивостей вибіркової оцінки цього рівня довіри.

Для отримання теоретичних результатів ми припустимо, що вектор дохідностей активів \mathbf{X}_t , з яких складається портфель, є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Припущення про нормальність дохідностей сприймається неоднозначно в наукових колах. Часто зазначається, що розподілам дохідностей з високою частотою, наприклад, щохвилинним дохідностям, притаманна наявність важких хвостів. Проте для отримання теоретичних результатів це припущення є повністю коректним.

Класична задача мінімізації VaR портфеля за нашого припущення має вигляд (4.6). Структура портфеля, отриманого з (4.6), задається рівністю (4.7). Характеристики портфеля з найменшим рівнем VaR обчислюються з (4.8)-(4.10).

Як зазначалося вище, очікувана дохідність портфеля, структура якого отримана із задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації ризику, не обов'язково задовольняє очікування інвестора, що пояснюється неможливістю контролю за її значеннями. У такому випадку доцільніше розглядати наступну задачу:

$$VaR_{\alpha} \rightarrow \min \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w}=1, R_w=R_0, \quad (7.22)$$

де R_0 – бажаний рівень очікуваної дохідності портфеля з найменшим рівнем VaR .

Твердження 7.3. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Тоді розв'язок задачі (7.22) має вигляд:

$$\mathbf{w}_{VaR,A} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{R_0 - R_{GMV}}{s} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

де \mathbf{w}_{GMV} – ваги портфеля з найменшою дисперсією (1.7), R_{GMV} – очікувана дохідність портфеля зі структурою \mathbf{w}_{GMV} (1.8),

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}, s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}.$$

Доведення. Неважко показати, враховуючи умову $R_w=R_0$, що задача (7.22) є еквівалентна наступній задачі

$$V_w \rightarrow \min \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w}=1, R_w=R_0. \quad (7.23)$$

Задача (7.23) може бути записана у вигляді

$$V_w \rightarrow \min \text{ за умови, що } \mathbf{A}'\mathbf{w}=\mathbf{b}, \quad (7.24)$$

де матриця \mathbf{A} розмірності $k \times 2$ та двовимірний вектор \mathbf{b} мають вигляд

$$\mathbf{A}=(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}), \mathbf{b}=(1, R_0)'. \quad (7.25)$$

Розв'язок задачі (7.24) можна записати у вигляді [14], [112]

$$\mathbf{w}_{VaR,A} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{A}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (7.26)$$

Підставляючи значення матриці \mathbf{A} та вектора \mathbf{b} з (7.25) в (7.26), унаслідок простих алгебраїчних перетворень отримаємо потрібне твердження. Крім того, як наслідок з результатів роботи [14], отримуємо, що портфель зі структурою $\mathbf{w}_{VaR,A}$ належить ефективній, за Марковіцем, множині портфелів.

Зауважимо, що розв'язок задачі (7.22) не залежить від вибраного рівня довіри для VaR . Тобто інвестору, який структуру портфеля фінансових активів формує на основі мінімізації VaR при заданому рівні очікуваної дохідності, не обов'язково строго задавати рівень довіри, достатньо вибрати довільне значення, наприклад, 0.95.

Характеристики портфеля зі структурою $\mathbf{w}_{VaR,A}$ мають вигляд:

$$R_{VaR,A} = \mathbf{w}'_{VaR,A} \boldsymbol{\mu} = R_0, \quad (7.27)$$

$$V_{VaR,A} = \mathbf{w}'_{VaR,A} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_{VaR,A} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}, \quad (7.28)$$

$$M_{VaR,A} = z_{\alpha} \sqrt{V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}} - R_0. \quad (7.29)$$

Отже, строго задати необхідний рівень довіри для VaR інвестору необхідно лише для обчислення ризику отриманого портфеля.

Як відзначено в [42], змінюючи значення рівня довіри α від 1 до найменшого, за якого задача (4.6) має сенс, можна отримати ефективну, за Марковіцем, множину портфелів. Тому існує такий рівень довіри α_A для VaR , при якому розв'язок задачі (4.6) збігатиметься з $\mathbf{w}_{VaR,A}$, причому з твердження 7.3 випливає, що α_A не залежить від вибраного рівня довіри для VaR в задачі (7.22).

Теорема 7.17. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ і всі елементи вектора $\boldsymbol{\mu}$ не є однаковими. Тоді розв'язок задачі (7.22) при довільному рівні довіри α для VaR та заданому рівні очікуваного доходу R_0 збігається з розв'язком задачі безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR портфеля при рівні довіри*

$$\alpha_A = \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s} \right), \quad (7.30)$$

де $\Phi(\cdot)$ – функція розподілу стандартного нормального розподілу.

Доведення. Оскільки існує такий рівень довіри α_A при якому розв'язок задачі безумовної мінімізації VaR портфеля збігається із розв'язком задачі (7.22) при довільному рівні довіри α для VaR та заданому рівні очікуваного доходу R_0 , то повинні співпадати і

дисперсії цих розв'язків, а саме: $V_{VaR} = \frac{z_{\alpha_A}^2}{z_{\alpha_A}^2 - s} V_{GMV}$ та

$V_{VaR,A} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s}$. Розв'яжемо наступне рівняння відносно α_A , отримаємо

$$\frac{z_{\alpha_A}^2}{z_{\alpha_A}^2 - s} V_{GMV} = V_{GMV} + \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s},$$

$$z_{\alpha_A}^2 V_{GMV} = z_{\alpha_A}^2 V_{GMV} + z_{\alpha_A}^2 \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s} - (R_{GMV} - R_0)^2 - s V_{GMV},$$

$$z_{\alpha_A}^2 \frac{(R_{GMV} - R_0)^2}{s} = (R_{GMV} - R_0)^2 + s V_{GMV},$$

$$z_{\alpha_A}^2 = \frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s.$$

Враховуючи, що $z_{\alpha_A}^2$ є α квантелею стандартного нормального розподілу, можемо записати

$$\alpha_A = \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s} \right).$$

Теорему доведено.

Ми показали, що інвестор, який використовує мінімізацію VaR для вибору раціональної структури портфеля фінансових активів, має можливість використати цей метод і для вибору структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем ризику та з наперед заданим рівнем очікуваного доходу. Для цього йому треба лише змінити рівень довіри для VaR за правилом, описаним в теоремі 7.17. Проте такий підхід не може бути використаний на практиці, оскільки параметри розподілу дохідностей $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є невідомими. Тому, необхідним є спочатку відповідно оцінити ці параметри. Ми, як і раніше, використаємо історичний метод. Побудуємо спочатку оцінки параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ (1.27). Підставивши оцінки (1.27) у вираз для обчислення рівня довіри (7.30), інвестор визначить рівень довіри, при якому портфель з найменшим рівнем VaR матиме необхідний рівень очікуваного доходу. Позначимо цей рівень довіри $\hat{\alpha}_A$. Зауважимо, що вибіркові оцінки (1.27) є випадковими величинами, тому випадковою величиною є також рівень довіри $\hat{\alpha}_A$.

Для того, щоб обґрунтувати можливість переходу від задачі (7.22) до задачі (4.6) при виборі раціональної структури портфеля фінансових активів, потрібно дослідити статистичні властивості оцінки $\hat{\alpha}_A$. Для цього ми припустимо, що значення параметрів розподілу дохідностей $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є відомими. Використовуючи ці значення як основу для побудови вибірки, ми згенеруємо вибірку

обсягом $n \in \{240, 360, 480, 600, 1000\}$ та знайдемо значення $\hat{\alpha}_A$. Провівши такий експеримент 10^5 раз, зобразимо графічно густину розподілу оцінки $\hat{\alpha}_A$ та обчислимо основні характеристики цієї оцінки (математичне сподівання і дисперсію).

За відомі значення для параметрів μ та Σ прийемо вибірккові оцінки, отримані з вибірки історичних щомісячних значень про дохідності п'яти ($k=5$) акцій компаній, що входять до індексу Dow Jones (Microsoft, JPMorgan Chase, Walt Disney, Boeing, McDonald's) за період часу від 01.2010 до 12.2015 (60 спостережень), а саме

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 36.510 & 24.278 & 13.315 & 6.154 & 4.923 \\ 24.278 & 60.648 & 23.218 & 13.041 & 6.242 \\ 13.315 & 23.218 & 33.398 & 15.354 & 6.550 \\ 6.154 & 13.041 & 15.354 & 30.697 & 5.950 \\ 4.923 & 6.242 & 6.550 & 5.950 & 10.671 \end{pmatrix},$$

$$\mu = (0.8918, 0.7984, 1.8345, 1.0831, 0.3778)'$$

При таких значеннях параметрів найменша очікувана дохідність ефективного портфеля (портфеля з найменшою дисперсією) становить 0.579, а дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95 – 0.723. Отже, вибравши структуру портфеля, що збігається із портфелем найменшої дисперсії інвестор очікує на 0.579 % доходу щомісяця, або 6.95 % річних. При виборі портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95 очікувана щомісячна дохідність становитиме 0.723 %, а річна – 8.68 %.

Нехай інвестор зацікавлений у портфелі фінансових активів з найменшим ризиком при рівні доходу, що є вдвічі більший за очікуваний дохід портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95, тобто у формулювання задачі (7.22) нам потрібно взяти $R_0=1.446$. За таких вхідних даних точне значення для α_A становить 0.651. Дослідимо точність вибіркової оцінки $\hat{\alpha}_A$ за таких умов. Для цього обчислимо середні та дисперсії оцінки $\hat{\alpha}_A$ при різних значеннях n (табл. 7.7).

Результати, отримані в таблиці 7.7, дають підстави стверджувати, що вибіркова оцінка $\hat{\alpha}_A$ рівня довіри α_A є доволі точною, а

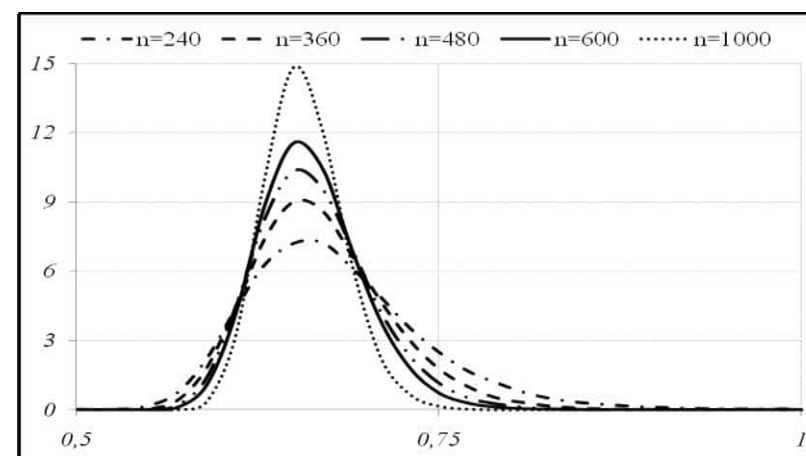
отже, може бути використана на практиці для вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR та необхідним (наперед заданим) рівнем очікуваної дохідності.

Таблиця 7.7

Середні значення та дисперсії $\hat{\alpha}_A$

Обсяг вибірки n	Середнє	Дисперсія
240	0.6787	0.00364
360	0.6692	0.00225
480	0.6642	0.00162
600	0.6615	0.00125
1000	0.6567	0.00072

Джерело: розроблено автором



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.17. Розподіл значень $\hat{\alpha}_A$ за припущення нормальності розподілу вектора дохідностей активів, з яких складено портфель, при $n \in \{240, 360, 480, 600, 1000\}$.

На рис 7.17 зображено розподіл значень оцінки $\hat{\alpha}_A$ залежно від обсягу вибірок, на основі яких проведено оцінювання. Значення оцінок рівня довіри знаходяться у доволі вузькому інтервалі.

Графіки густин є близькими до симетричних, причому зі зростанням обсягу вибірки їх симетричність стає більш вираженою.

- *Зауваження 7.3.* Підставляючи у (7.30) замість бажаного рівня очікуваної дохідності портфеля R_0 очікувану дохідність тангенціального портфеля R_T (1.16), отримаємо

$$\begin{aligned}\alpha_A &= \Phi \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{\left(\frac{\mu' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1})} - \frac{\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^2 + s} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{s^2 V_{GMV} (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2}{\left(\mu' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} - \mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \right)^2 + s} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{s^2 V_{GMV} (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2}{\left(\mu' \Sigma^{-1} \mu \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} - r_0 \mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} - (\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2 + r_0 \mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} \right)^2 + s} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{s^2 V_{GMV} (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}) \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2}{\left((\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2 \left(\mu' \Sigma^{-1} \mu - \left(\frac{\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^2 \right) \right)^2 + s} \right).\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\mu' \Sigma^{-1} \mu - \left(\frac{\mu' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^2 = \mu' \left(\Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1}' \Sigma^{-1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mu = \mu' \mathbf{R} \mu = s,$$

матимемо

$$\begin{aligned}\alpha_A &= \Phi \left(\frac{s^2 V_{GMV} (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}))^2}{(\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2 s^2} + s \right) = \\ &= \Phi \left(\sqrt{V_{GMV} (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1}))^2} + s \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Phi \left(\sqrt{V_{GMV} \left((\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu)^2 - 2r_0 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu) (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}) + r_0^2 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})^2 \right)} + s \right) = \\ &= \Phi \left(\sqrt{\frac{(\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu)^2}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} - 2r_0 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu) + r_0^2 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}) + \mu' \Sigma^{-1} \mu - \frac{(\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu)^2}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}} + s \right) = \\ &= \Phi \left(\sqrt{\mu' \Sigma^{-1} \mu - 2r_0 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu) + r_0^2 (\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1})} \right) = \\ &= \Phi \left(\sqrt{(\mu - r_0 \mathbf{1})' \Sigma^{-1} (\mu - r_0 \mathbf{1})} \right) = \alpha_{TP},\end{aligned}$$

тобто рівень довіри для VaR (7.7), за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR збігатиметься з тангенціальним портфелем.

Ми дослідили можливість вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR при заданому рівні очікуваної дохідності на основі критерію безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR . Ми показали, що структура портфеля, отриманого шляхом мінімізації VaR при заданому рівні очікуваної дохідності, не залежить від вибраного рівня довіри, тобто такий метод є еквівалентним методу мінімізації дисперсії портфеля при додаткових лінійних обмеженнях [14]. Використовуючи результати, отримані в [14], знайдено структуру портфеля з найменшим ризиком при заданому рівні очікуваної дохідності та як наслідок отримано, що портфель з такою структурою є ефективним за Марковіцем. Враховуючи це, і той факт, що довільний ефективний, за Марковіцем, портфель може бути отриманий шляхом мінімізації VaR портфеля при певному рівні довіри [42], існує такий рівень довіри α_A для VaR , при якому очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR буде дорівнювати потрібному значенню.

Ми знайшли аналітичний вираз для обчислення α_A . Зауважимо, що у вираз входять параметри розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель, μ та Σ , які на практиці є невідомими. Для вирішення практичних задач інвестор змушений використовувати оцінки цих параметрів. Найпоширенішими оцінками па-

раметрів розподілу є вибіркові оцінки, які в загальному випадку є випадковими величинами. Тому випадковою величиною буде також вибіркова оцінка $\hat{\alpha}_A$ параметра α_A . З метою перевірки можливості використання цієї оцінки на практиці ми на основі методу Моньє-Карло дослідили її точність. Ми отримали, що вибіркова оцінка є досить точною. Також ми показали, що густини вибіркової оцінки параметра α_A є близькими до симетричних, причому зі зростанням обсягу вибірки їх симетричність стає більш вираженою.

Отже, метод вибору структури портфеля шляхом мінімізації VaR портфеля при заданому рівні очікуваної дохідності можна замінити на більш універсальний метод безумовної (відносно очікуваної дохідності) мінімізації VaR портфеля при рівні довіри α_A .

7.5. Властивості вибіркової оцінки рівня довіри α_A , при якому рівень очікуваної дохідності портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює наперед заданому рівню

Використання VaR для вибору раціональної структури портфеля фінансових активів розглядається у низці праць [4], [32], [42], [92], [95], [123], [124]. Незважаючи на популярність вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі мінімізації VaR , може трапитися, що рівень очікуваної дохідності такого портфеля буде меншим за бажаний рівень. Ця проблема є особливо актуальною для приватних інвесторів, які є вільні у виборі рівня довіри для VaR . Добре відомо, що очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR є обернено пропорційна до вибраного рівня довіри для VaR . З іншого боку, менший рівень довіри збільшує ризиковість портфеля фінансових активів. Ця проблема подібна до проблеми вибору рівня довіри для VaR , за якого портфель з максимальним відношенням Шарпа є еквівалентний портфелю з найменшим рівнем VaR за

вибраного рівня довіри. У [1] показано, що портфель з максимальним відношенням Шарпа можна розглядати як портфель з найменшим рівнем VaR за певного рівня довіри. Проте також показано, що рівень довіри в цьому випадку є доволі низький, тобто портфель фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа є дуже ризиковим. Для інших мір ризику подібні дослідження проведені в [123], [124]. У [13] знайдено аналітичний вираз, що описує взаємозв'язок між очікуваною дохідністю портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR та рівнем довіри для обчислення VaR . На жаль, використати на практиці отримані результати неможливо, оскільки рівень довіри, за якого очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює бажаному рівню, залежить від невідомих на практиці параметрів розподілу вектора дохідностей, з яких формується портфель. Тому інвестор повинен використовувати оцінку рівня довіри, яка в загальному випадку є випадковою величиною.

Наша мета полягає у дослідженні імовірнісних властивостей вибіркової оцінки рівня довіри для VaR , за якого очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює бажаному рівню. Більш формально, метою є дослідження вибіркової оцінки рівня довіри α_A за різних припущень щодо імовірнісної поведінки вектора дохідностей, з яких ми формуємо портфель. Зазначимо, що ми припускаємо, що бажаний рівень очікуваної дохідності є наперед заданим, а отже, є константою, а не випадковою величиною, як у випадку дослідження еквівалентності портфелів фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа і найменшим рівнем VaR , де рівень очікуваної дохідності портфеля з максимальним відношенням Шарпа залежить від невідомих параметрів та його оцінка є випадковою величиною.

7.5.1. Нормально розподілені та неавтокорельовані дохідності активів

Припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких ми формуємо портфель, має k -вимірний нормальний розподіл з параметрами μ та Σ , та дохідності не є автокорельованими. За такого

припущення вираз для обчислення потрібного рівня довіри має вигляд (7.30), а вибіркова оцінка

$$\hat{\alpha}_A = \Phi \left(\sqrt{\frac{\hat{s}^2 \hat{V}_{GMV}}{(\hat{R}_{GMV} - R_0)^2}} + \hat{s} \right), \quad (7.31)$$

де \hat{R}_{GMV} , \hat{V}_{GMV} , \hat{s} – вибіркові оцінки параметрів ефективної множини Марковіца.

З метою спрощення подальших викладок позначимо

$$\Delta = (R_0 - R_{GMV})^2; a_A = sV_{GMV} + \Delta; I = \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{\Delta} + s}. \quad (7.32)$$

У наступній теоремі знайдено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки $\hat{\alpha}_A$.

Теорема 7.18. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та дохідності є неавтокорельованими. Припустимо, що $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \sim N(0, \sigma_A^2),$$

з

$$\sigma_A^2 = \Phi^2(I) \left(s^3 V_{GMV}^2 \frac{V_{GMV}(1+s) + \Delta}{a_A \Delta^2} + \frac{(2+s)(2a_A - \Delta)^2}{2a_A \Delta} \right), \quad (7.33)$$

де I , Δ , a_A задані в (7.32), ϕ є густиною стандартного нормального розподілу, V_{GMV} задано у (1.9), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$.

Доведення. З дельта-методу [60] та леми 6.2 при $\psi''(0)/(\psi'(0))^2 = 1$ та $\gamma = 1$, отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \sim N(0, \sigma_A^2),$$

де

$$\sigma_A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}}; \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}}; \frac{\partial \alpha_A}{\partial s} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2+s) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}}; \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}}; \frac{\partial \alpha_A}{\partial s} \end{pmatrix}'.$$

Використовуючи позначення (7.32), отримаємо

$$\frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}} = \frac{\partial}{\partial R_{GMV}} \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right) = \\ = \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right) \frac{\partial}{\partial R_{GMV}} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s \right) = \\ = \frac{\Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s}} \frac{\partial}{\partial R_{GMV}} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s \right) = \\ = \frac{\Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s}} \frac{2s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^3} = \frac{\Phi(I)}{I} \cdot \frac{s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}}, \\ \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}} = \frac{\partial}{\partial V_{GMV}} \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right) = \\ = \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right) \frac{\partial}{\partial V_{GMV}} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s \right) = \\ = \frac{\Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s}} \frac{\partial}{\partial V_{GMV}} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s}} \frac{s^2}{(R_0 - R_{GMV})^2} = \frac{\square(I)}{2I} \cdot \frac{s^2}{\Delta}, \\
&\frac{\partial \alpha_A}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right) = \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s \right) = \\
&= \frac{\left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_0 - R_{GMV})^2} + s}} \frac{2s V_{GMV} + (R_0 - R_{GMV})^2}{(R_0 - R_{GMV})^2} = \frac{\square(I)}{2I} \cdot \frac{2a_A - \Delta}{\Delta}.
\end{aligned}$$

Підставляючи попередні похідні в (7.34), матимемо

$$\begin{aligned}
\sigma_A^2 &= \frac{\square^2(I)}{4I^2} \left(\frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}}; \frac{s^2}{\Delta}; \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2+s) \end{pmatrix} \times \\
&\times \left(\frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}}; \frac{s^2}{\Delta}; \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \right)' = \\
&= \frac{\square^2(I)}{4I^2} \left(\frac{2s^2 V_{GMV}^2 (1+s)}{\Delta^{3/2}}; \frac{2s^2 V_{GMV}^2}{\Delta}; \frac{2s(2+s)(2a_A - \Delta)}{\Delta} \right) \times \\
&\times \left(\frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}}; \frac{s^2}{\Delta}; \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \right)' =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\square^2(I)}{4I^2 \Delta^3} \left(4s^4 V_{GMV}^3 (1+s) + 2s^4 V_{GMV}^2 \Delta + 2s(2+s)(2a_A - \Delta)^2 \Delta \right).$$

Враховуючи, що $I^2 = s(V_{GMV} + \Delta)/\Delta = sa_A/\Delta$, отримаємо

$$\sigma_A^2 = \square^2(I) \left(s^3 V_{GMV}^2 \frac{V_{GMV}(1+s) + \Delta}{a_A \Delta^2} + \frac{(2+s)(2a_A - \Delta)^2}{2a_A \Delta} \right).$$

Теорему доведено.

Безпосередньо використати на практиці результати теореми 7.18 неможливо, оскільки дисперсія оцінки $\hat{\alpha}_A$ залежить від невідомих параметрів розподілу вектора доходностей, з яких складено портфель, μ та Σ . Ми розглянемо вибірку оцінку дисперсії

$$\hat{\sigma}_A^2 = \square^2(\hat{I}) \left(\hat{s}^3 \hat{V}_{GMV}^2 \frac{\hat{V}_{GMV}(1+\hat{s}) + \hat{\Delta}}{\hat{a}_A \hat{\Delta}^2} + \frac{(2+\hat{s})(2\hat{a}_A - \hat{\Delta})^2}{2\hat{a}_A \hat{\Delta}} \right). \quad (7.34)$$

Конзистентність оцінки (7.34) параметра (7.33) доведено у наступній теоремі.

Теорема 7.19. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \in k$ -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ та доходності є неавтокорельованими. Припустимо, що $\mu \neq \mu \mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\hat{\sigma}_A^2 = \square^2(\hat{I}) \left(\hat{s}^3 \hat{V}_{GMV}^2 \frac{\hat{V}_{GMV}(1+\hat{s}) + \hat{\Delta}}{\hat{a}_A \hat{\Delta}^2} + \frac{(2+\hat{s})(2\hat{a}_A - \hat{\Delta})^2}{2\hat{a}_A \hat{\Delta}} \right) \rightarrow \sigma_A^2.$$

де I, Δ, a_A задані в (7.32), $\varphi \in$ густиною стандартного нормального розподілу, V_{GMV} задано у (1.9), $s = \mu' \mathbf{R} \mu$, $\mathbf{R} = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \Sigma^{-1}}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}}$.

Доведення. Доведення впливає з доведення теореми 7.18 та з теореми 1.14 в [67].

Використовуючи результати теорем 7.18-7.19 (1- β) інтервал довіри для рівня довіри α_A матиме вигляд:

$$\left[\hat{\alpha}_A - \frac{\hat{\sigma}_A}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}; \hat{\alpha}_A + \frac{\hat{\sigma}_A}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2} \right]. \quad (7.35)$$

Побудований $(1-\beta)$ інтервал довіри (7.35) дає нам можливість перевірити гіпотезу про те, чи рівень довіри α_A статистично відрізняється від 1. Іншими словами, ми маємо можливість перевірити гіпотезу чи портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α_A для VaR статистично відрізняється від портфеля з найменшою дисперсією складеною з тих самих активів. Для цього просто треба перевірити чи $(1-\beta)$ інтервал довіри включає 1. Якщо так, то при рівні довіри $(1-\beta)$ портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR при рівні довіри α_A для VaR та портфель з найменшою дисперсією є статистично еквівалентні.

Проілюструємо результат теорем 7.18-7.19 на реальних даних. Для цього виберемо щотижневі спостереження про дохідності 15 акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Microsoft, Coca-Cola, Walt Disney, Boeing, McDonald's, Intel, Procter & Gamble, Pfizer, Cisco Systems, AT&T, General Electric, Home Depot, Merck & Co, The Travelers Companies, Verizon Communications* за період часу з 25.11.2013 до 28.12.2015 (110 спостережень). Перевірку на коректність нашого припущення про нормальність та неавтокорельованість вибраних дохідностей ми провели в розділі 7.3.1. Побудуємо портфель з $k=15$ акцій та побудуємо $(1-\beta)$ інтервали довіри ($\beta=0.1, 0.05, 0.01$) для рівня довіри α_A при $R_0=R_{VaR;0.95}$, тобто перевіримо чи статистично різними є портфель з найменшою дисперсією та портфель з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95 для VaR . Дані обчислень наведені в табл. 7.8.

Таблиця 7.8

$(1-\beta)$ інтервали довіри ($\beta=0.1, 0.05, 0.01$) для рівня довіри α_A при $R_0=R_{VaR;0.95}$

	$\beta=0.1$	$\beta=0.05$	$\beta=0.01$
Нижня межа	0.600	0.533	0.402
Верхня межа	1.300	1.367	1.498

Джерело: розроблено автором

Бачимо, що всі інтервали довіри містять 1, отже для всіх вибраних нами рівнів довіри портфель з найменшим рівнем VaR при

рівні довіри 0.95 для VaR є статистично еквівалентним портфелю з найменшою дисперсією.

Обчислимо, при різних значеннях ($\beta=0.1, 0.05, 0.01$), найменші рівні довіри для VaR , за яких портфель з найменшим рівнем VaR статистично еквівалентний портфелю з найменшою дисперсією. Тоді при виборі рівня довіри для VaR меншого за знайдені значення портфель з найменшим рівнем VaR буде статистично відрізнятися, при відповідному рівні довіри, від портфеля з найменшою дисперсією. Результати наведені в табл. 7.9.

Бачимо з табл. 7.9, що всі портфелі, які статистично відрізняються від портфеля з найменшою дисперсією є дуже ризикові.

Таблиця 7.9

Найменші рівні довіри для VaR , за яких портфель з найменшим рівнем VaR , статистично еквівалентний портфелю з найменшою дисперсією.

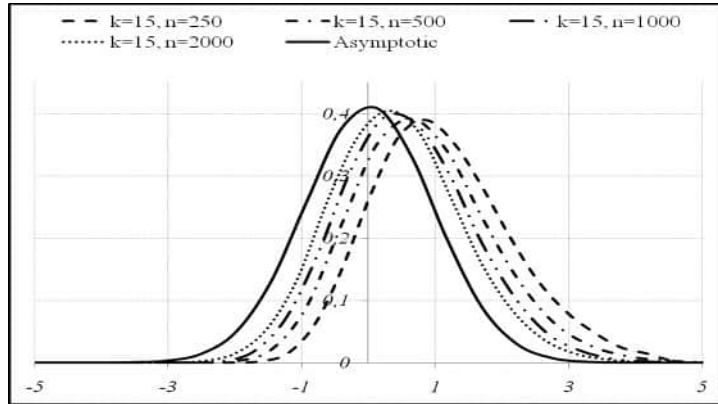
	$\beta=0.1$	$\beta=0.05$	$\beta=0.01$
Рівень довіри для VaR	0.7747	0.7581	0.7332

Джерело: розроблено автором

Порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ при різних значеннях обсягу вибірки для побудови оцінок ($n=120, 250, 500, 1000$) з асимптотичним (рис. 7.18). З вибраних даних отримуємо $R_{VaR;0.95}=0.1124$. Для значення бажаного рівня дохідності R_0 виберемо $R_0=0.4$. З вибраних даних отримуємо

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, 0.9377).$$

З рис. 7.18 бачимо, що збіжність емпіричних розподілів до асимптотичного є доволі повільною. Поведінці емпіричних розподілів оцінки $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$, як і у випадку емпіричних розподілів оцінки $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$, притаманне зміщення відносно асимптотичного розподілу. Цей результат є очікуваним, зважаючи на результати моделювання, отримані при дослідженні випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{TP} - \alpha_{TP})$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.18. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k=15$.

На жаль, обчислити математичне сподівання випадкової величини

$$\xi = \frac{\hat{s}^2 \hat{V}_{GMV}}{(\hat{R}_{GMV} - R_0)^2} + \hat{s}$$

в загальному випадку неможливо. Ми обчислимо умовне математичне сподівання

$$\begin{aligned} M(\xi | \hat{R}_{GMV}) &= M\left(\frac{\hat{s}^2 \hat{V}_{GMV}}{(\hat{R}_{GMV} - R_0)^2} + \hat{s} | \hat{R}_{GMV}\right) = \\ &= \frac{M(\hat{s}^2 \hat{V}_{GMV} | \hat{R}_{GMV})}{(\hat{R}_{GMV} - R_0)^2} + M(\hat{s} | \hat{R}_{GMV}) \end{aligned}$$

З [52], маємо

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi_{n-k}^2,$$

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1, ns},$$

де через $F_{k-1, n-k+1, ns}$ позначено нецентральний розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями свободи та нецентральним параметром ns , а χ_{n-k}^2 – χ^2 -розподіл з $n-k$ ступенями свободи, та випадкова величина \hat{V}_{GMV} незалежна від \hat{s} . Враховуючи вигляд функції густини випадкового вектора $(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})$ (див., напр., [52]), отримаємо

$$M(\hat{s}^2 \hat{V}_{GMV} | \hat{R}_{GMV}) + M(\hat{s} | \hat{R}_{GMV}) = M(\hat{V}_{GMV})M(\hat{s}^2) + M(\hat{s}).$$

Обчислимо математичні сподівання

$$M(\hat{V}_{GMV}) = \frac{n-k}{n-1} V_{GMV},$$

$$M(\hat{s}) = \frac{(n-1)(k-1)}{n(n-k+1)} \frac{n-k+1}{k-1} \frac{k-1+ns}{n-k-1} = \frac{(n-1)(k-1)}{n(n-k-1)} + \frac{(n-1)s}{n-k-1},$$

$$\begin{aligned} M(\hat{s}^2) &= \\ &= \frac{(n-k+1)^2}{(k-1)^2 (n-k-1)(n-k-3)} \frac{(n-1)^2 (k-1)^2}{n^2 (n-k+1)^2} (n^2 s^2 + (2ns + k-1)(k+1)) = \\ &= \frac{(n-1)^2 s^2}{(n-k-1)(n-k-3)} + \frac{(n-1)^2 (k+1)((2ns + 2k-2) - (k-1))}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)} = \\ &= \frac{(n-1)^2 s^2}{(n-k-1)(n-k-3)} + \\ &+ \frac{2(n-1)^2 (k+1)(ns + k-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)} - \frac{(n-1)^2 (k+1)(k-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-1)^2 s^2}{(n-k-1)(n-k-3)} + \frac{2(n-1)^2 (k+1)(ns+k-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)} - \frac{(n-1)^2 (k+1)(k-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)} =$$

$$= \frac{(n-1)^2 s^2}{(n-k-1)(n-k-3)} + \frac{2(n-1)(k+1)}{n(n-k-3)} M(\hat{s}) - \frac{(n-1)^2 (k^2-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)}$$

Отже, ми отримали

$$M\left(\frac{(n-k-1)(n-k-3)}{(n-k)(n-1)} \hat{V}_{GMV} \times \left(\hat{s}^2 - \frac{2(n-1)(k+1)}{n(n-k-3)} \hat{s} + \frac{(n-1)^2 (k^2-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)}\right) \middle| \hat{R}_{GMV}\right) = V_{GMV} s^2,$$

$$M\left(\frac{n-k-1}{n-1} \hat{s} - \frac{k-1}{n} \middle| \hat{R}_{GMV}\right) = s.$$

Тому, для параметра $s + s^2 V_{GMV} / (R_0 - R_{GMV})^2$ ми розглянемо “умовно” виправлену оцінку

$$X_{cum} = \frac{n-k-1}{n-1} \hat{s} - \frac{k-1}{n} + \frac{(n-k-1)(n-k-3)}{(n-k)(n-1)(R_0 - \hat{R}_{GMV})^2} \hat{V}_{GMV} \left(\hat{s}^2 - \frac{2(n-1)(k+1)}{n(n-k-3)} \hat{s} + \frac{(n-1)^2 (k^2-1)}{n^2 (n-k-1)(n-k-3)}\right),$$

а для параметра α_A – “умовно” виправлену оцінку

$$\alpha_A^* = \Phi\left(\sqrt{X_{cum}}\right).$$

Аналогічно до випадку виправленої оцінки параметра α_{TP} , оцінка X_{cum} може приймати від’ємні значення з додатною імовірністю. Тому ми, будуючи “умовно” виправлену оцінку параметра α_A , ігноруватимемо вибірки, для яких X_{cum} прийматиме від’ємні значення.

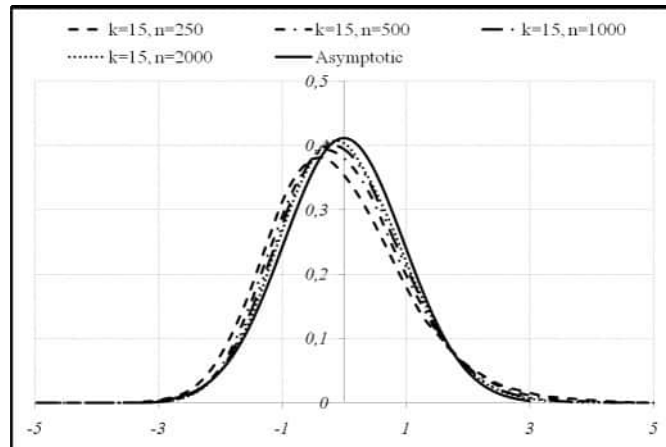
Порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при різних значеннях обсягу вибірки для побудови оцінок ($n=250, 500, 1000, 2000$) з асимптотичним. Спочатку порівняємо емпіричні середні та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ з асимптотичними значеннями. Результати наведені в табл. 7.10. Бачимо, що емпіричні дисперсії “умовно” виправленої оцінки є близькі до асимптотичних значень, хоч і збігаються до нього дещо повільніше, ніж у випадку вибіркової невиправленої оцінки. Натомість збіжність емпіричних середніх є швидшою у випадку використання “умовно” виправленої оцінки.

Таблиця 7.10

Середнє значення та дисперсія відхилень випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ від асимптотичного значення при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k=15$.

	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$		$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
$n=250$	1.1039	1.0733	-0.1125	1.2195
$n=500$	0.8038	1.0417	-0.0606	1.0724
$n=1000$	0.5740	0.9863	-0.0404	0.9919
$n=2000$	0.4081	0.9552	-0.0303	0.9611
Асимптотичні	0	0.9377	0	0.9377

Джерело: розроблено автором



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.19. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k=15$.

На рис. 7.19 представлено емпіричні та асимптотичну густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$, які повністю підтверджують наші попередні спостереження.

7.5.2. Неавтокорельовані дохідності активів, що мають багатовимірний еліптичний розподіл

Припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких ми формуємо портфель, має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). У цьому випадку задача вибору раціональної структури портфеля на основі мінімізації його VaR матиме вигляд (6.8).

Теорема 7.20. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у

момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$ і $n > k$. Тоді

$$\alpha_A = F \left(\gamma \cdot \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s} \right),$$

F – одновимірна стандартизована функція розподілу елементів вектора \mathbf{X}_t .

Доведення. Доведення є аналогічним до доведення теореми 7.17, враховуючи, що за припущення, що вектор дохідностей активів має багатовимірний еліптичний розподіл, задача мінімізації VaR портфеля матиме вигляд (6.8):

$$VaR_\alpha(\mathbf{w}) = \frac{d_\alpha}{\gamma} \sqrt{\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}} - \mathbf{w}' \boldsymbol{\mu} \rightarrow \min \text{ за умови } \sum_{i=1}^k w_i = 1,$$

де d_α – є α квантилю випадковою величини $\frac{\mathbf{I}'\mathbf{X} - \mathbf{I}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{I}'\mathbf{D}\mathbf{I}}}$ для деякого вектора $\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$, та не залежить від вибору \mathbf{I} [75].

Дослідимо асимптотичні властивості вибіркової оцінки рівня довіри α_A

$$\hat{\alpha}_A = F \left(\gamma \cdot \sqrt{\frac{\hat{s}^2 \hat{V}_{GMV}}{(\hat{R}_{GMV} - R_0)^2} + \hat{s}} \right).$$

Теорема 7.21. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена і $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \sim N(0, \sigma_{A,el}^2),$$

де

$$\sigma_{A:el}^2 = \gamma^2 f^2(\gamma I) \left(s^3 V_{GMV}^2 \frac{V_{GMV}(1 + \lambda s) + \lambda \Delta}{a_A \Delta^2} + \frac{(2 + \lambda s)(2a_A - \Delta)^2}{2a_A \Delta} \right), \quad (7.36)$$

I, Δ, a_A задані в (7.32), $\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$, $\gamma = (-\psi'(0)/2)^{1/2}$, f – одновимірна стандартизована густина елементів вектора \mathbf{X}_t , V_{GMV} задано у (1.9), $s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$.

Доведення. Доведення аналогічне до доведення теореми 7.18, враховуючи, що з дельта-методу та леми 6.2 маємо

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_A}{\partial s} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \times \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_A}{\partial s} \right)'$$

Конзистентність вибіркової оцінки параметра (7.36) доведено в наступній теоремі.

Теорема 7.22. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена і $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\hat{\sigma}_{A:el}^2 = \gamma^2 f^2(\gamma \hat{I}) \left(\hat{s}^3 \hat{V}_{GMV}^2 \frac{\hat{V}_{GMV}(1 + \lambda \hat{s}) + \lambda \hat{\Delta}}{\hat{a}_A \hat{\Delta}^2} + \frac{(2 + \lambda \hat{s})(2\hat{a}_A - \hat{\Delta})^2}{2\hat{a}_A \hat{\Delta}} \right) \rightarrow \sigma_{A:el}^2$$

I, Δ, a_A задані в (7.32), $\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$, $\gamma = (-\psi'(0)/2)^{1/2}$, f – одновимірна стандартизована густина елементів вектора \mathbf{X}_t , V_{GMV} задано у (1.9), $s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}$,

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з доведення теореми 7.21 та з теореми 1.14 в [67].

Зауважимо, що аналогічно до випадку нормально розподілених та неавтокорельованих дохідностей активів, з яких сформовано портфель, ми маємо можливість (використавши результати теорем 7.22-7.23) побудувати $(1-\beta)$ інтервал довіри для рівня довіри α_A

$$\left[\hat{\alpha}_A - \frac{\hat{\sigma}_{A:el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2}; \hat{\alpha}_A + \frac{\hat{\sigma}_{A:el}}{\sqrt{n}} z_{1-\beta/2} \right]. \quad (7.37)$$

Для ілюстрації отриманих результатів виберемо 20 акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Walt Disney, Boeing, McDonald's, Johnson & Johnson, Intel, Procter & Gamble, Pfizer, Cisco Systems, Wal-Mart, American Express, 3M, AT&T, Goldman Sachs, General Electric, Merck & Co, The Travelers Companies, United Technologies Corporation, Verizon Communications, Caterpillar, UnitedHealth Group* за період часу з 05.03.2012 до 28.12.2015 (200 спостережень). Ми припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель ($k=10, 15, 20$), має багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи та дохідності активів є неавтокорельованими. Коректність вибору даних відносно нашого припущення перевірено у розділі 7.3.2.

Побудуємо портфелі з $k \in \{10, 15, 20\}$ акцій та побудуємо $(1-\beta)$ інтервали довіри ($\beta=0.1, 0.05, 0.01$) для рівня довіри α_A при $R_0 = R_{VaR;0.95}$, тобто перевіримо чи статистично різними є портфель з найменшою дисперсією та портфель з найменшим рівнем *VaR* при рівні довіри 0.95 для *VaR*. Дані обчислень наведені в табл. 7.11. Бачимо, що, аналогічно випадку нормально розподілених та неавтокорельованих дохідностей, всі інтервали довіри містять 1, отже, для всіх вибраних нами рівнів довіри портфель з найменшим рівнем *VaR* при рівні довіри 0.95 для *VaR* є статистично еквівалентним портфелю з найменшою дисперсією.

Таблиця 7.11

(1-β) інтервали довіри (β=0.1, 0.05, 0.01) для рівня довіри α_A при R₀=R_{VaR,0.95}

		β=0.1	β=0.05	β=0.01
Нижня межа	k=10	0.291	0.165	-0.082
Верхня межа		1.609	1.736	1.982
Нижня межа	k=15	0.424	0.323	0.127
Верхня межа		1.476	1.577	1.773
Нижня межа	k=20	0.707	0.661	0.570
Верхня межа		1.193	1.239	1.330

Джерело: розроблено автором

Обчислимо, при різних значеннях (β=0.1, 0.05, 0.01), найменші рівні довіри для VaR за яких портфель з найменшим рівнем VaR статистично еквівалентний портфелю з найменшою дисперсією. Результати наведені в табл. 7.12. Бачимо, що всі портфелі, які статистично відрізняються від портфеля з найменшою дисперсією, є дуже ризикові, як і у випадку нормально розподілених дохідностей (табл. 7.9).

Таблиця 7.12

Найменші рівні довіри для VaR, за яких портфель з найменшим рівнем VaR статистично еквівалентний портфелю з найменшою дисперсією

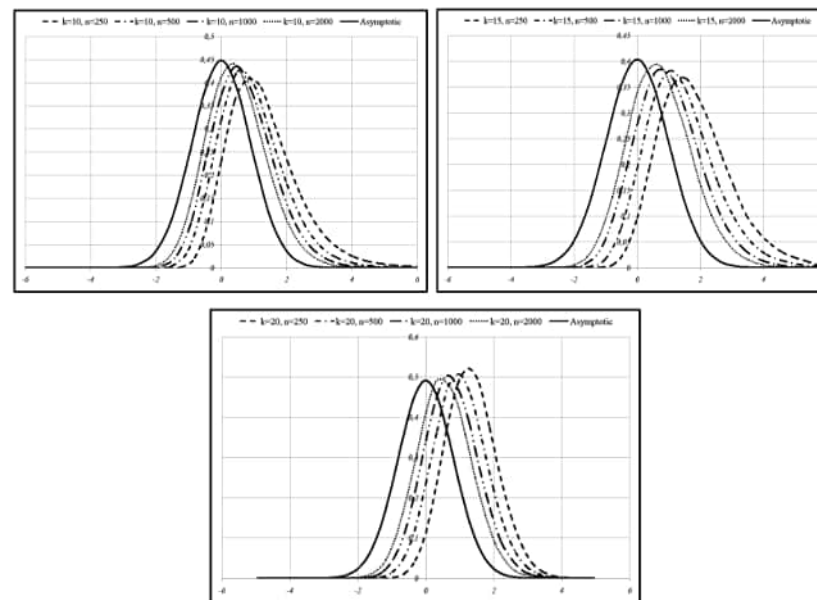
		β=0.1	β=0.05	β=0.01
Рівень довіри для VaR	k=10	0.7097	0.6951	0.6739
	k=15	0.7289	0.7134	0.6908
	k=20	0.8021	0.7845	0.7581

Джерело: розроблено автором

Отже, порівняємо емпіричні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ при різних значеннях обсягу вибірки для побудови оцінок (n=250, 500, 1000, 2000) з асимптотичним (рис. 7.20). Для значення бажаного рівня дохідності R₀ виберемо потроєне значення очікуваної дохідності портфеля з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95, тобто R₀=3R_{VaR,0.95}. З вибраних даних отримаємо

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, 0.79367), \sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, 0.97673),$$

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, 0.65887).$$



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.20. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ при n ∈ {250, 500, 1000, 2000}, k ∈ {10, 15, 20}, R₀=3R_{VaR,0.95}.

З рис. 7.20 бачимо, що збіжність емпіричних розподілів до асимптотичного є, як і у випадку рівня довіри для VaR, за якого портфель з найменшим рівнем VaR збігається із тангенціальним портфелем (рис. 7.5) при використанні вибіркової невиправленої оцінки, доволі повільною. Густинам притаманне зміщення. Проте збіжність емпіричних дисперсій до асимптотичної є задовільною.

Дослідимо поведінку побудованої нами “умовно” виправленої оцінки параметра α_A - $\hat{\alpha}_A^*$ та порівняємо швидкість збіжності емпіричних середніх, дисперсій та густин розподілів випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ до асимптотичних.

У табл. 7.13 наведено емпіричні та відповідні асимптотичні значення середніх та дисперсій випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$

та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{10, 15, 20\}$ за припущення, що дохідності активів, з яких складено портфель, неавтокорельовані та мають розподіл Ст'юдента з п'ятьма ступенями свободи.

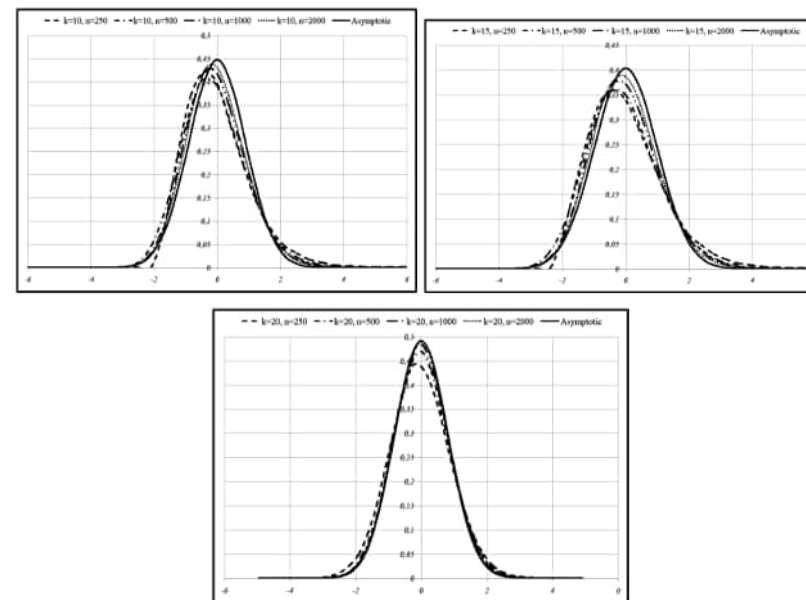
Таблиця 7.13

Емпіричні та асимптотичні середні значення і дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{10, 15, 20\}$.

			$n=250$	$n=500$	$n=1000$	$n=2000$	Асимпт.
k=10	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$	Середнє	1.2748	0.9240	0.6698	0.4682	0
		Дисперсія	1.1435	0.9744	0.8847	0.8316	0.7937
k=10	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$	Середнє	0.0077	-0.0952	-0.0639	-0.0341	0
		Дисперсія	1.0677	1.0280	0.9069	0.8507	0.7937
k=15	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$	Середнє	1.8087	1.3688	0.9887	0.7167	0
		Дисперсія	1.2750	1.2137	1.0947	1.0308	0.9767
k=15	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$	Середнє	0.0155	-0.0862	-0.0391	-0.0207	0
		Дисперсія	1.4029	1.2939	1.1409	1.0521	0.9767
k=20	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$	Середнє	1.3252	1.0125	0.7467	0.5407	0
		Дисперсія	0.5712	0.6152	0.6285	0.6334	0.6589
k=20	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$	Середнє	-0.0349	0.0028	0.0182	0.0213	0
		Дисперсія	0.8360	0.7340	0.6822	0.6609	0.6589

Джерело: розроблено автором

Результати табл. 7.13 підтверджують, що побудована нами “умовно” виправлена оцінка параметра α_A є кращою за вибіркочну оцінку не лише у випадку нормально розподілених дохідностей, але й у випадку неавтокорельованих дохідностей, що мають багатовимірний еліптичний розподіл. Збіжність середніх випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ є набагато швидшою ніж для випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$. Швидкість збіжності дисперсій відрізняється несуттєво. Аналогічні результати отримуємо також для густин розподілу (рис. 7.21). Зауважимо, що збільшення кількості активів у портфелі суттєво не впливає на властивості випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$, на відміну від випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$, для якої властивості суттєво погіршуються при збільшенні кількості активів у портфелі.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.21. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{10, 15, 20\}$.

7.5.3. Дохідності активів, що поводяться як стаціонарний процес Гауса

В [130] досліджено властивості рівня довіри для VaR , за якого очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює наперед заданому значенню при неавтокорельованих дохідностях активів, що включено в портфель. Нашою метою тепер є дослідження впливу наявності автокореляцій дохідностей на властивості оцінки рівня довіри для VaR , за якого очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює наперед заданому значенню.

Нехай ми формуємо портфель з k елементів. Припустимо тепер, що вектор дохідностей активів \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес із середнім $M(\mathbf{X}_t)=\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h)=\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена. За такого припущення вираз для обчислення рівня довіри для $VaR - \alpha_A$, за якого портфель фінансових активів з найменшим рівнем VaR матиме наперед задану очікувану дохідність R_0 , збігатиметься із випадком нормально розподілених та неавтокорельованих дохідностей (7.30), тобто

$$\alpha_A = \Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s} \right).$$

У наступній теоремі досліджено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки параметра α_A .

Теорема 7.23. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес із середнім $M(\mathbf{X}_t)=\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h)=\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена, ряди, які входять у вираз для $\boldsymbol{\Omega}$ (6.1), є збіжним, і $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \sim N(0, \sigma_{A:gp}^2),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{A:gp}^2 = & \frac{\square^2(I)}{I^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_A^2}{R_{GMV}^2} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{A_A}{R_{GMV}} (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \right) + \\ & + (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A)^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{A_A^2}{R_{GMV}^2} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV})^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + \right. \\ & + 2 \frac{A_A}{R_{GMV}} (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ & + 2 (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \\ & \left. + \frac{A_A}{R_{GMV}} (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) + \right. \\ & \left. + 2 (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A)^2 (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \right), \end{aligned}$$

I, Δ, a_A задані в (7.32), φ є густиною стандартного нормального розподілу, R_{GMV} задано у (1.8), $A_A = (2a_A - \Delta) R_{GMV} / \Delta$, $B_A = (a_A - \Delta) / \Delta$, $s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$, $q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}' \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \mathbf{b}$ задана у (6.4).

Доведення. З дельта-методу [60], правил матричного диференційного числення [85], [105] та (6.1), врахувавши, що

$$\partial(\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))' / \partial(\text{vech}(\Gamma(0))) = -\mathbf{D}'_k (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}'_k,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{A:gp}^2 = & \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right)' \mathbf{D}'_k (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}'_k \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right). \end{aligned}$$

Обчислимо похідні параметра α_A по $\boldsymbol{\mu}$ та $\text{vech}(\Gamma(0))$.

$$\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\square \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{\sqrt{(R_{GMV} - R_0)^2 + s}} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2 + s}}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\mu}} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2 + s} \right) = \\
&= \frac{\square(I)}{2I} \left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{2s V_{GMV}}{\Delta} \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{s^2}{\Delta} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} + \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \\
&= \frac{\square(I)}{I} \left(\left(1 + \frac{2s V_{GMV}}{\Delta} \right) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \frac{s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \mathbf{w}_{GMV} \right), \\
&\frac{\partial \alpha_A}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} = \frac{\partial}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \left(\Phi \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2 + s}} \right) \right) = \\
&= \frac{\square \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{\sqrt{(R_{GMV} - R_0)^2 + s}} \right)}{2 \sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2 + s}}} \frac{\partial}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \left(\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2 + s} \right) = \\
&= \frac{\square(I)}{2I} \left(\frac{\partial s}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} + \frac{2s V_{GMV}}{\Delta} \frac{\partial s}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} + \frac{s^2}{\Delta} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \frac{\partial R_{GMV}}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \right) = \\
&= \frac{\square(I)}{2I} \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \left(\frac{2a_A - \Delta}{\Delta} ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{s^2 V_{GMV}^2}{\Delta} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2 \frac{s^2 V_{GMV}^2}{\Delta^{3/2}} ((\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})) \right) = \frac{\square(I)}{2I} \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})'}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left(\frac{A_A}{R_{GMV}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2(B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \\
\left. + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right).$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \\
&= \frac{\square^2(I)}{I^2} \left(\left(1 + \frac{2s V_{GMV}}{\Delta} \right) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \mathbf{w}_{GMV} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \times \\
&\quad \times \left(\left(1 + \frac{2s V_{GMV}}{\Delta} \right) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \mathbf{w}_{GMV} \right) = \\
&= \frac{\square^2(I)}{I^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{s^4 V_{GMV}^2}{\Delta^3} \mathbf{w}'_{GMV} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} + \frac{(\Delta + 2s V_{GMV})^2}{\Delta^2} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{s^2 V_{GMV} (\Delta + 2s V_{GMV})}{\Delta^{5/2}} (\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} + \mathbf{w}'_{GMV} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}) \right).
\end{aligned}$$

Враховувавши, що

$$\mathbf{w}'_{GMV} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} = V_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

$$\mathbf{w}'_{GMV} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{w}_{GMV} = V_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - R_{GMV} V_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

отримаємо

$$\left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) = \frac{\square^2(I)}{I^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_A^2}{R_{GMV}^2} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right.$$

$$\frac{\square^2(I)}{I^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_A^2}{R_{GMV}^2} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{A_A}{R_{GMV}} (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \right. \\ \left. + \frac{A_A}{R_{GMV}} (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A)^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \right).$$

З властивостей матриць (див. доведення теореми 6.1) маємо

$$\left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^+ \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right) = \\ = \frac{\square^2(I)}{4I^2} \left(\frac{A_A}{R_{GMV}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2(B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ \left. + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \times \\ \times (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1}) \right) \times \\ \times \left(\frac{A_A}{R_{GMV}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2(B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ \left. + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) = \\ = \frac{\square^2(I)}{2I^2} \left(\frac{A_A}{R_{GMV}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + \right. \\ \left. + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \times \\ \times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1} \Gamma(h) \Gamma(0)^{-1}) \right) \times \\ \times \left(\frac{A_A}{R_{GMV}} (\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) + 2(B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \right. \\ \left. + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) =$$

$$= \frac{\square^2(I)}{2I^2} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A_A^2}{R_{GMV}^2} q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV})^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{A_A}{R_{GMV}} (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + \right. \\ \left. + 2(A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A) q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \left(\begin{matrix} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + \\ + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) \end{matrix} \right) + \right. \\ \left. + \frac{A_A}{R_{GMV}} (A_A R_{GMV} - B_A^2 \Delta - 2B_A^2 \Delta^{1/2} R_{GMV}) (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) + \right. \\ \left. + 2(B_A^2 \Delta^{1/2} - A_A)^2 (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) \right).$$

Теорему доведено.

Для ілюстрації результатів теореми 7.23 виберемо три акції, що входять до індексу *Dow Jones*, а саме, *Walt Disney*, *Chevron Corporation*, *United Technologies Corporation* (тобто $k=3$) та використаємо дані про щоденні дохідностей цих активів за період часу з 01.06.2015 по 28.12.2015 (150 спостережень). Припустимо, що вектор дохідностей вибраних активів поводитьсь як *VARMA(1,1)* процес з нормально розподіленими залишками. Коректність такого припущення перевірено в прикладі 6.3. Маємо

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0, 0, 0)$ і дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$, причому

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.734 & -0.617 & -1.258 \\ 1.903 & -0.767 & -1.700 \\ 0.850 & 0.296 & -1.583 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1.760 & -0.752 & -1.411 \\ 1.855 & -1.008 & -1.835 \\ 0.826 & 0.237 & -1.738 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.620 & 0.905 & 0.948 \\ 0.905 & 3.057 & 0.802 \\ 0.948 & 0.802 & 1.441 \end{pmatrix}, \varphi_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'$$

Припустивши, що отримані значення параметрів є \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , Σ , та φ_0 є точними, визначимо параметри дохідності

$$\Gamma(0) = \begin{pmatrix} 1.884 & 1.328 & 1.195 \\ 1.328 & 3.765 & 1.171 \\ 1.195 & 1.171 & 1.758 \end{pmatrix}, \Gamma(1) = \begin{pmatrix} 0.121 & 0.350 & 0.114 \\ 0.181 & 0.521 & 0.083 \\ 0.196 & 0.309 & 0.111 \end{pmatrix},$$

$$\mu = (-0.032, -0.152, -0.198)'$$

Зауважимо, що портфель з найменшим рівнем VaR при рівні довіри 0.95 має від'ємну очікувану дохідність. Ми дослідимо рівень довіри для VaR , за якого портфель з вибраних активів з найменшим рівнем VaR матиме очікувану дохідність $R_0=0.1$. У цьому випадку точне значення параметра α_A становить

$$\alpha_A = 0.5771.$$

З теореми 7.23, асимптотичний розподіл вибіркової оцінки рівня довіри α_A , за якого портфель з вибраних активів з найменшим рівнем VaR матиме очікувану дохідність $R_0=0.1$, є

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, 0.35835).$$

Оскільки кількість активів у портфелі не є великою, ми очікуємо, що збіжність емпіричних середніх та дисперсій випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ до асимптотичних значень буде швидкою, проте, одночасно з аналізом невиправленої оцінки, дослідимо збіжність побудованої нами “умовно” виправленої оцінки, точніше випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$.

Обчислимо емпіричні середні та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ для кожного $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ і порівняємо їх з відповідними асимптотичними значеннями. Результати моделювання наведено у табл. 7.14.

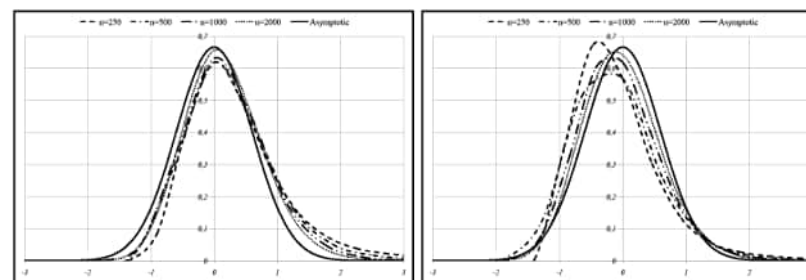
З таблиці 7.14 бачимо, що дисперсії, отримані емпірично, методом імітаційного моделювання, є близькі до асимптотичних значень, проте у випадку використання невиправленої оцінки середні є зміщені. Це зміщення зникає при використанні “умовно” виправленої оцінки.

Таблиця 7.14

Середнє значення і дисперсія випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$.

	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$		$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
$n=250$	0.4184	0.9216	-0.0538	0.6293
$n=500$	0.2722	0.5762	-0.1043	0.4944
$n=1000$	0.1953	0.4246	-0.0556	0.4089
$n=2000$	0.1575	0.3885	-0.0127	0.3831
Асимптотичні	0	0.3583	0	0.3583

Джерело: розроблено автором



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.22. Емпіричний $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ (справа).

На рис. 7.22 зображено емпіричні $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та

$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками та параметрами $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{\Sigma}$, та φ_0 . Зауважимо, що графічно виглядає, що емпіричні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ дуже добре збігаються до асимптотичної, проте результати табл. 7.14 та детальніший аналіз рис. 7.22 вказують на те, що емпіричним густинам притаманна несиметричність. Натомість асимптотична густина досить добре наближає емпіричні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ при обсягу вибірки для побудови оцінки $n \geq 500$, оскільки при $n=250$ густині розподілу випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ притаманна явна несиметричність, ця властивість стає слабо вираженою при використанні вибірок обсягом більшим за 500.

7.5.4. Дохідності активів, що поведуться як довільний стаціонарний процес

Припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, \mathbf{X}_t , поводитья як k -вимірний стаціонарний процес із середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена. Нагадаємо, що за такого припущення щодо поведінки дохідностей ми припускаємо, що $d_\alpha(\mathbf{w})$ не є функцією від \mathbf{w} , тобто $d_\alpha(\mathbf{w}) = d_\alpha$. Маємо

$$\alpha_A = F \left(\sqrt{\frac{s^2 V_{GMV}}{(R_{GMV} - R_0)^2} + s} \right), \quad (7.38)$$

де $F(\cdot)$ – функція розподілу стандартизованої дохідності портфеля $(X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}) / (\mathbf{w}'\Gamma(0)\mathbf{w})^{1/2}$, тобто

$$F(x) = P \left\{ \frac{X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\Gamma(0)\mathbf{w}}} < x \right\}.$$

Асимптотичний розподіл вибіркової оцінки параметра (7.38) наведено у наступній теоремі.

Теорема 7.24. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -вимірний стаціонарний процес із середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що ряди, які входять у (6.24), є збіжними і $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$*

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{A,stp}^2),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{A,stp}^2 = & \left(f^2 \left(\sqrt{s + \frac{(R_{GMV} - r_0)^2}{V_{GMV}}} \right) / 4 \left(s + \frac{(R_{GMV} - r_0)^2}{V_{GMV}} \right) \right) \times \left(\frac{4s^4 V_{GMV}^2}{\Delta^3} \sigma_{1,GMV}^2 + \right. \\ & + \frac{s^4}{\Delta^2} \sigma_{2,GMV}^2 + \frac{(2a_A - \Delta)^2}{\Delta^2} \sigma_{3,GMV}^2 + \frac{4s^4 V_{GMV}}{\Delta^{5/2}} \sigma_{12,GMV} + \frac{2s^2 (2a_A - \Delta)}{\Delta^2} \sigma_{23,GMV} + \\ & \left. + \frac{4s^2 V_{GMV} (2a_A - \Delta)}{\Delta^{5/2}} \sigma_{13,GMV} \right), \end{aligned}$$

R_{GMV}, V_{GMV} задані у (1.8)-(1.9), I, Δ, a_A задані в (7.32), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $\sigma_{1,GMV}^2, \sigma_{2,GMV}^2, \sigma_{3,GMV}^2, \sigma_{12,GMV}, \sigma_{13,GMV}$ та $\sigma_{23,GMV}$ задані в лемі 6.3, $f(\cdot)$ – густина розподілу стандартизованої дохідності портфеля $(X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}) / (\mathbf{w}'\Gamma(0)\mathbf{w})^{1/2}$, тобто

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} P \left\{ \frac{X_w - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\Gamma(0)\mathbf{w}}} < x \right\}.$$

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60], отримаємо

$$\sigma_{A,stp}^2 = \left(\frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \alpha_A}{\partial s} \right) \boldsymbol{\Omega}_{EF} \begin{pmatrix} \partial \alpha_A / \partial R_{GMV} \\ \partial \alpha_A / \partial V_{GMV} \\ \partial \alpha_A / \partial s \end{pmatrix},$$

де матриця Ω_{EF} – асимптотична коваріаційна матриця випадкового вектора $\sqrt{n} \left((\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})' - (R_{GMV}, V_{GMV}, s)' \right)$ за умови, що вектор дохідностей, з яких складено портфель, поводитья як стаціонарний процес (лема 6.3).

З доведення теореми 7.18 маємо

$$\frac{\partial \alpha_A}{\partial R_{GMV}} = \frac{f(I)}{I} \cdot \frac{s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}}, \quad \frac{\partial \alpha_A}{\partial V_{GMV}} = \frac{f(I)}{2I} \cdot \frac{s^2}{\Delta}, \quad \frac{\partial \alpha_A}{\partial s} = \frac{f(I)}{2I} \cdot \frac{2a_A - \Delta}{\Delta}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sigma_{A;sp}^2 &= \frac{f(I)^2}{4I^2} \left(\frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}}, \frac{s^2}{\Delta}, \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \right) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sigma_{1,GMV}^2 & \sigma_{12,GMV} & \sigma_{13,GMV} \\ \sigma_{12,GMV} & \sigma_{2,GMV}^2 & \sigma_{23,GMV} \\ \sigma_{13,GMV} & \sigma_{23,GMV} & \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s^2 V_{GMV} / \Delta^{3/2} \\ s^2 / \Delta \\ (2a_A - \Delta) / \Delta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{f(I)^2}{4I^2} \begin{pmatrix} \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \sigma_{1,GMV}^2 + \frac{s^2}{\Delta} \sigma_{12,GMV} + \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \sigma_{13,GMV} \\ \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \sigma_{12,GMV} + \frac{s^2}{\Delta} \sigma_{2,GMV}^2 + \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \sigma_{23,GMV} \\ \frac{2s^2 V_{GMV}}{\Delta^{3/2}} \sigma_{13,GMV} + \frac{s^2}{\Delta} \sigma_{23,GMV} + \frac{2a_A - \Delta}{\Delta} \sigma_{3,GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s^2 V_{GMV} / \Delta^{3/2} \\ s^2 / \Delta \\ (2a_A - \Delta) / \Delta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{f(I)^2}{4I^2} \left(\frac{4s^4 V_{GMV}^2}{\Delta^3} \sigma_{1,GMV}^2 + \frac{2s^4 V_{GMV}}{\Delta^{5/2}} \sigma_{12,GMV} + \frac{2s^2 V_{GMV} (2a_A - \Delta)}{\Delta^{5/2}} \sigma_{13,GMV} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2s^4 V_{GMV}}{\Delta^{5/2}} \sigma_{12,GMV} + \frac{s^4}{\Delta^2} \sigma_{2,GMV}^2 + \frac{s^2 (2a_A - \Delta)}{\Delta^2} \sigma_{23,GMV} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2s^2 V_{GMV} (2a_A - \Delta)}{\Delta^{5/2}} \sigma_{13,GMV} + \frac{s^2 (2a_A - \Delta)}{\Delta^2} \sigma_{23,GMV} + \frac{(2a_A - \Delta)^2}{\Delta^2} \sigma_{3,GMV}^2 \right). \end{aligned}$$

Згрупувавши відповідні доданки, отримаємо твердження теореми.

Дослідимо швидкість збіжності емпіричних розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ до асимптотичного, отриманого в теоремі 7.24. Припустимо, що вектор дохідностей активів, з яких ми складаємо портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес із залишками, що мають багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи, тобто

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \mathbf{B}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1},$$

де \mathbf{X}_t – 3-вимірний вектор дохідностей елементів, з яких складено портфель, 3×3 матриці \mathbf{A}_1 та \mathbf{B}_1 матриці параметрів процесу, $\boldsymbol{\varphi}_0$ – вектор вільних членів, залишки $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ мають тривимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи з математичним сподіванням $\mathbf{0}_3 = (0,0,0)'$ та дисперсією $\boldsymbol{\Sigma}$. Ми припускаємо, що параметри $VARMA(1,1)$ процесу \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , $\boldsymbol{\Sigma}$, та $\boldsymbol{\varphi}_0$ є відомими. Їх значення ми візьмемо з прикладу 6.3.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.734 & -0.617 & -1.258 \\ 1.903 & -0.767 & -1.700 \\ 0.850 & 0.296 & -1.583 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1.760 & -0.752 & -1.411 \\ 1.855 & -1.008 & -1.835 \\ 0.826 & 0.237 & -1.738 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.620 & 0.905 & 0.948 \\ 0.905 & 3.057 & 0.802 \\ 0.948 & 0.802 & 1.441 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 = (-0.3217, -0.5491, -0.4430)'$$

З отриманої моделі, використовуючи метод Монте-Карло з 10000 повторень, в кожному повторенні генеруємо вибірки з 10000 елементів з нашого процесу, визначимо параметри дохідності

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.030, -0.151, -0.197)', \quad \boldsymbol{\Gamma}(0) = \begin{pmatrix} 1.884 & 1.330 & 1.204 \\ 1.330 & 3.767 & 1.179 \\ 1.204 & 1.179 & 1.770 \end{pmatrix}.$$

Як і у випадку дохідностей, що поведуться як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками, ми отримуємо від'ємне значення очікуваної дохідності портфеля з найменшим

рівнем VaR при рівні довіри 0.95. Дослідимо збіжність емпіричних розподілів випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ до асимптотичного за бажаного рівня очікуваної доходності $R_0=0.15$. В цьому випадку точне значення параметра α_A становить

$$\alpha_A=0.5892.$$

З теореми 7.24, асимптотичний розподіл вибіркової оцінки рівня довіри α_A для VaR , за якого очікувана доходність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює R_0 , є

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A) \xrightarrow{d} N(0, 0.41414).$$

Таблиця 7.15

Середнє значення і дисперсія випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ і асимптотичні значення при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$.

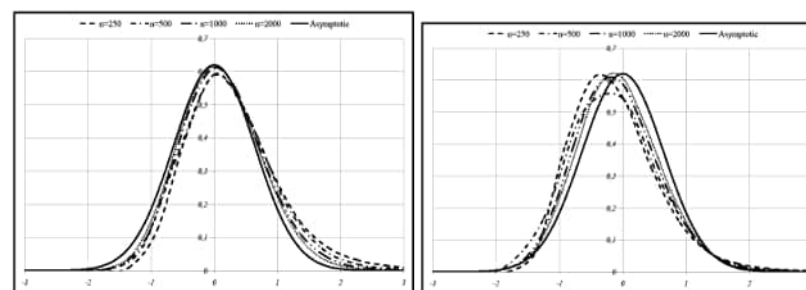
	$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$		$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
$n=250$	0.3302	0.6646	-0.1078	0.5168
$n=500$	0.2182	0.4990	-0.1393	0.4831
$n=1000$	0.1477	0.4460	-0.0946	0.4445
$n=2000$	0.0982	0.4209	-0.0658	0.4243
Асимптотичні	0	0.4141	0	0.4141

Джерело: розроблено автором

Аналогічно до випадку доходностей, що поведуться як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками, обчислимо емпіричні середні та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ для кожного $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ і порівняємо їх з відповідними асимптотичними значеннями. Результати моделювання наведено у табл. 7.15.

З таблиці 7.15 бачимо, що дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$, отримані емпірично, методом імітаційного моделювання, збігаються доволі швидко до асимптотичного значення. Крім того, середні є зміщені, аналогічно до попередньо розгля-

нутих випадків, проте зміщення не є великим завдяки невеликій кількості активів у портфелі. У випадку використання “умовно” виправленої оцінки, відхилення дещо зменшуються, проте зменшується і швидкість збіжності дисперсії.



Джерело: розроблено автором

Рис. 7.23. Емпіричний $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ (справа).

На рис. 7.23 зображено емпіричні $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичні розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ та $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$ за припущення, що вектор доходностей активів, з яких складено портфель, поводитья як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками та параметрами A_1, B_1, Σ , та Φ_0 . Графічні дані підтверджують наші попередні спостереження, що для практичного використання більш привабливіше виглядає побудована нами “умовно” виправлена оцінка, оскільки емпіричним густинам випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ притаманна явно виражена несиметричність, на відміну від емпіричних густин випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A^* - \alpha_A)$, при обсягах вибірки більших за 500.

Ми провели статистичний аналіз вибіркової оцінки рівня довіри для VaR , за якого очікувана доходність портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR дорівнює наперед заданому

значенню. Ми знайшли асимптотичні розподіли випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_A - \alpha_A)$ за припущення, що дохідності активів, з яких ми формуємо портфель, є: неавтокорельованими та нормально розподіленими, неавтокорельованими та еліптично розподіленими, поведуться як стаціонарний процес Гауса та як довільний стаціонарний процес. На основі даних про дохідності акцій, що входять до індексу *Dow Jones*, ми дослідили швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного при різних об'ємах вибірки для побудови оцінок. З'ясувалося, що емпіричні дисперсії збігаються до асимптотичної доволі швидко, натомість швидкість збіжності середніх значень є доволі повільною, особливо коли в портфель включено багато активів. На жаль, побудувати виправлену оцінку, в загальному випадку, неможливо. Проте ми побудували "умовно" виправлену оцінку α_A^* та на вибраних даних показали, що її поведінка є набагато кращою, ніж поведінка звичайної вибіркової оцінки. Хоча для нової оцінки збіжність емпіричних дисперсій до асимптотичної є несуттєво повільніша, проте швидкість збіжності середніх є суттєво більшою. Крім того, збільшення кількості активів у портфелі суттєво не впливає на властивості "умовно" виправленої оцінки, на відміну від звичайної вибіркової оцінки, для якої властивості погіршуються при збільшенні кількості активів у портфелі.

РОЗДІЛ 8

КОЕФІЦІЄНТ, ЩО ОПИСУЄ СТАВЛЕННЯ ДО РИЗИКУ В НОВІТНІЙ ТЕОРІЇ ПОРТФЕЛЯ

8.1. Вибір раціональної структури портфеля фінансових активів за допомогою функції корисності на основі Value-at-Risk із загальними лінійними обмеженнями

Розроблений Марковіцем у 1952 році метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів [108] і досі залишається стандартною основою для обчислення ваг портфеля складеного з ризикових активів. Цей портфель характеризується найменшим рівнем ризику за заданого рівня очікуваної дохідності.

У фінансовій літературі запропоновано також інші методи побудови оптимальних портфелів. Особливої уваги заслуговує портфель максимальної очікуваної корисності [116]. Максимізуючи в цьому випадку функцію корисності інвестора, також отримуємо структуру портфеля, який належить ефективній множині. Варто зазначити, що цей портфель залежить від коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. У випадку, якщо інвестор є повністю не схильним до ризику, портфель максимальної очікуваної корисності збігається із портфелем з найменшою дисперсією. Змінюючи відповідний коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику від 0 до $+\infty$, отримуємо ефективну множину, тобто портфель максимальної корисності узагальнює класичну теорію портфеля.

У відомих методах для обчислення очікуваної корисності портфеля фінансових активів для опису ризику портфеля вико-

ристовувалась дисперсія. В останні роки минулого століття дослідження в теорії мір ризику показали, що для практичного застосування добре підходять міри ризику, що ґрунтуються на квантилях розподілів функцій втрат. Однією із найпростіших та найпоширеніших із таких мір є VaR . Зважаючи на це, у [42] запропоновано використати VaR як основну міру ризику в аналізі Марковіца. Припускаючи, що дохідності активів є нормально розподіленими, нами знайдено аналітичний розв'язок задачі мінімізації VaR і показано, що отриманий оптимальний портфель теж належить ефективній множині, проте має вищу дохідність, а, отже, і більшу дисперсію, ніж портфель з найменшою дисперсією.

Виникає природне запитання, чи можна використати концепцію побудови портфеля на основі функції корисності, де ризик обчислюється за допомогою VaR ?

Ми пропонуємо вибір раціональної структури портфеля фінансових активів здійснювати на основі максимізації очікуваної корисності, де ризик обчислюється з допомогою VaR . Використання отриманого у такий спосіб портфеля фінансових активів, краще вписується в рекомендації Базельського комітету, ніж портфель з максимальною очікуваною корисністю, де ризик обчислено за допомогою дисперсії. Це дасть змогу банкам активніше проводити операції на фінансовому ринку, не порушуючи Базельських угод та не виходячи за рамки обмежень, що передбачені законом. Крім того, як зазначено вище, підхід VaR до оцінювання ризику є кращим (більш адекватним), ніж використання дисперсії, що дає можливість точніше врахувати наявні фінансові ризики під час побудови портфеля.

Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Припустимо, що X_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами μ та Σ . Очікувану дохідність портфеля можемо обчислити як $R_w = M(X_w(t)) = \mathbf{w}'\mu$, а дисперсію $V_w = D(X_w(t)) = \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}$, де X_{wt} – дохідність портфеля у момент часу t .

Задача вибору раціональної структури портфеля з максимальною очікуваною корисністю має вигляд (1.21), де β – коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику. В теорії портфеля припускається, що цей коефіцієнт є наперед відомим. Ми припускаємо, що всі кошти інвестора вкладаються в ризикові фінансові активи, тобто на ринку немає можливості безризикового розмі-

щення коштів. Розв'язком задачі (1.21) є портфель фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю з вагами (1.24).

Оптимізаційна задача (1.21) також може бути записана у більш загальному вигляді, а саме:

$$U(\mathbf{w}) \rightarrow \max \text{ за умови, що } \mathbf{A}'\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (8.1)$$

де \mathbf{A} – $k \times q$ матриця ($q \leq k$) з рангом q , \mathbf{b} – $q \times 1$ вектор. Розв'язок задачі (8.1) представлено у [112]:

$$\mathbf{w}_{EU,A} = \mathbf{w}_{GMV,A} + \beta^{-1} \mathbf{R}_A \mu, \quad (8.2)$$

де

$$\mathbf{R}_A = \Sigma^{-1} - \Sigma^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \text{ і } \mathbf{w}_{GMV,A} = \Sigma^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.3)$$

Статистичні та імовірнісні властивості ваг (1.24) і (8.3) досліджувалися у роботах [52], [112], [116].

Зауважимо, що портфель з вагами $\mathbf{w}_{GMV,A}$ є розв'язком класичної задачі Марковіца щодо мінімізації ризику без врахування дохідності

$$V_w \rightarrow \min \text{ за умови, що } \mathbf{A}'\mathbf{w} = \mathbf{b}. \quad (8.4)$$

Дохідність і дисперсія портфеля $\mathbf{w}_{GMV,A}$ мають вигляд:

$$R_{GMV,A} = \mu' \mathbf{w}_{GMV,A} = \mu' \Sigma^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}, \quad (8.5)$$

$$V_{GMV,A} = \mathbf{w}'_{GMV,A} \Sigma \mathbf{w}_{GMV,A} = \mathbf{b}' (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}. \quad (8.6)$$

Розглянемо класичну задачу Марковіца

$$V_w \rightarrow \min \text{ за умови, що } \mathbf{A}'\mathbf{w} = \mathbf{b} \text{ та } \mathbf{w}'\mu = R. \quad (8.7)$$

та введемо поняття ефективної множини для цієї задачі. Зрозуміло, що для того, щоб задача (8.7) мала зміст необхідним є виконання умови $R \geq R_{GMV,A}$. Позначимо W множини всіх портфелів, які складаються з k фінансових активів та задовольняють умову $\mathbf{A}'\mathbf{w} = \mathbf{b}$.

Означення 8.1. Назвемо підмножину E множини W ефективною для задачі (8.7), якщо для портфелів, що належать E , не можна збільшити дохідність не збільшуючи ризик (дисперсію) та не можна зменшити ризик (дисперсію) не зменшуючи дохідність, не вийшовши при цьому за межі множини W .

Лема 8.1. Для довільного дійсного числа $R \geq R_{GMV,A}$ існує єдиний портфель \mathbf{w}_R з очікуваною доходністю R , що належить ефективній множині E . Причому ваги портфеля можна записати у вигляді:

$$\mathbf{w}_R = \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{A}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Розв'яжемо (8.7) методом множників Лагранжа. Нехай λ_1 дійсне число, а $\lambda_2 - q$ вимірний вектор. Позначимо $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)'$. Тоді функція Лагранжа матиме вигляд:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} - \lambda_1 \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \mathbf{w} - \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right) = \\ &= \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} - \lambda_1 (\boldsymbol{\mu}' \mathbf{w} - R) - \lambda_2 (\mathbf{A}' \mathbf{w} - \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Обчислимо часткові похідні функції $L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda})$ та прирівняємо їх до нуля. Отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = 2\Sigma \mathbf{w} - (\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{A}) \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{O}_k \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \mathbf{w} - \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{O}_{q+1} \end{cases}, \quad (8.8)$$

де \mathbf{O}_k та \mathbf{O}_{q+1} відповідно k та $(q+1)$ вимірні вектори складені з нулів.

Розв'яжемо перше рівняння системи (8.8) відносно \mathbf{w} , отримаємо:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{A}) \boldsymbol{\lambda}.$$

Підставимо отриманий результат в друге рівняння системи (8.8) та розв'яжемо його відносно $\boldsymbol{\lambda}$

$$\boldsymbol{\lambda} = 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Отже, ми отримали

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} = 2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \\ \mathbf{w}_R = \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{A}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

що доводить лему 1.

Лема 8.2. Нехай портфель \mathbf{w}_R з очікуваною корисністю R_w та дисперсією V_w належить ефективній множині E , тоді

$$(R_w - R_{GMV,A})^2 = s_A (V_w - V_{GMV,A}), \quad (8.9)$$

де $s_A = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}_A \boldsymbol{\mu}$.

Доведення. Розглянемо блочну матрицю

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи правила побудови обернених блочних матриць, отримаємо

$$b_{11} = (\boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu})^{-1} = (\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}_A \boldsymbol{\mu})^{-1} = s_A^{-1},$$

$$\mathbf{B}_{21} = -b_{11} (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}', \quad \mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21}', \quad \mathbf{B}_{22} = \frac{\mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{12}}{b_{11}} + (\mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A})^{-1}.$$

Маємо

$$V_w = \mathbf{w}'_R \Sigma \mathbf{w}_R =$$

$$\begin{aligned} & (R_w \quad \mathbf{b}') \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} \\ & (\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{A}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \Sigma^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_w \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (R_w \quad \mathbf{b}') \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu} & \mathbf{A}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{A} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_w \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = b_{11} R_w^2 + 2R_w \mathbf{b}' \mathbf{B}_{21} + \mathbf{b}' \mathbf{B}_{22} \mathbf{b} = \\
&= b_{11} \left(R_w + \frac{\mathbf{b}' \mathbf{B}_{21}}{b_{11}} \right)^2 + \mathbf{b}' \left(\mathbf{B}_{22} - \frac{\mathbf{B}_{21} \mathbf{B}_{12}}{b_{11}} \right) \mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$(R_w - R_{GMV,A})^2 = s_A (V_w - V_{GMV,A}).$$

Зазначимо, що в просторі дохідність-дисперсія, рівняння (8.9) описує ефективну множину E .

Як зазначено вище, дисперсія портфеля не надає повної інформації про ризик навіть припускаючи нормальність розподілу дохідностей. Вона відображає лише розсіювання можливих значень дохідності відносно очікуваної дохідності. Тому виникає питання використання функцій очікуваної корисності на основі кращих інструментів опису ризику.

Оскільки найрозповсюдженішою мірою ризику на сьогодні є VaR , то цікавим є питання побудови портфеля фінансових активів на основі корисності, в якій ризик вимірюється за допомогою VaR . Розглянемо наступну функцію очікуваної корисності інвестора:

$$U_{VaR}(\mathbf{w}) = R_w - M_w \beta / 2,$$

де $M_w - VaR$ портфеля зі структурою \mathbf{w} . Зауважимо, що припускаючи нормальність дохідностей фінансових активів, включених у портфель, VaR портфеля зі структурою \mathbf{w} можемо визначити як $M_w = z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w$, де α – вибраний рівень довіри для VaR , а $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ – α -квантиль стандартного нормального розподілу. Розглянемо задачу максимізації корисності, аналогічну до (8.1).

$$U_{VaR}(\mathbf{w}) \rightarrow \max \text{ за умови, що } \mathbf{A}'\mathbf{w} = \mathbf{b}. \quad (8.10)$$

Розв'язок задачі (8.10) наведено у наступній теоремі.

Теорема 8.1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Тоді розв'язок задачі (8.10) має вигляд*

$$\mathbf{w}_{VaR,A} = \mathbf{w}_{GMV,A} + \frac{\sqrt{V_{GMV,A}}}{\sqrt{\tilde{z}_\alpha^2 - s_A}} \mathbf{R}_A \boldsymbol{\mu},$$

де $\tilde{z}_\alpha = \frac{\beta}{\beta+2} z_\alpha$, $\mathbf{w}_{GMV,A}$ задано у (8.3). Причому необхідною та достатньою умовою існування розв'язку є умова $\tilde{z}_\alpha^2 > s_A$, $s_A = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}_A \boldsymbol{\mu}$.

Доведення. Доведемо спочатку, що якщо розв'язок задачі (8.10) існує, то він належить ефективній множині E . Використаємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що існує портфель \mathbf{w} , який є розв'язком (8.10), але не належить множині E . Тоді з означення ефективної множини випливає, що існує портфель \mathbf{w}_0 такий, що $R_{w_0} \geq R_w$ та $V_{w_0} \leq V_w$, причому одна з попередніх нерівностей є строгою. Тоді

$$\begin{aligned}
U_{VaR}(\mathbf{w}_0) &= R_{w_0} - \frac{\beta}{2} (z_\alpha \sqrt{V_{w_0}} - R_{w_0}) = \\
&= \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) R_{w_0} - \frac{\beta}{2} z_\alpha \sqrt{V_{w_0}} > \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) R_w - \frac{\beta}{2} z_\alpha \sqrt{V_w} = U_{VaR}(\mathbf{w}),
\end{aligned}$$

що суперечить припущенню про те, що портфель \mathbf{w} є розв'язком (8.10).

Зауважимо, що задача (8.10) є еквівалентною до задачі

$$R_w - \tilde{z}_\alpha \sqrt{V_w} \rightarrow \max \text{ за умови, що } \mathbf{A}'\mathbf{w} = \mathbf{b}, \quad (8.11)$$

оскільки

$$\begin{aligned}
U_{VaR}(\mathbf{w}) &= R_w - \frac{\beta}{2} (z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w) = \\
&= \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) R_w - \frac{\beta}{2} z_\alpha \sqrt{V_w} = \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) (R_w - \tilde{z}_\alpha \sqrt{V_w}).
\end{aligned}$$

Враховуючи те, що розв'язок задачі (8.11) належить ефективній множині E , то для нього справедливим є результат, отриманий в лемі 8.2, а саме співвідношення між дохідністю та дисперсією (8.9). Розв'яжемо (8.9) відносно R_w

$$R_w = R_{GMV,A} + \sqrt{s_A (V_w - V_{GMV,A})}$$

та розглянемо задачу

$$R_w - \tilde{z}_\alpha \sqrt{V_w} \rightarrow \max \text{ за умови, що } R_w = R_{GMV,A} + \sqrt{s_A (V_w - V_{GMV,A})}, \quad (8.12)$$

яка є еквівалентною до (8.11). Задача (8.12) в свою чергу є еквівалентною пошуку безумовного максимуму функції

$$R_{GMV,A} + \sqrt{s_A (V_w - V_{GMV,A})} - \tilde{z}_\alpha \sqrt{V_w}.$$

Неважко показати, що максимуму ця функція досягає в точці

$$V_w = \frac{\tilde{z}_\alpha^2}{\tilde{z}_\alpha^2 - s_A} V_{GMV,A}.$$

Отже, портфель фінансових активів зі структурою, що є розв'язком оптимізаційної задачі (8.10), матиме дисперсію

$$V_w = \frac{\tilde{z}_\alpha^2}{\tilde{z}_\alpha^2 - s_A} V_{GMV,A}.$$
 Використовуючи результати, отримані в лемах

8.1 та 8.2, отримаємо твердження теореми.

Зауважимо, що необхідність та достатність умови $\tilde{z}_\alpha^2 > s_A$ доводяться аналогічно як у твердженні 1 в роботі [42].

Розглянемо класичну задачу побудови портфеля з допомогою максимізації функції корисності:

$$U_{var}(\mathbf{w}) \rightarrow \max \text{ за умови, що } \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (8.13)$$

Використовуючи результат теореми 8.1, неважко знайти розв'язок задачі (8.13).

Наслідок 8.1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей у момент часу t . Припустимо, що $\mathbf{X}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Тоді розв'язок задачі (8.13) має вигляд:

$$\mathbf{w}_{UVaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{\tilde{z}_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

де \mathbf{w}_{GMV} – ваги портфеля з найменшою дисперсією (1.7), V_{GMV} – очікувана доходність портфеля зі структурою \mathbf{w}_{GMV} (1.9),

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \frac{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, \quad s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}. \text{ Причому необхідною та достатньою}$$

умовою існування розв'язку є умова $s < \tilde{z}_\alpha^2$.

Доведення. Підставивши у вираз для $\mathbf{w}_{VaR,A}$ $\mathbf{A}=\mathbf{1}$ та $\mathbf{b}=\mathbf{1}$, де $\mathbf{1}$ – k -вимірний вектор, елементами якого є одиниці, отримаємо необхідне твердження.

■ *Зауваження 8.1.* Припущення про нормальність розподілу доходностей фінансових активів можна суттєво послабити. Зокрема, отримані результати залишаться правильними, припустивши, що вектор доходностей активів, з яких сформовано портфель, \mathbf{X}_t має k -вимірний умовний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}_t$ та $\boldsymbol{\Sigma}_t$. Як частковий випадок можна розглянути, наприклад, припущення, що доходності поведуться як *VARMA-GARCH* процес з нормально розподіленими залишками. Не вплине на результати роботи також припущення про еліптичність розподілу залишків, проте потрібно буде замінити константу z_α , на α -квантиль відповідного еліптичного розподілу.

■ *Зауваження 8.2.* Портфелі з вагами $\mathbf{w}_{EU,A}$ та $\mathbf{w}_{VaR,A}$ належать ефективній множині E та максимізують відповідні функції очікуваної корисності. Проте в загальному випадку рівності між вагами ми поставити не можемо, тобто $\mathbf{w}_{EU,A} \neq \mathbf{w}_{VaR,A}$, хоча завжди існують β_{EU} та β_{VaR} такі, що розв'язок задачі (8.1) з коефіцієнтом, що описує ставлення інвестора до ризику β_{EU} збігається із розв'язком задачі (8.10) з коефіцієнтом, що описує ставлення інвестора до ризику β_{VaR} .

■ *Зауваження 8.3.* У формулюванні задачі (8.10) за міру ризику можна використати умовне *Value-at-Risk (CVaR)*. У цьому

випадку результати теореми 8.1 залишаться правильними, якщо у виразі для $\mathbf{w}_{VaR, \alpha}$ z_α замінити на

$$k_\alpha = \frac{-\int_{-\infty}^{-z_\alpha} x\varphi(x)dx}{1-\alpha} = \frac{\exp(-\frac{z_\alpha^2}{2})}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)}.$$

Ми дослідили проблему вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з максимальною очікуваною корисністю, в якій за оцінку ступеня ризику портфеля прийнято його VaR . На відміну від класичного методу побудови портфеля з використанням очікуваної квадратичної корисності, розглянутий підхід не розглядали у наукових працях, оскільки використання VaR як інструменту для обчислення ступеня ризику портфеля та його побудови є досить новим.

Ми розглянули та розв'язали узагальнену проблему вибору раціональної структури портфеля фінансових активів, в якій класичну умову оптимізації (сума ваг портфеля становить 1) замінено на q лінійних обмежень відносно ваг. Крім цього, ми побудували ефективну множину портфелів та знайшли необхідну умову, якій мають задовольняти характеристики портфеля, що належать цій множині. Як наслідок, із теореми 8.1 ми отримали розв'язок оптимізаційної задачі вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з класичним обмеженням.

Використання описаного методу вибору раціональної структури портфеля фінансових активів, зокрема, у банківській діяльності, є повністю узгодженим з рекомендаціями Базельського комітету. Цей метод дасть змогу дозволить банкам проводити операції на фінансовому ринку в рамках Базельських угод і, крім цього, за умови грамотного встановлення обмежень, врахувати всі норми та обмеження, передбачені законом.

8.2. Раціональний вибір коефіцієнта, що описує ставлення до ризику при побудові портфеля фінансових активів з використанням функції корисності на основі Value-at-Risk

У попередньому розділі ми розглянули метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі максимізації функції корисності, яка ґрунтується на VaR . Основною проблемою такого портфеля є визначення впливу коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. Зважаючи на це, наша мета полягає у дослідженні впливу цього коефіцієнта, на властивості ваг і характеристик портфеля та на основі отриманого дослідження наданні певних рекомендації відносно раціонального вибору коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику. Зауважимо, що питанню раціонального вибору цього коефіцієнта приділено велику увагу в закордонних наукових виданнях [6], [49], [56], [106].

З наслідку 8.1 маємо, припустивши, що дохідності активів, з яких складено портфель, неавтокорельовані та нормально розподілені, що структура портфеля фінансових активів отримана на основі максимізації функції корисності (8.13) задається вектором ваг

$$\mathbf{w}_{UVaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu}, \quad (8.14)$$

де $\tilde{\beta} = \beta/(\beta + 2)$, \mathbf{w}_{GMV} – ваги портфеля з найменшою дисперсією (1.7), V_{GMV} – очікувана дохідність портфеля зі структурою \mathbf{w}_{GMV} (1.9), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ – α -квантиль стандартного нормального розподілу.

Характеристики портфеля фінансових активів зі структурою \mathbf{w}_{UVaR} (8.14) мають вигляд:

$$R_{UVaR} = \mathbf{w}'_{UVaR} \boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s}} s, \quad (8.15)$$

$$V_{UVaR} = \mathbf{w}'_{UVaR} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}_{UVaR} = \frac{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2}{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s} V_{GMV}, \quad (8.16)$$

$$M_{UVaR} = \frac{\tilde{\beta} z_\alpha^2 - s}{\sqrt{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s}} \sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \quad (8.17)$$

де $R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}$ – очікувана доходність портфеля з найменшою дисперсією \mathbf{w}_{GMV} (1.8).

Зауважимо, що при $\beta \rightarrow \infty$ ваги портфеля (8.14) прямують до ваг портфеля з найменшим рівнем VaR (4.7). Також зазначимо, що ми не накладаємо умови на додатність корисності, тобто корисність портфеля може бути від'ємною. Якщо інвестор ставить завдання отримання корисності більшої за нуль, цього можна досягти, використовуючи значення для коефіцієнта β , які належать інтервалу $\left[0; 2\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} / \left(z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}} - \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}\right)\right]$.

З (8.14)-(8.17) бачимо, що ваги та характеристики портфеля зі структурою \mathbf{w}_{UVaR} залежать від параметрів розподілу вектора доходностей \mathbf{X}_t . Підставляючи значення цих параметрів у відповідні рівності, інвестор отримує цілісну картину для розподілу своїх вкладень відносно k вибраних ризикових фінансових активів. На практиці значення параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є невідомими, а тому можливість використання отриманих результатів викликає певні питання. Насамперед інвестору потрібно оцінити невідомі параметри. Ми використаємо історичний метод. Вибіркові оцінки параметрів розподілу вектора \mathbf{X}_t мають вигляд (1.27). Підставляючи оцінки (1.27) у (8.14)-(8.17), отримуємо оцінки ваг і характеристик портфеля $\hat{\mathbf{w}}_{UVaR}, \hat{R}_{UVaR}, \hat{V}_{UVaR}, \hat{M}_{UVaR}$.

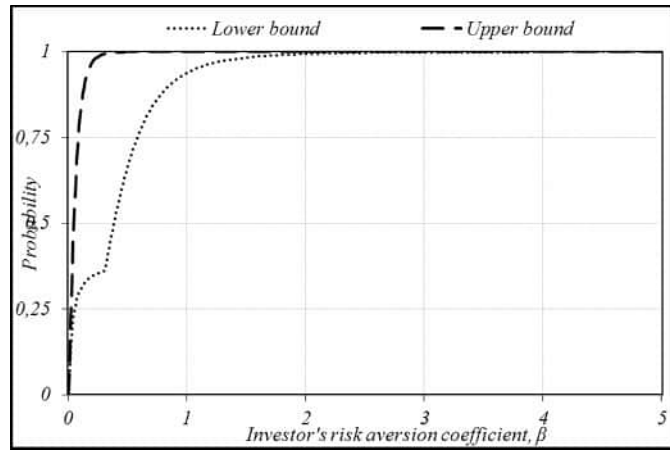
Відзначимо, що необхідною і достатньою умовою існування портфеля з максимальною корисністю є умова $\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > s$. Проте виконання цієї умови не забезпечує виконання нерівності $\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}$, яка є необхідною умовою коректності вибіркової оцінки параметрів (8.14)-(8.17). Ця властивість є наслідком випадковості оцінки \hat{s} , розподіл якої за припущення нормальності розпо-

ділу вектора \mathbf{X}_t та неавтокорельованості його елементів знайдено в [52], де показано, що випадкова величина $\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s}$ має

нецентральний розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями вільності та нецентральним параметром ns . У випадку портфеля з найменшим рівнем VaR виконання необхідної умови коректності вибіркової оцінки ($z_\alpha^2 > \hat{s}$) досліджено у [17], та показано, що для значень α більших від 0.9 імовірність виконання умови $z_\alpha^2 > \hat{s}$ є близькою до одиниці. У нашому випадку умова коректності має вигляд $\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}$, тобто залежить від коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику β . Дослідимо цей вплив. Для цього використаємо алгоритм побудови інтервалу довіри для імовірності $P\{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}\}$, описаний у [97]. Для аналізу виберемо дані про

щомісячні зміни ціни акцій українських компаній. Зважаючи на ситуацію, що склалася на сьогодні в українській економіці, дані виберемо за період, коли стан економіки був більш-менш стабільним. Аналіз проведемо на основі вибірки щомісячних значень цін чотирьох ($k=4$) акцій українських компаній: Центренерго, Алчевський металургійний комбінат, Укртелеком та Мотор Січ, за період часу з квітня 2009 року по жовтень 2012 ($n=42$). Для початку роботи алгоритму з [97] знайдемо з вибірки $\hat{s}=0.157845$. Зафіксуємо значення $\alpha=0.95$ та змінюючи значення β від 0 до $+\infty$ зобразимо межі імовірності $P\{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}\}$ графічно. На рис. 8.1 зображе-

мо межі для імовірності $P\{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}\}$ при $\alpha=0.95$ залежно від коефіцієнта β . Бачимо, що при значенні $\beta=1$ нижня межа імовірності становить 0.93842711, а при $\beta=4$ – 0.99931284 та продовжує зростати. Отже, при значеннях коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику більших за одиницю, імовірність отримати коректну оцінку ваг та характеристик портфеля \mathbf{w}_{UVaR} є високою, тому вибіркові оцінки можна використовувати не лише в теоретичних, але й у практичних цілях.



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.1. Межі 95 % інтервалу довіри для імовірності $P\{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}\}$ при $\alpha=0.95$.

Дослідимо властивості оцінок характеристик портфеля w_{UVaR} . Оскільки вибіркові оцінки (1.27) є випадковими величинами, то випадковими величинами будуть і оцінки характеристик портфеля фінансових активів зі структурою (8.14). Найкраще властивості випадкової величини описує її закон розподілу. Тому нашим завданням є знайти густини розподілів оцінок характеристик портфеля. Зауважимо, що безумовний розподіл не надасть усієї інформації про випадкові величини параметрів (8.15)-(8.17), оскільки вони є коректними оцінками лише за виконання умови $\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}$. Тому нас цікавить розподіл досліджуваних величин за виконання умови $\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 > \hat{s}$. Позначимо

$$a(s^*) = \frac{s^*}{\sqrt{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad b(s^*) = \frac{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s^*}{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1},$$

$$c(s^*) = \frac{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s^*}{\sqrt{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \quad \tilde{s}^* = \frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV},$$

$$M(x; m, a, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|} \int_0^\infty t^{m-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2})^2\right\} dt.$$

Теорема 8.2. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор доходностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t і $n > k$. Тоді

$$a) f_{\hat{R}_{UVaR} | \hat{s} < \tilde{\beta}^2 z_\alpha^2} = K(\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2) \int_0^{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{R}_{UVaR}}(x | s^*) ds^*,$$

$$б) f_{\hat{V}_{UVaR} | \hat{s} < \tilde{\beta}^2 z_\alpha^2} = K(\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2) \int_0^{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{V}_{UVaR}}(x | s^*) ds^*,$$

$$в) f_{\hat{M}_{UVaR} | \hat{s} < \tilde{\beta}^2 z_\alpha^2} = K(\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2) \int_0^{\tilde{\beta}^2 z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{M}_{UVaR}}(x | s^*) ds^*,$$

де

$$K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)},$$

$F_{d_1, d_2; \lambda}(x)$ та $f_{d_1, d_2; \lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з d_1 і d_2 ступенями свободи та нецентральним параметром λ ,

$$f_{\hat{R}_{UVaR}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} a(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \times \exp\left\{-\frac{(x - R_{GMV})^2}{2(a(s^*)^2 + \tilde{s}^*)}\right\} M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\tilde{s}^*}, a(s^*)),$$

$$f_{\hat{V}_{UVaR}}^*(x) = \frac{1}{(2b(s^*))^{\frac{n-k}{2}} \Gamma((n-k)/2)} x^{\frac{n-k-2}{2}} \exp\left\{-\frac{x}{2b(s^*)}\right\},$$

$$f_{\hat{M}_{UVaR}}^*(x) = \frac{1}{2^{\frac{n-k-2}{2}} c(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(x + R_{GMV})^2}{2(c(s^*)^2 + \tilde{s}^*)}\right\} M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\tilde{s}^*}, c(s^*)),$$

густини відповідних характеристик портфеля, за умови $\hat{s} = s^*$.

Доведення. Доведення теореми аналогічне до доведення теореми 3 роботи [18].

Як наслідок з теореми 8.2 можна отримати результати роботи [18]. Підставляючи замість $\tilde{\beta}$ одиницю або, що еквівалентно, замість $\beta - +\infty$.

Використаємо густини, отримані в теоремі 8.2, для дослідження впливу коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику на характеристики портфеля з максимальною корисністю. Для значень невідомих параметрів розподілу використаємо оцінки, отримані з вибірки щомісячних значень цін чотирьох ($k=4$) акцій українських компаній: Центренерго, Алчевський металургійний комбінат, Укртелеком та Мотор Січ, за період часу з квітня 2009 року по жовтень 2012 ($n=42$), а саме:

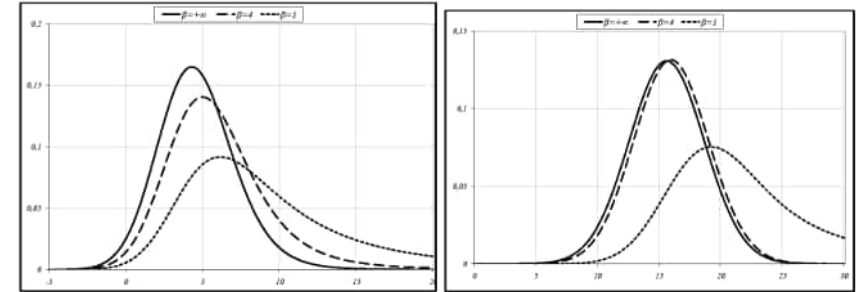
$$\mu = (1.59826, 0.02881, 0.32412, 4.57521)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 276.8680 & 244.6354 & 129.2459 & 184.4213 \\ 244.6354 & 440.1655 & 177.3309 & 231.4762 \\ 129.2459 & 177.3309 & 198.7823 & 111.7193 \\ 184.4213 & 231.4762 & 111.7193 & 226.2683 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи значення для μ та Σ у вирази для обчислення величин R_{GMV} , V_{GMV} та s , від яких залежать густини розподілів характеристик портфеля w_{UVaR} , отримаємо

$$R_{GMV}=2.70094, V_{GMV}=150.402, s=0.15785.$$

Зобразимо густини оцінок дохідності \hat{R}_{UVaR} та ризику \hat{M}_{UVaR} портфеля w_{UVaR} , використовуючи значення 0.95 для рівня довіри α та $\beta \in \{1, 4, +\infty\}$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.2. Густини оцінок дохідності (зліва) та ризику (справа) портфеля фінансових активів з максимальною корисністю зі структурою w_{UVaR} при $\alpha=0.95$ та $\beta \in \{1, 4, +\infty\}$.

З рис. 8.2 бачимо, що дохідність є більш чутливою до значення коефіцієнта $\beta \in [4, +\infty)$, ніж ризик. При зміні β в цьому діапазоні дохідність зростає та її розподіл з майже симетричного перетворюється на розподіл схилений вправо. Також з'являються важкі хвости. Натомість густина ризику майже не змінюється, пік її незначно зміщується вправо та хвости розподілу стають несуттєво важчими. При зміні β від 4 до 1, зміна в густині дохідності повністю відповідає змінам на інтервалі $[4, +\infty)$. Правий хвіст стає ще важчим, а пік зміщується ще більше вправо. Проте для ризику поведінка суттєво відрізняється. Пік густини розподілу різко зміщується вправо, правий хвіст розподілу стає надзвичайно важким. Використовуючи ці спостереження, можемо сформулювати наступні рекомендації щодо вибору коефіцієнта β . По-перше, недоцільним є використання низьких значень коефіцієнтів, що описують ставлення інвестора до ризику на українському ринку, оскільки їх використання призводить до незначного, у порівнянні з ризиком, зростання очікуваної дохідності. По-друге, високих значень для β також треба уникати, оскільки, існує можливість

збільшити очікувану дохідність при несуттєвому зростанні ризику, зменшуючи значення цього коефіцієнта. Отже, перед формуванням портфеля фінансових активів необхідно насамперед дослідити вплив коефіцієнта β на характеристики портфеля та вибрати для нього те значення, що найкраще описує очікування інвестора щодо поведінки очікуваної дохідності та ризику портфеля.

Ми дослідили властивості вибіркової оцінки характеристик портфеля з максимальною корисністю на основі міри ризику *Var*. Використання цієї міри в теорії портфеля є повністю узгодженим з рекомендаціями основних банківських документів. З теоретичної точки зору, застосування функції очікуваної корисності при аналізі портфеля фінансових активів є узагальненням задачі побудови портфеля з найменшим рівнем ризику при заданій дохідності. Основним недоліком цього методу є неможливість визначення раціонального значення коефіцієнта β , що описує ставлення інвестора до ризику. Зазначимо, що цей коефіцієнт також має вплив на коректність вибіркової оцінки ваг і характеристик портфеля. У роботі показано, що при значеннях β близьких до нуля, коректність оцінки викликає питання, проте при значеннях більших за одиницю імовірність коректності оцінки є близькою до одиниці. Приміром, при $\beta=1$ нижня межа імовірності, що вибіркова оцінка є коректно визначена, становить 0.93842711 , а при $\beta=4$ – 0.99931284 . Тому використання таких оцінок як у теоретичних дослідженнях, так і в практичних цілях є повністю коректним. Для дослідження впливу коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику на вибіркові оцінки основних характеристик портфеля (дохідність та ризик) ми знайшли розподіли цих оцінок. Змінюючи значення коефіцієнта β , побудовано графіки відповідних густин розподілів та надано рекомендації відносно процедури раціонального вибору цього коефіцієнта. При $\beta \in [4, +\infty)$ дохідність є більш чутливою до значення β ніж ризик, оскільки густина ризику майже не змінилася при зміні значення β від $+\infty$ до 4. Це свідчить про недоцільність використання високих значень для опису ставлення інвестора до ризику, оскільки використання таких значень призводить до суттєвого зниження очікуваної дохідності при незначному зниженні ризику. При значенні $\beta \in [1, 4]$ дохідність продовжує зростати так само як і в попередньому випадку. Натомість ризик

суттєво зростає, що відображається у тому, що пік густини розподілу ризику різко зміщується вправо, а правий хвіст розподілу стає надзвичайно важким. Отже, використання низьких значень для β є також недоцільним, за рахунок різкого зростання ризику при помірному зростанні дохідності.

Зауважимо, що результати дослідження можна поширити на більш широкий клас розподілів. Проте в цьому випадку необхідним буде використання методу Монте-Карло для дослідження коректності оцінок (8.14)-(8.17) та побудови розподілів характеристик портфеля.

8.3. Визначення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику на основі рівня довіри для *Var*

У класичній теорії портфеля припускається, що значення коефіцієнта, який описує ставлення до ризику, є відомим. Таке припущення зазнає критики на практиці. З одного боку, коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику залежить від переконань інвестора, які відповідно залежать від багатьох суб'єктивних чинників. З іншого боку, цей коефіцієнт залежить від активів, з яких формується портфель, тобто від об'єктивних чинників.

Ідея обчислення коефіцієнта, що описує ставлення до ризику, на основі ринкових даних розглядалася у [6], [56], [88]. У [88] коефіцієнт β обчислено на основі оцінки нейтральних до ризику та історичних імовірностей, отриманих з цін опціонів. У [56] обчислення коефіцієнта β відбувається на основі реалізованої волатильності. В [6] обґрунтовано вплив як об'єктивних так і суб'єктивних чинників на значення коефіцієнта β . Значення коефіцієнта β , що використовуються на практиці, лежать у межах від 1 до 50, та вибір значення цього коефіцієнта відбувається евристично. Ідея обчислення коефіцієнта β вперше запропоновано в [66]. Очевидно, що ставлення до ризику може бути зрозуміліше виражено через

визначений строго статистично рівень довіри для VaR , ніж через абстрактний коефіцієнт β . Зважаючи на це, в [66] шляхом накладання умов на дохідність портфеля, коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику, визначено через порівняння VaR отриманого портфеля з бажаним рівнем ризику. У [43] розглянуто проблему визначення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, порівнюючи розв'язки задач мінімізації VaR портфеля (4.6) та максимізації очікуваної корисності портфеля (1.21) вибору раціональної структури портфеля фінансових активів. Оскільки за припущення нормальності дохідностей, з яких сформовано портфелі, обидва портфелі належать ефективній множині, то порівнюючи їх структури у [43], отримано вираз для обчислення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, який у наших позначеннях матиме вигляд:

$$\beta = \sqrt{\frac{z_\alpha^2 - s}{V_{GMV}}}, \quad (8.18)$$

де V_{GMV} – очікувана дохідність портфеля фінансових активів з найменшою дисперсією (1.9), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$, $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ – α -квантиль стандартного нормального розподілу.

Зазначимо, що припущення про нормальність дохідностей активів, з яких складено портфель, не є критичним для обчислення β . Вираз (8.18) буде справедливим також і для дохідностей, що мають багатовимірний еліптичний розподіл [53], чи поведуться як довільний стаціонарний процес, для якого квантиль розподілу дохідності портфеля не залежить від ваг \mathbf{w} [51]. У цих випадках потрібно у (8.18) замінити квантиль z_α^2 на квантиль, що відповідає припущенню про поведінку вектора дохідностей, з яких сформовано портфель.

Безпосередньо використати вираз для β (8.18) на практиці неможливо, оскільки він залежить від невідомих на практиці параметрів V_{GMV} та s , які залежать від параметрів розподілу вектора дохідностей, з яких сформовано портфель, $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Спочатку інвестор змушений оцінити ці параметри. Ми використаємо вибіркові оцінки параметрів розподілу (1.27). Підставивши ці оцінки в

(8.18), отримаємо вибіркову оцінку коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику $\hat{\beta}$. В загальному випадку оцінка $\hat{\beta}$ є випадковою величиною, тому важливо дослідити її імовірнісні властивості. Зауважимо, що імовірнісні властивості розглянутої оцінки залежать від імовірнісних властивостей вектора дохідностей, з яких складено портфель. Ми розглянемо чотири припущення щодо поведінки вектора дохідностей: дохідності є нормально розподіленими та неавтокорельованими, дохідності мають багатовимірний еліптичний розподіл та є неавтокорельованими, дохідності поведуться як процес Гауса, дохідності поведуться як довільний стаціонарний процес.

8.3.1. Нормально розподілені та неавтокорельовані дохідності активів

Припустимо, що кількість активів, які ми включаємо в портфель є відома та становить k . Нехай вектор дохідностей, з яких ми формуємо портфель, має багатовимірний нормальний розподіл з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ і його елементи є неавтокорельованими. На основі вибірки попередніх значень векторів дохідностей активів $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ ми побудуємо вибіркові оцінки невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ (1.27) та підставимо отримані значення в (8.18). Отримаємо вибіркову оцінку коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику

$$\hat{\beta} = \sqrt{\frac{z_\alpha^2 - \hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}}. \quad (8.19)$$

Зауважимо, що оцінка (8.19) має зміст лише за виконання умови $z_\alpha^2 \geq \hat{s}$. Імовірність виконання цієї умови досліджена в розділі 5.1, де показано, що імовірність виконання такої умови є близька до 1 при $\alpha > 0.85$. Надалі ми розглядатимемо імовірнісні властивості оцінки $\hat{\beta}$ за виконання умови $z_\alpha^2 \geq \hat{s}$. У наступній теоремі знайдено стохастичне представлення оцінки $\hat{\beta}$ за умови, що оцінка параметра s є відома.

Теорема 8.3. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t , $n > k$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$ і $s < z_\alpha^2$. Тоді

$$(\hat{\beta} | \hat{s} = s^*) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n-1}{V_{GMV}}} \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}{\sqrt{\xi_2}},$$

де символ $\stackrel{d}{=}$ означає рівність за розподілом, а випадкова величина ξ_2 має χ^2 розподіл з $n-k$ ступенями свободи.

Доведення. Врахувавши, що розподіли вибірових оцінок параметрів V_{GMV} та s мають вигляд [52]

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi_{n-k}^2,$$

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1; ns},$$

де через $F_{k-1, n-k+1; ns}$ позначено нецентральний розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями свободи та нецентральним параметром ns , а χ_{n-k}^2 – χ^2 -розподіл з $n-k$ ступенями свободи, та випадкова величина \hat{V}_{GMV} незалежна від \hat{s} , отримаємо твердження теореми.

Наслідок 8.1. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t , $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$ і $n > k$. Тоді густина випадкової величини $\hat{\beta} | \hat{s} = s^*$ має вигляд (при $x > 0$):

$$f_{\hat{\beta} | \hat{s} = s^*}(x) = \frac{1}{2^{(n-k-2)/2} \Gamma((n-k)/2)} x^{-n+k-1} a_\beta(s^*)^{(n-k)/2} e^{-a_\beta(s^*)/2x^2},$$

де $a_\beta(y) = (n-1)z_\alpha^2 / V_{GMV}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма функція.

Доведення. Позначимо $a_\beta(y) = (n-1)z_\alpha^2 / V_{GMV}$ та розглянемо випадкову величину $\zeta = \eta \cdot a_\beta(y)^{1/2}$, де η випадкова величина, яка має обернений χ розподіл з ν ступенями свободи.

Маємо

$$F_\zeta(x) = P\{\zeta < x\} = P\{a_\beta(y)^{1/2} \cdot \eta < x\} = P\{\eta < x/a_\beta(y)^{1/2}\} = F_\eta(x/a_\beta(y)^{1/2}),$$

отже

$$f_\zeta(x) = f_\eta(x/a_\beta(y)^{1/2}) / a_\beta(y)^{1/2}.$$

З [98], маємо

$$f_\eta(x) = \frac{1}{2^{(\nu-2)/2} \Gamma(\nu/2)} x^{-\nu-1} e^{-1/2x^2}.$$

Звідси та з теореми 8.3 отримаємо потрібне твердження.

Зрозуміло, що передбачити значення, яке прийме оцінка параметра s неможливо, тому ми зацікавлені в розподілі оцінки параметра β за умови $z_\alpha^2 \geq \hat{s}$.

Теорема 8.4. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$. Нехай $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ є незалежними реалізаціями \mathbf{X}_t , $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$ і $n > k$. Тоді

$$f_{\hat{\beta} | \hat{s} < z_\alpha^2} = K(z_\alpha^2) \int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} s^* \right) f_{\hat{\beta} | \hat{s} = s^*}(x | s^*) ds^*, \quad (8.20)$$

де

$$K(x) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1, n-k+1; ns} \left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} x \right)},$$

$F_{a,b;\lambda}(x)$ та $f_{a,b;\lambda}(x)$ є відповідно функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з a і b ступенями свободи та нецентральним параметром λ , а $f_{\hat{\beta}|\hat{s}^*}(x|s^*)$ задана в наслідку 8.1.

Доведення. Доведення теореми впливає з леми 5.2 та факту, що $\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1; ns}$.

Зобразимо густину розподілу випадкової величини $(\hat{\beta} - \beta)$. Припустимо, що ми формуємо портфель з п'яти активів при рівні довіри для VaR $\alpha=0.95$. Припустимо, що точні значення параметрів розподілу вектора доходностей μ та Σ є відомими. Значення для них ми візьмемо з розділу 5.5, тобто

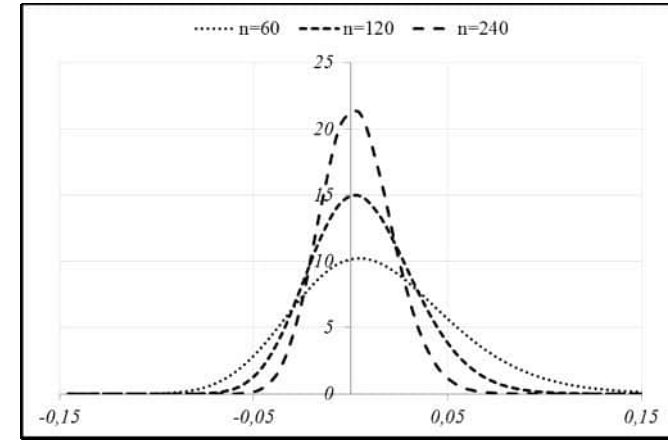
$$\mu = (0.8918, 0.7984, 1.8345, 1.0831, 0.6181)',$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 36.510 & 24.278 & 13.315 & 6.154 & 17.562 \\ 24.278 & 60.648 & 23.218 & 13.041 & 13.433 \\ 13.315 & 23.218 & 33.398 & 15.354 & 10.827 \\ 6.154 & 13.041 & 15.354 & 30.697 & 6.868 \\ 17.562 & 13.433 & 10.827 & 6.868 & 36.276 \end{pmatrix}.$$

На основі цих значень обчислимо точні значення параметрів ефективної множини та точне значення коефіцієнта β :

$$R_{GMV} = 1.06586, V_{GMV} = 16.90393, s = 0.04604, \beta = 0.39546.$$

Використовуючи попередні значення, зобразимо густину випадкової величини $(\hat{\beta} - \beta)$ графічно при $n \in \{60, 120, 240\}$ (рис. 8.3).



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.3. Густина розподілу випадкової величини $(\hat{\beta} - \beta)$ при $n \in \{60, 120, 240\}$.

З рис. 8.3 можемо зробити висновок, що при зростанні об'єму вибірки вибіркова оцінка коефіцієнта β стає точнішою, в тому сенсі, що зменшується дисперсія оцінки. Також густина є симетричною при $n=240$ та візуально близькою до нормального розподілу. Зауважимо також, що піки всіх густин є дещо зміщені вправо, що свідчить про те, що вибіркова оцінка переоцінює точне значення параметра β .

Густина вибіркової оцінки $\hat{\beta}$ (8.20) є доволі складною для обчислення та при зростанні обсягу вибірки для побудови оцінки стає подібною на густину нормального розподілу, виникає запитання, чи можна на практиці замінити густину (8.20) густиною нормального розподілу та наскільки добрим буде таке наближення. Тому ми знайдемо асимптотичний розподіл вибіркової оцінки $\hat{\beta}$ та дослідимо його точність при різній кількості активів у портфелі та при різних обсягах вибірки.

Теорема 8.5. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо X_t – k -вимірний вектор

дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ і дохідності є неавтокорельованими. Припустимо, що $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\beta^2),$$

$$\sigma_\beta^2 = \frac{(z_\alpha^2 - s)^2 + 2s + s^2}{2(z_\alpha^2 - s)V_{GMV}}. \quad (8.21)$$

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60] та лему 6.2 ($\psi''(0)/(\psi'(0))^2=1$ та $\gamma=1$), отримуємо

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\beta^2)$$

де

$$\sigma_\beta^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} \partial \beta / \partial R_{GMV} \\ \partial \beta / \partial V_{GMV} \\ \partial \beta / \partial s \end{pmatrix},$$

та матриця

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2s^2 \end{pmatrix}$$

асимптотична матриця коваріацій вектора $(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})'$ [94].

Маємо

$$\frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}} = -\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2(V_{GMV})^{3/2}}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} = -\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}}.$$

Тому

$$\sigma_\beta^2 = \left(0, -\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2(V_{GMV})^{3/2}}, -\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} V_{GMV}(1+s) & 0 & 0 \\ 0 & 2V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4s + 2s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{z_\alpha^2 - s}/2(V_{GMV})^{3/2} \\ -1/2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{z_\alpha^2 - s}{2V_{GMV}} + \frac{(2s + s^2)}{2V_{GMV}(z_\alpha^2 - s)} \right) = \frac{(z_\alpha^2 - s)^2 + 2s + s^2}{2(z_\alpha^2 - s)V_{GMV}}.$$

Теорему доведено.

На практиці ми змушені використовувати оцінку дисперсії (8.21), тобто

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{(z_\alpha^2 - \hat{s})^2 + 2\hat{s} + \hat{s}^2}{2(z_\alpha^2 - \hat{s})\hat{V}_{GMV}}. \quad (8.22)$$

Теорема 8.6. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей активів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t є k -вимірною нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ та дохідності є неавтокорельованими. Припустимо, що $s < z_\alpha^2$, $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{(z_\alpha^2 - \hat{s})^2 + 2\hat{s} + \hat{s}^2}{2(z_\alpha^2 - \hat{s})\hat{V}_{GMV}} \rightarrow \sigma_\beta^2.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з доведення теореми 8.5 та з теореми 1.14 в [67].

Використовуючи результати теорем 8.5-8.6, ми маємо можливість побудувати $(1-\gamma)$ інтервали довіри для значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику

$$\left[\sqrt{\frac{z_\alpha^2 - \hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}} - \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2}, \sqrt{\frac{z_\alpha^2 - \hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}} + \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\sqrt{n}} z_{1-\gamma/2} \right]. \quad (8.23)$$

Інтервал довіри (8.23) дає можливість провести статистичний тест чи отримане значення коефіцієнта β суттєво відрізняються від бажаного при рівні довіри $(1-\gamma)$.

Дослідимо швидкість збіжності емпіричних середніх, дисперсій та густин випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при $k \in \{5, 10, 15\}$ та $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ на прикладі даних з розділу 7.3.1. Отримаємо

$$k=5: \beta=1.0115, \sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 0.51385),$$

$$k=10: \beta=1.2231, \sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 0.76314),$$

$$k=15: \beta=1.2277, \sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 0.78681).$$

Таблиця 8.1

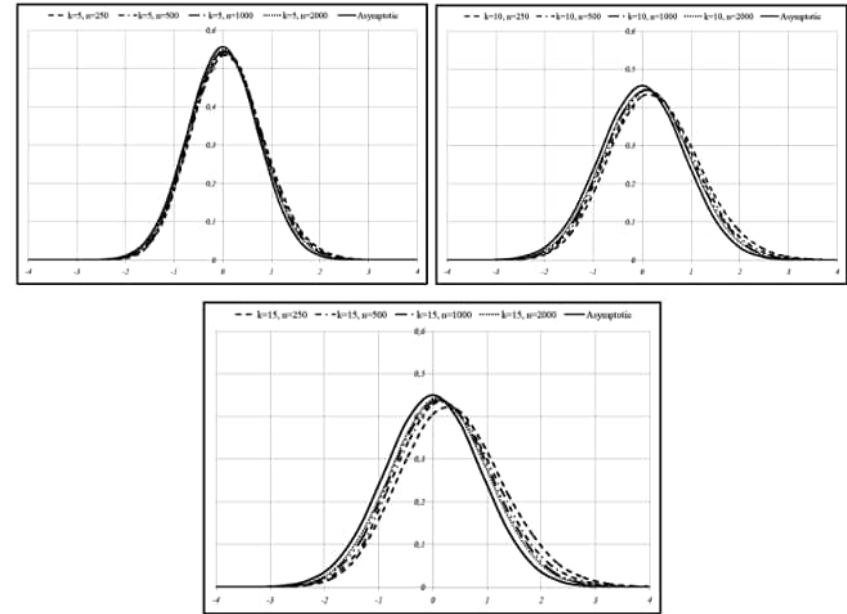
Емпіричні та асимптотичні середні значення і дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$.

	k=5		k=10		k=15	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
n=250	0.1266	0.54248	0.2662	0.82965	0.3676	0.89102
n=500	0.0942	0.52847	0.1867	0.79511	0.2556	0.83258
n=1000	0.0643	0.52248	0.1301	0.77928	0.1773	0.80771
n=2000	0.0479	0.51810	0.0951	0.77378	0.1283	0.79679
Асимптотичні	0	0.51385	0	0.76314	0	0.78681

Джерело: розроблено автором

Обчислимо емпіричні середні та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при різній кількості активів у портфелі та різних обсягах вибірок історичних значень. Результати наведені в табл. 8.1. Бачимо, що емпіричні дисперсії швидко збігаються до асимптотичних значень. Збіжність середніх, аналогічно до випадків вибір-

кових оцінок $\hat{\alpha}_{TP}$ та $\hat{\alpha}_A$, є дуже повільною, особливо при великій кількості активів у портфелі.



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.4. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$.

На рис. 7.19 представлено емпіричні та асимптотичну густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$, які повністю підтверджують наші попередні спостереження, стосовно того, що оцінка $\hat{\beta}$ є зміщеною.

Знайдемо виправлену оцінку для параметра $\hat{\beta}$, аналогічно до випадку оцінки $\hat{\alpha}_{TP}$. Використовуючи, що

$$\frac{(n-1)\hat{V}_{GMV}}{V_{GMV}} \sim \chi_{n-k}^2,$$

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1; ns}$$

та випадкова величина \hat{V}_{GMV} незалежна від \hat{s} , отримаємо

$$\begin{aligned} M\left(\frac{z_\alpha^2 - \hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}\right) &= (z_\alpha^2 - M(\hat{s}))M\left(\frac{1}{\hat{V}_{GMV}}\right) = \\ &= \left(z_\alpha^2 - \frac{(n-1)(ns+k-1)}{n(n-k-1)}\right) \frac{(n-1)}{(n-k-2)V_{GMV}} \end{aligned}$$

Ми використали, що випадкова величина

$$\frac{V_{GMV}}{(n-1)\hat{V}_{GMV}}$$

має обернений χ^2 розподіл з $n-k$ ступенями свободи, тому її математичне сподівання дорівнює $1/(n-k-2)$ [98]. Отже, незміщена оцінка для β матиме вигляд:

$$\hat{\beta}^* = \sqrt{\frac{n-k-2}{(n-1)\hat{V}_{GMV}} \left(z_\alpha^2 - \frac{n-k-1}{n-1} \hat{s} + \frac{k-1}{n} \right)}. \quad (8.24)$$

Так побудована оцінка може бути невизначеною, оскільки випадкова величина під коренем може приймати від'ємні значення з додатною імовірністю. Тому ми, будуючи виправлену оцінку параметра β , ігноруватимемо вибірки, для яких значення під коренем прийматиме від'ємні значення.

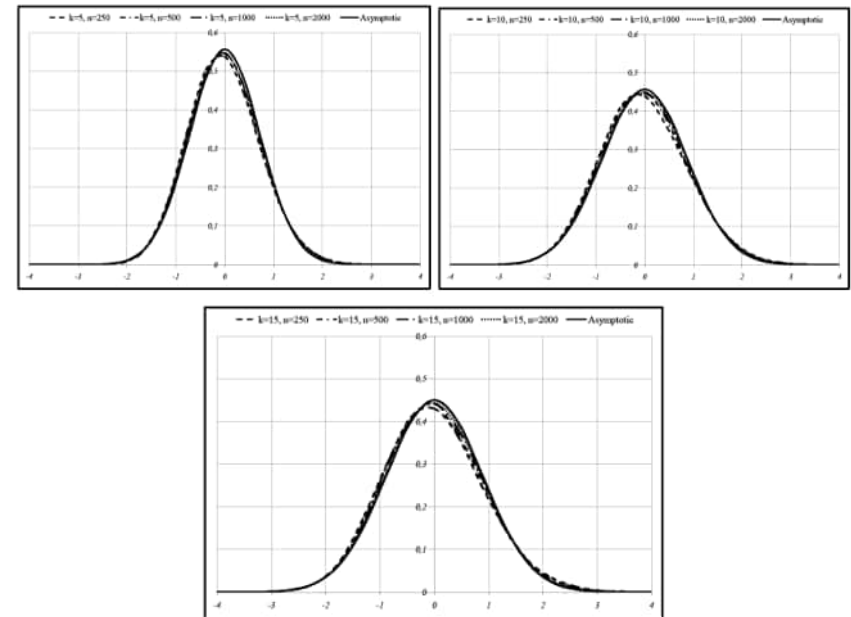
Результати моделювання поведінки випадкової величини наведені в табл 8.2 та на рис. 8.5.

Як і очікувалося, властивості випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ є набагато кращими, ніж $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$. Емпіричні середні та дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ швидко збігаються до асимптотичних значень, а емпіричні густини не є зміщеними відносно асимптотичної, та асимптотична густина добре наближає емпіричну вже при обсязі вибірки історичних значень $n=500$

Таблиця 8.2
Емпіричні та асимптотичні середні значення і дисперсії випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$.

	k=5		k=10		k=15	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
n=250	-0.0193	0.53251	-0.0233	0.80296	-0.0187	0.84826
n=500	-0.0081	0.52365	-0.0159	0.78245	-0.0150	0.81305
n=1000	-0.0077	0.52010	-0.0124	0.77310	-0.0130	0.79832
n=2000	-0.0029	0.51692	-0.0054	0.77073	-0.0060	0.79216
Асимптотичні	0	0.51385	0	0.76314	0	0.78681

Джерело: розроблено автором



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.5. Емпіричні та асимптотичні густини випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15\}$.

8.3.2. Неавтокорельовані дохідності активів, що мають багатовимірний еліптичний розподіл

Припустимо, що ми формуємо портфель з k фінансових активів, дохідності яких є неавтокорельованими та вектор дохідностей має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). У цьому випадку, для обчислення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, нам потрібно замінити у (8.18) квантиль z_α^2 на $\tilde{d}_\alpha^2 = d_\alpha/\gamma$, де d_α – є α квантилю випадковою величиною $\frac{\mathbf{1}'\mathbf{X}_w - \mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{1}'\mathbf{D}\mathbf{1}}}$ для деякого вектора $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, та не залежить від вибору $\mathbf{1}$ [75], а $\gamma = (-\psi'(0)/2)^{1/2}$, тобто ми досліджуватимемо властивості параметра та його вибіркової оцінки, що мають вигляд:

$$\beta = \sqrt{\frac{\tilde{d}_\alpha^2 - s}{V_{GMV}}}, \quad \hat{\beta} = \sqrt{\frac{\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s}}{\hat{V}_{GMV}}}. \quad (8.25)$$

Теорема 8.7. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що $\boldsymbol{\Sigma}$ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$ і $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \sim N(0, \sigma_{\beta,el}^2),$$

$$\sigma_{\beta,el}^2 = \frac{\lambda(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2 + 2s + \lambda s^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)V_{GMV}}, \quad (8.26)$$

де β та $\hat{\beta}$ задані у (8.25), $\lambda = \psi''(0)/(\psi'(0))^2$, $\gamma = (-\psi'(0)/2)^{1/2}$, $\tilde{d}_\alpha^2 = d_\alpha/\gamma$, де d_α – є α квантилю випадковою величиною $\frac{\mathbf{1}'\mathbf{X}_w - \mathbf{1}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{1}'\mathbf{D}\mathbf{1}}}$ для деякого вектора $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, та не залежить від вибору $\mathbf{1}$ [75].

Доведення. З дельта методу [60], леми 6.2 та доведення теореми 8.5, маємо

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{\beta,el}^2),$$

де

$$\sigma_{\beta,el}^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} \end{pmatrix},$$

та матриця

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix}$$

асимптотична матриця коваріацій вектора $(\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})'$.

Маємо

$$\sigma_{\beta,el}^2 = \left(0, -\frac{\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}}{2(V_{GMV})^{3/2}}, -\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} V_{GMV}(1 + \lambda s) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda V_{GMV}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2s(2 + \lambda s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s}/2(V_{GMV})^{3/2} \\ -1/2\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{\tilde{d}_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\lambda(\tilde{d}_\alpha^2 - s)}{2V_{GMV}} + \frac{(2s + \lambda s^2)}{2V_{GMV}(\tilde{d}_\alpha^2 - s)} \right) = \frac{\lambda(\tilde{d}_\alpha^2 - s)^2 + 2s + \lambda s^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - s)V_{GMV}}.$$

Теорему доведено.

У наступній теоремі доведено конзистентність вибіркової оцінки асимптотичної дисперсії $\sigma_{\beta,el}^2$ випадковою величиною $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$.

Теорема 8.8. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що вектор дохідностей \mathbf{X}_t має багатовимірний еліптичний розподіл (6.7). Припустимо, що Σ є додатно визначена, $s < \tilde{d}_\alpha^2$ і $\mu \neq \mu \mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\hat{\sigma}_{\beta:el}^2 = \frac{\lambda(\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s})^2 + 2\hat{s} + \lambda\hat{s}^2}{2(\tilde{d}_\alpha^2 - \hat{s})\hat{V}_{GMV}} \rightarrow \sigma_{\beta:el}^2.$$

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 8.6.

Зважаючи на результати моделювання випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ за припущення неавтокорельованих та нормально розподілених дохідностей, дослідимо швидкість збіжності емпіричних середніх, дисперсій та густин одразу двох випадкових величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ при $k=20$ та $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ на прикладі даних з розділу 7.3.2. Отримаємо

$$\beta = 1.1562, \sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 2.03803).$$

У табл. 8.3 наведено емпіричні та відповідні асимптотичні значення середніх та дисперсій випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15, 20\}$ за припущення, що дохідності активів, з яких складено портфель, неавтокорельовані та мають розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи.

З табл. 8.3 можемо зробити висновок, що побудована нами виправлена оцінка параметра β хоча і є кращою за вибірку оцінку, проте при її використанні випадкової величині $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ все одно притаманне зміщення. Це пов'язано з тим, що виправлена оцінка є незміщеною лише за припущення нормальності розподілів дохідностей, з яких сформовано портфель. Тобто, за нашого

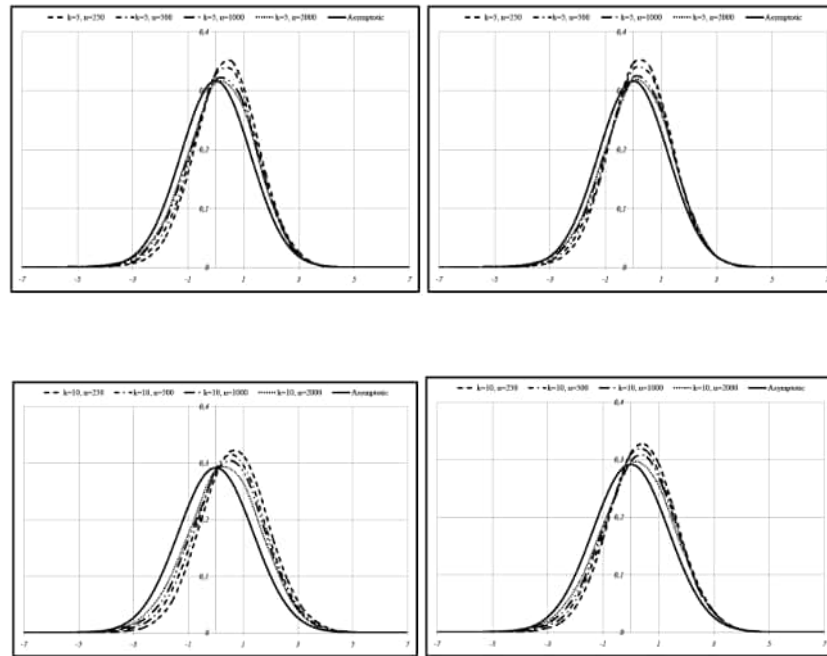
припущення про еліптичність розподілу дохідностей, оцінка $\hat{\beta}^*$ втрачає властивість незміщення, хоча зміщення виправленої оцінки є меншим, ніж невиправленої. Зауважимо, що такий результат спостерігається і при меншій кількості активів у портфелі. Отже, на практиці, за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких сформовано портфель, має багатовимірний еліптичний розподіл та його елементи є неавтокорельованими, використовувати обидві оцінки потрібно надзвичайно акуратно та, за можливості, при побудові оцінок використовувати вибірки з якомога більшою кількістю елементів. Щодо швидкості збіжності дисперсій, зауважень немає ніяких, в обох випадках вона є задовільною. Результати для густин розподілу представлено на рис. 8.6-8.7. Вони повністю підтверджують наші попередні спостереження. Значимо, що властивості обох випадкових величин у випадку, коли вектор дохідностей, з яких сформовано портфель, має багатовимірний розподіл Стюдента з п'ятьма ступенями свободи та його елементи є неавтокорельовані, погіршуються при зростанні кількості активів у портфелі.

Таблиця 8.3

Емпіричні та асимптотичні середні значення та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10, 15, 20\}$.

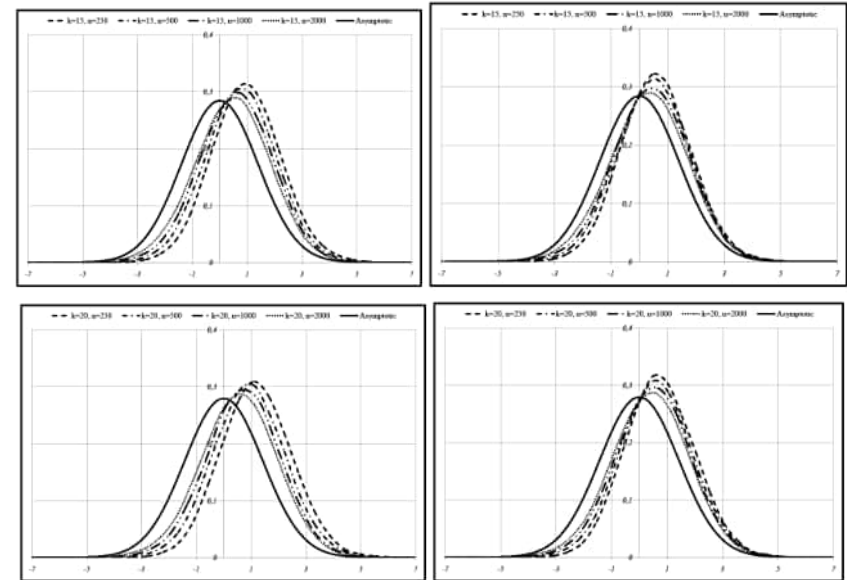
			$n=250$	$n=500$	$n=1000$	$n=2000$	Асимпт.
$k=5$	$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$	Середнє	0.3840	0.2852	0.2074	0.1640	0
		Дисперсія	1.3189	1.4105	1.5218	1.5776	1.5855
	$\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$	Середнє	0.2403	0.1851	0.1372	0.1146	0
		Дисперсія	1.2959	1.3982	1.5152	1.5742	1.5855
$k=10$	$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$	Середнє	0.6888	0.5253	0.4079	0.2935	0
		Дисперсія	1.5237	1.6167	1.7420	1.8480	1.8679
	$\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$	Середнє	0.4281	0.3446	0.2814	0.2047	0
		Дисперсія	1.4792	1.5934	1.7295	1.8414	1.8679
$k=15$	$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$	Середнє	0.9672	0.7525	0.5784	0.4302	0
		Дисперсія	1.6276	1.6945	1.7860	1.9211	1.9685
	$\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$	Середнє	0.5934	0.4940	0.3980	0.3036	0
		Дисперсія	1.5609	1.6604	1.7681	1.9116	1.9685
$k=20$	$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$	Середнє	1.1894	0.9163	0.7085	0.5390	0
		Дисперсія	1.6778	1.7530	1.8209	1.9392	2.0380
	$\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$	Середнє	0.7385	0.6026	0.4889	0.3847	0
		Дисперсія	1.5896	1.7085	1.7983	1.9273	2.0380

Джерело: розроблено автором



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.6. Емпіричні та асимптотичні густини випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ (справа) при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{5, 10\}$.



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.7. Емпіричні та асимптотичні густини випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ (справа) при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та $k \in \{15, 20\}$.

8.3.3. Дохідності активів, що поведуться як стаціонарний процес Гауса

Припустимо тепер, що вектор дохідностей активів X_t поведеться як k -вимірний гаусівський процес з середнім $M(X_t) = \mu$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$. Припустимо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена. За такого припущення вираз для обчислення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику $-\beta$ збігатиметься з випадком нормально розподілених та неавтокорельованих дохідностей (8.18).

У наступній теоремі досліджено асимптотичний розподіл вибіркової оцінки параметра β (8.19).

Теорема 8.9. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводить як k -вимірний гаусівський процес із середнім $M(\mathbf{X}_t)=\boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h)=\text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що $\Sigma=\Gamma(0)$ є додатно визначена, ряди, які входять у вираз для Ω (6.1) є збіжним, $s < z_\alpha^2$ і $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \sim N(0, \sigma_{\beta;gp}^2),$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta;gp}^2 = & 2a_\beta^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (2q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV}(q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) + \\ & + q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 + b_\beta (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2) + b_\beta^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 - \\ & - 2R_{GMV}(q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}))(q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + b_\beta q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})) + \\ & + 2R_{GMV}^2 (q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})), \end{aligned}$$

$a_\beta = 1/\left(2\sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}}\right)$, $b_\beta = R_{GMV}^2 - 1/(4a_\beta^2)$, φ є густиною стандартного нормального розподілу, $z_\alpha = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$ – α -квантиль стандартного нормального розподілу, V_{GMV} , R_{GMV} задано у (1.8)-(1.9), $s = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{R} = \Sigma^{-1} - \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\Sigma^{-1}}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}$, $q_h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}'\Gamma(0)^{-1}\Gamma(h)\Gamma(0)^{-1}\mathbf{b}$ задана в (6.4).

Доведення. З дельта-методу [60], правил матричного диференційного числення [85], [105] та (6.1), врахувавши, що

$$\partial(\text{vec}(\Gamma(0)^{-1}))' / \partial(\text{vech}(\Gamma(0))) = -\mathbf{D}'_k (\Gamma(0)^{-1} \otimes \Gamma(0)^{-1}) \mathbf{D}'_k \mathbf{D}'_k,$$

отримаємо

$$\sigma_{\beta;gp}^2 = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial\beta}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))}\right)' \mathbf{D}'_k (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h))\right) \mathbf{D}'_k \left(\frac{\partial\beta}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))}\right).$$

Обчислимо похідні параметра β по $\boldsymbol{\mu}$ та $\text{vech}(\Gamma(0))$.

$$\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}} \left(\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{z_\alpha^2 - s}\right) = \frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}} \frac{\partial\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\partial\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}\sqrt{z_\alpha^2 - s}} \mathbf{R}\boldsymbol{\mu},$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} = \frac{\partial}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} \left(\frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}} \sqrt{z_\alpha^2 - s}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}} \frac{\partial\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} + \sqrt{z_\alpha^2 - s} \frac{\partial}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} \frac{1}{\sqrt{V_{GMV}}} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}}} \frac{\partial s}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} - \frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2V_{GMV}^{3/2}} \frac{\partial V_{GMV}}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} =$$

$$= \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} \left(\frac{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}{2V_{GMV}^{3/2}} V_{GMV}^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}}} ((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + R_{GMV}^2(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}))\right) =$$

$$= -a_\beta \frac{\partial(\text{vec}\Gamma(0)^{-1})'}{\partial\text{vech}(\Gamma(0))} \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV}(\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + \left(R_{GMV}^2 - \frac{1}{4a_\beta^2}\right)(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})\right).$$

Далі,

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial\beta}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right) =$$

$$= 4a_\beta^2 \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h)\right) \mathbf{R}\boldsymbol{\mu} = 4a_\beta^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R}\Gamma(h)\mathbf{R}\boldsymbol{\mu}.$$

Врахувавши, що

$$\boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \Gamma(h) \mathbf{R} \boldsymbol{\mu} = q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}),$$

отримаємо

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right)' \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Gamma(h) \left(\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\mu}} \right) =$$

$$= 4a_\beta^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} (q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) + q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})) + R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \right)$$

З властивостей матриць (див. доведення теореми 6.1) маємо

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right)' \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^{+'} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \text{vech}(\Gamma(0))} \right) =$$

$$= a_\beta^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right)' \frac{\partial (\text{vec} \Gamma(0)^{-1})}{\partial \text{vech} \Gamma(0)} \times$$

$$\times \mathbf{D}_k^+ (\mathbf{I}_{k^2} + \mathbf{K}_k) \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)) \right) \mathbf{D}_k^{+'} \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) =$$

$$= a_\beta^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right)' \times$$

$$\times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma^{-1}(0) \Gamma(h) \Gamma^{-1}(0) \otimes \Gamma^{-1}(0) \Gamma(h) \Gamma^{-1}(0)) \right) \times$$

$$\times \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) +$$

$$+ a_\beta^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right)' \times$$

$$\times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma^{-1}(0) \Gamma(h) \Gamma^{-1}(0) \otimes \Gamma^{-1}(0) \Gamma(h) \Gamma^{-1}(0)) \right) \times$$

$$\times \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) =$$

$$= 2a_\beta^2 \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) - R_{GMV} (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{1}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right)' \times$$

$$\times \left(\sum_{h=-\infty}^{+\infty} (\Gamma^{-1}(0) \Gamma(h) \Gamma^{-1}(0) \otimes \Gamma^{-1}(0) \Gamma(h) \Gamma^{-1}(0)) \right) \times$$

$$\times \left((\boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\mu}) - 2R_{GMV} (\mathbf{1} \otimes \boldsymbol{\mu}) + b_\beta (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) =$$

$$= 2a_\beta^2 \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \left(q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})^2 - 2R_{GMV} q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + b_\beta q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1})^2 - \right.$$

$$\left. - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right.$$

$$\left. + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) - b_\beta R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + \right.$$

$$\left. + 2R_{GMV}^2 q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) - b_\beta R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{1}) + b_\beta q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu})^2 + \right.$$

$$\left. + b_\beta^2 q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1})^2 - 2b_\beta R_{GMV} q_h(\mathbf{1}, \mathbf{1}) q_h(\mathbf{1}, \boldsymbol{\mu}) \right).$$

Склавши разом попередні вирази, отримаємо твердження теореми.

Дослідимо швидкість збіжності емпіричних середніх, дисперсій та густин випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ до асимптотичних значень на прикладі даних з прикладу 7.3.3. Отримаємо:

$$\beta = 1.3463 \text{ та } \sigma_{\beta;gp}^2 = 0.94926.$$

Емпіричні середні та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ для обсягів вибірок історичних значень $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та відповідні їм асимптотичні значення наведено у табл. 8.4.

Дані, наведені в табл. 8.4, повністю відповідають результатам моделювання поведінки випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та

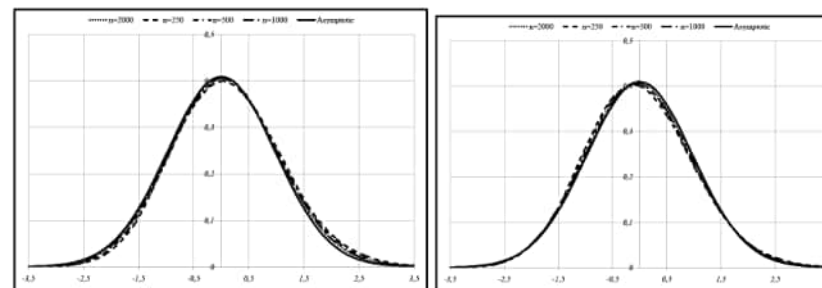
$\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ у випадку неавтокорельованих дохідностей, що мають нормальний розподіл. Для обох випадкових величин дисперсії швидко збігаються до асимптотичного значення. Для випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ середні є зміщені, чого не спостерігається для випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$. При зростанні кількості активів у портфелі зміщення випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ буде швидко зростати, натомість ця властивість неpritаманна випадковій величині $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$.

Таблиця 8.4
Емпіричні та асимптотичні середні значення і дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$.

	$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$		$\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
$n=250$	0.129	0.98481	-0.010	0.97188
$n=500$	0.090	0.96680	-0.007	0.96048
$n=1000$	0.058	0.95871	-0.011	0.95558
$n=2000$	0.048	0.95257	-0.0006	0.95102
Асимптотичні	0	0.94926	0	0.94926

Джерело: розроблено автором

На рис. 8.7 зображено емпіричні $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичні розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводитья як VARMA(1,1) процес з нормально розподіленими залишками та параметрами $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \Sigma, \text{ і } \boldsymbol{\phi}_0$. Результати аналогічні випадку нормально розподілених та неавтокорельованих дохідностей.



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.7. Емпіричний $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ (справа).

8.3.4. Дохідності активів, що поведуться як довільний стаціонарний процес

Останнім припущенням щодо поведінки дохідностей активів, з яких складено портфель, є припущення, що вектор дохідностей активів поводитья як k -вимірний стаціонарний процес з середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріацій $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Ми додатково припускаємо, що $\Gamma(0)$ є додатньо визначена та квантиль розподілу дохідності портфеля $d_\alpha(\mathbf{w})$ не є функцією від \mathbf{w} , тобто $d_\alpha(\mathbf{w}) = d_\alpha$. У такому випадку ми маємо

$$\beta = \sqrt{\frac{d_\alpha^2 - s}{V_{GMV}}} \tag{8.27}$$

Асимптотичний розподіл вибіркової оцінки параметра (8.27) знайдено у наступній теоремі.

Теорема 8.10. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів. Позначимо \mathbf{X}_t – k -вимірний вектор дохідностей елементів, з яких формується портфель у момент часу t . Припустимо, що \mathbf{X}_t поводитья як k -

вимірний стаціонарний процес із середнім $M(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\mu}$ та матрицею автоковаріації $\Gamma(h) = \text{Cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h})$. Припустимо, що ряди, які входять у (6.24), є збіжними, $d_\alpha^2 > s$ і $\boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}\mathbf{1}$. Тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim N(0, \sigma_{\beta; \text{stp}}^2),$$

де

$$\sigma_{\beta; \text{stp}}^2 = \frac{d_\alpha^2 - s}{4V_{GMV}^3} \sigma_{2, GMV}^2 + \frac{1}{2V_{GMV}^2} \sigma_{23, GMV} + \frac{1}{4V_{GMV} (d_\alpha^2 - s)} \sigma_{3, GMV}^2,$$

$$V_{GMV} \text{ задано у (1.9), } s = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \sigma_{2, GMV}^2,$$

$\sigma_{3, GMV}^2$ та $\sigma_{23, GMV}$ задані в лемі 6.3.

Доведення. Використовуючи дельта-метод [60], отримаємо

$$\sigma_{\beta}^2 = \left(\frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}}, \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}}, \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \boldsymbol{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}} \\ \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}} \\ \frac{\partial \beta}{\partial s} \end{pmatrix},$$

де матриця $\boldsymbol{\Omega}_{EF}$ – асимптотична коваріаційна матриця випадкового вектора $\sqrt{n} \left((\hat{R}_{GMV}, \hat{V}_{GMV}, \hat{s})' - (R_{GMV}, V_{GMV}, s)' \right)$ за умови, що вектор дохідностей, з яких складено портфель, поводитья як стаціонарний процес (лема 6.3).

З доведення теореми 8.5, маємо:

$$\frac{\partial \beta}{\partial R_{GMV}} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial V_{GMV}} = -\frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2(V_{GMV})^{3/2}}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} = -\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{d_\alpha^2 - s}}.$$

Тому

$$\sigma_{\beta; \text{stp}}^2 = \left(0, -\frac{\sqrt{d_\alpha^2 - s}}{2(V_{GMV})^{3/2}}, -\frac{1}{2\sqrt{V_{GMV}} \sqrt{d_\alpha^2 - s}} \right) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sigma_{1, GMV}^2 & \sigma_{12, GMV} & \sigma_{13, GMV} \\ \sigma_{12, GMV} & \sigma_{2, GMV}^2 & \sigma_{23, GMV} \\ \sigma_{13, GMV} & \sigma_{23, GMV} & \sigma_{3, GMV}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{d_\alpha^2 - s} / 2 (V_{GMV})^{3/2} \\ -1 / 2 \sqrt{V_{GMV}} \sqrt{d_\alpha^2 - s} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{d_\alpha^2 - s}{4V_{GMV}^3} \sigma_{2, GMV}^2 + \frac{1}{2V_{GMV}^2} \sigma_{23, GMV} + \frac{1}{4V_{GMV} (d_\alpha^2 - s)} \sigma_{3, GMV}^2.$$

Теорему доведено.

Дослідимо швидкість збіжності емпіричних середніх, дисперсій та густин випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ і $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta})$ до асимптотичних значень, припустивши, що вектор дохідностей, з яких складено портфель, поводитья як VARMA(1,1) процес із залишками, що мають багатовимірний розподіл Стьюдента з п'ятьма ступенями свободи, на прикладі даних з прикладу 7.3.4. Отримаємо:

$$\beta = 1.27366 \text{ та } \sigma_{\beta; \text{stp}}^2 = 2.77352.$$

Емпіричні середні та дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ та $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta})$ для обсягів вибірок історичних значень $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та відповідні їм асимптотичні значення наведено у табл. 8.5.

Таблиця 8.5

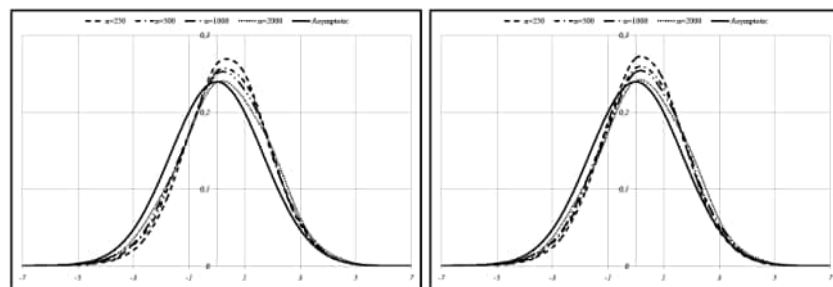
Емпіричні та асимптотичні середні значення і дисперсії випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ та $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta})$ при $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$.

	$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$		$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta})$	
	Середнє	Дисперсія	Середнє	Дисперсія
$n=250$	0.371	2.22913	0.241	2.20095
$n=500$	0.303	2.38465	0.214	2.36964
$n=1000$	0.273	2.47914	0.209	2.47136
$n=2000$	0.268	2.62321	0.223	2.61909
Асимптотичні	0	2.77352	0	2.77352

Джерело: розроблено автором

Дані, наведені в табл. 8.5, подібні на результати моделювання поведінки випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ у випадку еліптично розподілених та неавтокорельованих дохідностей. Збіжність дисперсій в обох випадках є задовільною. Середні розглянутих випадкових величин є зміщені, та швидкість збіжності їх до асимптотичного значення є повільною. Виправленій оцінці притаманне дещо менше зміщення, проте при зміні обсягу вибірки історичних значень з 1000 до 2000 зміщення емпіричного середнього випадкової величини $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ незначно зросло. Зважаючи на результати попередніх експериментів, використовувати оцінку $\hat{\beta}^*$ параметра β ми можемо рекомендувати лише у випадку, коли дохідності, з яких складено портфель, є нормально розподіленими.

На рис. 8.8 зображено емпіричні $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичні розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ за припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, поводить як $VARMA(1,1)$ процес з нормально розподіленими залишками і параметрами \mathbf{A}_1 , \mathbf{B}_1 , Σ , та φ_0 .



Джерело: розроблено автором

Рис. 8.8. Емпіричний $n \in \{250, 500, 1000, 2000\}$ та асимптотичний розподіли випадкових величин $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ (зліва) та $\sqrt{n}(\hat{\beta}^* - \beta)$ (справа).

ВИСНОВКИ

Нова парадигма в теорії портфеля полягає насамперед у використанні сучасних інструментів при оцінці ризику портфеля. Крім цього, класична теорія портфеля не бере до уваги таких парадоксів сучасної економіки, як асиметричність поведінки фінансових показників, наявність важких хвостів в їх розподілах, не розділяє суб'єктивну та об'єктивну складову сприйняття ризику. Ці парадокси разом із використанням сучасних мір ризику при виборі структури портфеля та аналізі його властивостей формують новітню теорію портфеля.

Оскільки, у своїй діяльності фінансові установи покладаються на оцінки характеристик портфеля, які є випадковими величинами, то найкращим інструментом для опису їх властивостей є їх розподіл. Тому при проведенні дослідження основним інструментом обґрунтування тих чи інших властивостей є розподіл характеристик портфеля. Зазначимо, що розподіли оцінок залежать від вибору методу оцінки та від поведінки дохідностей активів, з яких сформовано портфель. Ми розглянули вибірккові оцінки характеристик портфеля фінансових активів та припущення, що вектор дохідностей активів, з яких складено портфель, має багатовимірний нормальний розподіл та його елементи є неавтокорельованими, має багатовимірний еліптичний розподіл та його елементи є неавтокорельованими, поводить як стаціонарний процес Гауса, поводить як довільний стаціонарний процес. Ці припущення дають змогу врахувати основні властивості дохідностей фінансових активів, такі як наявність «важких хвостів» та залежність дохідностей у часі.

Монографія присвячена дослідженню та розв'язанню проблем управління портфелем фінансових активів в умовах новітньої теорії портфеля.

Ми провели дослідження розповсюджених методів оцінки міри ризику VaR . Головним завданням було показати, що така міра ризику навіть у кризові періоди може давати добре уявлення про ризик фінансового активу. Ми показали, що в спокійні періоди часу, на практиці достатньо використовувати найпростіший та найпоширеніший дельта-нормальний метод. У кризові періоди

найкращі результати було досягнуто, використовуючи узагальнені авторегресійні моделі умовної гетероскедастичності. За аналізу параметрів цієї моделі бачимо, що для оцінки ризику в кризові періоди можна використовувати інтегровані *GARCH* моделі. Застосування *IGARCH* моделей і переоцінка параметрів кожного дня дало змогу отримати задовільні оцінки *VaR*. З іншого боку, ми показали, що недоцільно використовувати інтегровані узагальнені авторегресійні моделі умовної гетероскедастичності у спокійні періоди часу, оскільки ризику в цьому випадку будуть дуже переоцінені. Результати проведеного дослідження уможливають дати позитивну відповідь на запитання, чи можна коректно обчислити *VaR* в умовах кризи, а отже, *VaR* як міру ризику можна використовувати і надалі у фінансовій діяльності.

Виявляється, що міра ризику *VaR* має певні недоліки. Одним із них є те, що *VaR* відображає лише мінімальні втрати з певною імовірністю та не надає жодної інформації про імовірності втрат більших за цей рівень. Крім цього, в загальному випадку, *VaR* не є субадитивною функцією. Це означає, що при додатковій диверсифікації портфеля його ризик може зрости. Така ситуація не має жодного практичного обґрунтування, а, отже, цей недолік потрібно усунути.

Наприкінці минулого століття було введено поняття когерентної міри ризику та описано властивості, якими ця міра повинна володіти. Однією з властивостей є субадитивність. Тому, зважаючи на популярність *VaR*, постало питання узагальнення *VaR* до когерентної міри ризику. Такою мірою ризику є умовне *CVaR*. Зауважимо, що фінансові втрати від недавньої фінансової кризи призвели до процесу переходу від *VaR* до *CVaR* у сфері обчислення банківських ризиків.

Ми провели аналіз трьох мір ризику на основі портфелів фінансових активів з найменшим рівнем ризику. На жаль, ми не отримали однозначної відповіді на питання, яка з трьох розглянутих мір ризику є найкращою. Поведінка основних характеристик портфелів залежить від припущення стосовно розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель та від самої поведінки дохідностей (кризовий чи спокійний період), що впливає на характеристики розподілу, найперше на дисперсію активів та, як наслідок, на *VaR* та *CVaR*. Головним висновком є те, що оцінювати

ризиків необхідно комплексно, тобто використовуючи декілька мір ризику, оскільки кожна з розглянутих мір ризику має свої переваги і недоліки, а в часи кризи недоліки можуть дуже багато коштувати.

Часто на практиці виникає необхідність взяти до уваги також очікувану дохідність портфеля, а саме, розглянути задачу подвійної оптимізації. У загальному випадку такі задачі не мають розв'язку, а тому у фінансовій літературі розглядають також інші методи вибору структури портфеля фінансових активів, наприклад, відношення Шарпа. Відношення Шарпа описує премію за ризик на одиницю ризику. Тому, чим більшим є відношення Шарпа, тим кращим є портфель. Крім того, у випадку нормально розподілених дохідностей структура портфеля з максимальним відношенням Шарпа не залежить від вибору міри ризику, що є привабливою властивістю. Ми порівняли портфелі фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа (за різних мір ризику) при невиконанні припущення про нормальність розподілу дохідностей активів, з яких складено портфель. Ми отримали аналогічні результати, що й у випадку порівняння мір на основі портфелів з найменшим рівнем ризику. Тому використання всіх мір ризику, що ми розглянули, на практиці є обґрунтованим.

Ми дослідили проблему побудови та оцінки ваг портфеля фінансових активів з найменшим рівнем *VaR*. Оскільки параметри дохідностей є на практиці невідомі, то для практичних задач використовуються їхні оцінки, які є випадковими величинами. З огляду на випадковий фактор виникає питання про можливість побудови коректної оцінки ваг портфеля. Ми показали, що при рівнях довіри для *VaR*, які знаходяться у межах від 0.5 до 0.6, імовірність отримати коректну оцінку портфеля є меншою за 0.5. Для значень від 0.9 до 1 ця імовірність є дуже близькою до 1, з чого випливає, що вибіркові оцінки ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем *VaR* можуть бути використані для вирішення практичних задач, оскільки на практиці розглядаються лише рівні довіри для *VaR*, які є більшими або рівними за 0.9, а саме 0.9, 0.95, 0.99, 0.999.

У монографії досліджено імовірнісні властивості ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем *VaR* за умови, що ці оцінки є коректними. Припустивши, що дохідності фінансових активів, з яких формується портфель, є нормально

розподіленими випадковими величинами незалежними в часі, ми знайшли стохастичне зображення вибірових оцінок очікуваної дохідності, дисперсії та VaR портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . Цей результат спрощує використання методу Монте-Карло для аналізу портфеля, та, крім цього, дає змогу знайти густини розподілів характеристик портфеля. Ми знайшли умовні густини розподілів характеристик портфеля за умови їх коректності. Як наслідок, з цього результату отримано, що математичне сподівання оцінки дисперсії портфеля не існує. Крім того, математичне сподівання оцінки VaR портфеля існує. Цей факт є ще однією перевагою VaR над дисперсією. Також ми показали, що дисперсія дохідності портфеля не існує, отже, навіть припускаючи нормальність дохідностей активів, з яких складається портфель, дохідність портфеля буде мати «важкі хвости», тобто її значення є сильніше розсіяні по числовій прямій, ніж значення нормально розподіленої випадкової величини. Ми дослідили спільні властивості дохідності і ризику та дохідності і дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR . З метою покращення результатів планування та моделювання майбутньої поведінки портфеля ми знайшли спільні умовні розподіли вибірових оцінок дохідності і ризику та дохідності і дисперсії портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за умови, що вибірові оцінки є коректними. Використовуючи знайдені розподіли, інвестор має змогу провести перевірку статистичних гіпотез і встановити чи значення характеристик портфеля отримані на практиці статистично суттєво відрізняються від бажаних значень. На практиці використання знайденого розподілу для вирішення задач інвестором є доволі громіздкою процедурою. Ми побудували спільну множину довіри для пар очікувана дохідність-ризик та очікувана дохідність-дисперсія портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , використання якої істотно спрощує перевірку статистичних гіпотез та економить час інвестора. Отримані результати поширені на випадок використання методу мінімізації $CVaR$ портфеля для визначення його раціональної структури.

Оскільки припущення про нормальність розподілу та неавтокорельованість дохідностей рідко виконується на практиці для дохідностей з частотою, вищою за щомісячну, то ми дослідили імовірності властивості вибірових оцінок ваг і характеристик

портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за невиконання припущення про нормальність та неавтокорельованість дохідностей. Ми знайшли асимптотичні розподіли ваг і характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR у випадках, коли вектор дохідностей має багатовимірний еліптичний розподіл та складається з неавтокорельованих елементів; поводитья як стаціонарний процес Гауса; поводитья як довільний стаціонарний процес. На основі знайдених розподілів вибірових оцінок ваг і характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR , ми розробили методи планування характеристик портфеля на основі побудови одно- і двосторонніх інтервалів довіри, а також методи тестування на істотність різниці між гіпотетичним і практичним значеннями характеристик. Зауважимо, що використання асимптотичних властивостей фінансових показників широко розповсюджене на практиці, оскільки часто неможливо отримати більш точні імовірнісні результати. Також розроблено методи контролю за характеристиками портфеля на основі контрольних карт Шухарда. Використання контрольних карт дає змогу вчасно реагувати на зміни зовнішніх умов та якомога швидше приводити портфель до вигляду, передбаченого інвестором. Усі результати можна, як і у випадку неавтокорельованих та нормально розподілених дохідностей, поширити на випадок використання $CVaR$ як міри ризику.

Зважаючи на популярність методу Марковіца вибору раціональної структури портфеля, ми дослідили питання сумісності методів Марковіца та мінімізації VaR (за фіксованого рівня довіри) портфеля вибору раціональної структури портфеля фінансових активів за класичних умов щодо поведінки вектора дохідностей активів, з яких ми складаємо портфель. Показано, що два цих методи не є еквівалентними. Доведено, що існують ефективні за Марковіцем портфелі, які не є ефективними в умовах використання мінімізації VaR при виборі структури портфеля (таким портфелем зокрема є портфель з найменшою дисперсією), а також, що всі ефективні портфелі в умовах використання мінімізації VaR при виборі структури портфеля є ефективними за Марковіцем. Тобто, множина ефективних за Марковіцем портфелів є ширшою, ніж множина ефективних портфелів, отримана при використанні методу мінімізації VaR при виборі раціональної структури портфеля. Отримані результати дали можливість більш глибоко дослідити

сумісність новітньої та класичної теорії портфеля. Ми розглянули можливість побудови портфеля фінансових активів із максимальним відношенням Шарпа на основі критерію мінімізації VaR . Проведено аналіз впливу вибору міри ризику на структуру портфеля, побудованого на основі критерію максимізації відношення Шарпа. Доведено, що за класичних припущень щодо поведінки доходності перехід від дисперсії до VaR при вимірюванні ризику не впливає на структуру портфеля із максимальним відношенням Шарпа. Водночас виникло питання про місце портфеля із максимальним відношенням Шарпа у множині портфелів із найменшим рівнем VaR . Ми представили аналітичний вираз для обчислення рівня довіри для VaR , при якому портфелі фінансових активів з максимальним відношенням Шарпа та найменшим рівнем VaR математично еквівалентні. Ми дослідити ймовірнісні властивості вибіркової оцінки рівня довіри за різних припущень щодо поведінки вектора доходностей активів, з яких сформовано портфель. За припущення нормальних і неавтокорельованих доходностей ми знайшли точний та асимптотичний розподіл оцінки. З'ясувалося, що асимптотичний розподіл добре наближає точний навіть при середніх обсягах вибірки історичних значень ($n=250$). Також знайдено асимптотичні розподіли за невиконання класичного припущення про поведінку доходностей активів. Як з'ясувалося, емпіричним розподілам притаманне певне зміщення відносно асимптотичного. Щоб позбутися цієї властивості, ми побудували виправлену оцінку, використання якої усуває зміщення та не зменшує швидкість збіжності емпіричних розподілів до асимптотичного.

З метою узагальнення попереднього результату ми визначили рівень довіри для VaR , при якому очікувана доходність портфеля, отриманого з задачі безумовної мінімізації ризику портфеля, буде дорівнювати наперед заданому рівню очікуваної доходності та, аналогічно до попереднього випадку, дослідили статистичні властивості вибіркової оцінки цього рівня довіри. Ми знайшли асимптотичні розподіли вибіркової оцінки рівня довіри для VaR , при якому очікувана доходність портфеля зі структурою отриманої з задачі мінімізації ризику портфеля VaR дорівнює наперед заданому рівню очікуваної доходності за припущення, що доходності активів, з яких ми формуємо портфель, є: неавтокорельованими та нормально розподіленими, неавтокорельованими та еліптично роз-

поділеними, поводяться як стаціонарний процес Гауса та як до-вільний стаціонарний процес. Виявляється, що емпіричні дисперсії збігаються до асимптотичної доволі швидко, натомість швидкість збіжності середніх значень є доволі повільною, особливо коли в портфель включено багато активів. На жаль, побудувати виправлену оцінку в загальному випадку неможливо. Проте ми побудували “умовно” виправлену оцінку та показали, що її поведінка є набагато кращою, ніж поведінка звичайної вибіркової оцінки. Хоча для нової оцінки збіжність емпіричних дисперсій до асимптотичної є несуттєво повільніша, проте швидкість збіжності середніх є суттєво більшою. Крім того, збільшення кількості активів у портфелі істотно не впливає на властивості “умовно” виправленої оцінки, на відміну від звичайної вибіркової оцінки, для якої властивості істотно погіршуються при збільшенні кількості активів у портфелі.

Ми запропонували метод вибору раціональної структури портфеля фінансових активів на основі максимізації очікуваної корисності, де ризик обчислюється з допомогою VaR . Використання так отриманого портфеля фінансових активів краще підходить до рекомендацій Базельського комітету, ніж портфель з максимальною очікуваною корисністю, де ризик обчислено за допомогою дисперсії. Це дасть змогу банкам активніше проводити операції на фінансовому ринку, не порушуючи Базельських угод та не виходячи за рамки обмежень, що передбачені законом. Ми розглянули та розв'язали узагальнену проблему вибору раціональної структури портфеля фінансових активів, в якій класичну умову оптимізації (сума ваг портфеля становить 1) замінено на q лінійних обмежень відносно ваг. Крім цього, ми побудували ефективну множину портфелів та знайшли необхідну умову, якій мають задовольняти характеристики портфеля, що належать цій множині. Як наслідок, ми отримали розв'язок оптимізаційної задачі вибору раціональної структури портфеля фінансових активів з класичним обмеженням. Ми дослідили властивості вибірових оцінок характеристик портфеля з максимальною корисністю на основі міри ризику VaR . Основним недоліком цього методу є неможливість визначення раціонального значення коефіцієнта β , що описує ставлення інвестора до ризику. Зазначимо, що цей коефіцієнт також має вплив на коректність вибіркової оцінки ваг і характеристик

портфеля. Ми показали, що при значеннях β , близьких до нуля, коректність оцінки викликає питання, проте при значеннях більших за одиницю імовірність коректності оцінки є близькою до одиниці. Тому використання таких оцінок як у теоретичних дослідженнях, так і в практичних цілях, є повністю коректним. Для дослідження впливу коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, на вибіркові оцінки основних характеристик портфеля (дохідність та ризик) ми знайшли розподіли цих оцінок. Змінюючи значення коефіцієнта β , побудовано графіки відповідних густин розподілів та надано рекомендації відносно процедури раціонального вибору цього коефіцієнта. Зауважимо, що результати дослідження можна поширити на більш широкий клас розподілів. Проте в цьому випадку необхідним буде використання методу Монте-Карло для дослідження коректності оцінок та побудови розподілів характеристик портфеля.

Інший метод обчислення значення коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, за припущення нормальності дохідностей, з яких сформовано портфель, представлено у [43]. Безпосередньо використати цей метод неможливо, оскільки вираз для β залежить від невідомих на практиці параметрів вектора дохідності. Ми дослідили імовірнісні властивості вибіркової оцінки для коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику за різних припущень щодо поведінки дохідностей активів, з яких сформовано портфель. За припущення нормальності, ми знайшли точний та асимптотичний розподіли цієї оцінки. З'ясувалося, що при обсягу вибірки історичних значень більшому за 250 густина точного розподілу є симетричною та подібною на густину нормального розподілу. За припущення, що дохідності активів є нормально розподіленими і неавтокорельованими, а також за припущення, що вектор дохідностей поводить як стаціонарний процес Гауса, швидкість збіжності емпіричних густин до асимптотичної є доволі швидкою і незначно зміщеною. Цей недолік ми виключили використанням виправленої оцінки. На відміну від вибірових оцінок рівня довіри, вибіркова оцінка коефіцієнта, що описує ставлення інвестора до ризику, є більш чутливою до розподілу дохідностей. У випадку, коли вектор дохідностей має багатовимірний еліптичний розподіл чи поводить як довільний стаціонарний процес, виправлена оцінка не є незміщеною, хоча її зміщення є

дещо меншим, ніж невиправленої. Натомість, збіжність дисперсій є задовільною.

Проведене дослідження допоможе інвестору точніше, зі статистичної та імовірнісної точок зору, оцінити та спрогнозувати характеристики свого портфеля. Дасть змогу протестувати отримані характеристики портфеля на рівність їх потрібним значенням, а також інвестору, що надає перевагу класичній теорії портфеля, дослідити характеристики свого портфеля в умовах новітньої теорії, і навпаки, вибрати структуру таким чином, щоб його ризик був мінімальним, а очікувана дохідність дорівнювала наперед заданому значенню. Крім того, інвестор отримує можливість швидко відреагувати на зміну ситуації на фінансовому ринку та перебудувати свій портфель відповідно до нових умов, що є надзвичайно важливо в умовах сучасної нестабільності фінансових ринків.

Список літератури

1. Боднар Т. Д. Максимізація відношення Шарпа портфеля фінансових активів у контексті мінімізації ризику / Т. Д. Боднар, Т. М. Заблоцький // Економічний часопис – XXI. – 2013. – № 11–12(1). – С. 110–113.
2. Васильченко З. М. Управління портфелем банківських активів / З. М. Васильченко, І. П. Васильченко // Банківська справа. – 2007. – № 6. – С. 3–8.
3. Васюренко О. В. Современные методы управления банковскими ресурсами. / О. В. Васюренко. – Харків : ИКФ Гриф. 1997. – 392 с.
4. Вітлінський В. В. Комплексний підхід застосування методології Value-at-Risk / В. В. Вітлінський, А. Б. Камінський // Економічна кібернетика. – 2004. – № 5–6. – С. 4–14.
5. Вітлінський В. В. Ризик у менеджменті / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний. – Київ : ТОВ Борисфен-М. 1996. – 336 с.
6. Вітлінський В. В. Урахування об'єктивно-суб'єктивної структури ризику в моделюванні економічних систем / В. В. Вітлінський // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2010. – Вип. 81. – С. 12–21.
7. Вітлінський В. В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику / В. В. Вітлінський. – Київ : Деміур. 1996. – 212 с.
8. Германюк Н. В. Теоретико-методологічні аспекти диверсифікації у сільському господарстві / Н. В. Германюк // Економіка АПК. – 2010. – № 8. – С. 25–29.
9. Данкевич В. Є. Диверсифікація діяльності високотоварних сільськогосподарських підприємств / В. Є. Данкевич // Вісник ЖНАУ. – 2010. – № 1. – Т. 2. Економічні науки. – С. 147–155.
10. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента / Н. Джонсон, Ф. Лион. – Москва : Мир. 1980. – 610 с.
11. Диверсифікація доходів місцевих бюджетів: монографія / І. О. Луніна, О. П. Кириленко, А. В. Лучка [та ін.] ; за ред. І. О. Луніної. – Київ : НАН України; Ін-т екон. та прогнозів. 2010. – 320 с.
12. Заблоцький М. В. Порівняння мір ризику при невиконанні припущення про нормальність розподілу доходностей активів /

- М. В. Заблоцький, Т. М. Заблоцький // Вісник Львівського університету, серія економічна. – 2015. – Вип. 52. – С. 32–39.
13. Заблоцький Т. М. Взаємозв'язок мінімізації Value-at-Risk та рівня дохідності портфеля фінансових активів / Т. М. Заблоцький, О. В. Білий // Економічна кібернетика. – 2014. – № 1–3(85–87). – С. 23–30.
14. Заблоцький Т. М. Portfolio choice problem with the Value-at-Risk utility function under general linear constraints / Т. М. Заблоцький, Т. Д. Боднар, В. В. Вітлінський // Економічна кібернетика. – 2012. – № 4. – С. 6(76–78). – С. 4–11.
15. Заблоцький Т. М. Контрольні карти Шефарда для дохідності портфеля акцій / Т. М. Заблоцький // Вісник Львівського університету, серія економічна. – 2010. – Вип. 43. – С. 270–279.
16. Заблоцький Т. М. Оцінка ваг валютного портфелю з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заблоцький // Вісник НБУ. – 2011. – № 8. – С. 31–33.
17. Заблоцький Т. М. Порівняння мір ризику портфеля акцій / Т. М. Заблоцький // Вісник Університету банківської справи Національного банку України. – 2010. – № 2(8). – С. 229–235.
18. Заблоцький Т. М. Розподіл характеристик портфелю акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заблоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2011. – № 85. – С. 165–178.
19. Заблоцький Т. М. The distribution of the characteristics of the maximum expected utility portfolio based on VaR: the impact of investor's risk aversion coefficient / Т. М. Заблоцький, В. В. Вітлінський // Економічна кібернетика. – 2013. – № 4–6(82–84). – С. 4–11.
20. Заблоцький Т. М. Експоненційно зважені контрольні карти з біжучим середнім для портфеля акцій / Т. М. Заблоцький // Вісник Університету банківської справи Національного банку України (м. Київ). – 2011. – №1 (10). – С. 320–325.
21. Заблоцький Т. М. Кумулятивні суми для контролю дохідності портфеля акцій / Т. М. Заблоцький // Вісник Львівської комерційної академії, серія економічна. – 2011. – Вип. 37. – С. 99–104.
22. Заблоцький Т. М. Моделювання управління активними операціями банку в кризовий та посткризовий періоди / Т. М. Заблоцький, А. І. Циктор, І. І. Коркуна // Актуальні проблеми економіки. – 2014. – №8(158). – С. 428–435.

23. *Заблоцький Т. М.* Методи обчислення Value-at-Risk для валютних курсів (досвід 2008–2009) / Т. М. Заблоцький // Вісник Сумського національного аграрного університету, серія економіка та менеджмент. – 2011. – №9. – С. 144–149.

24. *Заблоцький Т. М.* Планування дохідності портфеля акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заблоцький // Вісник Львівського університету, серія економічна. – 2012. – Вип. 47. – С. 25–34.

25. *Заблоцький Т. М.* Планування ризику при портфельному інвестуванні в українську економіку / Т. М. Заблоцький // Наукові записки Національного університету «Острозька академія», серія економіка. – 2012. – № 19. – С. 423–428.

26. *Заблоцький Т. М.* Спільний розподіл дохідності та дисперсії портфеля акцій з найменшим рівнем VaR / Т. М. Заблоцький // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2012. – №86. – С. 107–119.

27. *Заблоцький Т. М.* Мінімізація ризику портфеля цінних паперів: взаємозв'язок дохід-ризик / Т. М. Заблоцький, А. І. Циктор // Вісник Львівської комерційної академії, серія економічна. – 2013. – №42. – С. 90–100.

28. *Заблоцький Т. М.* Управління ризиком портфеля фінансових активів при залежних даних / Т. М. Заблоцький, І. І. Коркуна // Наукові записки Національного університету «Острозька академія», серія економіка. – 2013. – № 23. – С. 353–358.

29. *Заблоцький Т. М.* Мінімізація Value-at-Risk портфеля фінансових активів як узагальнення класичної теорії портфеля / Т. М. Заблоцький // Наукові записки Національного університету «Острозька академія», серія економіка. – 2014. – № 25. – С. 207–211.

30. *Заблоцький Т. М.* Розподіл вибірових оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за невиконання припущення про неавтокорельованість даних / Т. М. Заблоцький // Формування ринкової економіки в Україні. – 2015. – № 33(1). – С. 56–65.

31. *Зінчук Т. О.* Теоретико-методологічні засади диверсифікації сільської економіки в контексті європейського досвіду / Т. О. Зінчук, В. І. Ткачук // Економіка АПК. – 2011. – № 1. – С. 27–34.

32. *Камінський А. Б.* Моделювання ставлення до ризику при застосуванні методології Value-at-Risk / А. Б. Камінський // Теоретичні та прикладні питання економіки: Зб. наук. пр. – К.: Київсь-

кий національний університет імені Тараса Шевченка, 2005. – Випуск 6. – С. 145–154.

33. *Корінько М. Д.* Диверсифікація: теоретичні та методологічні основи: монографія / М. Д. Корінько. – Київ : ННЦ ІЕА. 2007. – 488 с.

34. *Момонт Т. В.* Диверсифікація діяльності суб'єктів господарювання: теоретичний аспект / Т. В. Момонт // Вісник Житомирського державного технологічного університету / Серія: Економічні науки. – Житомир: ЖДТУ. – 2014. – № 4(70). – С.164–173

35. *Мулярчук В. М.* Методичні засади ефективної реалізації диверсифікації сервісних підприємств / В. М. Мулярчук // Вісник Львівської комерційної академії. Серія економічна. – 2012. – Вип. 39. – С. 33–37.

36. *Одінцов О. М.* Формування інституціональних передумов кластерної організації агропромислового комплексу: монографія / О. М. Одінцов. – Черкаси : Вертикаль. 2014. – 400 с.

37. *Одінцов О. М.* Управління диверсифікацією аграрного виробництва на основі економіко-математичного моделювання / О. М. Одінцов // Науковий інформаційний журнал «Бізнес інформ», Харківський національний економічний університет МОН України. – 2014. – № 7. – С. 113–117.

38. *Ткачук В. І.* Диверсифікація аграрного підприємництва: монографія / В. І. Ткачук. – Житомир : ЖНАЕУ. 2011. – 268 с.

39. *Уорд К.* Стратегический управленческий учет / К. Уорд. – Москва : Олимп-Бизнес. 2012. – 274 с.

40. *Эванс Дж.* Маркетинг / Дж. Эванс, Б. Берман. – Москва : Экономика. 1990. – 350 с.

41. *Alexander G. J.* A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Management science. – 2004. – Vol. 50. – № 9. – P. 1261–1273.

42. *Alexander G. J.* Economic implication of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis / G. J. Alexander, M. A. Baptista // Journal of economic dynamics & control. – 2002. – № 26. – P. 1159–1193.

43. *Alexander G. J.* Portfolio selection with mental accounts and delegation / G. J. Alexander, A. M. Baptista // Journal of banking and finance. – 2011. – № 35. – P. 2637–2656.

44. *Amemiya T.* Advanced econometrics / T. Amemiya. – Cambridge : Harvard University Press. 1985. – 536 p.

45. *Artzner P.* Coherent measures of risk / P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath // *Mathematical finance*. – 1999. – Vol. 9. – № 3. – P. 203–228.

46. Basel committee on banking supervision // Operational risk consultative document, supporting document to the New Basel Capital Accord. – January 2001. – 30 p. Access mode : <http://www.bis.org/publ/bcbzca02.pdf>

47. Berk J. B. Necessary conditions for the CAPM / J. B. Berk // *Journal of economic theory*. – № 73. – 1997. – P. 245–257.

48. *Blattberg R. C.* A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices / R. C. Blattberg, N. J. Gonedes // *Journal of business*. – 1974. – № 47. – P. 244–280.

49. *Bliss R. R.* Option-implied risk aversion estimates / R. R. Bliss, N. Panigirtzoglou // *The journal of finance*. – 2004. – № 59(1). – P. 407–446

50. *Bodnar T.* A test for the weights of the global minimum variance portfolio in an elliptical model / T. Bodnar, W. Schmid // *Metrika*. – 2008. – № 67. – P. 127–143.

51. *Bodnar T.* Asymptotic behavior of the estimated weights and of the estimated performance measures of the minimum VaR and the minimum CVaR optimal portfolios for dependent data / T. Bodnar, W. Schmid, T. Zabolotsky // *Metrika*. – 2013. – № 76. – P. 1105–1134.

52. *Bodnar T.* Econometrical analysis of the sample efficient frontier. / T. Bodnar, W. Schmid // *The European journal of finance*. – 2009. – № 15. – P. 317–335.

53. *Bodnar T.* How risky is the optimal portfolio which maximizes the Sharpe ratio? / T. Bodnar, T. Zabolotsky // *ASTA – Advances in statistical analysis*. – DOI 10.1007/s10182-016-0270-3.

54. *Bodnar T.* On the equivalence of quadratic optimization problems commonly used in portfolio theory / T. Bodnar, N. Parolya, W. Schmid // *European journal of operational research*. – 2013. – № 229. – P. 637–644.

55. *Bollerslev T.* A capital asset pricing model with time varying covariances / T. Bollerslev, R. F. Engle, J. Wooldridge // *Journal of political economy*. – 1988. – № 96. – P. 116–131.

56. *Bollerslev T.* Dynamic estimation of volatility risk premia and investor risk aversion from option-implied and realized volatilities / T. Bollerslev, M. Gibbons, H. Zhou // *Journal of econometrics*. – 2011. – Vol. 160. – № 1. – P. 235–245.

57. *Bollerslev T.* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity / T. Bollerslev // *Journal of econometrics*. – 1986. – № 31. – P. 307–327.

58. *Bollerslev T.* Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model / T. Bollerslev // *The review of economics and statistics*. – 1990. – № 72. – P. 498–505.

59. *Brillinger D. R.* Time series – data analysis and theory / D. R. Brillinger. – San Francisco : Holden Day. 1981. – 540 p.

60. *Brockwell P. J.* Time series: theory and methods / P. J. Brockwell, R. A. Davis. – New York : Springer Science+Business Media. 2006. – 600 p.

61. *Chamberlain G. A.* A characterization of the distributions that imply mean-variance utility functions / G. A. Chamberlain // *Journal of economic theory*. – № 29. – 1983. – P. 185–201.

62. *Chopra V.* The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice / V. Chopra, W. Ziemba // *Journal of portfolio management*. – 1993. – № 19. – P. 6–12.

63. *Cochrane J. H.* Portfolio advice for a multifactor world / J. H. Cochrane // *Economic perspectives*. – 1999. – Vol. 23. – № 3. – P. 59–78.

64. *Comte F.* Asymptotic theory for multivariate GARCH processes / F. Comte, O. Lieberman // *Journal of multivariate analysis*. – 2003. – № 84. – P. 61–84.

65. *Conrad J.* Time-variation in expected returns / J. Conrad, G. Kaul // *Journal of business*. – 1988. – № 61. – P. 409–425.

66. *Das S.* Portfolio optimization with mental accounts / S. Das, H. Markowitz, J. Scheid, M. Statman // *Journal of financial and quantitative analysis*. – 2010. – № 45. – P. 311–334.

67. *DasGupta A.* Asymptotic theory of statistics and probability / A. DasGupta. – New York : Springer. 2008. – 722 p.

68. *Duffie D.* An overview of Value-at-Risk / D. Duffie, J. Pan // *Journal of derivatives*. – 1997. – P. 7–49.

69. *Dunsmuir W.* Vector linear time series models / W. Dunsmuir, E. J. Hannan // *Advances in applied probability*. – 1976. – № 8. – P. 339–364.

70. *Embrechts P.* Modelling extremal events for insurance and finance / P. Embrechts, S. Kluppelberg, T. Mikosch. – Berlin : Springer. 1997. – 655 p.

71. *Engle R. F.* ARCH: Selected Readings / R. F. Engle. – Oxford : Oxford University Press. 1995. – 422 p.

72. *Engle R. F.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation / R. F. Engle // *Econometrica*. – 1982. – № 50. – P. 987–1008.

73. *Engle R. F.* Multivariate simultaneous generalized ARCH / R. F. Engle, F. Kroner // *Econometric theory*. – 1995. – № 11. – P. 122–150.

74. *Fama E. F.* Foundations of finance / E. F. Fama. – New York : Basic Books. 1976. – 391 p.

75. *Fang K. T.* Generalized multivariate analysis / K. T. Fang, Y. T. Zhang. – Berlin: Springer-Verlag. 1990. – 220 p.

76. *Fang K. T.* Symmetric multivariate and related distributions / K. T. Fang, S. Kotz, K. W. Ng. – London : Chapman and Hall. 1990. – 220 p.

77. *Fethi M. D.* Assessing bank efficiency and performance with operational research and artificial intelligence techniques: a survey / M. D. Fethi, F. Pasiouras // *European journal of operational research*. – 2010. – Vol. 204. – № 2. – P. 189–198.

78. *Golosnoy V.* EWMA control charts for monitoring optimal portfolio weights / V. Golosnoy, W. Schmid // *Sequential analysis*. – 2007. – № 26. – P. 195–224.

79. *Golosnoy V.* CUSUM control charts for monitoring optimal portfolio weights / V. Golosnoy, S. Ragulin, W. Schmid // *Computational statistics & data analysis*. – 2011. – № 55. – P. 2991–3009.

80. *Golosnoy V.* On the application of SPC in finance / V. Golosnoy, I. Okhrin, S. Ragulin, W. Schmid // *Frontiers in statistical quality control*. – 2010. – № 9. – P. 119–130

81. *Gupta A. K.* Elliptically contoured models in statistics and portfolio theory / A. K. Gupta, T. Varga, T. Bodnar. – New York : Springer. 2013. – 321 p.

82. *Hafner C. M.* Fourth moment structure of multivariate GARCH models / C.M. Hafner // *Journal of financial econometrics*. – 2003. – № 1. – P. 26–54.

83. *Handbook of financial time series* / T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiss., T. Mikosch. – Berlin-Heidelberg : Springer Verlag. 2009. – 1050 p.

84. *Hannan E. J.* Multiple time series / E. J. Hannan. – New York: Wiley. 1970. – 536 p.

85. *Harville D. A.* Matrix algebra from a statistician's perspective / D.A. Harville. – New York : Springer Science+Business Media. 2008. – 634 p.

86. *Hull J. C.* Value-at-risk when daily changes in market variables are not normally distributed / J. C. Hull, A. White // *Journal of derivatives*. – 1998. – № 5. – P. 9–19.

87. *Ingersoll J. E.* Theory of financial decision making / J. E. Ingersoll. – New York : Rowman&Littlefield Publishers. 1987. – 496 p.

88. *Jackwerth J. C.* Recovering risk aversion from option prices and realized returns / J. C. Jackwerth // *Review of financial studies*. – 2000. – № 13. – P. 433–451.

89. *Jeantheau T.* Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models / T. Jeantheau // *Econometric theory*. – 1998. – № 14. – P. 70–86.

90. *Johansen S.* Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models / S. Johansen. – New York : Oxford University Press. 1995. – 280 p.

91. *Johnson N. L.* Continuous univariate distributions / N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan. – New York : Wiley. 1995. – 752 p.

92. *Jondeau E.* Optimal portfolio allocation under higher moments / E. Jondeau, M. Rockinger // *European financial management*. – 2006. – № 12. – P. 29–55.

93. *Jorion P.* Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk / P. Jorion. – New York : McGraw-Hill Professional. 2002. – 544 p.

94. *Kan R.* The distribution of the sample minimum-variance frontier / R. Kan, D. R. Smith // *Management*. – 2008. – № 54. – P. 1364–1380.

95. *Kilianová S.* Optimal pension fund management under multiperiod risk minimization / S. Kilianová, G. Ch. Pflug // *Annals of operations research*. – 2009. – № 166. – P. 261–270.

96. *Krokhmal P.* Modeling and optimization of risk / P. Krokhmal, M. Zabrankin, S. Uryasev // *Surveys in operations research and management science*. – 2011. – № 16. – P. 49–66.

97. *Lam Y.-M.* Confidence limits for non-centrality parameters of non-central chi-square and F distributions. // *ASA 1987, Proceedings of the statistical computing section*. – 1987. – P. 441–443.

98. *Lee P.M.* Bayesian statistics: an introduction / P. M. Lee. – Chichester, UK : Wiley. 2012. – 486 p.

99. *Ling S.* Asymptotic theory for a vector ARMA-GARCH model. / S. Ling, M. McAleer // *Econometric theory*. – 2003. – № 19. – P. 280–310.

100. *Lo A. W.* An econometric analysis of nonsynchronous trading / A. W. Lo, A. C. MacKinley // *Journal of econometrics*. – 1991. – № 45. – P. 181–212.

101. *Lo A. W.* The statistics of Sharpe ratio / A. W. Lo // *Financial analysts journal*. – 2002. – № 58. – P. 36–52.

102. *Luenberger D.* Investment science / D. Luenberger. – Oxford : Oxford University Press. 2013. – 640 p.

103. *Lütkepohl H.* Introduction to multiple time series analysis / H. Lütkepohl. – Berlin : Springer-Verlag. 1993. – 545 p.

104. *MacKinley A. C.* Asset pricing models: implications for expected returns and portfolio selection / A. C. MacKinley, L. Pastor // *The review of financial studies*. – 2000. – № 13. – P. 883–916.

105. *Magnus J. R.* Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics / J. R. Magnus, H. Neudecker. – New York : Wiley. – 1999. – 450 p.

106. *Mansini R.* Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization / R. Mansini, W. Ogryczak, M. G. Speranza // *Annals of operations research*. – 2007. – № 152. – P. 227–256.

107. *Markowitz H.* Foundations of portfolio theory / H. Markowitz // *Journal of finance*. – 1991. – № 7. – P. 469–477.

108. *Markowitz H.* Portfolio selection / H. Markowitz // *Journal of finance*. – 1952. – № 7. – P. 77–91.

109. *Mech T.* Portfolio return autocorrelation / T. Mech // *Journal of financial economics*. – 1993. – № 34. – P. 307–344.

110. *Merton R. C.* An analytical derivation of the efficient frontier / R. C. Merton // *Journal of financial and quantitative analysis*. – 1972. – № 7. – P. 1851–1872.

111. *Mittnik S.* Modelling asset returns with alternative stable distributions / S. Mittnik, S.T. Rachev // *Econometric reviews*. – 1993. – № 12. – P. 261–330.

112. *Mori H.* Finite sample properties of estimators for the optimal portfolio weights / H. Mori // *Journal of the Japan statistical society*. – 2004. – № 35. – P. 27–46.

113. *Muirhead R. J.* Aspects of multivariate statistical theory / R. J. Muirhead. – New York : Wiley. 1982. – 704 p.

114. *Nelson D. B.* Conditional heteroscedasticity in stock returns: a new approach / D. B. Nelson // *Econometrica*. – 1991. – № 59. – P. 347–370.

115. *Nelson D. B.* Stationarity and persistence in the GARCH(1,1) model / D.B. Nelson // *Econometric Theory*. – 1990. – № 6. – P. 318–334.

116. *Okhrin Y.* Distributional properties of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // *Journal of econometrics*. – 2006. – № 134. – P. 235–256.

117. *Okhrin Y.* Estimation of optimal portfolio weights / Y. Okhrin, W. Schmid // *International journal of theoretical and applied finance*. – 2008. – № 11. – P. 249–276.

118. *Osborne M. F. M.* Brownian motion in the stock market / M. F. M. Osborne // *Operation research*. – 1959. – № 7. – P. 145–173.

119. *Pflug G. Ch.* Some remarks on the value-at-risk and conditional value-at-risk / G. Ch. Pflug // *Probabilistic constrained optimization : methodology and applications* / ed. S. Uryasev. – Netherlands : Kluwer. 2000. – P. 272–281.

120. *Rachev S. T.* Handbook of heavy tailed distributions in finance / S. T. Rachev. – Amsterdam : Elsevier. 2003. – 704 p.

121. *Reinsel G. C.* Elements of multivariate time series analysis / G. C. Reinsel. – New York : Springer. 1997. – 380 p.

122. *Rhee M.* A strategic review of operations and marketing functions in retail banks / M. Rhee, S. Mehra // *International journal of service industry management*. – 2006. – Vol. 17. – № 4. – P. 364–379.

123. *Rockafellar R. T.* Master funds in portfolio analysis with general deviation measures / R. T. Rockafellar, S. Uryasev, M. Zabarankin // *Journal of banking & finance*. – 2005. – № 30. – P. 743–778.

124. *Rockafellar R. T.* Optimality conditions in portfolio analysis with general deviation measures / R. T. Rockafellar, S. Uryasev, M. Zabarankin // *Mathematical programming, Ser. B*. – 2006. – № 108. – P. 515–540.

125. *Schmid W.* On the existence of unbiased estimators for the portfolio weights obtained by maximizing the Sharpe ratio / W. Schmid, T. Zabolotsky // *ASTA – Advances in statistical analysis*. – 2008. – № 92. – P. 29–34.

126. *Sharpe W. F.* The Sharpe ratio / W. F. Sharpe // *The journal of portfolio management*. – 1994. – Vol. 21. – № 1. – P. 49–58.

127. *Shiraishi H.* Statistical estimation of optimal portfolios for non-Gaussian dependent returns of assets / H. Shiraishi, M. Taniguchi // *Journal of forecasting*. – 2005. – Vol. 27. – № 3. – P. 193–215.

128. *Tu J.* Data-generating process uncertainty: what difference does it make in portfolio decisions? / J. Tu, G. Zhou // *Journal of financial economics*. – 2004. – № 72. – P. 385–421.

129. *Van den Brink G. J.* Banking/Trading operations management (finance and capital markets series) / G. J. van den Brink. – New York : Palgrave Macmillan. 2003. – 416 p.

130. *Zabolotsky T.* Estimation of confidence level for Value-at-Risk: statistical analysis / T. Zabolotsky // *Economic Annals-XXI*. – 2016. – № 158(3-4(2)). – С. 83–87.

Наукове видання

ЗАБОЛОЦЬКИЙ Тарас Миколайович

МОДЕЛЮВАННЯ В УПРАВЛІННІ ПОРТФЕЛЕМ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

Монографія

Редактор *М. В. Михалюк*
Технічний редактор *С. З. Сенік*
Комп'ютерне верстання *Н. В. Якимів, Н. М. Лобач*
Обкладинка *Василя Рогана*

Формат 60×90/16. Умовн. друк. арк. . Тираж прим. Зам.

Львівський національний університет імені Івана Франка.
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007

Видруковано у книжковій друкарні “Коло”
вул. Бориславська, 8, м. Дрогобич, Львівська обл., 82100

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 498 від 20.06.2001.