Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький

СТАТИСТИКА ПОРТФЕЛІВ

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2015

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький

СТАТИСТИКА ПОРТФЕЛІВ

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2015

УДК 519.23
ББК 65в64

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Б. І. Копитко
(Львівський національний університет імені Івана Франка);

д-р економ. наук, проф. В. І. Єлейко
(Львівська комерційна академія)

Рекомендовано до друку
Вченою радою механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
Протокол № 7 від 22.04.2015

Заболоцький М. В.
Статистика портфелів: навч. посібник / М. В. Заболоцький, Т. М. Заболоцький. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2015. –

У навчальному посібнику розглянуто теоретичні та практичні основи управління портфелем фінансових активів. Для бакалаврів, магістрів та аспірантів вищих навчальних закладів вищих рівнів акредитації, математичних та економічних спеціальностей.

УДК 519.23
ББК 65в64

Передмова

Навчальний посібник розкриває головні питання класичної та новітньої теорії портфеля. Зважаючи на важливість портфеля у структурі фінансових установ, це питання є важливим не лише для теоретиків, а й для практиків фінансового ринку. Основні розділи посібника написано на підставі досвіду викладання спеціальних курсів «Теорія інвестицій», «Фінансова математика» та «Прикладна статистика», а також курсів «Економетрики», «Математичної статистики» та «Теорії імовірностей» на механіко-математичному факультеті Львівського національного університету імені Івана Франка.

Мета посібника – поглибити знання з теоретичних основ дослідження портфеля фінансових активів, розширити уявлення про статистичні властивості портфелів активів. На практичних прикладах показано місцезнаходження портфелів на ефективній множині, тобто в загальному випадку оптимальні портфелі є різними за сприйняттям для різних інвесторів. Наведені результати є основою для проведення планування поведінки головних характеристик портфеля фінансових активів у майбутньому та контроль їх значень.

Значну увагу у посібнику приділено задачам, які на основі реальних даних ілюструють теоретичний матеріал з метою закріплення цих знань.

Зміст

1 Дохідності фінансових активів

Основними елементами фінансового ринку, з якими проводять операції купівлі та продажу, є фінансові активи. Головною характеристикою, в якій зацікавлений інвестор, є ринкова ціна фінансового активу (теперішня чи майбутня). Приймаючи рішення про купівлю того чи іншого активу, інвестор, насамперед, на основі певних економічних показників повинен бути впевнений, що через певний проміжок часу ринкова ціна буде більшою, ніж є тепер. Також важливим є те, що здебільшого сам власник активу не може впливати на поведінку ціни. Ціна формується під впливом незалежних від власника чинників. Тому необхідно мати певний математичний апарат для формування певних уявлень про майбутню поведінку ринкової ціни фінансового активу.

Позначимо P_t ринкова ціна фінансового активу в момент часу t. Виникає питання: як інвестор може отримати уявлення про майбутні значення ціни активу P_{t+1}. Розглянемо, наприклад, поведінку фондового індексу ПФТС за період часу з 01.01.2002 до 31.03.2015. З рис. 1 бачимо, що поведінці ціни притаманні періоди зростання та спаду. Тобто на основі історичних даних та графічного їх зображення можна отримати певні уявлення про ціну. Такий аналіз є, очевидно, найменш ефективним і більше опирається на певні інтуїтивні переконання.

Для проведення детального аналізу введемо наступне означення.

Означення 1. *Процес X_t називається (слабко) стаціонарним, якщо*

$$M(X_t) = \mu,\ Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_h,$$

тобто математичне сподівання та коваріація процесу не залежать *від часу, а коваріація залежить лише від зміщення h.*

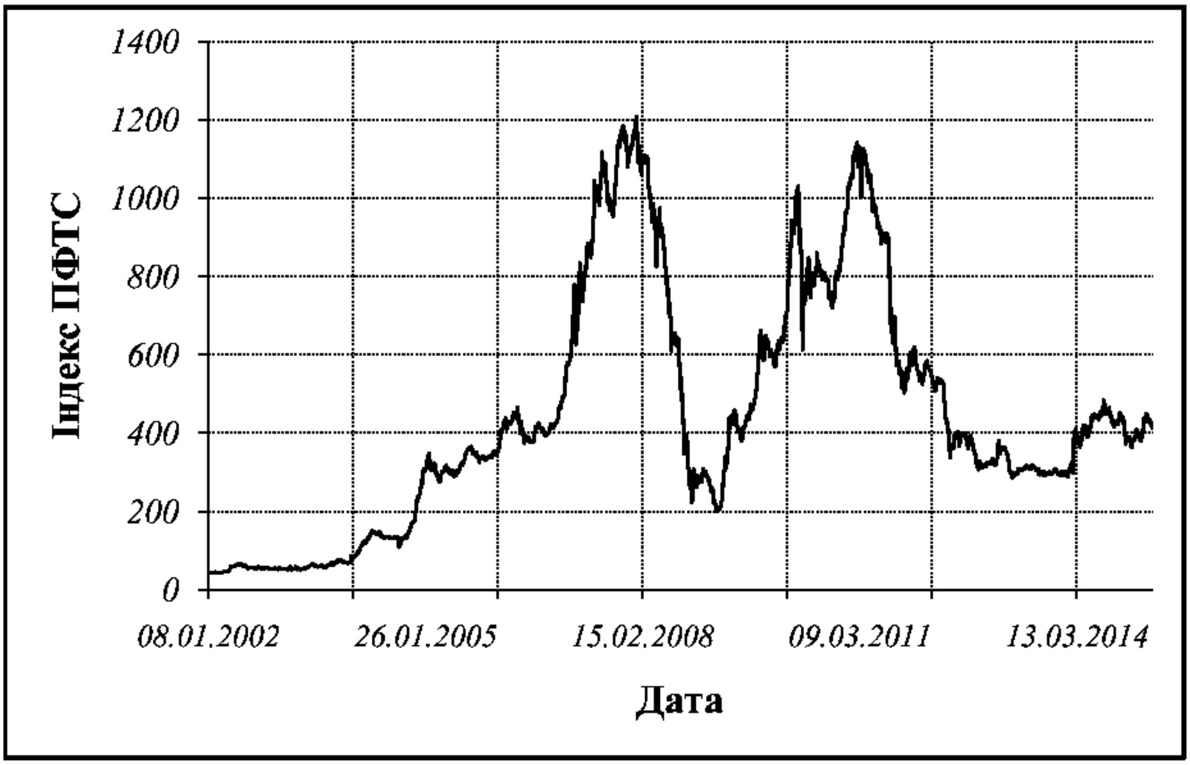

Рис. 1. Динаміка індексу PFTS

Однією з властивостей стаціонарних процесів є те, що дисперсія їх теж не залежить від часу

$$D(X_t) = Cov(X_t, X_t) = \gamma_0 = \sigma^2.$$

З рис. 1 бачимо, що ціновий процес не є стаціонарним. Легко бачити періоди часу, коли математичні сподівання суттєво відрізняються. Крім того, процес P_t в певні періоди часу має виражений тренд, причому в різні моменти часу тренд має різні напрямки. Враховуючи також те, що ціна є обмежена знизу 0 та необмежена зверху, можемо дійти висновку, що моделювання ціни фінансового активу є доволі важким завданням. Для моделювання цін фінансових активів у фінансовій математиці використовують стохастичні процеси. Наше завдання розглянути дискретні моделі. Зауважимо, що інвестора насправді не цікавить ціна фінансового активу як абсолютний показник. Більш вагомою характеристикою для інвестора є зміна, а точніше, відносна зміна ціни за період часу $(t, t+1)$.

1.1 Проста дохідність фінансового активу

Відносну зміну ринкової ціни фінансового активу за один період будемо називати **простою дохідністю** та позначатимемо R_t.

Означення 2. *Нехай P_t ринкова ціна фінансового активу в момент часу t. Тоді проста дохідність в момент часу t*

$$R_t = 100\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \tag{1}$$

Множник 100 в означенні R_t ми вживаємо для відображення цієї величини у відсотках. Розглянемо основні властивості простої дохідності фінансового активу.

1. Відсутність тренду. На рис. 2 зображено поведінку простої дохідності фондового індексу ПФТС за період часу з 01.01.2002 до 31.03.2015. Ми розглядаємо тут просту дохідність за один робочий день. Легко бачити, що на відміну від ціни (рис. 1) в цьому випадку процес не має тренду, а його значення зосереджені навколо 0.

2. Симетричність. Проста дохідність має поведінку, близьку до поведінки симетричного відносно 0 процесу. Тобто при моделюванні поведінки процесу R_t можна використати припущення про його симетричність, що значно спрощує роботу (та здебільшого не сильно впливає на отримані результати).

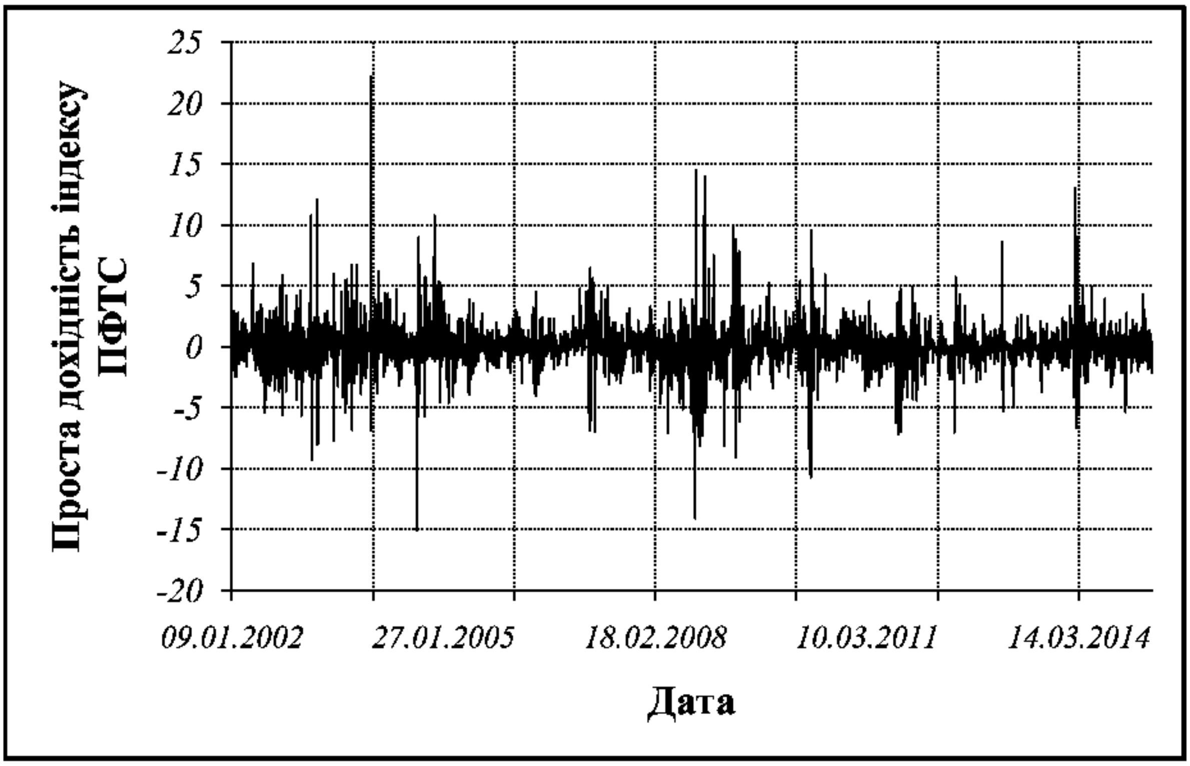

Рис. 2. Проста дохідність індексу PFTS

3. Обмеженість знизу. На жаль, як і у випадку цінового процесу, процес R_t є обмеженим знизу числом – 100. Оскільки мінімальне значення для P_t становить 0, то

$$R_t = 100\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \geq 100\frac{0 - P_{t-1}}{P_{t-1}} = -100.$$

Ця властивість є недоліком даного процесу. Варто зауважити, що при розгляді щоденних дохідностей, які відображають відносну зміну ціни у відсотках, доволі зрідка отримують на практиці значення, більші за модулем від 20. Тому в цьому випадку обмеження знизу має більш теоретичні незручності, ніж практичні.

4. Проста дохідність за багато періодів. Нехай нам потрібно оцінити просту дохідність фінансового активу не за один, а за m періодів. Ми позначаємо таку дохідність

$$R_t(m) = 100\frac{P_t - P_{t-m}}{P_{t-m}}.$$

Виникає природне питання: чи дорівнює проста дохідність за багато періодів сумі простих дохідностей за один період. Розглянемо

$$\begin{aligned} R_t(m) &= 100\frac{P_t - P_{t-m}}{P_{t-m}} = 100\Big(\frac{P_t}{P_{t-m}} - 1\Big) = \\ &= 100\Big(\frac{P_t}{P_{t-1}}\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}\frac{P_{t-2}}{P_{t-3}}...\frac{P_{t-m+1}}{P_{t-m}} - 1\Big) = \\ &= 100\Big(\prod_{j=0}^{m-1}\Big(1 + \frac{R_{t-j}}{100}\Big) - 1\Big) \neq \sum_{j=0}^{m-1} R_{t-j}. \end{aligned}$$

Отже, з попередньої нерівності ми отримали, що проста дохідність за багато періодів не дорівнює сумі простих дохідностей за кожен з періодів. Така властивість є досить серйозним недоліком, тому що доволі часто інвесторів на фінансовому ринку цікавить питання поведінки дохідності не лише протягом короткого, а й протягом великого проміжку часу.

5. Стаціонарність. На питання про те, стаціонарний чи ні процес R_t, доволі важко відповісти в кожному випадку зокрема. В загальному випадку, очевидно, що простим дохідностям не притаманна стаціонарність. Утім, у випадку простих дохідностей ПФТС поведінка є досить близькою до стаціонарної, хоча і з очевидними відхиленнями від неї. Тому при моделюванні часто припускають, що процеси, які описують просту дохідність фінансового активу, є стаціонарними. Це припущення не лише спрощує задачу, а й надає досить велику кількість теоретичного матеріалу, який важко, якщо взагалі можливо, знайти у випадку нестаціонарних процесів.

У загальному випадку ми можемо використовувати просту дохідність фінансового активу для моделювання та передбачення поведінки ціни активу в майбутньому, проте доцільніше вибрати таке перетворення ціни, щоб позбутися недоліків зазначених у властивостях 3 4. Для цього введемо поняття логарифмічної або неперервної дохідності X_t.

1.2 Неперервна дохідність фінансового активу

Означення 3. *Нехай P_t ринкова ціна фінансового активу в момент часу t. Тоді неперервна дохідність в момент часу t*

$$X_t = 100 \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \qquad (2)$$

Як і у випадку простої дохідності, множник 100 в означенні X_t ми вживаємо для відображення цієї величини у відсотках. Розглянемо основні властивості неперервної дохідності фінансового активу.

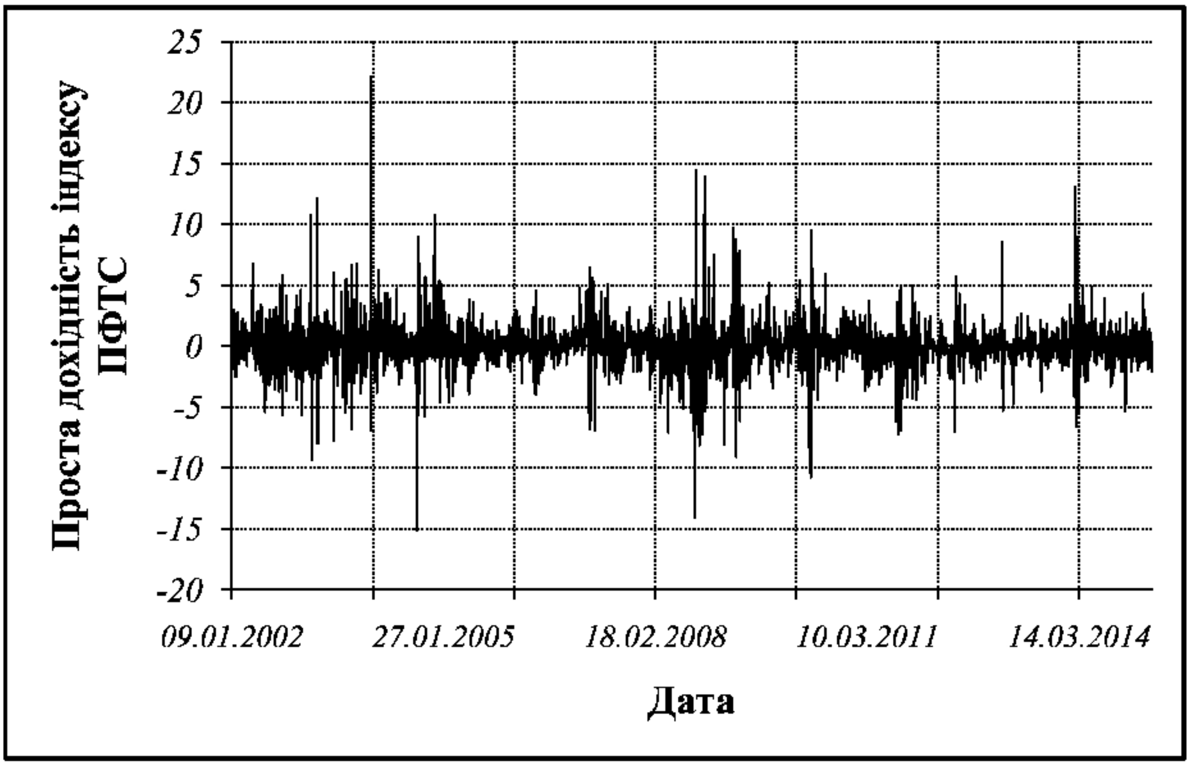

Рис. 3. Неперервна дохідність індексу PFTS

1. Відсутність тренду. На рис. 3 зображено поведінку неперервної дохідності фондового індексу ПФТС за період часу з 01.01.2002 до 31.03.2015. Аналогічно до простої дохідності ми розглядаємо неперервну дохідність за один робочий день. Легко бачити, що так само, як і для простої дохідності (рис. 2), неперервна дохідність не має тренду та її значення зосереджені навколо 0.

2. Симетричність. Як і проста, неперервна дохідність має поведінку, близьку до симетричної відносно 0. Ми можемо використовувати припущення, що X_t є симетричним відносно 0 процесом.

3. Обмеженість знизу. Неперервна дохідність необмежена. За сталого значення ціни P_{t-1} маємо

$$\lim_{P_t\to 0} X_t = 100 \lim_{P_t\to 0} \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = -\infty; \lim_{P_t\to +\infty} X_t = 100 \lim_{P_t\to +\infty} \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = +\infty.$$

Отже, на відміну від ціни та простої дохідності фінансового активу, при моделюванні неперервної дохідності ми можемо використовувати процеси з необмежененою областю значень без додаткових припущень.

4. Неперервна дохідність за багато періодів. Нехай нам потрібно оцінити неперервну дохідність фінансового активу не за один, а за m періодів. Позначимо

$$X_t(m) = 100 \ln\frac{P_t}{P_{t-m}}.$$

Переконаємося, що неперервна дохідність за багато періодів дорівнює сумі неперервних дохідностей за один період.

$$\begin{aligned} X_t(m) &= 100 \ln\frac{P_t}{P_{t-m}} = 100 \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\frac{P_{t-2}}{P_{t-1}}\frac{P_{t-3}}{P_{t-2}}...\frac{P_{t-m+1}}{P_{t-m}}\right) = \\ &= 100 \sum_{j=0}^{m-1} \ln\left(\frac{P_{t-j}}{P_{t-j-1}}\right) = \sum_{j=0}^{m-1} X_{t-j}. \end{aligned}$$

Отже, якщо просумувати неперервну дохідність за один період по періодах, ми отримаємо неперевну дохідність за багато періодів. Зауважимо, що ця властивість відіграє важливе значення в економічному аналізі. Наприклад, знаючи неперервні дохідності певного фінансового активу за один день, можна просто обчислити дохідності за тиждень, місяць, квартал, рік.

5. Стаціонарність. Аналогічно до простої дохідності, в загальному випадку неперервна дохідність не є стаціонарним процесом. При моделюванні часто припускають, що процеси, які описують неперервну дохідність фінансового активу, є стаціонарними.

З рис. 2 – 3 бачимо, що обидві розглянуті дохідності фінансового активу є дуже подібними. Більше того, на графіках узагалі важко побачити відмінність між ними. Як ми переконалися, властивості дохідностей є досить різними. Розглянемо питання про подібність дохідностей детальніше. Для цього розкладемо неперервну дохідність у ряд Тейлора

$$\begin{aligned} X_t &= 100\ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = 100\ln\Big(1+\frac{R_t}{100}\Big) = \\ &= 100\Big(\frac{R_t}{100} - \frac{(R_t/100)^2}{2} + \frac{(R_t/100)^3}{3} - \frac{(R_t/100)^4}{4} + \ldots\Big) = \\ &= R_t + o(R_t). \end{aligned}$$

За "малих" значень простої дохідності, що зазвичай спостерігається на практиці, неперервна і проста дохідність майже співпадають. За великих значень, відмінність між дохідностями істотна. Оскільки

$$X_t = 100\ln\Big(1 + (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}\Big),$$

то, позначивши $x = 1 + (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$, отримаємо $X_t = 100f(x)$ та $R_t = 100g(x)$, де $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 1$. На рис. 4 зображено графіки функцій $f(x)$ та $g(x)$. Урахувавши ще й множник 100, дійсно отримаємо, що відмінність між простою та неперервною дохідностями за екстремально великих чи екстремально малих значень істотна.

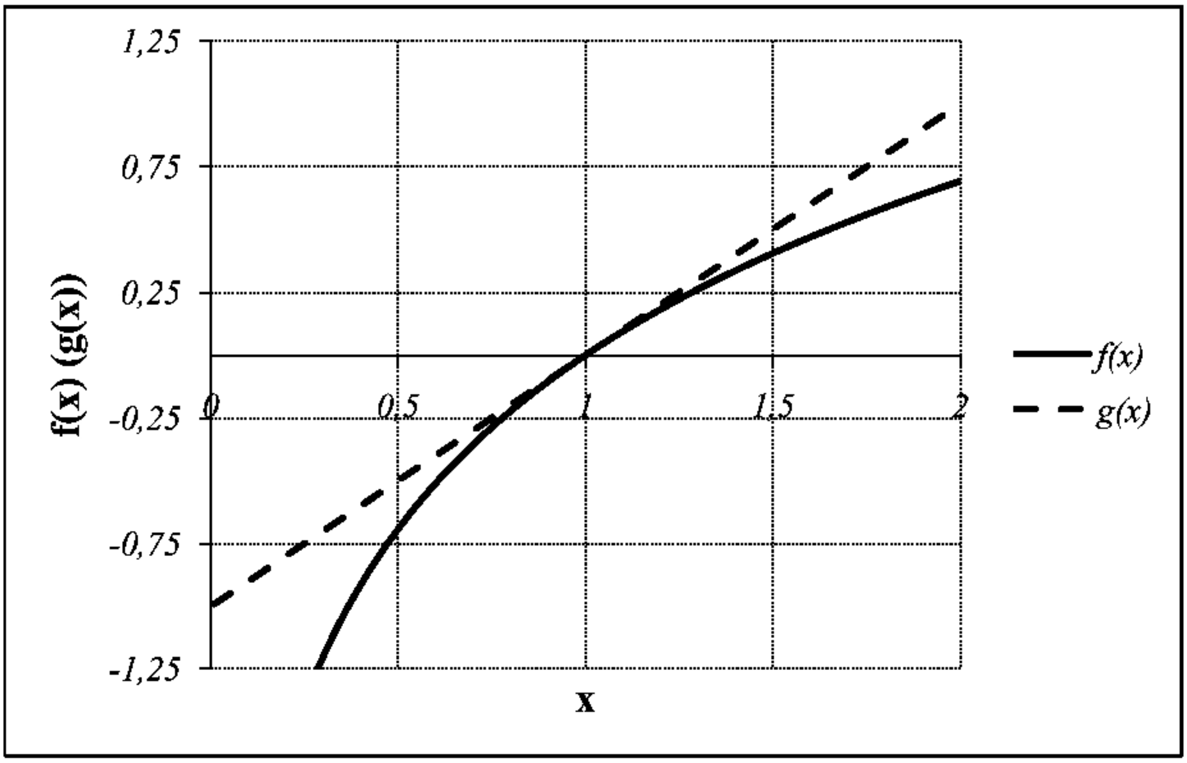

Рис. 4. Співвідношення між простою та неперервною дохідностями в околі 1

Беручи до уваги властивості дохідностей, їхні переваги і недоліки, можемо зробити такі висновки. Хоча проста дохідність є більш природною, ніж неперервна, тобто відносний приріст ціни фінансового активу, властивості неперервної дохідності є кращими зі статистичного та математичного погляду. Тому частіше у фінансовій математиці розглядають неперервні дохідності. Надалі ми вживаємо термін "дохідність", розуміючи під ним "неперервна дохідність".

Зауваження. У формулах (1) та (2) не враховано прибуток, що приніс фінансовий актив за проміжок часу $(t; t+1)$. Якщо виникає необхідність урахувати ці виплати, то формула (1) набуде вигляду

$$R_t = 100\frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}},$$

а (2)

$$X_t = 100\ln\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}},$$

тому надалі ми припускаємо, що для всіх t, $D_t = 0$.

2 Міри ризику

Інвестування на фінансовому ринку завжди супроводжується певним ризиком, під яким кожен розуміє певну невизначеність поведінки фінансових показників у майбутньому. Проте інтуїтивного розуміння ризику недостатньо для успішної діяльності на сучасних ринках. Тому необхідно вміти управляти ризиком, для чого потрібно числове представлення ризику.

На фінансовому ринку виділяють дві великі групи ризиків, які становлять загальний ризик вкладів капіталу: систематичні та несистематичні.

Систематичні ризики виникають унаслідок загальних для всього ринку обставин, тому такі ризики називають ще ринковими ризиками. Основними з цієї групи є:

1) ризик зміни відсоткової ставки з кредитів;

2) ризик загальноринкового падіння курсу цінних паперів;

3) ризик інфляції.

Оскільки систематичних ризиків неможливо уникнути за допомогою диверсифікації, то ці ризики вважають недиверсифікованими.

Несистематичні ризики пов'язані з окремими фінансовими активами і залежать від стану цих активів. Ризик такого виду часто називають власним чи унікальним. Основними ризиками цієї групи є:

1) галузевий ризик чи ризик підприємства;

2) фінансовий ризик;

3) ризик ліквідності.

Ці ризики можна мінімізувати за допомогою диверсифікації, тому вони належать до групи диверсифікованих ризиків.

Ми розглядаємо випадок ідеального фінансового ринку, тобто ринку, на якому будь-який актив завжди можна купити чи продати, причому в довільній кількості. Зауважимо, що кількість активів не обов'язково має бути цілим числом. Очевидно, що українському фінансовому ринку далеко до наших припущень, проте більшість розвинених фінансових ринків досить близька до ідеального ринку. Крім того, ми припускаємо, що ціни купівлі і продажу є однакові та з операцій не сплачуються податки.

Нам потрібно знайти відповідь на таке запитання: як проаналізувати всі причини, які часто змінюються та доволі часто виникають зовсім несподівано, що впливають прямо чи опосередковано на ціни фінансових активів. Для цього використовують методи аналізу даних наявних на певний момент часу. Існують два підходи до оцінки інвестиційної привабливості – фундаментальний та технічний. Фундаментальний аналіз полягає у вивченні фінансово-економічного становища активу, цілої галузі, до якої він належить тощо. Технічний аналіз вивчає саму динаміку курсів. Розглянемо обидва підходи детальніше.

Фундаментальний аналіз грунтується на оцінці активу: його доходів, місця на ринку, його активів та пасивів. Також беруть до уваги ефективність діяльності, використовуючи різні показники. Базою для такого аналізу є вивчення балансів, звітів про прибутки та збитки, інші матеріали. Крім того, вивчають внутрішній менеджмент, керуючий склад. Аналізують стан справ у цілій галузі. На основі вищенаведених досліджень доходимо висновків про коректність ціни фінансового активу стосовно реального стану справ. Отже, за допомогою фудаментального аналізу прогнозуємо дохід, який визначає майбутню ціну активу та рекомендуємо щодо доцільності його купівлі чи продажу.

Використовуючи технічний аналіз, припускають, що всі фундаментальні причини відображені у цінах на ринку, тобто, що в зміні курсів уже є вся інформація, яку публікують у звітах. Головні об'єкти технічного аналізу – попит та пропозиція активів, динаміка курсів та об'єм операцій з їх купівлі-продажу.

Зауважимо, що більшість аналітиків фінансового ринку використовують і технічний, і фундаментальний аналіз, проте технічний аналіз використовують набагато частіше, оскільки отримати дані, необхідні для проведення фундаментального аналізу, є важко, а інколи взагалі неможливо. Крім того, фундаментальний аналіз є дуже трудоємною задачею, яка потребує створення баз даних і відповідного фінансування. Причому дохід, отриманий від використання цього аналізу, не завжди покриває вкладені у проведення аналізу кошти. Можемо виділити декілька переваг технічного аналізу:

1) технічна простота;

2) швидкість аналізу;

3) придатність для великої кількості фінансових активів, на відміну від фундаментального аналізу.

Ми зупинимось на вивченні методів технічного аналізу. Означити технічний аналіз можемо так – це сукупність методів аналізу динаміки цін окремих фінансових активів і всього ринку на основі попиту та пропозиції, що постійно змінюються. На практиці це означає постійне відстеження та інтерпретацію цінових та об'ємних показників, що характеризують зміни, які відбуваються на ринку.

Отже, нам потрібно на основі історичних котирувань певного фінансового активу оцінити ступінь ризику, пов'язаний з ним. Проте важливо спочатку визначити ризик як такий. Сьогодні у фінансовій математиці немає однозначного визначення поняття "ризик". Наприклад, ми можемо інтерпретувати ризик як імовірність втратити певну суму, чи як імовірність отримати дохід, менший від запланованого, чи як повну втрату вкладеного капіталу, чи як отримати певні втрати з певною імовірністю тощо. Очевидно, що всі наведені означення є важливими для інвестора-практика та для науковця-теоретика. Втім, потрібно вибрати якесь певне означення як основу. Зауважимо, що всі означення мають одну спільну рису – імовірнісну складову, отже, яке б ми не вибрали означення ризику, нам потрібними будуть імовірнісні методи його оцінки.

2.1 Дисперсія як міра ризику

Зупинимось спершу на понятті ризику, введене Марковіцем. Ще 1900 року, вивчаючи дохідності акцій на фондовому ринку, Башельє зауважив [1], що їх поведінка та поведінка нормально розподіленої випадкової величини є дуже близькими. Крім того, вчений зазначив, що дохідністі є незалежними в часі. Тобто дохідність активу сьогодні не впливає на його дохідність завтра. Ці спостереження використав Марковіц [2], який означив ризик як відхилення від сподіваного значення, припустивши, що дохідності фінансових активів є незалежними в часі та нормально розподіленими випадковими величинами. З курсу теорії ймовірностей відомо, що нормально розподілена випадкова величина залежить від двох параметрів математичного сподівання μ та дисперсії σ^2. За Марковіцем, сподіване значення дохідності становить μ, а ризик σ. Зрозуміло, що ці параметри є невідомими на практиці, а тому їх потрібно спочатку оцінити. Найбільш відомими та розповсюдженими оцінками параметрів нормального розподілу є вибіркові оцінки. Для їх обчислення нам потрібна вибірка з історичних значень дохідності X_1, X_2,...,X_n. Тоді

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2, \tag{3}$$

причому ризик інвестицій в фінансовий актив визначається як середньоквадратичне відхилення

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{\mu})^2}. \tag{4}$$

Що показує нам середньоквадратичне відхилення? Правильність такої міри ризику є неочевидною. Зрозуміло, що чим більшим є відхилення $\hat{\sigma}$, тим більшим є розкид значень дохідності, що своєю чергою свідчить про більшу імовірність втрат, однак, це і більша імовірність отримання доходу. Ризик у понятті середньоквадратичного відхилення розглядають як основу для інтервалу довіри. Оскільки ми припустили, що $X_t \sim \mathcal{N}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$, то

$$P\{X_t \in (\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}; \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})\} = 0.9973.$$

Тобто з імовірністю, більшою за 0.99, можна стверджувати, що майбутнє значення дохідності буде більшим за $\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}$. Зазначимо, що завдяки своїй простоті цю міру ризику використовують і сьогодні, хоча вона і зазнає критики. Дисперсія як міра ризику має декілька значних недоліків.

По-перше, правило "трьох сігм" виконується лише для нормально розподілених випадкових величин. Якщо б дохідності були нормально розподілені, то дисперсія була б найкращою мірою ризику. На практиці це не так. Більше того, майже ніколи на практиці поведінка дохідностей не є близькою до поведінки нормально розподіленої випадкової величини. Зазвичай, хвости розподілу дохідностей є набагато важчими, ніж для нормального розподілу. Наприклад, розглянемо поведінку дохідності фондового індексу ПФТС. Припустивши, що розподіл дохідності є нормальний, обчислимо вибіркові оцінки для параметрів $\hat{\mu} = 0.0695$ і $\hat{\sigma}^2 = 3.831$ та обчислимо теоретичну імовірність того, що дохідність ПФТС прийме значення, більше від 6, та імовірність того, що дохідність буде менша, ніж –6

$$\begin{aligned} P\{X_t < -6\} &= \Phi(\frac{-6-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) = 0.0009643, \\ P\{X_t > 6\} &= 1 - \Phi(\frac{6-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) = 0.0012226. \end{aligned}$$

З курсу теорії імовірностей відомо, що відносна частота може бути використана як оцінка ймовірності певної події. Оскільки обсяг вибірки значень дохідностей ПФТС є великим, 3 261, то і наближення мало б бути досить точним. Проте на практиці ми отримаємо

$$\begin{aligned} w_A &= 0.0095063, \\ w_B &= 0.0082797, \end{aligned}$$

де w_A – відносна частота події $A = \{X_t < -6\}$; w_B – відносна частота події $B = \{X_t > 6\}$. Легко бачити, що для дохідностей, менших за –6, теоретична ймовірність є менша від емпіричної приблизно в 9 разів, а для дохідностей більших за 6, – приблизно в 7 разів. Отже, доходимо висновку, що внаслідок того, що розподіл дохідностей не є нормальним, дисперсія не є доброю мірою ризику.

По-друге, дисперсія оцінює двосторонній ризик. Тобто за зростання дисперсії зростає не лише ймовірність великих втрат, а також імовірність великих доходів. Тому інтерпретація зміни ризику в цьому випадку є досить неточною, що призводить до втрати інформативності.

2.2 Квантильна міра ризику VaR

В останні декілька десятиріч дослідження в теорії мір ризику показали, що для практичного застосування добре підходять міри ризику, що грунтуються на квантилях розподілів функцій втрат [3]. Однією з найпростіших та найпоширеніших таких мір є Value-at-Risk (VaR). Вперше цю міру було використано для роботи з ризиками в банку J.P. Morgan. Пізніше VaR було рекомендоване для оцінки ризиків у банках в основних рекомендаційних програмах, таких як Basel II [4], RiskMetrics, CAD II. Головне при обчисленні VaR – задати необхідний рівень довіри α, тоді

$$VaR_\alpha(X_t) = -\sup\{x \in \mathbb{R} : P\{X_t < x\} \leq 1 - \alpha\}. \tag{5}$$

З означення VaR можемо дійти висновку, що VaR_α – мінімальний рівень втрат з імовірністю $1 - \alpha$. Крім того, зауважимо, що додатні значення дохідностей, які характеризують прибуток, не впливають на значення ризику. Рекомендованими значеннями для рівня довіри в RiskMetrics є 0.95, а в Basel II – 0.99. Очевидно, що для обчислення квантилі необхідно знати функцію розподілу. Нехай нам відома функція розподілу дохідності певного фінансового активу. Позначимо її $F_X(x)$, тоді означення (5) можемо переписати у вигляді

$$VaR_\alpha(X_t) = -\sup\{x \in I\!R : F_X(x) \leq 1-\alpha\}.$$

Бачимо, що для неперервних розподілів VaR при рівні довіри α є мінус $1-\alpha$ квантиль розподілу дохідності X_t.

Твердження 1. Нехай дохідності фінансового активу X_t поводяться як незалежні нормально розподілені випадкові величини з параметрами μ та σ, тоді

$$VaR_\alpha(X_t) = \sigma z_\alpha - \mu,$$

де z_α – α квантиль стандартного нормального розподілу.

Доведення. Позначимо $F_X(x)$ функцію розподілу X_t та $\Phi(x)$ функцію розподілу стандартно розподіленої випадкової величини, тоді з властивостей нормально розподіленої випадкової величини та з означення VaR_α (5) отримаємо

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= F_X(-VaR_\alpha) = P\{X_t < -VaR_\alpha\} = \\ &= P\{\frac{X_t-\mu}{\sigma} < \frac{-VaR_\alpha-\mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{-VaR_\alpha-\mu}{\sigma}), \end{aligned}$$

тобто ми отримали, що

$$z_{1-\alpha} = \frac{-VaR_\alpha-\mu}{\sigma},$$

де через $z_{1-\alpha}$ ми позначили $1-\alpha$ квантиль стандартного нормального розподілу. Враховуючи, що з властивостей стандартного нормального розподілу $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$ ми отримаємо необхідне твердження.

З твердження 1 випливає, що у випадку нормально розподілених дохідностей, використовуючи прості арифметичні операції, міри ризику

VaR_α та дисперсія надають еквівалентну інформацію про ризик. Розглядаючи інші розподіли, особливо несиметричні щодо математичного сподівання, VaR_α є набагато кращою мірою, ніж дисперсія. Зауважимо також, що для точного обчислення VaR_α потрібно знати функцію розподілу дохідності. На практиці функції розподілу є невідомими. Отже, як і у випадку дисперсії, нам потрібно оцінити VaR_α. Розглянемо основні методи обчислення VaR.

1. Історичний метод. Цей метод, який ще деколи називають емпіричним, полягає в тому, що оцінку ризику обчислюють, використовуючи лише вибірку з історичних даних. Ми не припускаємо нічого про розподіл дохідності. Крім того цей метод є доволі простий. Припустимо, що нам задано вибірку з історичних значень дохідності X_1, X_2,...,X_n та рівень довіри α для VaR. На першому кроці ми сортуємо значення вибірки у порядку зростання $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$. За значення VaR_α вибираємо елемент відсортованої вибірки $(n(1-\alpha))$. Зауважимо, що обсяг вибірки, зазвичай, вибирають так, щоб $(n(1-\alpha))$ було цілим числом при основних рівнях довіри α. Якщо ж це не так, то вибирають значення оцінки для VaR_α, що становить $\frac{1}{2}(X_{([n(1-\alpha)])} + X_{([n(1-\alpha)]+1)})$. Зауважимо, що вибране середнє значення для ризику очевидно має певне зміщення, оскільки поведінка дохідності не є лінійною в загальному випадку, а вибрана оцінка є досить грубою. Попри всі свої переваги історичний метод має суттєві недоліки. На перший погляд, у цьому методі справді немає жодного припущення про розподіл дохідностей, але неявно використовують два доволі строгі припущення. По-перше, припускається, що розподіл дохідності є дискретним, що на практиці є досить грубою помилкою, по-друге в основі методу лежить припущення про те, що дохідність в майбутньому буде приймати лише ті значення, які є у вибірці. Зазначимо, що розподіли дохідностей фінансових активів є неперервними, тому імовірність того, що значення дохідності в майбутньому буде таким самим, як одне зі значень у минулому, дорівнює 0. Незважаючи на свої недоліки, такий метод є надзвичайно простим для практичного використання і застосовують його в ситуації, коли ризики треба оцінити якомога швидше.

2. Параметричний (аналітичний) метод. Головним припущенням у цьому методі є припущення про розподіл. На основі історичних даних про дохідність фінансового активу формують певні твердження про розподіл, наприклад, що дохідності акції є нормально розподілені чи мають розподіл Стьюдента з k ступенями вільності тощо. На основі цього припущення та вибірки даних далі оцінюють параметри розподілу: для нормального розподілу – математичне сподівання та дисперсію, а для розподілу Стьюдента – кількість ступенів свободи. Оцінивши всі параметри, знаходять відповідну квантиль розподілу, яка і є оцінкою для VaR. Розглянемо один важливий частковий випадок, який має назву дельта-нормального методу. Припустимо, що розподіл дохідностей є нормальний. Для оцінки параметрів розподілу використаємо оцінки (3). Тоді для рівня довіри α обчислюємо оцінку для VaR_α з твердження 1, тобто

$$\widehat{VaR}_\alpha(X_t) = \hat{\sigma} z_\alpha - \hat{\mu}.$$

На відміну від історичного методу, тут робимо припущення про розподіл дохідностей, причому припускаємо, зазвичай, що розподіл є неперервним, тобто такий метод є більш придатним для практичного застосування. Проте він також має свої недоліки. Це припущення про незалежність дохідностей у часі, які, як показано в багатьох роботах, є залежними. Крім того, досить часто припускають, що розподіли дохідності фінансових активів є нормально розподілені, що не дає змоги брати до уваги наявність так званих "важких хвостів", які майже завжди трапляються у фінансових даних з середньою, а особливо з високою частотою. Ці недоліки призводять, зазвичай, до недооцінки ризиків, що в умовах стабільності не є суттєвим, тобто не викликає значних втрат, і дельта-нормальний метод показує доволі хороші результати на практиці. Під час кризи це може викликати серйозні негативні наслідки для діяльності фінансових установ.

3. Метод Монте-Карло або імітаційне моделювання. Такий метод дозволяє використовувати будь-які припущення щодо повєдінки дохідностей фінансових активів, у тім числі й припущення про залежність дохідностей у часі. На першому кроці задаємо значення рівня довіри α та на основі наявної вибірки ми формулюємо певні твердження щодо поведінки дохідності в минулому і припускаємо, що такою ж поведінка дохідності буде в майбутньому. Наступний крок полягає в імітації майбутньої ситуації на основі попередньо зроблених припущень, використовуючи, зазвичай, генератор випадкових чисел. Тобто ми генеруємо велику вибірку випадкових чисел на основі оціненої на першому кроці моделі. Третій крок полягає у використанні історичного методу. За допомогою цього методу ми з згенерованої вибірки оцінюємо значення для VaR_α. На наступному кроці ми повторюємо другий та третій крок декілька разів та будуємо остаточну оцінку VaR_α методом усереднення отриманих результатів. Усереднення (закон великих чисел) та велика кількість згенерованих даних усуває негативний ефект від використання історичного методу. Зауважимо, що припустивши на першому кроці, що дохідності є нормально розподілені та незалежні в часі, немає сенсу далі використовувати метод Монте-Карло, оскільки в такому випадку правильніше використовувати дельта-нормальний метод, причому результати, отримані за допомогою параметричного методу, будуть точніші, бо генератори випадкових чисел не дають таких точних результатів.

Підсумовуючи вищесказане, можемо зробити такі висновки. По-перше, VaR краще описує ризик, ніж дисперсія, та є більш інформативною мірою. По-друге, VaR не враховує імовірність екстремально високих дохідностей, а ризик описує, беручи до уваги лише від'ємні значення дохідності, тобто втрати. По-третє, VaR має зміст навіть у випадку несиметричних розподілів, чого не можна сказати про дисперсію. Однак, VaR також має певні недоліки. Першим недоліком є те, що VaR є лише квантиллю розподілу і тому не повністю відображає інформацію, яка стоїть за його значенням. Наприклад, якщо $VaR_\alpha = 100\$$, це означає, що з ймовірністю α наші втрати будуть менші за 100\$, проте нічого не відомо про втрати з ймовірністю, меншою за $1-\alpha$, які можуть істотно перевищувати 100\$ і становити, наприклад, 10 000\$ з ймовірністю $(1-\alpha)/2$. Цей недолік можна згладити, використовуючи одночасно різні значення для рівня довіри. Набагато вагомішим недоліком є той, що в загальному випадку ця міра ризику не є когерентною.

Зауваження. При заданні рівнів довіри α для обчислення VaR, зазвичай використовують значення, близькі до 1. Проте теоретичну цінність мають значення для рівня довіри в межах $[0.5, 1]$. Тому надалі ми не розглядаємо рівні довіри для обчислення VaR, менші за 0.5.

2.3 Когерентна міра ризику CVaR

Поняття когерентності міри ризику було введено порівняно недавно, 1999 року [5]. Це поняття містить чотири аксіоми: інваріантність щодо зсуву, субадитивність, додатну однорідність, монотонність.

Означення 4. *Нехай X та Y – довільні випадкові величини. Тоді міру ризику μ називають когерентно, якщо*

1. з того, що $X \leq Y$ випливає $\mu(X) \geq \mu(Y)$ (монотонність);

2. для всіх $\lambda \geq 0$, $\mu(\lambda X) = \lambda\mu(X)$ (додатна однорідність);

3. для всіх $\alpha \in I\!R$, $\mu(X + \alpha) = \mu(X) - \alpha$ (інваріантність щодо зсуву);

4. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$ (субадитивність).

Зауважимо, що VaR не є когерентною мірою в загальному випадку [6]. Наприклад, розглянувши дві незалежні, однаково розподілені випадкові величини X_1 та X_2 з густинами

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \begin{cases} 0, & x < -2; \\ 0.05, & -2 \leq x < 0; \\ 0.9, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Нехай ці випадкові величини описують дохідності певних цінних паперів. Тоді $VaR_{0.9}(X_1) = VaR_{0.9}(X_2) = 0$, тобто

$$VaR_{0.9}(X_1) + VaR_{0.9}(X_2) = 0.$$

Покажемо, що $VaR_{0.9}(X_1+X_2) > 0$. Для цього достатньо довести, що $P\{X_1+X_2<0\} > 0.1$. Знайдемо густину випадкової величини X_1+X_2. З теореми про згортку

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(t-x)dx &= \int\limits_{-2}^{0} 0.05 f_{X_2}(t-x)dx + \\
&+ \int\limits_{0}^{1} 0.9 f_{X_2}(t-x)dx = \\
&= \int\limits_{t}^{t+2} 0.05 f_{X_2}(y)dy + \int\limits_{t-1}^{t} 0.9 f_{X_2}(y)dy = \\
&= \begin{cases} 0, & t<-4; \\ 0.05^2(t+4), & -4 \le t < -2; \\ 0.09(t+2) - 0.05^2 t, & -2 \le t < -1; \\ 0.09 - 0.05^2 t, & -1 \le t < 0; \\ 0.09(1-t) + 0.9^2 t, & 0 \le t < 1; \\ 0.9^2(2-t), & 1 \le t < 2; \\ 0, & t > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

З властивостей густини отримаємо

$$P\{X_1+X_2<0\} = \int\limits_{-\infty}^{0} f_{X_1+X_2}(x)dx = 0.145 > 0.1.$$

Отже, ми показали, що VaR не задовільняє аксіому субадитивності і, як наслідок, не є когерентною мірою ризику.

Зауважимо, що аксіома субадитивності є найсуперечливішою серед усіх аксіом когерентності. З іншого боку, якщо ризик одного фінансового активу становить μ_1, а іншого – μ_2, то важко зрозуміти, що резервувати потрібно більше, ніж $\mu_1+\mu_2$. Крім того, субадитивність є основою диверсифікації. Якщо не виконується аксіома субадитивності, то і диверсифікація стає непотрібною, що суперечить практиці фінансового ринку. Тому бажапо використовувати при іпвестуванні когерептпу міру ризику. Очевидпо, що аксіоми когерептпості пе описують єдипу міру ризику. Когерептних мір ризику є дуже багато. Одпією з пайвідоміших та широко розповсюджепих когерептпих мір є умовпе VaR (падалі CVaR). Як і у випадку VaR, для обчислсння ризику за допомогою CVaR потрібно спсршу задати рівснь довіри α, тоді

$$VaR_\alpha(X_t) = -M(X_t|X_t < -VaR_\alpha(X_t)). \tag{6}$$

Тобто $CVaR_\alpha(X_t)$ – це середні втрати з імовірністю $1-\alpha$.

Теорема 1. *CVaR є когерептпою мірою ризику.*

Доведення. Доведення теореми випливає з означення CVaR.

Як окремий випадок, варто розглянути ситуацію, коли дохідність фінансового активу є нормально розподілена.

Твердження 2. Нехай дохідності фінансового активу X_t поводяться як незалежні нормально розподілені випадкові величини з параметрами μ та σ, тоді

$$CVaR_\alpha(X_t) = \sigma k_\alpha - \mu,$$

де $k_\alpha = -\frac{\int_{-\infty}^{-z_\alpha} x\phi(x)dx}{1-\alpha}$, z_α та $\phi(x)$ – відповідно, α квантиль та густина стандартного нормального розподілу.

Доведення. Позначимо $f_X(x)$ густину дохідності X_t

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X_t) &= -M(X_t|X_t < -VaR_\alpha(X_t)) = \\ &= -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{-VaR_\alpha(X_t)} x f_X(x)dx = \\ &= -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\sigma z_\alpha-\mu} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx. \end{aligned}$$

Зробивши заміну змінних у попередньому інтегралі $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ та врахувавши, що $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$, отримаємо

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(X_t) &= -\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha}(\sigma y+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \\ &= -\frac{\sigma}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy - \\ &- \frac{\mu}{1-\alpha}\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \end{aligned}$$

Позначивши $k_\alpha = -\frac{\int_{-\infty}^{-z_\alpha} x\phi(x)dx}{1-\alpha}$ та врахувавши, що

$$\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 1-\alpha,$$

отримаємо необхідне твердження.

Зауважимо, що у випадку нормально розподілених та незалежних у часі дохідностей немає суттєвої відмінності між трьома розглянутими мірами ризику. Якщо одне з цих припущень не виконується, то CVaR очевидно є найліпшою (серед розглянутих мір ризику) мірою ризику. CVaR є найбільш інформативною внаслідок усереднення усіх втрат, тому ситуація, як у випадку VaR, коли можливі втрати значно перевищують оцінений рівень, не має місця. Крім того, CVaR бере до уваги наявність "важких хвостів" у розподілах дохідностей, які, зазвичай, спостерігаються у дохідностях з частотою, меншою ніж місяць. Зауважимо, що ця міра також враховує несиметричність даних на фінансовому ринку. В наступному розділі на прикладі реальних даних порівняємо поведінку цих мір. Зрозуміло, що для обчислення CVaR потрібно знати розподіли дохідностей, які, як уже зазначалося, на практиці є невідомими. Тому для побудови оцінки ризику використовують ті ж методи, що і для обчислення VaR. Розглянемо схеми оцінювання CVaR.

1. Історичний метод. На основі вибірки з історичних значень дохідності X_1, X_2,...,X_n та рівня довіри α ми за описаною вище схемою обчислюємо оцінку для VaR_α. Тоді

$$\widehat{CVaR}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \sum_{X_{(i)} \leq \widehat{VaR}_\alpha} X_{(i)}, \tag{7}$$

де n_α – кількість елементів вибірки, які менші або дорівнюють $\widehat{VaR}_\alpha$. Усі недоліки цього методу обговорювали раніше, тому його використовують у ситуації, коли ризики треба оцінити якомога швидше.

2. Параметричний (аналітичний) метод. Якщо на основі вибірки можливо зробити припущення про загальний розподіл дохідності, то, оцінивши параметри розподілу й обчисливши оцінку для $\widehat{VaR}_\alpha$, обчислюємо відповідне умовне математичне сподівання (6). Якщо ж ми припускаємо, що розподіл дохідностей є нормальний та дохідності є незалежні в часі, використовуємо твердження 2 з оцінками параметрів розподілу (3). Цей метод можна використовувати лише в періоди, коли не спостерігаються значні коливання цін фінансових активів.

3. Метод Монте-Карло або імітаційне моделювання. Метод полягає в імітації майбутньої ситуації на основі попередньо зроблених припущень та використанні історичного методу. Провівши декілька процедур та усереднивши результат, отримаємо оцінку ризику CVaR.

Ми розглянули основні дохідності фінансових активів та основні міри для оцінки ризику фінансових активів. Зауважимо, що інвестори на фінансовому ринку доволі зрідка інвестують кошти в один актив. Майже завжди вони змушені оперувати декількома різними фінансовими активами, сукупність яких прийнято називати портфелем фінансових активів. Очевидно, в цьому випадку розглядати ризик кожного фінансового активу зокрема є важко, оскільки кількість фінансових активів може бути великою. Тому наступний розділ присвячено вступу до теорії портфелів та їх аналізу.

3 Портфелі фінансових активів

В умовах бурхливого розвитку фінансових ринків усе частішими стали кризові явища в цій сфері діяльності. Остання світова фінансова криза стала однією з наймасштабніших у сучасній історії людства. Її негативні наслідки дотепер відчуваються у світовій економіці. Тому на перший план у фінансовій діяльності вийшли проблеми зменшення фінансових ризиків. З теорії та практики фінансової науки відомо, що одним з найвідоміших методів зниження фінансових ризиків є диверсифікація, яка вже стала класичним методом зниження загального ризику. Внаслідок світової фінансової кризи цей напрямок отримав нові напрями розвитку.

На практиці диверсифікація реалізується шляхом побудови портфеля, головно, портфеля фінансових активів. З теорії відомо, що довільний розподіл коштів між активами, в чому і полягає побудова портфеля, призводить до зниження загального рівня ризику. З іншого боку, побудова портфеля повинна опиратися на певні критерії з метою досягнення мінімального рівня ризику за максимально можливого рівня доходу.

3.1 Поняття ефективного портфеля та ефективної множини

Нехай на ринку існує k видів фінансових активів. Позначимо дохідність i-го фінансового активу X_i. Зауважимо, що у випадку, коли характеристики дохідності i-го фінансового активу залежатимуть від часу, цей факт ми будемо позначати $X_i(t)$. Будемо вважати, що дохідності фінансових активів є випадковими величинами. Нагадаємо, що основними характеристиками випадкової величини є математичне сподівання та дисперсія. Навіть якщо ми для оцінки ризиків будемо використовувати іншу міру ризику, замість дисперсії, ця величина відіграватиме важливу роль. Позначимо математичне сподівання дохідності i-го фінансового активу $M(X_i) = \mu_i$, дисперсію – $D(X_i) = \sigma_i^2$. Якщо нам потрібно звернути увагу на те, що характеристики залежать від часу, то будемо писати $\mu_i(t)$ та $\sigma_i^2(t)$. Оскільки в портфелі є багато фінансових активів, необхідно ввести міру залежності дохідності одного фінансового активу від іншого. Зазвичай за таку міру залежності використовують коваріацію. Ми позначаємо коваріацію між дохідностями i-го та j-го фінансових активів через $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$, якщо вона не залежить від часу, та через $\sigma_{ij}(t)$ – інакше. Зрозуміло, що $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Нагадаємо, що показує коваріація. Якщо випадкові величини незалежні, то коваріація дорівнює 0. Зауважимо, що навпаки, – це твердження невірне. Проте, якщо випадкові величини є нормально розподілені, то два ці твердження є еквівалентні. Якщо коваріація додатна, то відхилення однієї випадкової величини від свого математичного сподівання в більшу сторону викликає відхилення другої також скоріше в більшу сторону. У випадку, коли коваріація від'ємна, то відхилення однієї випадкової величини від математичного сподівання в більшу сторону викликає відхилення другої скоріше в меншу сторону. Нехай ми вкладаємо в покупку фінансових активів одну грошову одиницю. Позначимо w_i кошти, спрямовані на купівлі i-го фінансового активу. Тоді портфелем назвемо вектор $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_k)'$. У загальному випадку портфель – це вектор часток капіталу стосовно загальної суми, вкладених у відповідний фінансовий актив. Незалежно від означення портфеля, очевидно виконується наступна рівність

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = 1. \tag{8}$$

Дуже часто при побудові портфеля виникає припущення, що ваги портфеля $w_i > 0$. Проте ця умова не є необхідною. Вивчають також ситуації, коли $w_i < 0$ та $w_i > 1$. Наприклад, при випуску цінних паперів та їх продажі інвестор очевидно отримає від'ємні відповідні ваги у своєму портфелі.

Зрозуміло, що портфель ми можемо розглядати як один фінансовий актив, який характеризується своєю дохідністю. Позначимо вектор дохідностей фінансових активів, доступних на ринку, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)'$, тоді

$$M(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k)'$$

та

$$D(\mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \sigma_{1k} & \sigma_{2k} & \ldots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}.$$

Дохідність портфеля визначаємо як зважену суму дохідностей його компонент (ваг) $X_w = \sum\limits_{i=1}^{k} w_i X_i$. Очевидно, оскільки ми припустили, що всі X_i є випадковими величинами, то X_w також є випадковою величиною, яка характеризується математичним сподіванням (очікуваною дохідністю) та дисперсією, які ми обчислюємо так

$$R_w = M(X_w) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^{k} w_i \mu_i, \qquad (9)$$

$$V_w = D(X_w) = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \sigma_{ij} w_i w_j. \qquad (10)$$

Отже, ми звели вивчення портфеля фінансових активів до вивчення випадкової величини з параметрами R_w та V_w. Оскільки поведінка випадкової величини наперед не є відомою, інвестор на фінансовому ринку оперує лише її характеристиками. Виникає питання, яке співвідношення між характеристиками має бути, щоб цей портфель зацікавив інвестора. Розглянемо випадок $k = 2$, тобто інвестор вкладає кошти лише у цінні папери двох емітентів. Тоді очікувана дохідність та дисперсія такого портфеля становить

$$
\begin{aligned}
R_w &= w_1\mu_1 + (1 - w_1)\mu_2\,, && (11)\\
V_w &= w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_{12}. && (12)
\end{aligned}
$$

Попередні рівності можна розглядати як функцію, задану параметрично. Причому параметром тут є відносна частка першого цінного паперу в портфелі w_1. Змінюючи значення параметра від $-\infty$ до $+\infty$, отримаємо певну криву на площині (V_w, R_w). Ця крива буде параболою.

Приклад 1. Для графічного зображення цієї кривої розглянемо випадок, коли інвестор вкладає кошти лише в акції двох українських компаній ”Укртелеком” та ”Мотор Січ”. Простежимо динаміку курсів цих акцій за період часу з 01.04.2014 до 31.03.2015 та обчислимо дохідності. Використовуючи формули для вибіркових оцінок (3), отримаємо

$$\hat{\mu}_1 = 0.024644,\ \hat{\mu}_2 = 0.181358,$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = 14.036031,\ \hat{\sigma}_2^2 = 3.667274,\ \hat{\sigma}_{12} = 1.00238.$$

Підставляючи отримані значення в (11) – (12) та змінюючи w_1 від $-\infty$ до $+\infty$, нарисуємо графік функції, заданої параметрично. Зауважимо, що портфелі, в яких $R_w < 0$, зазвичай, не цікавлять інвесторів, оскільки за інвестування коштів у такі портфелі інвестор не очікує на прибуток.

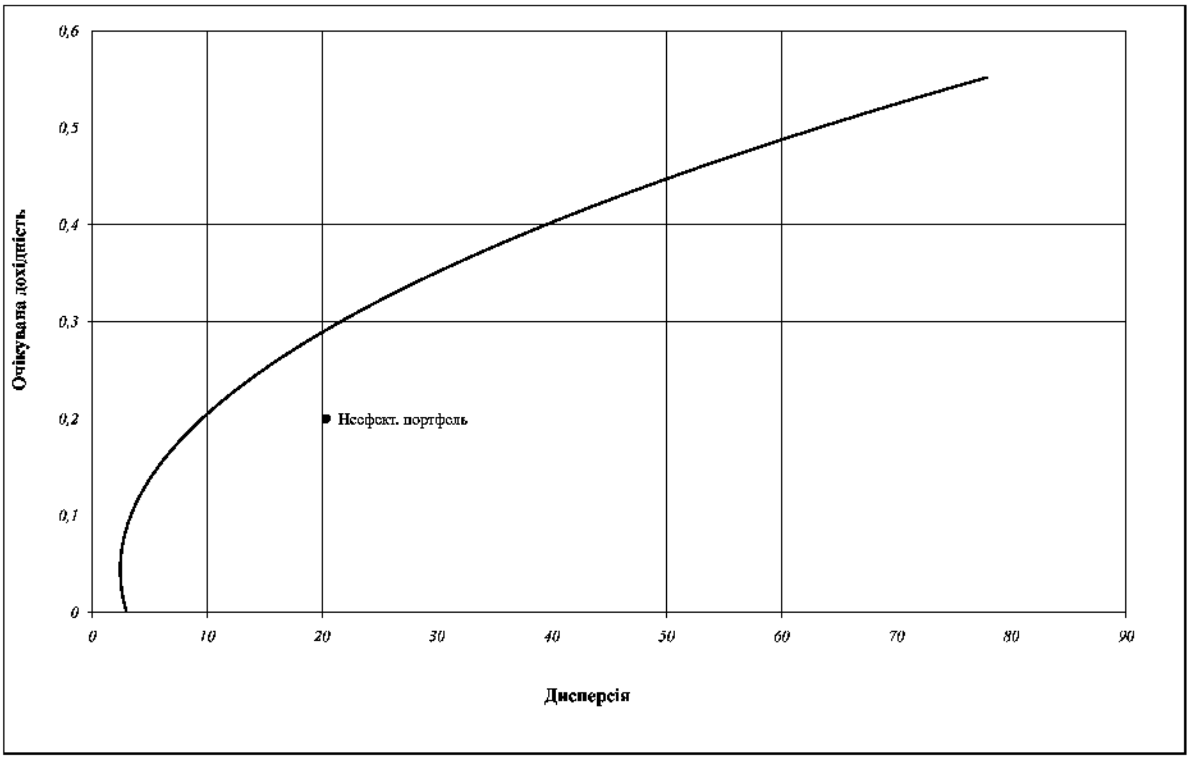

Рис. 5. Ефективна множина портфелів

Крива на рис. 5 називається ефективною множиною портфелів (верхня гілка параболи) і складається з портфелів, до яких інвестори проявляють інтерес. Також на рис. 5 зображено точкою неефективний портфель, оскільки за наших припущень його дохідність можна збільшити до 0.291182, не збільшуючи за цього дисперсію портфеля. Хоча у цьому випадку ми не вибирали міри ризику, інвестори завжди віддають перевагу портфелю з більшою дохідністю за тієї самої дисперсії. Метод побудови ефективної множини у випадку $k > 2$ є аналогічним до розглянутого.

Ми можемо дати означення ефективної множини. Нехай на фінансовому ринку доступно k видів фінансових активів. Розглянемо на множині (V_w, R_w) множину A, яка складається з точок, координатами яких є дисперсія та очікувана дохідність портфеля з відносними частками фінансових активів $(w_1, w_2, ..., w_k)$, які задовольняють умову $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$. Тоді підмножина A_0 множини A, яка складається з точок з координатами (V_w^0, R_w^0), називається ефективною множиною, якщо:

1) для всіх точок множини A з координатами (V_w^0, R_w) виконується $R_w \leq R_w^0$;

2) для всіх точок множини A з координатами (V_w, R_w^0) виконується $V_w \geq V_w^0$.

Інакше кажучи, ефективна множина складається з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна збільшити дохідність не збільшуючи дисперсію, або, що еквівалентно, з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна зменшити дисперсію не зменшуючи дохідність. Уперше поняття ефективної множини ввів Марковіц 1952 року [2]. У своїй праці Марковіц прийняв за міру ризику портфеля його дисперсію, тому означення ефективної множини за Марковіцем звучало так: ефективна множина складається з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна збільшити дохідність не збільшуючи ризик, або, що еквівалентно, з портфелів, для яких, за відсутності додаткового фінансування, не можна зменшити ризик не зменшуючи дохідність. Очевидно, що означення ефективної множини, за Марковіцем, особливо демонструє її важливість. Незважаючи на те, що дисперсію сьогодні доволі зрідка використовують як міру ризику, ефективна множина не втратила свого значення. Ми звернемо на це увагу в наступних розділах.

Часто під час побудови портфеля на його ваги накладаються додаткові умови. Наприклад, природною умовою є те, що ваги портфеля мають бути невід'ємними. Також, з певних міркувань, доволі часто виникають умови типу $w_i \geq \lambda w_j$, де $\lambda > 0$. Зрозуміло, що за додавання умов змінюється вигляд ефективної множини. Звернемо увагу ще на те, що попередньо ми припустили, що дохідності всіх фінансових активів на ринку є випадковими величинами. Узагалі, таке припущення не є правильним з практичного погляду, оскільки інвестор може розміщувати кошти під безризикову ставку. В цьому випадку вже недостатньо отримати сумарну дохідність портфеля, просто більшу від 0. Важливо, щоб доходи від портфельного інвестування перевищували доходи від розміщення коштів під безризикову ставку.

Отже, з усіх можливих портфелів ми можемо виділити ефективну множину. Втім, виникає таке питання, який з портфелів, що належить ефективній множині, є для інвестора найліпшим. Це питання буде розглянуто у наступному розділі.

3.2 Критерії мінімізації ризику портфеля

Наше завдання зараз полягає в тому, щоб з портфелів, що належать ефективній множині, вибрати в певному сенсі найліпший. Зрозуміло, що одним з головних критеріїв є дохідність. Будь-який інвестор зацікавлений у досягненні якомога вищої дохідності свого портфеля. За побудови ефективної множини показано, що висока очікувана дохідність завжди супроводжується високою дисперсією, причому, оскільки ефективна множина має форму параболи, дохідність зростає повільніше. Звернемо увагу на той факт, що висока дисперсія свідчить про імовірність великого розкиду значень дохідності щодо математичного сподівання як у більшу, так і в меншу сторону. Тому можемо дійти висновку, що збільшуючи очікувану дохідність портфеля, інвестор тим самим збільшує і можливі втрати. Тобто, чим більша очікувана дохідність портфеля, тим більшим є його ризик, причому незалежно від того, яку міру ризику ми вибрали. Виникає питання, в які фінансові активи потрібно інвестувати кошти, щоб ризик портфеля був найменшим, і чи не будуть такі портфелі мати від'ємну очікувану дохідність.

3.2.1 Критерії мінімізації дисперсії портфеля

Цю проблему вперше розглянув Марковіц 1952 року [2]. У своїй праці вчений припускає, що дохідності усіх фінансових активів є нормально розподіленими випадковими величинами, незалежними в часі. За міру ризику було вибрано дисперсію. На основі цих даних він розглянув проблему мінімізації ризику портфеля. За допомогою введених позначень ця задача може бути записана у вигляді

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \to \min \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1, \tag{13}$$

де $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)'$ – k-вимірний вектор, елементами якого є одиниці. Зауважимо, що ми знову не накладаємо умову невід'ємності ваг портфеля. Нас зараз цікавить розв'язок задачі (13) в загальному випадку та його місце на графіку ефективної множини.

Теорема 2. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є випадковим вектором з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді розв'язок задачі (13)* *має вигляд*

$$\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \tag{14}$$

та є вершиною параболи графіка ефективної множини.

Доведення. Для знаходження розв'язку задачі (13) використаємо метод множників Лагранжа. Отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}+\lambda(1-\mathbf{1}'\mathbf{w})}{\partial\mathbf{w}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial(\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}+\lambda(1-\mathbf{1}'\mathbf{w})}{\partial\lambda} = 0 \end{cases},$$

де $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)'$ – k-вимірний нуль-вектор. Використовуючи правила матричного диференціального числення [7], обчислимо попередні часткові похідні

$$\begin{cases} 2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda\mathbf{1} = \mathbf{0} \\ 1 - \mathbf{1}'\mathbf{w} = 0 \end{cases}.$$

З першого рівняння системи отримаємо $\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}$. Підставивши це значення в друге рівняння та розв'язавши його стосовно λ, отримаємо розв'язок системи

$$\begin{cases} \mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \\ \lambda^* = \frac{2}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \end{cases}.$$

Перевіримо, чи є вектор $\mathbf{w}^*$ розв'язком задачі (13). Зауважимо, що оскільки матриця коваріацій $\mathbf{\Sigma}$ є додатно визначена, а

$$\frac{\partial^2\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}}{(\partial\mathbf{w})^2} = 2\mathbf{\Sigma},$$

отримаємо, що вектор $\mathbf{w}^*$ є розв'язком задачі (13). Теорему доведено.

Портфель з вагами $\mathbf{w}_{GMV} = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}$ називають портфелем найменшої дисперсії (<u>G</u>lobal <u>M</u>inimum <u>V</u>ariance).

Наслідок 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є випадковим вектором з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді очікувана дохідність та дисперсія портфеля найменшої дисперсії становлять, відповідно*

$$R_{GMV} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}},\ V_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}. \tag{15}$$

Доведення. Підставивши у (9) – (10) ваги портфеля найменшої дисперсії (14), отримаємо необхідне твердження.

Зауважимо, що з наслідку 1 випливає, що на графіку ефективної множини портфель найменшої дисперсії є вершиною параболи. Ми отримали відповідь на перше питання, в які портфелі потрібно інвестувати кошти, щоб ризик (у сенсі дисперсії) був найменшим. Для того, щоб отримати відповідь на питання, чи не будуть портфелі найменшої дисперсії завжди мати від'ємну дохідність, розглянемо наступний приклад.

Приклад 2. Нехай інвестор інвестує кошти тільки у два фінансові активи, акції українських компаній "Укртелеком" та "Мотор Січ". У прикладі 1 ми вже оцінили параметри дохідностей акцій на основі біржових курсів за період часу з 01.04.2014 до 31.03.2015,

$$\hat{\mu}_1 = 0.024644,\ \hat{\mu}_2 = 0.181358,$$
$$\hat{\sigma}_1^2 = 14.036031,\ \hat{\sigma}_2^2 = 3.667274,\ \hat{\sigma}_{12} = 1.00238.$$

Тобто

$$\boldsymbol{\mu} = (0.024644,\, 0.181358)',\ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 14.036031 & 1.00238 \\ 1.00238 & 3.667274 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи попередні значення в (14) та (15), отримаємо

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = (0.16975,\, 0.83025)',\ \hat{R}_{GMV} = 0.15476,\ \hat{V}_{GMV} = 3.2149.$$

Зауважимо, що ваги портфеля лежать у межах між 0 та 1, хоча цієї умови ми не накладали. Крім того, ми отримали, що очікувана дохідність портфеля найменшої дисперсії додатна (це не завжди виконується в загальному випадку), а отже, в цьому випадку вкладання коштів у такий портфель має зміст.

Розглянемо деякі властивості портфелів, що належать ефективній множині. Для спрощення подальших викладок уведемо наступні позначення

$$a = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu},\ b = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu},\ c = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1},\ d = bc - a^2,$$
$$\mathbf{g} = 1/d(b\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}),\ \mathbf{h} = 1/d(c\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}).$$

Позначимо також

$$s = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{R} = \mathbf{\Sigma}^{-1} - \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}. \tag{16}$$

Твердження 3. Для довільного числа $R \in I\!R$ існує єдиний портфель $\mathbf{w}_R$ з очікуваною дохідністю R, що належить ефективній множині. Причому ваги портфеля задаються рівністю

$$\mathbf{w}_R = \mathbf{g} + \mathbf{h}R. \tag{17}$$

Доведення. Зафіксуємо довільне число $R \in I\!R$ та розглянемо таку мінімізаційну проблему

$$\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \to \min \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1,\ \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} = R.$$

Розв'яжемо її за допомогою методу множників Лагранжа, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases},$$

де $\mathbf{L} = \mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1(\mathbf{1}'\mathbf{w} - 1) - \lambda_2(\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} - R)$ функція Лагранжа, $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)'$ k-вимірний нуль-вектор. Обчислимо часткові похідні в попередній системі

$$\begin{cases} 2\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda_1\mathbf{1} - \lambda_2\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \\ \mathbf{1}'\mathbf{w} - 1 = 0 \\ \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} - R = 0 \end{cases}.$$

Використовуючи попередні позначення, розв'зок системи можемо записати у вигляді

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{d}(b - aR) \\ \lambda_2 = \frac{2}{d}(cR - a) \\ \mathbf{w} = \frac{1}{d}(b\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{d}(c\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})R \end{cases}.$$

Твердження доведено.

Твердження 4. Нехай портфель $\mathbf{w}$ з очікуваною дохідність R_w та дисперсією V_w належить ефективній множині, тоді характеристики портфеля задовольняють рівність

$$\frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1. \tag{18}$$

Доведення. Оскільки портфель $\mathbf{w}$ належить ефективній множині, то з попередньої теореми випливає, що ваги його можна записати у вигляді

$$\mathbf{w} = \frac{1}{d}(b\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \frac{1}{d}(c\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})R_w,$$

причому очікувана дохідність його становить $\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = R_w$. Обчислимо дисперсію портфеля

$$\begin{aligned}
V_w &= \mathbf{w}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}' = \frac{1}{d^2}\Big((b\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) + \\
&+ (c\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})R_w\Big)'\boldsymbol{\Sigma} \times \\
&\times \Big((b\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}) + (c\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - a\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})R_w\Big)' = \\
&= \frac{1}{d}(b + cR_w^2 - 2aR_w).
\end{aligned}$$

Використовуючи елементарні алгебраїчні перетворення, рівність $V_w = \frac{1}{d}(b + cR_w^2 - 2aR_w)$ може бути зведена до вигляду (18). Твердження доведено.

З вищенаведеного випливає перший критерій оптимальності портфеля, а саме критерій мінімізації дисперсії. Сам портфель називається портфелем найменшої дисперсії та на площині (V_w, R_w) є вершиною параболи, яка графічно зображає ефективну множину.

Зауважимо, що раніше такий критерій побудови оптимального портфеля називався критерій мінімізації ризику, проте, як зазначено вище, дисперсія не є найліпшою з можливих мір ризику, тому, хоча цей критерій часто використовують на практиці, він не є найліпшим. У попередньому розділі ми також розглядали інші міри ризику. Виникає питання, чи збігаються портфелі з найменшою дисперсією і найменшим рівнем VaR. Для відповіді на це питання застосуємо до побудови оптимального портфеля фінансових активів критерій мінімізації VaR.

3.2.2 Критерій мінімізації VaR портфеля

Насамперед звернемо увагу на те, що, припустивши, на ринку немає можливості безризикового отримання доходів та дохідності усіх фінансових активів є нормально розподіленими, незалежними в часі, випадковими величинами, VaR за рівня довіри α портфеля фінансових активів можемо обчислити так

$$M_w = VaR_\alpha(\mathbf{X}) = z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w, \tag{19}$$

де z_α – α квантиль стандартного нормального розподілу.

Ураховуючи (9) – (10) та (19), розглянемо оптимізаційну задачу

$$z_\alpha \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \min \;\text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1. \tag{20}$$

Як і в попередньому випадку, ми не накладаємо умови додатності ваг портфеля.

Лема 1. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді якщо портфель з найменшим рівнем VaR існує, то він належить ефективній множині*

Доведення. Припустимо, що за рівня довіри α портфель з найменшим рівнем VaR $\mathbf{w}$ існує та твердження леми невірне, тобто, що портфель $\mathbf{w}$ не належить ефективній множині. З означення ефективної множини випливає, що вона містить портфель $\mathbf{w}_0 \neq \mathbf{w}$ такий, що $R_{w_0} \geq R_w$, $V_{w_0} \leq V_w$, причому одна з нерівностей є строгою. Тоді з (19) отримаємо

$$z_\alpha \sqrt{V_{w_0}} - R_{w_0} < z_\alpha \sqrt{V_w} - R_w,$$

а це суперечить припущенню про те, що $\mathbf{w}$ є портфелем з найменшим рівнем VaR. Лему доведено.

З леми 1 бачимо, що змінивши міру для оцінки ризику портфеля, портфель з найменшим рівнем ризику належить ефективній множині.

Чи буде цей портфель на множині (V_w, R_w) також вершиною параболи, чи ні?

Теорема 3. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді розв'язок задачі (20) має вигляд*

$$\mathbf{w}_{MVaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\boldsymbol{R\mu}, \tag{21}$$

де $\mathbf{w}_{GMV}$ та V_{GMV} – відповідно, ваги та дисперсія портфеля найменшої дисперсії; z_α – α квантиль стандартного нормального розподілу; $\boldsymbol{R}$ та s задаються рівностями (16).

Доведення. Зауважимо, що, враховуючи (5), оптимізаційну проблему (20) можемо переписати у вигляді

$$z_\alpha\sqrt{V_w} - R_w \to \min \quad \text{за умови, що} \quad \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1.$$

Оскільки з леми 1 нам відомо, що портфель з найменшим рівнем VaR (розв'язок (20)) належить ефективній множині, то, використовуючи твердження 4, очікувана дохідність та дисперсія портфеля цього портфеля задовольняють рівність (18). Тобто

$$\frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1.$$

Оскільки умова $\mathbf{1}'\mathbf{w} = 1$ є еквівалентна тому, що портфель з вагами $\mathbf{w}$ належить ефективній множині, то можемо замінити цю умову на еквівалентну їй у термінах очікуваної дохідності та дисперсії портфеля, а саме

$$\frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1.$$

Отже, нам потрібно розв'язати таку задачу

$$z_\alpha\sqrt{V_w} - R_w \to \min \quad \text{за умови, що} \quad \frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1.$$

Виразимо з умови R_w через V_w. Отримаємо

$$R_w = \frac{a}{c} + \sqrt{\frac{d}{c}(V_w - \frac{1}{c})}.$$

Оптимізаційна задача тепер зводиться до знаходження безумовного мінімуму функції

$$f(V_w) = z_\alpha\sqrt{V_w} - \frac{a}{c} - \sqrt{\frac{d}{c}(V_w - \frac{1}{c})}.$$

Зауважимо, що умова $V_w \geq \frac{1}{c}$ виконується, оскільки $V_{GMV} = 1/c$. Необхідною умовою екстремуму функції $f(V_w)$ є

$$\frac{df(V_w)}{dV_w} = \frac{z_\alpha}{2\sqrt{V_w}} - \frac{\sqrt{d/c}}{2\sqrt{V_w - 1/c}} = 0.$$

Розв'язавши попереднє рівняння стосовно V_w, беручи до уваги, що точка $V_w = 1/c$ не може бути розв'язком задачі, оскільки $\lim\limits_{V_w \to 1/c} df(V_w)/dV_w = -\infty$, отримаємо

$$V_w^* = \frac{z_\alpha^2}{cz_\alpha^2 - d}.$$

Точка V_w^* є точкою мінімуму функції $f(V_w)$, бо за умови $z_\alpha^2 > d/c$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 f(V_w)}{(dV_w)^2}(V_w^*) &= 1/4\frac{\sqrt{d/c}V_w^{3/2} - z_\alpha(V_w - 1/c)^{3/2}}{V_w^{3/2}(V_w - 1/c)^{3/2}}|_{V_w = V_w^*} = \\
&= 1/4\sqrt{d/c}z_\alpha(z_\alpha^2 - d/c)(V_w^*(V_w^* - 1/c))^{-3/2} > 0.
\end{aligned}$$

Отже, ми знайшли дисперсію портфеля з найменшим рівнем VaR. З (18), оскільки такий портфель належить ефективній множині, знаходимо очікувану дохідність

$$R_w^* = a/c + \frac{d/c}{\sqrt{cz_\alpha^2 - d}}.$$

Підставивши R_w^* в (17) та перейшовши в позначеннях до $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, знайдемо ваги портфеля з найменшим рівнем VaR

$$\mathbf{w}_{MVaR} = \mathbf{g} + R_w^*\mathbf{h} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\boldsymbol{R\mu}.$$

Теорему доведено.

При доведенні теореми 3 ми визначили один важливий факт.

Наслідок 2. *Портфель з найменшим рівнем VaR за рівня довіри α існує тоді і лише тоді, коли $z_\alpha^2 > d/c$.*

Наслідок 3. *В умовах теореми 3 характеристики портфеля з найменшим рівнем VaR за рівня довіри α мають вигляд*

$$\begin{aligned} R_{MVaR} &= \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\mu} = R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{z_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}}, \\ V_{MVaR} &= \mathbf{w}'_{VaR}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}_{VaR} = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s}V_{GMV}, \\ M_{MVaR} &= \sqrt{z_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \end{aligned} \tag{22}$$

де R_{MVaR}, V_{MVaR} та M_{MVaR} – відповідно, очікувана дохідність, дисперсія та VaR_α портфеля з найменшим рівнем VaR.

З теорем 2 та 3 випливає, що ваги портфелів з найменшою дисперсією та з найменшим рівнем VaR не збігаються. Зауважимо, що з доведення теореми 3 бачимо, що $V_{GMV} \leq V_{MVaR}$, причому знак нерівності строгий для усіх рівнів довіри $0.5 < \alpha < 1$. Крім того, з леми 1 випливає, що обидва портфелі належать ефективній множині, отже, тоді $R_{MVaR} \geq R_{GMV}$, зі строгим знаком нерівності для всіх $0.5 < \alpha < 1$.

Наслідок 4. *В просторі (V_w, R_w) портфель з найменшим рівнем VaR за рівнів довіри* $0.5 < \alpha < 1$ *на ефективній множині знаходиться вище,* *ніж портфель найменшої дисперсії, причому ці портфелі збігаються при* $\alpha = 1$.

Отже, з наслідку 4 випливає, що портфелі найменшої дисперсії і з найменшим рівнем VaR збігаються лише у випадку, коли рівень довіри α для обчислення VaR дорівнює 1. Зауважимо, що за нормально розподілених дохідностей фінансових активів, оскільки $z_1 = +\infty$, ми отримаємо

$$VaR_1 = z_1\sigma - \mu = +\infty.$$

У цьому випадку VaR не надає жодної інформації про можливий ризик. Можемо провести паралелі з інтервалами довіри. У випадку рівня довіри 1 інтервали мають вигляд $(-\infty, +\infty)$ і також не мають жодної цінності.

Приклад 3. Розглянемо на прикладі даних з прикладу 1, як співвідносяться між собою очікувані дохідності та дисперсії портфелів з найменшою дисперсією та з найменшим рівнем VaR. Нагадаємо, ми вкладаємо кошти в акції двох українських підприємств "Укртелеком" та "Мотор Січ". На основі даних про ціни акцій за період часу з 01.04.2014 до 31.03.2015 ми отримали такі значення

$$\hat{\mu}_1 = 0.024644, \; \hat{\mu}_2 = 0.181358,$$
$$\hat{\sigma}_1^2 = 14.036031, \; \hat{\sigma}_2^2 = 3.667274, \; \hat{\sigma}_{12} = 1.00238.$$

Тобто

$$\boldsymbol{\mu} = (0.024644,\, 0.181358)', \; \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 14.036031 & 1.00238 \\ 1.00238 & 3.667274 \end{pmatrix}.$$

Причому в прикладі 2 ми знайшли ваги та характеристики портфеля з найменшою дисперсією

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = (0.16975,\, 0.83025)', \; \hat{R}_{GMV} = 0.15476, \; \hat{V}_{GMV} = 3.2149.$$

На основі попередніх даних знайдемо ваги та характеристики портфелів з найменшим рівнем VaR за рівнів довіри $\alpha \in \{0.9, 0.95, 0.99\}$. Підставляючи значення характеристик розподілу дохідностей акцій в (21) та (22), отримаємо (табл. 1).

Таблиця 1

Ваги та характеристики портфелів з найменшим рівнем VaR

α	$w_{1,MVaR}$	$w_{2,MVaR}$	R_{MVaR}	V_{MVaR}
0.9	0.15578	0.84422	0.15694	3.21796
0.95	0.15887	0.84113	0.15646	3.21676
0.99	0.16206	0.83794	0.15596	3.21583

Отже, з табл. 1 бачимо, що за зростання рівня довіри α ваги та характеристики портфеля цінних паперів з найменшим рівнем VaR прямують до ваг та характеристик портфеля найменшої дисперсії. Зауважимо, що оскільки з леми 1 маємо, що портфель з найменшим рівнем VaR належить ефективній множині, дохідності та дисперсії портфелів з найменшим рівнем VaR спадають до характеристик портфеля найменшої дисперсії за зростання рівня довіри α.

На рис. 6 графічно зображено попередньо сформульовані результати. Бачимо, що за зменшення рівня довіри для обчислення VaR характеристики портфеля з найменшим рівнем VaR прямують до відповідних характеристик портфеля найменшої дисперсії.

З прикладу 4 ми бачимо, що критерії мінімуму дисперсії та VaR приводять нас до різних портфелів, хоча сам критерій є один, а саме – критерій мінімуму ризику. Можемо зробити висновок, що інвестор, який за міру ризику вибирає VaR, за всіх рівнів довіри $0.5 < \alpha < 1$ отримує портфель з найменшим рівнем ризику, очікувана дохідність якого буде більшою за очікувану дохідність портфеля найменшої дисперсії. Варто також зазначити, що і дисперсія такого портфеля є більшою. Зауважимо також, що портфель найменшої дисперсії та портфель з найменшим рівнем VaR збігаються, якщо рівень довіри α становить 1. Крім того, оскільки VaR_α портфеля найменшої дисперсії становить $VaR_\alpha(\mathbf{w}_{GMV}) = z_\alpha\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}$, то очевидно, що VaR такого портфеля за всіх рівнів довіри є більше, ніж VaR портфеля з найменшим рівнем VaR з відповідним рівнем довіри α (22).

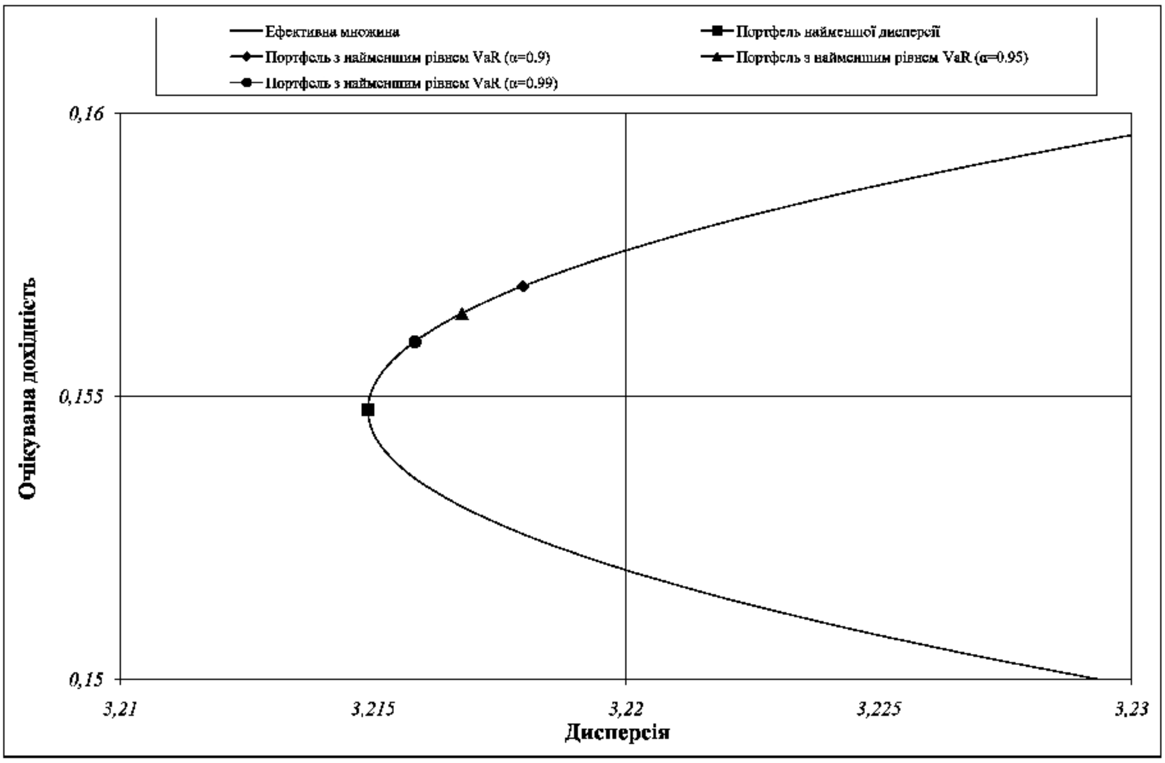

Рис. 6. Розміщення портфелів на ефективній множині

Раніше ми зазначали, що VaR як міра ризику має певні недоліки. Головними є: VaR не надає повної інформації про втрати (якщо $VaR_\alpha = 100\$$, то не виключено, що втрати з ймовірністю $(1-\alpha)/2$ можуть становити, наприклад $10\,000\$$); VaR не задовольняє в загальному випадку умову субадитивності. Якщо перший недолік можна усунути, використовуючи для оцінки ризику різні рівні довіри, то другий є доволі серйозним. Зауважимо, що коли ми оперуємо одним фінансовим активом, чи багатьма фінансовими активами одного типу, – то цей недолік для нас не створює незручностей. Однак коли ми говоримо про портфельне інвестування, то субадитивність міри можна переформулювати так: сукупний ризик портфеля є небільший, ніж зважена сума ризиків його компонент. Нехай ми інвестуємо кошти в k фінансових активів. Позначимо вектор дохідностей $\mathbf{X} = (X_1, X_2, .., X_k)$ та ваги портфеля $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_k)$ і нехай для оцінки ризиків ми використовуємо міру ризику μ. Тоді умову субадитивності в сенсі ризику портфеля можемо записати

$$\mu(\mathbf{X}) \leq \sum_{i=1}^{k} w_i \mu(X_i).$$

3.2.3 Критерій мінімізації CVaR портфеля

Зауважимо, що умова субадитивності міри є найбільш суперечливою серед усіх умов когерентності. Вона є доволі природна, оскільки незрозуміло, що сумарно резервувати ризиків потрібно більше, ніж зважену суму ризиків окремих компонент. Отже, необхідно розглянути вплив переходу до когерентних мір ризику за портфельного інвестування. Ми зазначали, що когерентна міра не єдина. Оскільки для банківської діяльності рекомендованою мірою ризику є VaR, доцільно використовувати когерентну міру, яка є перетворенням VaR. Такою мірою є CVaR. Наприклад, припустимо, що на ринку немає можливості безризикового отримання прибутку та, що дохідності всіх фінансових активів є незалежними в часі та нормально розподіленими випадковими величинами

CVaR за рівня довіри α портфеля фінансових активів $\mathbf{w}$ з очікуваною дохідністю R_w та дисперсією V_w обчислюється за такою формулою

$$CM_w = CVaR_\alpha(\mathbf{X}) = k_\alpha\sqrt{V_w} - R_w, \tag{23}$$

де $k_\alpha = -\frac{\int_{-\infty}^{-z_\alpha} x\phi(x)dx}{1-\alpha}$, z_α та $\phi(x)$ – відповідно, α квантиль та густина стандартного нормального розподілу. Аналогічно до (13) та (20), розглянемо оптимізаційну задачу

$$k_\alpha\sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \min \ \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1. \tag{24}$$

Очевидно, що якщо розв'язок задачі (24) існує, то це і будуть ваги портфеля з найменшим рівнем $CVaR_\alpha$. Аналогічно, як і в попередньому випадку, виникає питання, чи належить портфель з найменшим рівнем CVaR ефективній множині.

Лема 2. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді якщо портфель з найменшим рівнем CVaR існує, то він належить ефективній множині.*

Доведення. Доведення леми аналогічне до доведення леми 1.

Для відповіді на питання про взаємне розміщення портфелів з найменшим рівнем ризику за різних мір ризику на ефективній множині розв'яжемо задачу (24).

Теорема 4. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді розв'язок задачі (24)* *має вигляд*

$$\mathbf{w}_{MCVaR} = \mathbf{w}_{GMV} + \frac{\sqrt{V_{GMV}}}{\sqrt{k_\alpha^2 - s}} \boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}, \tag{25}$$

де $\mathbf{w}_{GMV}$ *та* V_{GMV} *– відповідно, ваги та дисперсія портфеля найменшої дисперсії;* $k_\alpha = -\frac{\int_{-\infty}^{-z_\alpha} x\phi(x)dx}{1-\alpha}$*;* z_α *та* $\phi(x)$ *– відповідно,* α *квантиль та густина стандартного нормального розподілу;* $\boldsymbol{R}$ *та* s *задаються рівностями (16).*

Доведення. Доведення теореми є повністю аналогічне до доведення теореми 3, замінивши z_α на k_α.

Попередня теорема, аналогічно як і у випадку VaR, має два важливі наслідки.

Наслідок 5. *Портфель з найменшим рівнем CVaR за рівня довіри* α *існує тоді і лише тоді, коли* $k_\alpha^2 > d/c$*.*

Наслідок 6. *В умовах теореми 4 характеристики портфеля з найменшим рівнем CVaR за рівня довіри* α *мають вигляд*

$$\begin{aligned} R_{MCVaR} &= R_{GMV} + \frac{s}{\sqrt{k_\alpha^2 - s}}\sqrt{V_{GMV}}, \\ V_{MCVaR} &= \frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s} V_{GMV}, \\ CM_{MCVaR} &= \sqrt{k_\alpha^2 - s}\sqrt{V_{GMV}} - R_{GMV}, \end{aligned} \tag{26}$$

де R_{MCVaR}*,* V_{MCVaR} *та* CM_{MCVaR} *– відповідно, очікувана дохідність, дисперсія та* $CVaR_\alpha$ *портфеля з найменшим рівнем CVaR.*

Зауважимо, що правильним є таке твердження.

Твердження 5. Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є нормально розподіленим з параметрами $\boldsymbol{\mu}$

та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k},\ \sigma_i > 0$. Тоді якщо за рівня довіри α існує портфель з найменшим рівнем VaR, то існує і портфель з найменшим рівнем CVaR.

Доведення. Для доведення твердження достатньо показати, що $k_\alpha > z_\alpha$. Маємо

$$\begin{aligned} k_\alpha &= -\frac{\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha} x\phi(x)dx}{1-\alpha} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha} (-x)\phi(x)dx}{1-\alpha} \geq \\ &\geq z_\alpha \frac{\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha} \phi(x)dx}{1-\alpha} = z_\alpha \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = z_\alpha. \end{aligned}$$

Твердження доведено.

Враховуючи той факт, що $k_\alpha > z_\alpha$ та те, що портфелі з найменшими рівнями VaR та CVaR, а також найменшої дисперсії належать ефективній множині, отримуємо

$$R_{GMV} \leq R_{MCVaR} \leq R_{MVaR},$$

$$V_{GMV} \leq V_{MCVaR} \leq V_{MVaR}.$$

Тобто на ефективній множині портфель з найменшим рівнем $CVaR_\alpha$ лежить між портфелем найменшої дисперсії та портфелем з найменшим рівнем VaR_α. Щоб переконатися в цьому, розглянемо такий приклад.

Приклад 4. Використаємо знову дані з прикладу 1 для графічного зображення портфелів найменшої дисперсії, з найменшим рівнем VaR та CVaR за рівня довіри $\alpha = 0.9$. На основі даних про ціни акцій "Укртелекому" та "Мотор Січі" за період часу з 01.04.2014 до 31.03.2015 ми отримали наступні значення

$$\boldsymbol{\mu} = (0.024644,\, 0.181358)',\ \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 14.036031 & 1.00238 \\ 1.00238 & 3.667274 \end{pmatrix}.$$

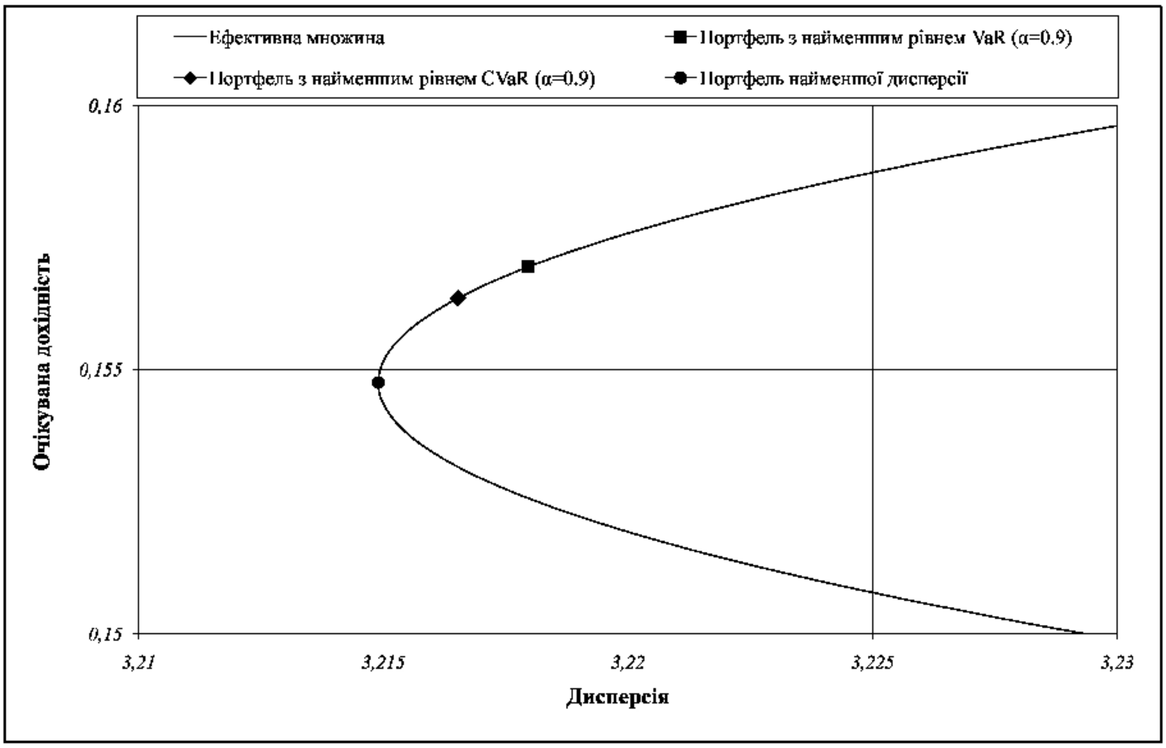

Рис. 7. Розміщення портфелів на ефективній множині

У прикладах 2 та 3 ми знайшли ваги та характеристики портфеля з найменшою дисперсією та з найменшим рівнем VaR за $\alpha = 0.9$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}}_{GMV} &= (0.16975,\, 0.83025)', \\
\hat{R}_{GMV} &= 0.15476,\ \hat{V}_{GMV} = 3.2149, \\
\hat{\mathbf{w}}_{MVaR,0.9} &= (0.15578,\, 0.84422)', \\
\hat{R}_{MVaR,0.9} &= 0.15694,\ \hat{V}_{MVaR,0.9} = 3.21796.
\end{aligned}$$

Підставляючи значення характеристик розподілу дохідностей акцій в (25) та (26), отримаємо

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{w}}_{MCVaR,0.9} &= (0.15956,\, 0.84044)', \\
\hat{R}_{MCVaR,0.9} &= 0.15635,\ \hat{V}_{MCVaR,0.9} = 3.21653.
\end{aligned}$$

Ми бачимо, що очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем

CVaR є більшою, ніж очікувана дохідність портфеля найменшої дисперсії та менша, ніж очікувана дохідність портфеля з найменшим рівнем VaR. Аналогічні співвідношення простежуються і для дисперсії портфелів.

На рис. 7 зображено взаємне розміщення портфелів найменшої дисперсії та з найменшими рівнями VaR та CVaR за рівня довіри $\alpha = 0.9$ на ефективній множині.

Ми розглянули основні критерії оптимізації портфеля, що ґрунтуються на мінімізації ризику портфеля. Ще одним критерієм оптимальності портфеля можна вибрати критерій максимізації очікуваної дохідності. Розглядаючи оптимізаційну задачу, аналогічну до задач (13), (20) та (24), тобто

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \max \ \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1,$$

ми отримаємо портфель з $R_w = +\infty$. Тому таку задачу потрібно розглядати у вигляді

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \max \ \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \le V, \ \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1. \tag{27}$$

Зауважимо, що портфель, який є розв'язком задачі (27), є портфель з дисперсією V та очікуваною дохідністю $R = \frac{a}{c} + \sqrt{\frac{d}{c}(V - \frac{1}{c})}$, оскільки він належить ефективній множині, а отже його характеристики задовольняють (18). Тому задачу (27) можемо звести до еквівалентної задачі мінімізації ризику з додатковою умовою

$$\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \to \min \ \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \ge R, \ \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1.$$

Розв'язок попередньої задачі буде такий самий, що і розв'язок задачі

(27). Тому розглядати задачі максимізації очікуваної дохідності ми не будемо.

3.3 Критерії максимізації очікуваної квадратичної корисності портфеля

На практиці частіше за все розглядають критерії оптимізації портфеля, що грунтуються на очікуваній дохідності та на ризику портфеля. В загальному випадку ця задача може бути сформульована так

$$\begin{cases} \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \to \min \\ \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \to \max \end{cases} \quad \text{за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1.$$

Очевидно, що в такому формулюванні оптимізаційну задачу розв'язати неможливо. Тому для порівняння портфелів використовують функції, які задаються певним співвідношенням між очікуваною дохідністю та ризиком, і на основі цих функцій (їх максимізації чи мінімізації) будують оптимальні портфелі.

З курсу математичної економіки відомо, що будь-який фінансовий актив має для кожного інвестора свою певну корисність. Оскільки портфель фінансових активів ми можемо також розглядати як один фінансовий актив з дохідністю R_w та ризиком V_w, очевидно, що можна оцінити корисність портфеля фінансових активів. Однією з найвідоміших функцій корисності портфеля є очікувана квадратична корисність портфеля, яка задається такою рівністю

$$f(R_w, V_w) = R_w - \frac{1}{2}\beta V_w, \tag{28}$$

де $\beta \geq 0$. Зрозуміло, що чим вищою є корисність, тим кращим для інвестора є портфель. Коефіцієнт β в (28) називається коефіцієнтом, що описує ставлення інвестора до ризику. Наприклад, якщо $\beta = 0$, то інвестор є повністю схильний до ризику, тобто основним для інвестора є прибуток, а на ризик він не звертає уваги, а якщо $\beta = +\infty$, то інвестор є повністю не схильний до ризику, тобто в цьому випадку інвестора не цікавить прибуток, він зацікавлений лише в мінімізації ризику. На жаль, визначити для кожного інвестора його особисте ставлення до ризику є досить важко. Крім того, в різні моменти часу, очевидно, коефіцієнт β змінюється залежно від зовнішніх умов. Більше того, можемо сказати, що цей коефіцієнт залежить від настрою інвестора. Тобто визначити точне значення β неможливо. Проте в теорії портфелів критерій максимізації очікуваної квадратичної корисності відіграє надзвичайно важливу роль.

Розглянемо оптимізаційну задачу

$$f(R_w, V_w) = R_w - \frac{1}{2}\beta V_w \to \max \text{ за умови, що } \mathbf{1}'\mathbf{w} = 1. \tag{29}$$

Якщо розв'язок задачі (29) існує, позначимо його $\mathbf{w}_{EU}$ та будемо називати портфель найбільшої очікуваної квадратичної корисності.

Лема 3. *Якщо портфель найбільшої очікуваної квадратичної корисності $\mathbf{w}_{EU}$ існує, то він належить ефективній множині.*

Доведення. Доведення леми повністю аналогічне до доведення леми 1, за винятком того, що в цьому випадку умова про нормальність розподілу вектора дохідностей фінансових активів, з яких складено портфель, не потрібна.

Отже, бачимо, що і портфель $\mathbf{w}_{EU}$ належить ефективній множині. Проте невідомо, де саме стосовно вже розглянутих портфелів він буде знаходитися. Щоб отримати відповідь на це питання, спочатку потрібно розв'язати задачу (29).

Теорема 5. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є випадковим вектором з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді розв'язок задачі (29) має вигляд*

$$\mathbf{w}_{EU} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}, \tag{30}$$

де $\boldsymbol{R}$ задається рівністю (16).

Доведення. Запишемо функцію Лагранжа для знаходження умовного екстремуму (29)

$$\mathbf{L} = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \frac{\beta}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda(1 - \mathbf{1}'\mathbf{w}).$$

Необхідними умовами екстремуму є

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}} = \boldsymbol{\mu} - \beta\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \lambda\mathbf{1} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{1}'\mathbf{w} = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши перше рівняння системи стосовно $\mathbf{w} = \frac{1}{\beta}\Big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\Big)$, підставимо отриманий результат у друге рівняння системи

$$\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} = \beta.$$

Розв'язавши це рівняння стосовно λ та підставивши результат в рівняння для $\mathbf{w}$, отримаємо

$$\mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{1}{\beta}\Big(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\Big).$$

Оскільки матриця коваріацій $\mathbf{\Sigma}$ є додатно визначена та симетрична, і крім того,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{w}^2} = -\beta \mathbf{\Sigma},$$

то вектор $\mathbf{w}^*$ є розв'язком задачі (29), що і треба було довести.

Очевидним наслідком з теореми 5 є наслідок 7.

Наслідок 7. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є випадковим вектором з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді характеристики портфеля найвищої очікуваної корисності мають вигляд*

$$R_{EU} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu},\ V_{EU} = \frac{1}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}, \tag{31}$$

де $\boldsymbol{R}$ задається рівністю (16).

Доведення. Для доведення наслідку достатньо підставити ваги портфеля найвищої очікуваної квадратичної корисності (30) в (9) – (10).

Наслідок 8. *Нехай ми формуємо портфель з k фінансових активів і нехай вектор дохідностей $\mathbf{X}_t$ є випадковим вектором з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$, причому для всіх $i = \overline{1,k}$, $\sigma_i > 0$. Тоді за $\beta = +\infty$ ваги портфеля найвищої очікуваної квадратичної корисності та портфеля найменшої дисперсії збігаються. Більше того, змінюючи значення параметра β від 0 до $+\infty$, отримаємо всі портфелі ефективної множини.*

Отже, з попереднього наслідку бачимо, що всі портфелі, які знаходяться на ефективній множині, є портфелями найвищої очікуваної квадратичної корисності за певного значення коефіцієнта відношення інвестора до ризику. З урахуванням цього робимо висновок, що і портфелі з найменшим рівнем VaR та CVaR є також портфелями найвищої очікуваної квадратичної корисності у випадку, коли коефіцієнти, що описують ставлення інвестора до ризику, становлять, відповідно, $\frac{\sqrt{z_\alpha^2-s}}{\sqrt{V_{GMV}}}$ та $\frac{\sqrt{k_\alpha^2-s}}{\sqrt{V_{GMV}}}$.

Приклад 5. Використовуючи дані з прикладу 1, розглянемо портфель найвищої очікуваної квадратичної корисності для інвестора з $\beta = 2$. Підставимо характеристики дохідностей акцій "Укртелекому" та "Мотор Січі" в (30) та (31) та обчислимо

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}}_{EU} &= (0.14979, 0.85021)',\\ \hat{R}_{EU} &= 0.15789,\ \hat{V}_{EU} = 3.22115.\end{aligned}$$

Графічно розміщення цього портфеля на ефективній множині та стосовно попередньо розглянутих портфелів зображено на рис. 8.

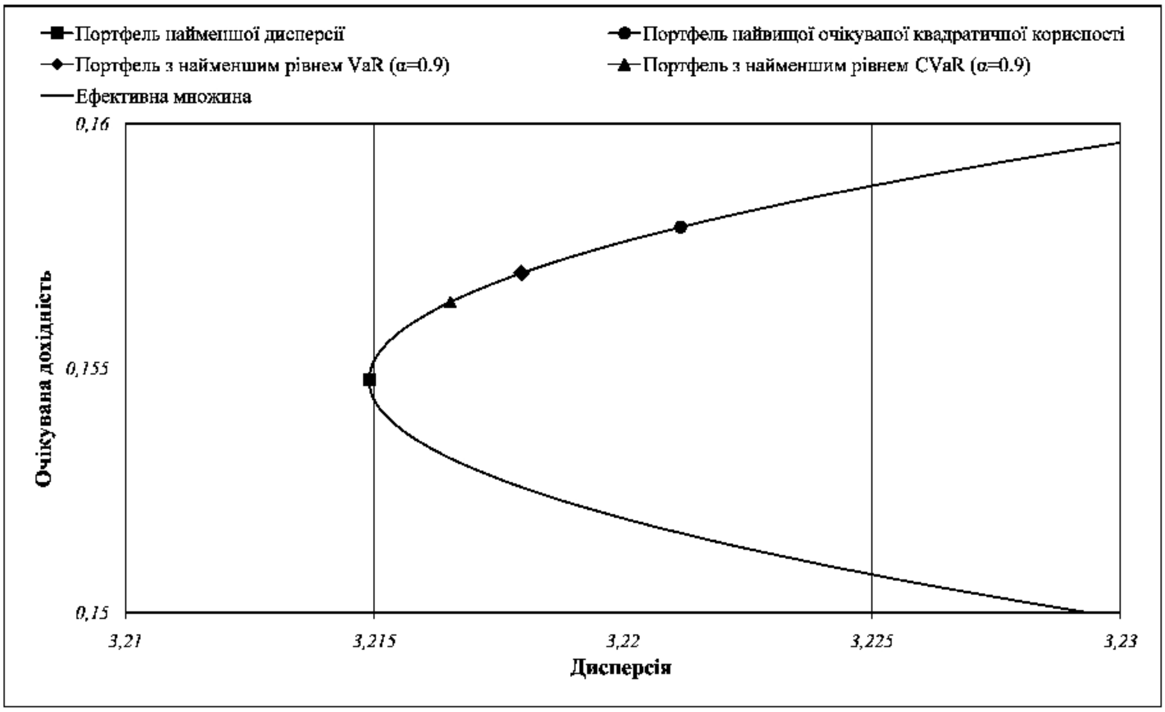

Рис. 8. Розміщення портфелів на ефективній множині

Зауваження. Портфель найвищої очікуваної квадратичної корисності на цей момент має більш теоретичне значення, оскільки точно визначити ставлення інвестора до ризику неможливо.

Раніше ми декілька разів зауважували, що припускаємо неможливість укладання коштів у безризикові активи. Проте вклади в надійні банки чи державні облігації можна розглядати як безризикові вклади. Наприклад, позначимо r_f дохідність безризикового активу. Тоді корисність портфеля може бути обчислена, як $f(R_w, V_w) = R_w - \frac{1}{2}\beta V_w = \mathbf{w}'(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) - \frac{1}{2}\beta\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$. Розглянемо задачу безумовної максимізації функції $f(R_w, V_w)$. Необхідною умовою екстремуму функції $f(R_w, V_w)$ є умова

$$(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) - \beta\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} = 0.$$

З попереднього рівняння отримаємо

$$\mathbf{w}^* = \frac{1}{\beta}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}).$$

Оскільки $\partial^2 f(R_w, V_w)/\partial\mathbf{w}^2 = -\beta\boldsymbol{\Sigma}$, то враховуючи, що матриця коваріацій є додатно визначена, отримаємо, що $\mathbf{w}^*$ є максимумом функції $f(R_w, V_w)$. Зрозуміло, що в цьому випадку умова $\mathbf{1}'\mathbf{w}^* = 1$ не виконується. Тому приймемо $w_0 = 1 - \mathbf{1}'\mathbf{w}^*$ відносна частка коштів інвестора, вкладених в безризиковий актив. Тепер ми можемо розглянути випадок, коли на ринку наявний безризиковий актив та інвестор усі кошти вкладає в ризикові. Для цього ми знайдемо коефіцієнт, що описує ставлення інвестора до ризику β з умови, що $\mathbf{1}'\mathbf{w}^* = 1$. Розв'язавши попереднє рівняння стосовно β, отримаємо $\beta = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})$. Підставивши це значення у вираз для $\mathbf{w}^*$, отримаємо ваги портфеля

$$\mathbf{w}_T = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}. \qquad (32)$$

Портфель з вагами (32) називається тангенсіальним портфелем. Цей портфель характеризується тим, що всі кошти інвестора вкладено в ризикові активи, незважаючи на можливість безризикового розміщення коштів. Очікувана дохідність та дисперсія тангенсіального портфеля мають вигляд

$$R_T = r_f + \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}, \tag{33}$$

$$V_T = \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}))^2}. \tag{34}$$

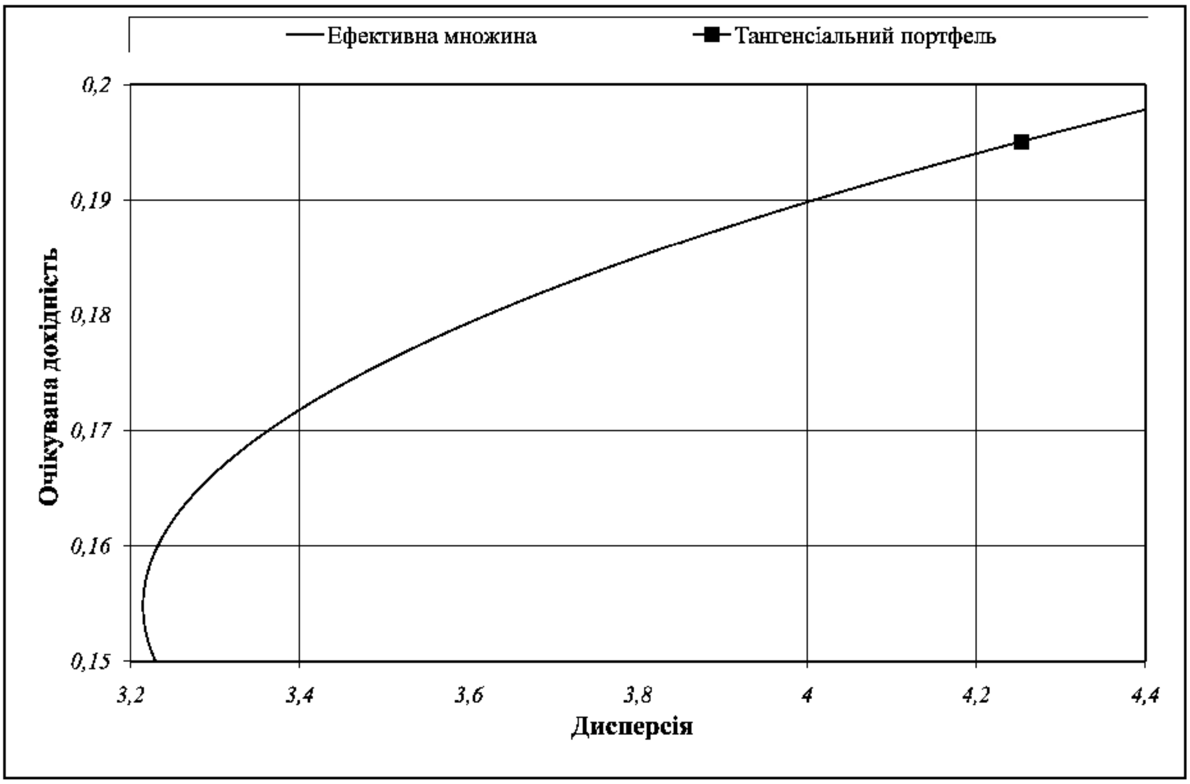

Рис. 9. Розміщення тангенсіального портфеля на ефективній множині

Приклад 6. Нехай ми вкладаємо в кошти в акції ”Укртелекому” та ”Мотор Січі” за наявності можливості безризикового розміщення під 7.5% річних. Використовуючи дані з прикладу 1, ми хочемо побудувати тангенсіальний портфель та знайти його місце на ефективній множині. Зауважимо, що оскільки ми розглядаємо щоденні дохідності, то $r_f = \frac{7.5}{250} = 0.03$, враховуючи, що в році в середньому 250 робочих днів. Підставляючи значення характеристик дохідностей та значення для r_f в (32) та (33), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_T &= (-0.08749, 1.08749)', \\ R_T &= 0.19507, \ V_T = 4.25379. \end{aligned}$$

На рис. 9 зображено місцезнаходження тангенсіального портфеля на ефективній множині. Зауважимо, що цей портфель є точкою дотику до ефективної множини в просторі $(\sqrt{V_w}, R_w)$ прямої, що проходить через точку $(0, r_f)$. В цьому випадку ефективна множина є гіперболою. Також варто звернути увагу на те, що у випадку тангенсіального портфеля ваги є від'ємними. Тому для практичного застосування цього портфеля потрібно за його побудови додати умову $w_1 \geq 0$, $w_2 \geq 0$.

3.4 Критерій оптимальності Шарпа

Ще однією важливою мірою для порівняння портфелів є відношення Шарпа

$$SR = \frac{R_w}{\sqrt{V_w}} = \frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}}. \tag{35}$$

Зауважимо, що відношення (35) описує премію за ризик на одиницю ризику, причому ми знову припускаємо, що на ринку немає можливості безризикового вкладення коштів. Очевидно, що чим більшим є відношення Шарпа, тим більшою є премія за одиницю ризику, відповідно, тим кращим є інвестиційний портфель. Тому задача для побудови оптимального портфеля в цьому випадку має вигляд

$$\frac{\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}} \to \max \text{ за умови, що } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1. \tag{36}$$

Якщо розв'язок існує, будемо називати його портфель найбільшого відношення Шарпа. Для того, щоб знайти розв'язок задачі (36), використаємо алгоритм, подібний до алгоритму знаходження розв'язку задачі (20), тобто задачі мінімізації VaR портфеля.

Лема 4. *Якщо портфель найбільшого відношення Шарпа* $\mathbf{w}_{SR}$ *існує, то він належить ефективній множині.*

Доведення. Доведення леми аналогічне до доведення леми 1.

Отже, з леми 4 маємо, що портфель з найбільшим відношенням Шарпа належить ефективній множині, а отже, його ваги та характеристики задовольняють рівності (17) та (18).

Теорема 6. *Нехай ми формуємо портфель з* k *фінансових активів і нехай вектор дохідностей* $\mathbf{X}_t$ *є випадковим вектором з параметрами* $\boldsymbol{\mu}$ *та* $\boldsymbol{\Sigma}$*, причому для всіх* $i = \overline{1,k}$*,* $\sigma_i > 0$*. Тоді розв'язок задачі (36) має вигляд*

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}. \tag{37}$$

Доведення. Оскільки з леми 4 нам відомо, що портфель з найбільшим відношенням Шарпа належить ефективній множині, то, використовуючи твердження 4, очікувана дохідність та дисперсія цього портфеля задовольняють рівність (18). Тобто

$$\frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1.$$

Оскільки умова $\mathbf{1}'\mathbf{w} = 1$ є еквівалентна тому, що портфель з вагами $\mathbf{w}$ належить ефективній множині, то можемо замінити цю умову на еквівалентну їй у термінах очікуваної дохідності та дисперсії портфеля, а саме

$$\frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1.$$

Отже, нам потрібно розв'язати таку задачу

$$\frac{R_w}{\sqrt{V_w}} \to \max \quad \text{за умови, що} \quad \frac{V_w}{1/c} + \frac{(R_w - a/c)^2}{d/c^2} = 1.$$

З умови маємо

$$R_w = \frac{a}{c} + \sqrt{\frac{d}{c}(V_w - \frac{1}{c})}.$$

Тобто нам необхідно знайти безумовний максимум функції

$$f(V_w) = \frac{\frac{a}{c} + \sqrt{\frac{d}{c}(V_w - \frac{1}{c})}}{\sqrt{\frac{d}{c}(V_w - \frac{1}{c})}}.$$

Аналогічно, як за доведення теореми (3), зауважимо, що умова $V_w \geq \frac{1}{c}$ виконується, оскільки $V_{GMV} = 1/c$, а це найменша можлива дисперсія портфеля. Запишемо необхідну умову екстремуму функції $f(V_w)$

$$\frac{df(V_w)}{dV_w} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{(V_w - 1/c)d/c}}\sqrt{V_w}d/c - \frac{1}{2\sqrt{V_w}}(a/c + \sqrt{d/c(V_w - 1/c)})}{V_w} = 0.$$

Попереднє рівняння можемо спростити до вигляду

$$\frac{d}{c^2} - \frac{a}{c}\sqrt{d/c(V_w - 1/c)} = 0,$$

оскільки $V_w > 0$. Розв'язавши попереднє рівняння стосовно V_w, отримаємо

$$V_w^* = \frac{b}{a^2} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Неважко показати, що $\frac{d^2 f(V_w)}{(dV_w)^2}(V_w^*) > 0$, тому точка V_w^* є точкою максимуму функції $f(V_w)$.

З (18) знаходимо очікувану дохідність портфеля з найбільшим відношенням Шарпа

$$R_w^* = \frac{a}{c} + \sqrt{\frac{d}{c}(V_w^* - \frac{1}{c})} = \frac{b}{a} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}.$$

Підставивши R_w^* в (17) та перейшовши в позначеннях до $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$, знайдемо ваги портфеля з найбільшим відношенням Шарпа

$$\mathbf{w}_{SR} = \mathbf{g} + R_w^* \mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}.$$

Теорему доведено.

За доведення теореми 6 ми знайшли також характеристики портфеля з найбільшим відношенням Шарпа. Сформулюємо цей результат у вигляді наслідку.

Наслідок 9. *В умовах теореми 6 характеристики портфеля з найбільшим відношенням Шарпа мають вигляд*

$$R_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}, \; V_{SR} = \frac{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{(\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}. \tag{38}$$

Зауваження. З (28) та (37) випливає, що тангенсіальний портфель є портфелем з найбільшим відношенням Шарпа, коли за можливості безризикового вкладання коштів усі кошти вкладають у ризикові активи. Та навпаки, портфель з найбільшим відношенням Шарпа є тангенсіальним портфелем за $r_f = 0$.

Приклад 7. На основі даних з прикладу 1 побудуємо портфель з найбільшим відношенням Шарпа та знайдемо його місце стосовно тангенсіального портфеля з прикладу 6 на ефективній множині.

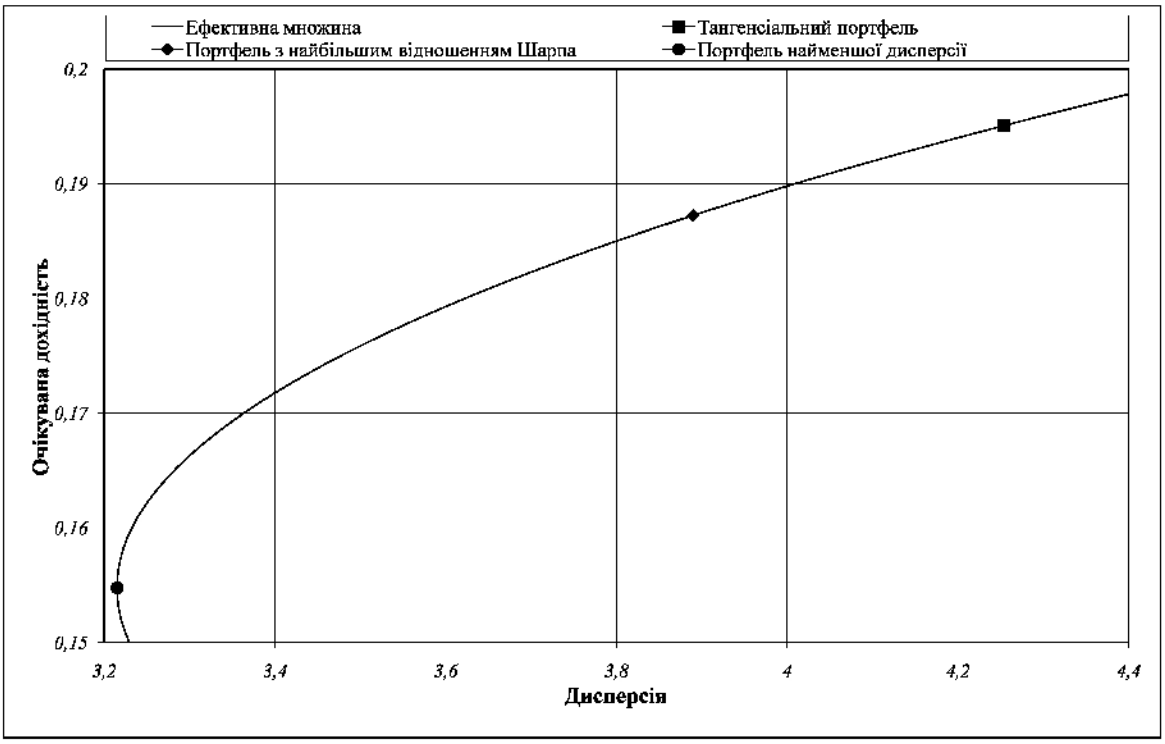

Рис. 10. Розміщення портфеля з найбільшим відношенням Шарпа на ефективній множині

Підставляючи характеристики дохідностей в (37) та (38), отримаємо

$$\mathbf{w}_{SR} = (-0.03762,\ 1.03762),$$
$$R_{SR} = 0.18725,\ V_{SR} = 3.89005.$$

Графічно розміщення портфеля з найбільшим відношенням Шарпа для випадку портфеля з двох акцій "Укртелекому" та "Мотор Січі" зображено на рис. 10.

Ми розглянули основні методи побудови оптимальних портфелів. Варто зазначити, що незалежність дохідностей у часі не є важливою умовою, більш важливою є неавтокорельованість дохідностей, що у випадку нормально розподілених випадкових величин є еквівалентною незалежності. З практики фінансового ринку відомо, що дохідності активів з частотою, вищою ніж щомісячна (тижневою, щоденною), не є нормально розподіленими. У таких дохідностей простежуються так звані ”важкі хвости”, тобто імовірність появи екстремально високих за абсолютним значенням дохідностей є більша, ніж у випадку нормально розподіленої випадкової величини. Крім того, між дохідностями активів простежується невелика автокореляція. Тобто припущення про неавтокорельованість та нормальний розподіл дохідностей на практиці не виконуються. Виявляється, що за доброї диверсифікації портфеля (тобто за наявності багатьох видів активів) портфелі, побудовані за попередніми алгоритмами залишаються ”майже оптимальними”, це означає, що значно збільшити чи зменшити вибрані показники портфеля неможливо. Отже, оптимальні у випадку нормально розподілених та неавтокорельованих дохідностей фінансових активів портфелі можна розглядати як оптимальні за довільних припущень щодо поведінки дохідностей фінансових активів. Як показано в [8], для щомісячних дохідностей фінансових активів та дохідностей з вищою частотою неможливо відхилити гіпотезу про нормальний розподіл. Тому під час дослідження таких дохідностей припущення про їхню нормальність є природним.

4 Оцінки ваг та характеристик портфеля

У цьому розділі ми розглянемо статистичні властивості ваг та характеристик портфеля. Зауважимо, що до цього часу ми припускали, що характеристики вектора дохідностей фінансових активів $\mathbf{X}_t$ є або відомими, або їхні оцінки ми розглядали як константи. Насправді це не зовсім правильно.

По-перше, характеристики дохідностей фінансових активів є невідомими на практиці, а тому мають бути оцінені. Зауважимо, що існує багато методів оцінки невідомих параметрів розподілу. Найпоширенішим є історичний метод, який ми вже використали у прикладі 1 для оцінки параметрів дохідностей фінансових активів "Укртелекому" та "Мотор Січі". Тобто оцінки параметрів розподілу дохідності (3), отримані історичним методом на основі вибірки з історичних даних про дохідності за n попередніх періодів, називаються вибірковими оцінками.

По-друге, так побудовані оцінки є випадковими величинами, тобто припущення, що отримані оцінки є константами, а не реалізацією випадкової величини, є досить грубою помилкою. Оскільки оцінки не є сталими за зміни вибірки та, крім того, залежать від розміру вибірки. Виникає питання, як це зауваження щодо поведінки оцінок характеристик дохідності впливатиме на поведінку портфелів та їх характеристик. Відповідь на це питання є очевидною, оцінки ваг портфелів та їх характеристик теж будуть випадковими величинами, які характеризуються функціями густини та розподілу, залежать від певних параметрів тощо. Отже, важливо розглянути статистичні властивості оцінок ваг портфелів та їх характеристик. Зауважимо, що це питання досить часто замовчується у фінансовій літературі і до нього лише порівняно недавно, в середині 90-х років минулого століття, проявлено інтерес серед науковців. Зважаючи на це, навіть припускаючи, що дохідності фінансових активів є неавтокорельованими та нормально розподіленими, залишається безліч відкритих питань.

Нагадаємо деякі відомі факти з курсу "математичної статистики".

Твердження 5. Нехай нам задано незалежну вибірку з нормального розподілу X_1, X_2, ... , X_n з параметрами μ та σ^2. Тоді:

1) вибіркова оцінка $\hat{\mu} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;

2) вибіркова оцінка $\frac{n-1}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{n-1}$;

3) вибіркові оцінки $\hat{\mu}$ та $\hat{\sigma}^2$ є незалежними.

Зауважимо також, що оцінки $\hat{\mu}$ та $\hat{\sigma}^2$ є незміщеними та консистентними. Тобто властивості цих оцінок є статистично привабливими.

На основі одновимірних оцінок для кожної з дохідностей фінансових активів можемо оцінити параметри вектора $\mathbf{X}_t$, $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, ..., \hat{\mu}_k)' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\mathbf{X}_i$ та $\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})'$.

Підставляючи у (14), (15), (21), (22), (25), (26), (30), (31), (32), (33), (37) та (38) замість невідомих параметрів $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}$ їхні оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\mathbf{\Sigma}}$, отримаємо оцінки ваг портфелів та їх характеристик, які будемо позначати за допомогою символу " $\hat{\cdot}$ ", наприклад, оцінки ваг портфеля найменшої дисперсії та його характеристик позначатимемо

$$\hat{\mathbf{w}}_{GMV} = \frac{\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}},\ \hat{R}_{GMV} = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}},\ \hat{V}_{GMV} = \frac{1}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}.$$

Надалі нам необхідно буде використати властивості багатовимірної випадкової величини, що має розподіл Уішарта. Символ $\mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ будемо використовувати для позначення k-вимірної нормально розподіленої випадкової величини з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$.

Означення 5. *Нехай* $\mathbf{Z}$ *матриця розміру* $m \times p$, *причому рядки матриці* $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2, ..., \mathbf{Z}_m$ *є незалежними випадковими векторами з* $\mathbf{Z}_i \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1, ..., m$. *Кажуть, що випадкова матриця* $\mathbf{W} = \mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ *розміру* $p \times p$ *має розподіл Уішарта з* m *ступенями вільності та матрицею коваріації* $\boldsymbol{\Sigma}$. *Цей факт позначають*

$$\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_m(p, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Наведемо властивості випадкової величини з розподілом Уішарта, які будуть потрібні нам надалі (див. напр. [9]).

Твердження 6. Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $..., \mathbf{X}_n$ незалежні k-вимірні випадкові вектори та $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ для $i = 1, ..., n$. Тоді випадкові величини $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ є незалежними.

Твердження 7. Якщо $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_m(p, \boldsymbol{\Sigma})$ та матриці $\mathbf{W}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є розділені так

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix},$$

де матриці $\mathbf{W}_{11}$ та $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ мають розмірність $m_1 \times m_1$ $(m_1 \leq m)$, тоді $\mathbf{W}_{11} \sim \mathcal{W}_{m_1}(p, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$.

Твердження 8. Нехай $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_m(p, \boldsymbol{\Sigma})$ і матриці $\mathbf{W}$ та $\boldsymbol{\Sigma}$ є розділені, як у твердженні 7. Позначимо $\mathbf{W}_{11\cdot 2} = \mathbf{W}_{11} - \mathbf{W}_{12}\mathbf{W}_{22}^{-1}\mathbf{W}_{21}$ і $\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$. Тоді:

1) $\mathbf{W}_{11\cdot 2} \sim \mathcal{W}_{m_1}(p - m + m_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2})$ і є незалежна від $\mathbf{W}12$ та $\mathbf{W}_{22}$;

2) $\mathbf{W}_{12}|\mathbf{W}_{22} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\mathbf{W}_{22}, \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2} \otimes \mathbf{W}_{22})$, де символ "$\otimes$" означає добуток Кронекера, тобто, коли кожен елемент першої матриці множиться на другу, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \{a_{ij}\mathbf{B}\}$;

3) $\mathbf{W}_{22} \sim \mathcal{W}_{m-m_1}(p, \mathbf{\Sigma}_{22})$.

Твердження 9. Нехай $\mathbf{W} \sim \mathcal{W}_m(p, \mathbf{\Sigma})$ і матриця $\mathbf{A}$ має розмірність $l \times m$ та ранг l. Тоді $(\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}')^{-1} \sim \mathcal{W}_l(p - m + l, (\mathbf{A}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{A}')^{-1})$.

4.1 Статистичні властивості оцінок ваг та характеристик портфеля найбільшої очікуваної квадратичної корисності

Розглянемо спочатку статистичні властивості портфеля найбільшої очікуваної квадратичної корисності.

Теорема 7. *Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ незалежні k-вимірні випадкові вектори та $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ для $i = 1, ..., n$.*

1. Припустимо, що виконується одна з таких умов:

а) $\beta = \infty$, $n \geq k + 1$ і $k \geq 2$;

б) $\beta < \infty$, $n \geq k + 2$ і $k \geq 3$.

Тоді

$$M(\hat{\mathbf{w}}_{EU}) = \frac{\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{n-1}{n-k-1}\beta^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}.$$

2. Припустимо, що виконується одна з таких умов

а) $\beta = \infty$, $n \geq k + 2$ і $k \geq 2$;

б) $\beta < \infty$, $n \geq k + 4$ і $k \geq 3$.

Тоді дисперсія оцінки вектора ваг портфеля найбільшої очікуваної квадратичної корисності існує, причому якщо умову б) замінити на

б') $\beta < \infty$, $n \geq k + 4$ і $k \geq 4$,

то

$$\begin{aligned} D(\hat{\mathbf{w}}_{EU}) &= \frac{1}{n-k-1}\frac{\boldsymbol{R}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-2}c_1\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R} + \\ &+ \frac{\beta^{-1}}{n}\Big(c_1 + c_2(k-1) + \frac{(n-1)^2}{(n-k-1)^2}\Big)\boldsymbol{R}, \end{aligned}$$

де

$$c_1 = \frac{(n-1)^2(n-k+1)}{(n-k)(n-k-1)^2(n-k-3)},$$
$$c_2 = \frac{(n-1)^2}{(n-k)(n-k-1)(n-k-3)}.$$

Доведення. З твердження 6 маємо, що оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ є незалежними. Крім того, оскільки $\hat{\mathbf{w}}_{EU} = \mathbf{w}_{EU}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}})$, то умовний розподіл $\hat{\mathbf{w}}_{EU}$ за умови, що $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}$ збігається з розподілом випадкового вектора

$$\mathbf{w}_{EU}(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\mu}.$$

Позначимо k-вимірний вектор $\mathbf{e}_i$, вектор i-й елемент якого дорівнює 1, а всі решту елементи є 0, та розглянемо i-й елемент вектора $\mathbf{w}_{EU}(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}})$,

$$w_{EU,i}(\boldsymbol{\mu}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) = \frac{\mathbf{e}_i'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-1}\mathbf{e}_i'\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\mu}.$$

1. Маємо $M(\hat{w}_{EU,i}) = M(M(w_{EU,i}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}))|\hat{\boldsymbol{\mu}})$. Розглянемо матрицю $\mathbf{M}' = (\mathbf{e}_i\ \hat{\boldsymbol{\mu}}\ \mathbf{1})$ з $rank(\mathbf{M}) = 3$. Позначимо $\hat{\mathbf{H}}^{(-)} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}' = \{\hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(-)}\}_{i,j=1,2}$, де $\hat{\mathbf{H}}_{22}^{(-)} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}1$, $\hat{\mathbf{H}} = (\hat{\mathbf{H}}^{(-)})^{-1} = \{\hat{\mathbf{H}}_{ij}\}_{i,j=1,2}$. Аналогічно визначаємо матриці $\mathbf{H}^{(-)}$ та $\mathbf{H}$. Оскільки $\hat{\mathbf{H}}_{22}^{(-)} = (\hat{\mathbf{H}}_{22} - \hat{\mathbf{H}}_{21}\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12})^{-1}$ та $\hat{\mathbf{H}}_{12}^{(-)} = -\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}(\hat{\mathbf{H}}_{22} - \hat{\mathbf{H}}_{21}\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12})^{-1}$ бачимо, що $\hat{w}_{EU,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}$ дорівнює першому елементу вектора $\mathbf{z} = -\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}(-\hat{\mathbf{H}}_{12} - (0, \beta^{-1})')$. Зауважимо, що $(n-1)\hat{\mathbf{H}} \sim \mathcal{W}_3(n-k+2, \mathbf{H})$, тому з твердження 7 випливає, що $(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} \sim \mathcal{W}_2(n-k+2, \mathbf{H}_{11})$. Для спрощення подальших викладок позначимо $\mathbf{a} =$

$(0,\ (n-1)\beta^{-1})'$. З твердження 8 маємо

$$\begin{aligned}
&(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \sim \\
&\sim \mathcal{N}_2(\mathbf{X}\cdot\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}, (\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{X}),\\
&(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{12} - (0,\ \beta^{-1})'|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \sim \\
&\sim \mathcal{N}_2(\mathbf{X}\cdot\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} - \mathbf{a}', (\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{X}),\\
&\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{12} - (0,\ \beta^{-1})')|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \sim \\
&\sim \mathcal{N}_2(\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{a}', (\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{X}^{-1}).
\end{aligned}$$

З вищенаведеного випливає, що

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{z}) &= M(M(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{H}}_{11})) = -M(\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} - ((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}\mathbf{a}') = \\
&= -\mathbf{H}_{11}^{-1}\big(\mathbf{H}_{12} - \frac{1}{n-k-1}\mathbf{a}'\big).
\end{aligned}$$

Отже,

$$M(\hat{w}_{EU,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{\mathbf{e}_i'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{n-1}{n-k-1}\beta^{-1}\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}.$$

Обчисливши безумовне математичне сподівання для всіх i, отримаємо необхідне твердження.

2. Справедлива рівність

$$D(\mathbf{z}) = M(D(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{H}}_{11})) + D(M(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{H}}_{11})).$$

Маємо

$$\begin{aligned}
M(D(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{H}}_{11})) &= M(((\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}))((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}) = \\
&= \frac{1}{n-k-1}(\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{H}_{11}^{-1} = \\
&= \frac{1}{n-k-1}(\mathbf{H}_{22}^{(-)})^{-1}(\mathbf{H}_{11}^{(-)} - \mathbf{H}_{12}^{(-)}(\mathbf{H}_{22}^{(-)})^{-1}\mathbf{H}_{21}^{(-)}).
\end{aligned}$$

Другий доданок у виразі для $D(\mathbf{z})$ можемо написати у вигляді

$$\begin{aligned}
&D(M(\mathbf{z}|\hat{\mathbf{H}}_{11})) = D(\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{21} - ((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}\mathbf{a}') = \\
&= M(((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}'((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}) - \\
&-\frac{1}{(n-k-1)^2}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{H}_{11}^{-1}.
\end{aligned}$$

Виконується рівність

$$\begin{aligned}
&M(((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}'((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}) = \\
&= \ (d_1+d_2)\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{H}_{11}^{-1} + d_2 tr(\mathbf{a}'\mathbf{a}\mathbf{H}_{11}^{-1})\mathbf{H}_{11}^{-1},
\end{aligned}$$

де $d_1 = (n-k-2)d_2$ і $d_2 = \frac{1}{(n-k)(n-k-1)(n-k-3)}$. Отже,

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{z}) &= \frac{1}{n-k-1}(\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{H}_{11}^{-1} + \\
&+ \ (d_1+d_2-\frac{1}{(n-k-1)^2})\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{H}_{11}^{-1} + \\
&+ \ d_2 tr(\mathbf{a}'\mathbf{a}\mathbf{H}_{11}^{-1})\mathbf{H}_{11}^{-1}.
\end{aligned}$$

Перший елемент $D(\mathbf{z})$ дорівнює

$$\begin{aligned}
&D(\hat{w}_{EU,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \\
&= \frac{1}{n-k-1}\frac{\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_i}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \beta^{-2}c_1(\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}})^2 + \beta^{-2}c_2\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_i.
\end{aligned}$$

Використовуючи рівність

$$D(\mathbf{w}_{EU}) = M(D(\mathbf{w}_{EU}|\hat{\boldsymbol{\mu}})) + D(M(\mathbf{w}_{EU}|\hat{\boldsymbol{\mu}}))$$

та враховуючи, що $\hat{\boldsymbol{\mu}} \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}/n)$, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$, $tr(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Sigma}) = k-1$, отримаємо

$$\begin{aligned}
M(\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}})^2 &= (\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu})^2 + \frac{1}{n}\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_i, \\
M(\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} + \frac{k-1}{n}.
\end{aligned}$$

Підставляючи попередні рівності у вираз для дисперсії, отримаємо потрібне твердження.

Розглянемо тепер два довільні елементи вектора $\hat{\mathbf{w}}_{EU}$ та позначимо $\mathbf{M} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \hat{\boldsymbol{\mu}}, \mathbf{1})'$. Зауважимо, що $rank(\mathbf{M}) = 4$. Всі позначення, вжиті у попередній частині доведення, також змінюються відповідно до $\mathbf{M}$. Аналогічно, як і в першій частині доведення, можемо показати, що $(\hat{w}_{EU,i}, \hat{w}_{EU,j})|\hat{\boldsymbol{\mu}}$ дорівнює першим двом елементам вектора $\mathbf{z} = -\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}(\hat{\mathbf{H}}_{12} - (0, 0, \beta^{-1})')$.

Використовуючи, що $(n-1)\hat{\mathbf{H}} \sim \mathcal{W}_4(n-k+3, \mathbf{H})$, маємо $(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} \sim \mathcal{W}_3(n-k+3, \mathbf{H}_{11})$. Позначимо $\mathbf{a} = (0, 0, (n-1)\beta^{-1})'$. З твердження 8 випливає

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}(\hat{\mathbf{H}}_{12} - (0, 0, \beta^{-1})')|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \sim \\
&\sim \mathcal{N}_3(\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} - \mathbf{X}^{-1}\mathbf{a}', (\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{X}^{-1}).
\end{aligned}$$

Раніше було доведено, що

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{z}) &= \frac{1}{n-k-1}(\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{H}_{11}^{-1} + \\
&+ (d_1 + d_2 - \frac{1}{(n-k-1)^2})\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{a}'\mathbf{H}_{11}^{-1} + \\
&+ d_2 tr(\mathbf{a}'\mathbf{a}\mathbf{H}_{11}^{-1})\mathbf{H}_{11}^{-1}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $Cov(\hat{w}_{EU,i}, \hat{w}_{EU,j})$ дорівнює другому елементу першого рядка матриці $D(\mathbf{z})$. З останньої рівності отримаємо

$$\begin{aligned}
Cov(\hat{w}_{EU,i}, \hat{w}_{EU,j}|\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \frac{1}{n-k-1}\frac{\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} + \\
&+ \beta^{-2}c_1\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j + \beta^{-2}c_2\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j.
\end{aligned}$$

Використовуючи рівності

$$\begin{aligned} M(\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j) &= \mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j' + \frac{1}{n}\mathbf{e}_i\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j', \\ M(\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\mu}}) &= \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu} + \frac{k-1}{n}, \end{aligned}$$

отримаємо потрібне твердження. Теорему доведено.

З теореми (7) бачимо, що вибіркова оцінка вектора ваг портфеля з найбільшою очікуваною квадратичною корисністю є зміщеною. Якщо для розв'язання певних практичних задач потрібно знайти незміщену оцінку вектора ваг, то можна використати, наприклад, $\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{EU} = \frac{\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}} + \frac{n-k-1}{n-1}\beta^{-1}\hat{\boldsymbol{R}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$. Зауважимо, що середньоквадратична похибка оцінки $\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{EU}$ є вищою, ніж для $\hat{\mathbf{w}}_{EU}$, тому в загальному випадку ліпшою є все-таки вибіркова оцінка.

Позначимо, g_m – густина випадкової величини, яка має χ^2 розподіл з m ступенями вільності; $g_{n,m,\lambda}$ – густина випадкової величини з нецентральним розподілом Фішера з n, m ступенями вільності та нецентральним параметром λ; Φ – функція розподілу стандартного нормального розподілу; $B(a,b)$ – бета функція з параметрами a, b та ${}_1F_1(a|b,x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(b+i)}\frac{x^i}{i!}$ – вироджена гіпергеометрична функція. Використовуючи ці позначення, розглянемо статистичні властивості оцінок характеристик портфеля з найбільшою очікуваною квадратичною корисністю $\hat{R}_{EU}$ та $\hat{V}_{EU}$.

Теорема 8. *Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, ..., $\mathbf{X}_n$ незалежні k-вимірні випадкові вектори та $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ для $i = 1, ..., n$. Нехай також $k > 2$ та $n > k$, тоді:*

1) густина $\hat{R}_{EU}$ має вигляд

$$f_{\hat{R}_{EU}}(x) = \sqrt{n}\frac{\sqrt{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\exp(-\frac{n\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}}{2})}{\sqrt{2\pi}B(\frac{n-k+1}{2},\frac{k-1}{2})} \times$$
$$\times\int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{n-k}{2}} t^{\frac{k-3}{2}} {}_1F_1\Big(\frac{n}{2}|\frac{k-1}{2},\frac{n\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}}{2}t\Big) \times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{n\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}(1-t)}{2}\big(x-\frac{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}-\beta^{-1}\frac{(n-1)t}{(t-1)n}\big)^2\Big)dt;$$

2) густина $\hat{V}_{EU}$ має вигляд

$$f_{\hat{V}_{EU}}(x) = \mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}\frac{n(n-k+1)}{k-1} \times$$
$$\times\int\limits_0^\infty g_{n-k}((n-1)\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}(x-\frac{y}{\beta^2})) \times$$
$$\times g_{k-1,n-k+1,\delta}\big(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}y\big)dy.$$

4.2 Статистичні властивості ваг та характеристик портфеля найменшої дисперсії

У цьому підрозділі розглянуто статистичні властивості оцінок ваг та характеристик портфеля найменшої дисперсії. Ми знайдемо густину довільних $m-1$ елементів вектора $\hat{\mathbf{w}}_{GMV}$. Не звужуючи загальності, розглянемо перші $m-1$ елементів. Очевидно, що у випадку $m=2$ ми отримаємо одновимірну густину першого елемента вектора ваг портфеля найменшої дисперсії. Аналогічно за $m=k$, отримаємо густину перших $k-1$ елемента. Зазначимо також, що в цьому випадку густину останнього елемента можемо знайти на основі умови $w_{GMV,k} = 1 - \mathbf{1}'_{k-1}\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}$, де $\mathbf{1}_{k-1}$ – $(k-1)$-вимірний вектор, елементами якого є одиниці, та $\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}$ – $(k-1)$-вимірний вектор, що складається з перших $(k-1)$ елементів вектора $\hat{\mathbf{w}}_{GMV}$. Очевидно, можемо записати

$$\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV} = \left(\frac{\mathbf{e}_1'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}, \frac{\mathbf{e}_2'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}, ..., \frac{\mathbf{e}_{m-1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}}\right)'.$$

Нехай, крім того, $m = k - 1$.

Теорема 9. *Нехай $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $...,\mathbf{X}_n$ незалежні k-вимірні випадкові вектори та $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ для $i = 1, ..., n$. Нехай $n \geq k \geq m \geq 2$. Тоді випадковий вектор $\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}$ має $(m-1)$-вимірний еліптичний t розподіл з $n - k + 1$ ступенями вільності та з параметрами $\overline{\mathbf{w}}_{GMV}$ та*

$$\frac{1}{n-k+1}\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}},$$

де $\tilde{\boldsymbol{R}} = \{\mathbf{e}_i'\boldsymbol{R}\mathbf{e}_j\}_{i,j=1,...,m-1}$. Тобто густина випадкового вектора $\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}$ має вигляд

$$f_{\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})^{(m-1)/2}}{\pi^{(m-1)/2}\sqrt{det(\tilde{\boldsymbol{R}})}}\frac{\Gamma(\frac{n-k+m}{2})}{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})} \times$$
$$\times\Big((\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{w}}_{GMV})'\tilde{\boldsymbol{R}}^{-1}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{w}}_{GMV})+1\Big)^{-(n-k+m)/2}.$$

Крім того,

$$M(\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}) = \overline{\mathbf{w}}_{GMV} \quad \textit{та} \quad D(\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV}) = \frac{1}{n-k+1}\frac{\tilde{\boldsymbol{R}}}{\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}.$$

Доведення. Нехай $\mathbf{M} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{1})'$, $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{M}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{M}')^{-1} = \{\hat{\mathbf{H}}_{ij}\}_{i,j=1,2}$, $\hat{\mathbf{H}}^{-1} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{M}' = \{\hat{\mathbf{H}}_{ij}^{(-)}\}_{i,j=1,2}$, де $\hat{\mathbf{H}}_{22}^{(-)} = \mathbf{1}'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{1}$. Аналогічно визначаємо та розбиваємо матриці $\mathbf{H}$ та $\mathbf{H}^{-1}$. Оскільки $(n-1)\hat{\mathbf{\Sigma}} \sim \mathcal{W}_k(n-1, \mathbf{\Sigma})$, то $(n-1)\hat{\mathbf{H}} \sim \mathcal{W}_m(n-k+m-1, (\mathbf{M}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}')^{-1})$. Отже,

$$\hat{\hat{\mathbf{w}}}_{GMV} = \frac{\hat{\mathbf{H}}_{12}^{(-)}}{\hat{\mathbf{H}}_{22}^{(-)}} = \frac{-\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}(\hat{\mathbf{H}}_{22}-\hat{\mathbf{H}}_{21}\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12})^{-1}}{(\hat{\mathbf{H}}_{22}-\hat{\mathbf{H}}_{21}\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12})^{-1}} = -\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}$$

З твердження 8 маємо

$$-(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} \sim$$
$$\sim \mathcal{N}_{m-1}(-(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}, (\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11}),$$
$$(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} \sim \mathcal{W}_{m-1}(n-k+m-1, \mathbf{H}_{11}).$$

Отже,

$$-\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} \sim$$
$$\sim \mathcal{N}_{m-1}(-\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}, (\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})((n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11})^{-1}).$$

З властивостей умовної густини маємо

$$f_{\hat{\mathbf{w}}_{GMV}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{Y}>\mathbf{0}} f_{\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11}}(\mathbf{x}|\mathbf{Y}) f_{(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11}}(\mathbf{Y})d\mathbf{Y} =$$
$$= \frac{2^{-(n-k+m)(m-1)/2}(det(\mathbf{H}_{11}))^{-(n-k+m-1)/2}}{\pi^{(m-1)/2}(\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})^{(m-1)/2}\Gamma_{m-1}(\frac{n-k+m-1}{2})} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbf{Y}>\mathbf{0}} (det(\mathbf{Y}))^{(n-k)/2} \times$$
$$\times etr\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{(\mathbf{x}+\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})(\mathbf{x}+\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})'}{\mathbf{H}_{22}-\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}} + \mathbf{H}_{11}^{-1}\Big)\mathbf{Y}d\mathbf{Y}\Big),$$

де $etr\mathbf{A} = e^{tr\mathbf{A}}$, а

$$\Gamma_p(\alpha) = (det(\mathbf{Q}))^{\alpha} \int\limits_{\mathbf{Y}>\mathbf{0}} (det(\mathbf{Y}))^{\alpha-(p+1)/2} etr(-\mathbf{Q}\mathbf{Y})d\mathbf{Y}$$

багатовимірна гамма функція; p – розмірність $\mathbf{Y}$. Враховуючи властивості багатовимірної гамма функції, а також властивості обернених розділених матриць, отримаємо необхідне твердження. Теорему доведено.

Зауважимо, що на відміну від вибіркової оцінки ваг портфеля найбільшої очікуваної квадратичної корисності, вибіркова оцінка ваг портфеля найменшої дисперсії є незміщеною оцінкою. В наступній теоремі розглянуто статистичні властивості вибіркових оцінок характеристик портфеля найменшої дисперсії.

Теорема 10. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ...,\mathbf{X}_n$ *незалежні* k*-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$. *Нехай* $n > k$ *та* $k > 2$.

1. Випадкові величини $\hat{R}_{GMV}$ *та* $\hat{V}_{GMV}$ *незалежні.*

2. $(n-1)\hat{V}_{GMV}/V_{GMV} \sim \chi^2_{n-k}$.

3. Густина $\hat{R}_{GMV}$ *має вигляд*

$$f_{\hat{R}_{GMV}}(x) = \sqrt{n}\frac{\sqrt{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}\exp(-\frac{n\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}}{2})}{\sqrt{2\pi}B(\frac{n-k+1}{2}, \frac{k-1}{2})} \times$$
$$\times \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{n-k}{2}} t^{\frac{k-3}{2}} {}_1F_1\Big(\frac{n}{2}|\frac{k-1}{2}, \frac{n\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{\mu}}{2}t\Big) \times$$
$$\times \ \exp\Big(- \frac{n\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}(1-t)}{2}(x - \frac{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}})^2\Big)dt.$$

Звернемо увагу на те, що ваги портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR та їх основні характеристики задають через ваги портфеля найменшої дисперсії та його характеристики, а отже, попередня теорема є надзвичайно важливою для вивчення властивостей портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR.

4.3 Статистичні властивості ваг та характеристик портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR

Зауважимо, що ваги портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR та їх характеристики відрізняються лише множником z_α та k_α. Зауважимо також, що за заданого рівня довіри α ці числа є константами, а тому достатньо розглянути властивості оцінок ваг та характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR. Зазначимо, що на практиці результати, отримані при застосуванні цих портфелів, є різними, проте для теоретичного їх дослідження відмінність між ними несуттєва.

Розглянемо вибіркові оцінки ваг портфеля з найменшим рівнем VaR

$$\hat{\mathbf{w}}_{MVaR} = \hat{\mathbf{w}}_{GMV} + \frac{\sqrt{\hat{V}_{GMV}}}{\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}} \hat{\boldsymbol{R}} \hat{\boldsymbol{\mu}}. \tag{39}$$

Ми виділяємо цю оцінку окремо, оскільки, як раніше наголошувалося, вибірка $\mathbf{X}_, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ є випадковою, тобто оцінки $\hat{\boldsymbol{\mu}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$, і як наслідок, $\hat{s}$ є випадковими величинами. Такий факт є надзвичайно важливим для побудови оцінки ваг портфелю з найменшим рівнем VaR, оскільки у знаменнику другого доданку формули (39) є вираз $\sqrt{z_\alpha^2 - \hat{s}}$. Тобто для того, щоб оцінка (39) мала зміст, потрібно, щоб виконувалася така умова

$$z_\alpha^2 > \hat{s}. \tag{40}$$

Ураховуючи випадковість оцінки $\hat{s}$, умову (40) в загальному випадку може не виконуватися. Для перевірки цієї умови потрібно дослідити статистичні властивості оцінки параметра s. В роботі [10] показано, що розподіл заданої оцінки є нецентральним розподілом Фішера. Точніше кажучи, випадкова величина $\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}\hat{s}$ має нецентральний розподіл Фішера з $k-1$ та $n-k+1$ ступенями вільності та нецентральним параметром ns. Основні властивості нецентрального розподілу Фішера наведено в [11]. Тобто значення, які може приймати випадкова величина $\hat{s}$, знаходяться на проміжку $[0, +\infty)$. Тому, очевидно, умова (40) виконується не завжди.

Отже, для того, щоб оцінити можливість побудови оцінки ваг портфелю з найменшим рівнем VaR, потрібно обчислити імовірність події $\{z_\alpha^2 > \hat{s}\}$. Оскільки z_α^2 залежить лише від рівня довіри α, тобто є константою, то ця імовірність повністю задається значенням функції розподілу випадкової величини $\hat{s}$. Зауважимо, що функція розподілу цієї випадкової величини залежить від невідомого параметра s, а тому точно обчислити імовірність події $\{z_\alpha^2 > \hat{s}\}$ неможливо.

На основі того, що нам відомий розподіл вибіркової оцінки параметра s, ми побудуємо верхню та нижню межі для цієї імовірності. Використаємо той факт, що функція розподілу нецентрального розподілу Фішера є спадною за нецентральним параметром ([12], ст. 487). Оскільки матриця коваріацій $\mathbf{\Sigma}$ є додатно визначеною, то очевидно, що параметр s є більшим від нуля, а тому верхню межу для імовірності знаходимо як значення функції розподілу центрального розподілу Фішера (підставляємо значення нецентрального параметра, що дорівнює 0). Для обчислення нижньої межі використаємо односторонній інтервал довіри з рівнем довіри γ для нецентрального параметра. Для побудови інтервалу використаємо рекурсивний алгоритм, наведений у [13]. Позначимо $F_{m,l;\lambda}$ функцію розподілу нецентрального розподілу Фішера з m та l ступенями свободи і нецентральним параметром λ. Тоді

$$P\{\hat{s} < z_\alpha^2\} \geq F_{k-1,n-k+1;\tilde{s}}\Big(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} z_\alpha^2\Big),$$

де $\tilde{s} = \min\{nz_\alpha^2,\ s_{u,\gamma}(k-1, n-k+1)\}$ та $s_{u,\gamma}(k-1, n-k+1)$ є верхньою межею одностороннього інтервалу довіри для нецентрального параметра за рівня довіри γ. $s_{u,\gamma}(k,n)$ обчислюємо, використовуючи на (i+1)-му кроці обчислень таку формулу

$$\begin{aligned} s_{u,\gamma}(k,n;i+1) &= s_{u,\gamma}(k,n;i) + \\ &+ \frac{2F_{k,n;s_{u,\gamma}(k,n;i)}(\hat{s}) - \frac{\gamma}{2}}{F_{k,n;s_{u,\gamma}(k,n;i)}(\hat{s}) - F_{k+2,n;s_{u,\gamma}(k,n;i)}(\hat{s}k/(k+2))}, \end{aligned}$$

приймаючи $s_{u,\gamma}(k,n;0)=\hat{s}$. Умовою зупинки алгоритму є нерівність

$$|s_{u,\gamma}(k,n;i+1)-s_{u,\gamma}(k,n;i)|<0.001.$$

Отриману формулу використаємо для емпіричного аналізу можливості побудови оцінки ваг портфелю з найменшим рівнем VaR. Для цього виберемо курси трьох іноземних валют стосовно гривні: євро, фунт та злотий за період часу з 01.03.2010 до 01.03.2015. Оскільки на початку роботи було зроблено припущення, що дохідності є нормально розподілені, ми розглядаємо лише щомісячні дохідності, тобто беремо до уваги лише зміну курсу за місяць. Отримаємо, що наша вибірка дохідностей має 60 спостережень, тобто ми маємо: $n=60$, $k=3$. Для рівня довіри γ використаємо значення 0.999, оскільки ми зацікавелені в якомога більшій точності. Використовуючи дані про курси валют, обчислимо оцінку параметра s, $\hat{s}=0.034723$ та знайдемо односторонній інтервал довіри для нецентрального параметра $s_{u,0.999}(3,60)=20.75958$. На рис. 11 зображено межі для імовірності $P\{\hat{s}<z_{\alpha}^{2}\}$, змінюючи значення рівня довіри для VaR від 0.5 до 1 та від 0.9 до 1. За низьких значень α імовірність отримати коректну оцінку для ваг портфеля з найменшим рівнем VaR є навіть меншою за 0.5, проте для значень рівня довіри від 0.9 та більших ця імовірність є близькою до 1. Для того, щоб перевірити, наскільки близькою є ця імовірність до 1, розглянемо рисунок, на якому α змінюється в межах від 0.9 до 1. Бачимо, що значення імовірності побудови коректної оцінки ваг портфеля є досить близьким до 1, а отже, вибіркова оцінка ваг портфеля з найменшим рівнем VaR може бути використана для вирішення практичних задач, оскільки на практиці, зазвичай, використовують для рівня довіри α значення 0.9, 0.95 та 0.99.

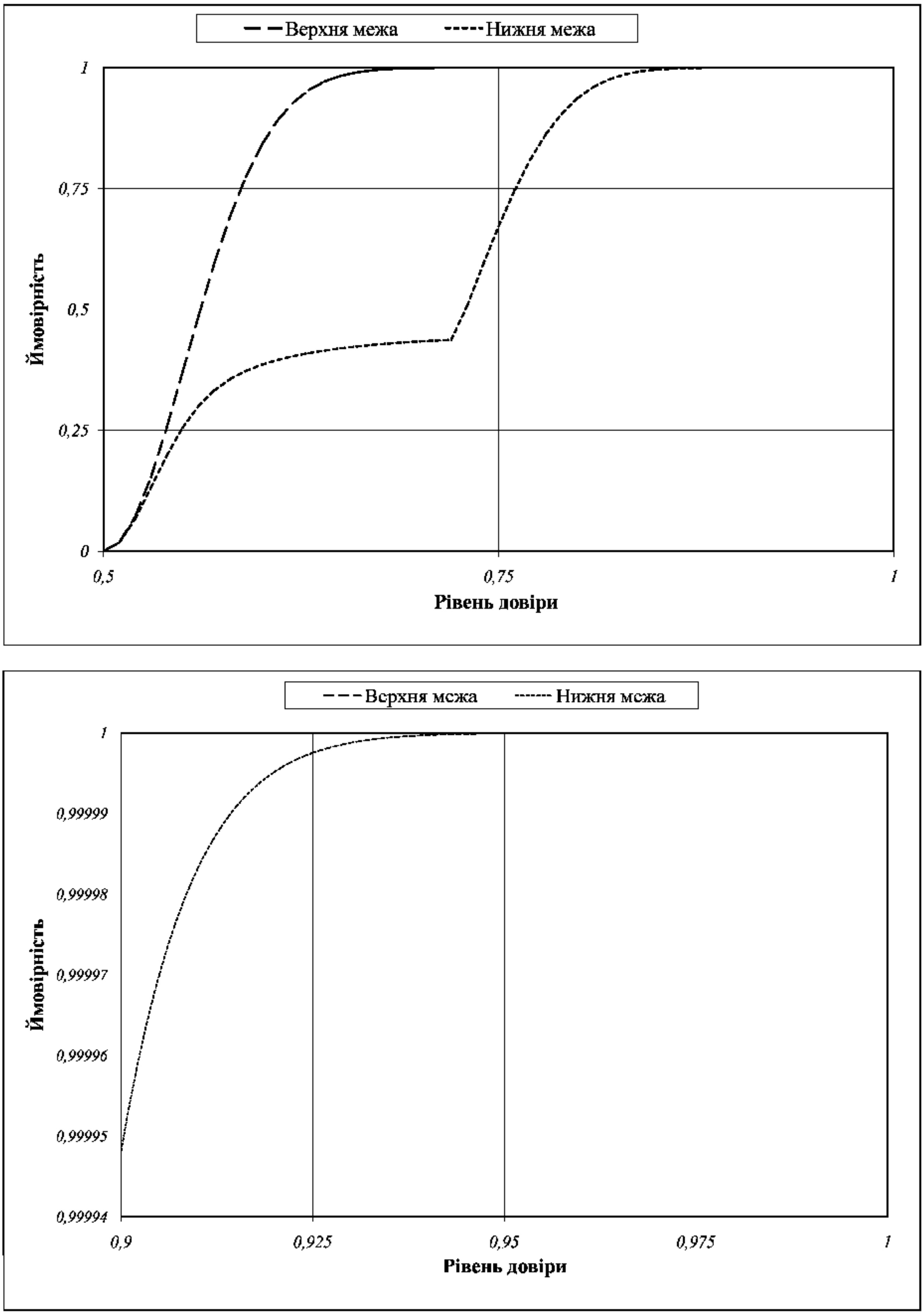

Рис. 11. Межі для імовірності події $P\{\hat{s} < z_\alpha^2\}$ за $\gamma = 0.999$

Стосовно портфеля з найменшим рівнем CVaR, зазначимо, що оскільки $k_\alpha > z_\alpha$, то і $P\{z_\alpha^2 > \hat{s}\} < P\{k_\alpha^2 > \hat{s}\}$. Отже, якщо вибіркова оцінка ваг портфеля з найменшим рівнем VaR коректна, то коректною є і вибіркова оцінка ваг портфеля з найменшим рівнем CVaR.

Розглянемо статистичні властивості оцінок характеристик портфелів з найменшим рівнем VaR та CVaR. Зауважимо, що оскільки вибіркова оцінка ваг портфеля є коректною лише за виконання умови (40), то і властивості оцінок характеристик ваг портфеля доцільніше досліджувати за виконання цієї умови. Позначимо

$$\begin{aligned}
\hat{R}^*_{MVaR} &= (\hat{R}_{MVaR}|\hat{s} = s^*),\\
\hat{V}^*_{MVaR} &= (\hat{V}_{MVaR}|\hat{s} = s^*),\\
\hat{M}^*_{MVaR} &= (\hat{M}_{MVaR}|\hat{s} = s^*).
\end{aligned}$$

Знайдемо спочатку стохастичне представлення оцінок характеристик за умови, що оцінка параметра s є відома.

Теорема 11. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ...,\mathbf{X}_n$ *незалежні k-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$ *і нехай* $n > k$. *Тоді:*

а) $$\hat{R}^*_{MVaR} \stackrel{d}{=} R_{GMV} + \sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}\, \xi_1 + \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}\, \sqrt{\xi_2};$$

б) $$\hat{V}^*_{MVaR} \stackrel{d}{=} \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*} \frac{V_{GMV}}{n-1}\, \xi_2;$$

в) $$\hat{M}^*_{MVaR} \stackrel{d}{=} -R_{GMV} - \sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}\, \xi_1 + \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}}\, \sqrt{\xi_2},$$

де символ $\stackrel{d}{=}$ *означає рівність за розподілом, а випадкові величини* $\xi_1 \sim N(0,1)$, $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ *незалежні.*

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з теореми 10 та з того, що

$$\hat{R}_{GMV}|\hat{s} = s^* \stackrel{d}{=} R_{GMV} + \sqrt{(1+n/(n-1)s^*)/n}\,\sqrt{V_{GMV}}\,\xi_1.$$

Аналогічно до ваг та характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR, позначимо

$$\begin{aligned}
\hat{R}^*_{MCVaR} &= (\hat{R}_{MCVaR}|\hat{s} = s^*),\\
\hat{V}^*_{MCVaR} &= (\hat{V}_{MCVaR}|\hat{s} = s^*),\\
\hat{M}^*_{MCVaR} &= (\hat{M}_{MCVaR}|\hat{s} = s^*).
\end{aligned}$$

Сформулюємо очевидний наслідок з теореми 11.

Наслідок 10. *В умовах теореми 11 виконується:*

а) $$\hat{R}^*_{MCVaR} \stackrel{d}{=} R_{GMV} + \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}\,\xi_1 + \\ + \frac{s^*}{\sqrt{k_\alpha^2 - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}\,\sqrt{\xi_2};$$

б) $$\hat{V}^*_{MCVaR} \stackrel{d}{=} \frac{k_\alpha^2}{k_\alpha^2 - s^*}\frac{V_{GMV}}{n-1}\,\xi_2;$$

в) $$\hat{CM}^*_{MCVaR} \stackrel{d}{=} -R_{GMV} - \sqrt{\frac{1+n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}\,\xi_1 + \\ + \sqrt{(k_\alpha^2 - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}}\,\sqrt{\xi_2},$$

де символ $\stackrel{d}{=}$ *означає рівність за розподілом, а випадкові величини* $\xi_1 \sim N(0,1)$, $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ *незалежні.*

Теорема 11 має одне важливе застосування. При використанні методу Монте-Карло для аналізу характеристик портфеля акцій з найменшим рівнем VaR не потрібно генерувати матрицю даних розміру $k \times n$, а достатньо згенерувати лише дві випадкові незалежні величини, що мають добре вивчені закони розподілу. Крім того, використовуючи твердження цієї теореми, можемо знайти розподіл випадкових величин $\hat{R}^*_{MVaR}$, $\hat{V}^*_{MVaR}$ та $\hat{M}^*_{MVaR}$. Позначимо

$$\begin{aligned} a_z(s^*) &= \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}}\sqrt{\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \qquad b_z(s^*) = \frac{z_\alpha^2}{z_\alpha^2 - s^*}\frac{V_{GMV}}{n-1}, \\ c_z(s^*) &= \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}}, \qquad \tilde{s}^* = \frac{1 + n/(n-1)s^*}{n}V_{GMV} \end{aligned}$$

та

$$M(x; m, a, b_1, b_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|} \times$$
$$\times \int_0^\infty t^{m-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)\left(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2}\right)^2 \right\} dt.$$

Теорема 12. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ..., \mathbf{X}_n$ *незалежні* k*-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$ *і нехай* $n > k$*. Тоді:*

$$\begin{aligned} &а) \quad f_{\hat{R}^*_{MVaR}}(x|s^*) = \frac{1}{2^{(n-k)/2-1} a_z(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \times \\ &\quad \times \exp\left\{ -\frac{(x - R_{GMV})^2}{2(a_z(s^*)^2 + \tilde{s}^*)} \right\} \times \\ &\quad \times M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\tilde{s}^*}, a_z(s^*)); \\ &б) \quad f_{\hat{V}^*_{MVaR}}(x|s^*) = \frac{1}{(2b_z(s^*))^{(n-k)/2} \Gamma((n-k)/2)} x^{(n-k)/2-1} \times \\ &\quad \times \exp\left\{ -\frac{x}{2b_z(s^*)} \right\}; \\ &в) \quad f_{\hat{M}^*_{MVaR}}(x|s^*) = \frac{1}{2^{(n-k)/2-1} c_z(s^*)^{n-k} \Gamma((n-k)/2)} \times \\ &\quad \times \exp\left\{ -\frac{(x + R_{GMV})^2}{2(c_z(s^*)^2 + \tilde{s}^*)} \right\} \times \\ &\quad \times M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\tilde{s}^*}, c_z(s^*)). \end{aligned}$$

Для доведення теореми 12 доведемо спочатку таку лему.

Лема 5. *Нехай випадкові величини* ζ_1 *та* ζ_2 *є незалежні і* $\zeta_1 \sim \mathcal{N}(a, b_1)$, $\zeta_2 \sim \chi^2_m$. *Тоді для довільних* $a, b_1 \in I\!R$ *та довільного* $b_2 \in I\!R_+$ *густина випадкової величини* $\zeta = a + b_1\zeta_1 + b_2\sqrt{\zeta_2}$ *має вигляд*

$$f_\zeta(x) \;=\; \frac{1}{2^{m/2-1}b_2^m\Gamma(m/2)}\exp\Big\{-\frac{(x-a)^2}{2(b_2^2+b_1^2)}\Big\}M(x;m,a,b_1,b_2).$$

Доведення. Очевидно, що випадкова величина $\tilde{\zeta}_1 = a + b_1\zeta_1$ є нормально розподілена з параметрами a та b_1^2. Позначимо її густину через $f_{\tilde{\zeta}_1}(x)$. Густину випадкової величини $b_2\sqrt{\zeta_2}$ позначимо $f_{b_2\sqrt{\zeta_2}}(x)$. Оскільки $\zeta_2 \sim \chi^2_m$, то

$$f_{b_2\sqrt{\zeta_2}}(x) = f_{\zeta_2}(x^2/b_2^2)\frac{2x}{b_2^2} = \frac{1}{2^{m/2-1}b_2^m\Gamma(m/2)}x^{m-1}\exp\{-\frac{x^2}{2b_2^2}\}.$$

Беручи до уваги той факт, що $\tilde{\zeta}_1$ і ζ_2 є незалежними випадковими величинами, густину випадкової величини ζ обчислюємо, як згортку густин $f_{\tilde{\zeta}_1}(.)$ і $f_{b_2\sqrt{\zeta_2}}(.)$, тобто

$$\begin{aligned} f_\zeta(x) &= \int_0^\infty f_{\tilde{\zeta}_1}(x-t)f_{b_2\sqrt{\zeta_2}}(t)dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|}\exp\Big\{-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2\Big\}\times \\ &\times\frac{1}{2^{m/2-1}b_2^m\Gamma(m/2)}t^{m-1}\exp\{-\frac{t^2}{2b_2^2}\}dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b_1|2^{m/2-1}b_2^m\Gamma(m/2)}t^{m-1}\times \\ &\times\exp\Big\{-\frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2-\frac{t^2}{2b_2^2}\Big\}dt. \end{aligned}$$

Степінь експоненти в останньому інтегралі можемо записати як

$$\begin{aligned}
- & \frac{1}{2b_1^2}(x-t-a)^2 - \frac{t^2}{2b_2^2} = \\
= & -\frac{1}{2b_1^2}\big(t^2 + (x-a)^2 - 2t(x-a)\big) - \frac{t^2}{2b_2^2} = \\
= & -\frac{1}{2b_1^2}\big(t^2 + (x-a)^2 - 2t(x-a) + \frac{t^2 b_1^2}{b_2^2}\big) = \\
= & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2}\right)\left(t - (x-a)\frac{b_2^2}{b_2^2 + b_1^2}\right)^2 - \frac{(x-a)^2}{2(b_1^2 + b_2^2)}.
\end{aligned}$$

Підставляючи степінь експоненти у вираз для $f_\zeta(x)$, отримаємо твердження леми.

Доведення теореми 12:

а) випливає з леми 5 за

$$\begin{aligned}
a &= R_{GMV}, \\
b_1 &= \sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}, \\
b_2 &= \frac{s^*}{\sqrt{z_\alpha^2 - s^*}} \frac{V_{GMV}}{n-1}
\end{aligned}$$

та $m = n - k$;

в) випливає з леми 1 за

$$\begin{aligned}
a &= -R_{GMV}, \\
b_1 &= -\sqrt{\frac{1 + n/(n-1)s^*}{n} V_{GMV}}, \\
b_2 &= \sqrt{(z_\alpha^2 - s^*)\frac{V_{GMV}}{n-1}}
\end{aligned}$$

та $m = n - k$;

б) для обчислення густини випадкової величини $\hat{V}^*_{MVaR}$ використаємо той факт, що $\xi_2 \sim \chi^2_{n-k}$ та таку рівність

$$f_{\hat{V}^*_{MVaR}}(x) = \frac{1}{b_z(\tilde{s}^*)} f_{\xi_2}(x/b_z(\tilde{s}^*)) =$$
$$= \frac{1}{(2b_z(\tilde{s}^*))^{(n-k)/2}\Gamma((n-k)/2)} x^{(n-k)/2-1} \exp\{-\frac{x}{2b_z(\tilde{s}^*)}\}.$$

Теорему доведено.

У випадку портфеля фінансових активів з найменшим рівнем CVaR правильним є наслідок.

Наслідок 11. *В умовах теореми 12 виконується:*

$$a)\quad f_{\hat{R}^*_{MCVaR}}(x) = \frac{1}{2^{(n-k)/2-1} a_k(s^*)^{n-k}\Gamma((n-k)/2)} \times$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{(x-R_{GMV})^2}{2(a_k(s^*)^2+\tilde{s}^*)} \right\} \times$$
$$\times M(x; n-k, R_{GMV}, \sqrt{\tilde{s}^*}, a_k(s^*));$$

$$b)\quad f_{\hat{V}^*_{MCVaR}}(x) = \frac{1}{(2b_k(s^*))^{(n-k)/2}\Gamma((n-k)/2)} x^{(n-k)/2-1} \exp \times$$
$$\times \left\{ -\frac{x}{2b_k(s^*)} \right\};$$

$$c)\quad f_{\hat{CM}^*_{MCVaR}}(x) = \frac{1}{2^{(n-k)/2-1} c_k(s^*)^{n-k}\Gamma((n-k)/2)} \times$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{(x+R_{GMV})^2}{2(c_k(s^*)^2+\tilde{s}^*)} \right\} \times$$
$$\times M(x; n-k, -R_{GMV}, -\sqrt{\tilde{s}^*}, c_k(s^*)).$$

Зауважимо, що в теоремі 12 знайдено умовні розподіли характеристик портфелю за виконання умови $\hat{s} = s^*$, тобто за значних обмежень. Цікавіше було б розглянути безумовний розподіл оцінок характеристик. На жаль, безумовний розподіл у цьому випадку не може бути знайдений, оскільки вибіркові оцінки ваг портфелю коректні лише тоді, коли виконується умова (40). Беручи до уваги важливість цієї умови, цікавим є умовний розподіл оцінок характеристик портфеля фінансових активів з найменшим рівнем VaR за її виконання.

Теорема 13. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ...,\mathbf{X}_n$ *незалежні* k*-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$ *і нехай* $n > k$. *Тоді:*

а) $$f_{\hat{R}_{MVaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x) = K(z_\alpha^2)\int\limits_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) \times \times f_{\hat{R}^*_{MVaR}}(x|s^*)ds^*;$$

б) $$f_{\hat{V}_{MVaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x) = K(z_\alpha^2)\int\limits_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) \times \times f_{\hat{V}^*_{MVaR}}(x|s^*)ds^*;$$

в) $$f_{\hat{M}_{MVaR}|\hat{s}<z_\alpha^2}(x) = K(z_\alpha^2)\int\limits_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right) \times \times f_{\hat{M}^*_{MVaR}}(x|s^*)ds^*,$$

де

$$K(v) = \frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \frac{1}{F_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}v\right)},$$

$F_{d_1,d_2;\lambda}(x)$ *та* $f_{d_1,d_2;\lambda}(x)$, *відповідно, функція розподілу та густина нецентрального розподілу Фішера з* d_1 *і* d_2 *ступенями свободи та нецентральним параметром* λ.

Доведемо спочатку таку лему.

Лема 6. *Нехай* X *та* Y *абсолютно неперервні випадкові величини з густинами* $f_X(.)$ *та* $f_Y(.)$, *відповідно. Тоді:*

$$f_{X|Y\leq y}(x|y) = \frac{1}{F_Y(y)}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(x|t)f_Y(t)dt,$$

де $F_Y(y)$ *є функцією розподілу випадкової величини* Y.

Доведення.

Нехай $F_{X|Y\leq y}(x|y)$ є функцією розподілу випадкової величини X за умови $Y \leq y$. Тоді:

$$\begin{aligned} F_{X|Y\leq y}(x|y) &= \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})}{P\{Y \leq y\}} = \\ &= \frac{1}{F_Y(y)} \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(\tau, t) d\tau dt, \end{aligned}$$

де $f(\tau, t)$ – густина двовимірної випадкової величини (X, Y). Використовуючи рівність $f(\tau, t) = f_{X|Y=t}(\tau|t) f_Y(t)$, отримаємо

$$F_{X|Y\leq y}(x|y) = \frac{1}{F_Y(y)} \int\limits_{-\infty}^{x} \Big(\int\limits_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(\tau|t) f_Y(t) dt \Big) d\tau.$$

З означення густини випливає, що

$$f_{X|Y\leq y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y\leq y}(x|y)}{\partial x} = \frac{1}{F_Y(y)} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{X|Y=t}(x|t) f_Y(t) dt.$$

Лему доведено.

Доведення теореми 13. Випливає з леми 6 та з того, що

$$\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)} \hat{s} \sim F_{k-1, n-k+1; ns}.$$

Для характеристик портфеля з найменшим рівнем CVaR умовні розподіли характеристик мають вигляд.

Наслідок 12. *В умовах теореми 13 виконується:*

$$a)\quad f_{\hat{R}_{MCVaR}|\hat{s}<k_\alpha^2}(x) = K(k_\alpha^2)\int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)\times$$
$$\times f_{\hat{R}^*_{MCVaR}}(x|s^*)ds^*;$$

$$b)\quad f_{\hat{V}_{MCVaR}|\hat{s}<k_\alpha^2}(x) = K(k_\alpha^2)\int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)\times$$
$$\times f_{\hat{V}^*_{MCVaR}}(x|s^*)ds^*;$$

$$c)\quad f_{\hat{CM}_{MCVaR}|\hat{s}<k_\alpha^2}(x) = K(k_\alpha^2)\int_0^{k_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)\times$$
$$\times f_{\hat{M}^*_{MCVaR}}(x|s^*)ds^*.$$

З теореми 13 отримуємо рівність

$$E(g(\hat{R}_{MVaR})|\hat{s} < z_\alpha^2) = \tag{41}$$
$$= K(z_\alpha^2)\int_0^{z_\alpha^2} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)E(g(\hat{R}^*_{MVaR})|s^*)ds^*$$

для довільної функції $g(x)$, такої, що відповідний інтеграл існує. Аналогічні рівності виконуються для $\hat{V}_{MVaR}$ та $\hat{M}_{MVaR}$. Зауважимо, що (41) має важливе застосування, а саме за допомогою цієї рівності можна обчислити умовні математичні сподівання та дисперсії оцінок характеристик портфеля з найменшим рівнем VaR. Для цього позначимо

$$Q_1(v) = K(v)\int_0^v \frac{s^*}{\sqrt{v-s^*}} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*,$$

$$Q_2(v) = K(v)\int_0^v s^* f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*,$$

$$Q_3(v) = K(v)\int_0^v \sqrt{v-s^*} f_{k-1,n+k-1;ns}\left(\frac{n(n-k+1)}{(n-1)(k-1)}s^*\right)ds^*.$$

Теорема 14. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ...,\mathbf{X}_n$ *незалежні* k*-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$ *і нехай* $n > k$. *Тоді:*

а) $M(\hat{R}_{MVaR}|\hat{s} < z_\alpha^2) = R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k}{2})}Q_1(z_\alpha^2);$

б) $D(\hat{R}_{MVaR}|\hat{s} < z_\alpha^2) = \infty;$

в) $M(\hat{V}_{MVaR}|\hat{s} < z_\alpha^2) = \infty;$

г) $E(\hat{M}_{MVaR}|\hat{s} < z_\alpha^2) = -R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k}{2})}Q_3(z_\alpha^2);$

д)
$$D(\hat{M}_{MVaR}|\hat{s} < z_\alpha^2) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}Q_2(z_\alpha^2)\right)V_{GMV} + $$
$$+\frac{(n-k)}{(n-1)}V_{GMV}(z_\alpha^2 - Q_2(z_\alpha^2)) - \frac{2V_{GMV}}{n-1}\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})^2}{\Gamma(\frac{n-k}{2})^2}(Q_3(z_\alpha^2))^2.$$

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з (41) за $g(x) = x$ та $g(x) = x^2$, теореми 11 та з того, що $M(\xi_1) = 0$, $D(\xi_1) = M(\xi_1^2) = 1$, $M(\xi_2) = n-k$ та $M(\sqrt{\xi_2}) = sqrt2\frac{\Gamma((n-k+1)/2)}{\Gamma((n-k)/2)}$.

У випадку портфеля з найменшим рівнем CVaR математичне сподівання та дисперсію оцінок його характеристик знаходимо з такого наслідку.

Наслідок 13. *В умовах теореми 14 виконується:*

а) $E(\hat{R}_{MCVaR}|\hat{s} < k_\alpha^2) = R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k}{2})}Q_1(k_\alpha^2);$

б) $Var(\hat{R}_{MCVaR}|\hat{s} < k_\alpha^2) = \infty;$

в) $E(\hat{V}_{MCVaR}|\hat{s} < k_\alpha^2) = \infty;$

г) $E(\hat{M}_{MCVaR}|\hat{s} < k_\alpha^2) = -R_{GMV} + \sqrt{\frac{2V_{GMV}}{n-1}}\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-k}{2})}Q_3(k_\alpha^2);$

д)
$$Var(C\hat{M}_{MCVaR}|\hat{s} < k_\alpha^2) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}Q_2(k_\alpha^2)\right)V_{GMV} + $$
$$+\frac{(n-k)}{(n-1)}V_{GMV}(k_\alpha^2 - Q_2(k_\alpha^2)) - \frac{2V_{GMV}}{n-1}\frac{\Gamma(\frac{n-k+1}{2})^2}{\Gamma(\frac{n-k}{2})^2}(Q_3(k_\alpha^2))^2.$$

Зауважимо, що математичне сподівання оцінок дисперсій портфелів фінансових активів з найменшими рівнями VaR та CVaR не існує. Більше того, для оцінки VaR та CVaR математичні сподівання існують, а отже, поведінка цих мір ризику є ліпшою, ніж поведінка дисперсії, що є їх значною перевагою. Варто звернути увагу на те, що дисперсія дохідності портфелів не існує, отже, можливі значення дохідності є сильно розсіяні по числовій осі, тобто розподіл дохідності портфелів має так звані важкі хвости. Отже, навіть припустивши, що дохідності фінансових активів є нормально розподіленими, ми отримали, що сукупна дохідність портфелів з найменшими рівнями VaR та CVaR такою властивістю не володіє, на відміну від дохідності портфеля з найменшою дисперсією.

4.4 Статистичні властивості ваг та характеристик портфеля з найбільшим відношенням Шарпа

На фінансовому ринку відношення Шарпа є однією з найпоширеніших мір для побудови оптимального портфеля. З теоретичної точки зору ця оптимізаційна процедура максимізації цього відношення за побудови оптимального портфеля має чимало недоліків. В наступній теоремі знайдено умовні густини вибіркових оцінок ваг портфеля і, як наслідок, з цієї теореми, отримаємо що математичне сподівання так побудованих оцінок не існує. Ми розглянемо не сукупний розподіл всього вектора $\hat{\mathbf{w}}_{SR}$, а розподіл кожного компонента цього вектора зокрема. Очевидно, що позначивши i-й елемент вектора $\hat{\mathbf{w}}_{SR}$ через $\hat{w}_{SR,i}$, отримаємо

$$\hat{w}_{SR,i} = \frac{\mathbf{e}_i'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}{\hat{\boldsymbol{\mu}}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\hat{\boldsymbol{\mu}}}.$$

Нехай $f_{\hat{w}_{SR,i}}(x)$ є функцією густини i-го елемента вектора $\hat{\mathbf{w}}_{SR}$; $\phi_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}/n)(\mathbf{y})$ – функція густини k-вимірної нормально розподіленої випадкової величини з параметрами $\boldsymbol{\mu}$ та $\mathbf{\Sigma}/n$; $f_{\hat{w}_{SR,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}}(x|\mathbf{y})$ – функція густини випадкової величини $\hat{w}_{SR,i}$ за умови, що $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{y}$. Тоді:

$$f_{\hat{w}_{SR,i}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\hat{w}_{SR,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}}(x|\mathbf{y})\phi_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma}/n)(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

Зауважимо, що оскільки випадкові величини $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ та $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ незалежні, то умовний розподіл $\hat{\mathbf{w}}_{SR}$ за умови, що $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{y}$, повністю задається розподілом випадкової величини $\hat{\mathbf{\Sigma}}$.

Припустимо, що матриця $\mathbf{M} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{1}, \mathbf{y})'$ має ранг 3. Нехай $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{M}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{M}'$. Розіб'ємо матрицю $\mathbf{H}^{-1}$ на підматриці $\{\mathbf{H}_{ij}^{(-)}\}_{i,j=1,2}$, причому $\mathbf{H}_{22}^{(-)} = \mathbf{y}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y}$. Аналогічно вводимо та розбиваємо матрицю $\mathbf{H}$. Крім того, позначимо

$$\xi(x) = \frac{|(x,1)\mathbf{H}_{12}|}{\sqrt{det(\mathbf{H})}\sqrt{(1,-x)\mathbf{H}_{11}^{(-)}(1,-x)'}}.$$

Теорема 15. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ..., \mathbf{X}_n$ *незалежні k-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$ *і нехай* $n > k$, $k \geq 3$, $\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{y} \neq 0$ *та* $rank(\mathbf{M}) = 3$. *Тоді:*

$$f_{\hat{w}_{SR,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}}(x|\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{det(\mathbf{H}_{11}^{(-)})}}\Big(\frac{det(\mathbf{H}^{-1})}{det(\mathbf{H}_{11}^{(-)})\mathbf{H}_{22}^{(-)}}\Big)^{(n-k)/2} \times$$

$$\times\frac{1}{(x,1)\mathbf{H}_{11}(x,1)'} + \frac{n-k+1}{\pi}\frac{\sqrt{\mathbf{H}_{22}^{(-)}}|(x,1)\mathbf{H}_{12}|}{(det(\mathbf{H}^{-1}))^{(n-k+1)/2}} \times \qquad (42)$$

$$\times\frac{((x,1)\mathbf{H}_{11}(x,1)')^{(n-k-1)/2}}{((1,-x)\mathbf{H}_{11}^{(-)}(1,-x)')^{(n-k+2)/2}} \times \int\limits_{0}^{\xi(x)} (1+v^2)^{-(n-k+3)/2}dv.$$

Доведення. Нехай $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}_{i,j=1,..,3}$ та $\hat{\mathbf{H}} = \{\hat{h}_{ij}\}_{i,j=1,..,3}$, тоді

$$\hat{\mathbf{w}}_{SR,i}|(\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{y}) = \frac{\hat{h}_{31}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{21}\hat{h}_{32}}{\hat{h}_{11}\hat{h}_{32} - \hat{h}_{31}\hat{h}_{12}} =$$
$$= \frac{(\hat{h}_{31}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{21}\hat{h}_{32})/(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}^2)}{(\hat{h}_{11}\hat{h}_{32} - \hat{h}_{31}\hat{h}_{12})/(\hat{h}_{11}\hat{h}_{22} - \hat{h}_{12}^2)} = \frac{Z}{N}.$$

Розіб'ємо матрицю $\mathbf{H}$ на блоки

$$\mathbf{H}_{11} = \{h_{ij}\}_{i,j=1,2},\ \mathbf{H}_{12} = (h_{13}, h_{23})',\ \mathbf{H}_{22} = h_{33}.$$

Аналогічне розбиття введемо для матриці $\hat{\mathbf{H}}$. Тоді $(Z, N)' = \hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}$. З твердження 8 та з того, що $(n-1)\hat{\mathbf{H}} \sim \mathcal{W}_3(n-k+2, \mathbf{H})$, випливає

$$(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \sim$$
$$\sim \mathcal{N}_2((\mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{X})', (\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{X}).$$

Отже,

$$\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} = \mathbf{X} \sim$$
$$\sim \mathcal{N}_2(\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}, (\mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12})\mathbf{X}^{-1}).$$

Позначимо $\mathbf{a} = (a_1, a_2)' = \mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12}$ і $b = \mathbf{H}_{22} - \mathbf{H}_{21}\mathbf{H}_{11}^{-1}\mathbf{H}_{12} = 1/h_{33}^{(-)}$. Оскільки $(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11} \sim \mathcal{W}_2(n-k+2, \mathbf{H}_{11})$, спільна густина $(n-1)Z$ та $(n-1)W$ має вигляд

$$f_{(n-1)Z,(n-1)N}(\mathbf{z}) = \int \dots \int f_{\hat{\mathbf{H}}_{11}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{12}|(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11}}(\mathbf{z}|\mathbf{X}) \times$$
$$\times f_{(n-1)\hat{\mathbf{H}}_{11}}(2, n-k+2, \mathbf{H}_{11})(\mathbf{X})d\mathbf{X} =$$
$$= \frac{1}{2^{n-k+3}\pi b \Gamma_2((n-k+2)/2)} \frac{1}{(det(\mathbf{H}_{11}))^{(n-k+2)/2}} \times$$
$$\times \int \dots \int (det\mathbf{X})^{(n-k)/2} \times$$
$$\times exp(-tr((\mathbf{H}_{11}^{-1} + (\mathbf{z}-\mathbf{a})(\mathbf{z}-\mathbf{a})'/b)\mathbf{X}/2))d\mathbf{X} =$$
$$= \frac{(n-k+1)\sqrt{det\mathbf{H}_{11}}}{2\pi b}\left(1 + \frac{(\mathbf{z}-\mathbf{a})'\mathbf{H}_{11}(\mathbf{z}-\mathbf{a})}{b}\right)^{-(n-k+3)/2}.$$

Попередня функція є функцією густини 2-вимірного t-розподілу зі середнім $\mathbf{a}$, матрицею коваріацій $((n-k+1)\mathbf{H}_{11}/b)^{-1}$ та з $n-k+1$ ступенями вільності. З урахуванням цього отримаємо, що густина відношення Z/N має вигляд

$$\begin{aligned} f_{Z/N}(x) &= \int\limits_0^\infty z(f_{Z,N}(xz,z)+f_{Z,N}(-xz,-z))dz = \\ &= \frac{(n-k+1)\sqrt{det\mathbf{H}_{11}}b^{(n-k+1)/2}}{2\pi}\Big(I_1+I_2\Big). \end{aligned}$$

Позначимо $w_1 = (x,1)\mathbf{H}_{11}(x,1)'$, $w_2 = (x,1)\mathbf{H}_{12}$, $w_3 = \mathbf{H}_{22}$ і $\xi(x) = |w_2|/\sqrt{w_1w_3-w_2^2}$. Маємо

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^\infty z(w_1z-2w_2z+w_3)^{-(n-k+3)/2}dz = \\ &= \frac{1}{w_1(n-k+1)}w_3^{-(n-k+1)/2} + \\ &+ \frac{w_2}{w_1^{3/2}}(w_3-\frac{w_2^2}{w_1})^{-(n-k+2)/2}\int\limits_{-\xi(x)}^\infty (1+v^2)^{-(n-k+3)/2}dv \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{w_1(n-k+1)}w_3^{-(n-k+1)/2} - \\ &- \frac{w_2}{w_1^{3/2}}(w_3-\frac{w_2^2}{w_1})^{-(n-k+2)/2}\int\limits_{\xi(x)}^\infty (1+v^2)^{-(n-k+3)/2}dv. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} f_{Z/N}(x) &= \frac{(n-k+1)\sqrt{det\mathbf{H}_{11}}b^{(n-k+1)/2}}{2\pi}\times \\ &\times\Big(\frac{2w_3^{-(n-k+1)/2}}{w_1(n-k+1)}+2\frac{w_2}{w_1^{3/2}}(w_3-\frac{w_2^2}{w_1})^{-(n-k+2)/2}\times \\ &\times\int\limits_0^{\xi(x)}(1+v^2)^{-(n-k+3)/2}dv\Big). \end{aligned}$$

Підставляючи значення w_1, w_2 та w_3, отримаємо твердження теореми.

Зауважимо, що для існування моменту порядку γ для першого доданку виразу (42) необхідно, щоб інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\gamma}{(x,1)\mathbf{H}_{11}(x,1)'}dx$$

був скінченним, що виконується лише за умови $\gamma < 1$. Другий доданок має скінченні моменти за всіх γ. Тобто випадкова величина $\hat{w}_{SR,i}|\hat{\boldsymbol{\mu}}$ має моменти лише порядку $\gamma < 1$. Ураховуючи, що обидва доданки в (42) додатні, то такий самий результат виконується і для $\hat{w}_{SR,i}$. Отже, говорити про зміщеність чи незміщеність вибіркової оцінки ваг портфеля з найбільшим відношенням Шарпа немає сенсу. Крім того, той факт, що не існує математичного сподівання вибіркової оцінки ваг цього портфеля, яка є широко розповсюджена на практиці, повинен викликати певні застереження у практиків фінансового ринку, оскільки поведінка цієї оцінки може бути непередбачувана.

Зауважимо, що у випадку портфеля з найбільшим відношенням Шарпа, не існує функціонального перетворення вибіркової оцінки ваг до незміщеної. Тому природно виникає питання, чи можна побудувати незміщену оцінку ваг портфеля з найбільшим відношенням Шарпа? Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 16. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ...,\mathbf{X}_n$ *незалежні k-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$. *Тоді не існує незміщеної оцінки для параметра* $\mathbf{w}_{SR}$, *тобто не існує оцінки* $\mathbf{T}$ *параметра* $\mathbf{w}_{SR}$ *такої, що* $M_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{T}) = \mathbf{w}_{SR}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для всіх* $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ *таких, що* $\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} \neq 0$.

Доведемо спочатку лему.

Лема 7. *Нехай* $\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2,\ ...,\mathbf{X}_n$ *незалежні* k*-вимірні випадкові вектори та* $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *для* $i = 1, ..., n$. *Нехай* $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$ *дійснозначна функція така, що* $M_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}}(|\mathbf{T}|) < \infty$ *для всіх* $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$. *Нехай* $\{b_m\} \subset I\!\!R$ *довільна обмежена послідовність. Тоді послідовність* $M_{\boldsymbol{\mu}+b_m\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{1},\boldsymbol{\Sigma}}(|\mathbf{T}|)$ *буде також обмежена.*

Доведення. Маємо

$$M_{\boldsymbol{\mu}+b_m\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{1},\boldsymbol{\Sigma}}(|\mathbf{T}|) = \frac{1}{(2\pi)^{nk/2}} \int\limits_{I\!\!R^{nk}} |\mathbf{T}(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{y}_1, ..., \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\mathbf{y}_n)| \times$$
$$\times \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu} - b_m\mathbf{1})' \times$$
$$\times(\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu} - b_m\mathbf{1}))d\mathbf{y}_1...d\mathbf{y}_n.$$

Нехай

$$a \leq b_m \leq b \text{ і } \mathrm{h}(\lambda, \mathbf{y}) = (\mathbf{y} - \lambda\mathbf{1})'(\mathbf{y} - \lambda\mathbf{1}),$$

де $\lambda \in [a, b]$. Тоді:

$$\mathrm{h}(\lambda, \mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\lambda\mathbf{y}'\mathbf{1} + \lambda^2 k = k(\lambda - \frac{\mathbf{y}'\mathbf{1}}{k})^2 + \mathbf{y}'\mathbf{y} - \frac{(\mathbf{y}'\mathbf{1})^2}{k}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned}(\lambda - u)^2 \ &\geq \ \begin{cases} (u-b)^2 & \text{за} \ \ u > b \\ (u-b)^2 - (a-b)^2 & \text{за} \ \ a \leq u \leq b \\ (u-a)^2 & \text{за} \ \ u < a \end{cases} \\ &\geq \ \min\{(u-a)^2, (u-b)^2\} - (a-b)^2,\end{aligned}$$

то

$$\mathrm{h}(\lambda, \mathbf{y}) \geq \min\{\mathrm{h}(a, \mathbf{y}), \mathrm{h}(b, \mathbf{y})\} - (a-b)^2.$$

Використовуючи цей результат, отримаємо

$$\frac{1}{(2\pi)^{nk/2}}\int\limits_{I\!R^{nk}}|\mathbf{T}(\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{y}_1,...,\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{y}_n)| \times$$
$$\times \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y}_i-\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu}-b_m\mathbf{1})' \times$$
$$\times(\mathbf{y}_i-\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu}-b_m\mathbf{1}))d\mathbf{y}_1...d\mathbf{y}_n$$
$$\leq \exp(\frac{n}{2}(a-b)^2)(M_{\boldsymbol{\mu}+a\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{1},\mathbf{\Sigma}}(|\mathbf{T}|)+$$
$$+M_{\boldsymbol{\mu}+b\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{1},\mathbf{\Sigma}}(|\mathbf{T}|))<\infty,$$

що потрібно було довести.

Доведення теореми 16.

Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що існує незміщена оцінка $\mathbf{T}=(T_1,...,T_k)'$ параметра $\mathbf{w}_{SR}=(w_{SR,1},...,w_{SR,k})'$, тобто $M_{\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma}}(\mathbf{T}(\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_n))=\mathbf{w}_{SR}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma})$ для всіх $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{\Sigma}$ таких, що $\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\neq 0$. Нам потрібно знайти послідовність $\boldsymbol{\mu}_m=(m_{1m},...,m_{km})'$ таку, що $\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_m\neq 0$ для всіх $m\in I\!N$, $\mathbf{1}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_m \underset{m\to\infty}{\to} 0$ і $\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_m \underset{m\to\infty}{\to} \mathbf{q}\neq\mathbf{0}$. Зауважимо, що знайти таку послідовність є доволі просто. Ми можемо взяти, наприклад, $\boldsymbol{\mu}_m=\boldsymbol{\tau}+a_m\mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{1}$, де $a_m=\frac{(-1)^m}{m}$. Вектор $\mathbf{q}$ може бути довільним ненульовим вектором, сума координат якого становить 0. Тоді ми приймаємо $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{\Sigma}\mathbf{q}$.

Припустимо, що $\mathbf{q}=(q_1,...,q_k)'$ і $q_r\neq 0$. Розглянемо послідовність математичних сподівань

$$M_{\boldsymbol{\mu}_m,\mathbf{\Sigma}}(T_r(\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_n)).$$

З леми 7 отримаємо, що ця послідовність є обмежена. Отже, ми можемо вибрати з неї $M_{\boldsymbol{\mu}_{m_N},\mathbf{\Sigma}}(T_r(\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_n))$ – збіжну підпослідовність. Ми отримали суперечність, оскільки $w_{SR,r}(\boldsymbol{\mu}_{m_N}, \boldsymbol{\Sigma}) \underset{N\to\infty}{\to} \pm\infty$. Теорему доведено.

З теореми 16 випливає, що ми не можемо побудувати незміщеної оцінки ваг портфеля з найбільшим відношенням Шарпа взагалі. Отже, використовувати цей оптимальний портфель потрібно дуже акуратно, оскільки інтерпретація оцінок його ваг може бути досить неточною.

4.5 Статистичні властивості ваг та характеристик тангенсіального портфеля

Нехай на ринку існує можливість безризикового розміщення коштів, причому щоденна дохідність такої операції становить $r_f \geq 0$. Припустимо, що інвестор вкладає кошти в один ризиковий фінансовий актив та один безризиковий. Нехай дохідність ризикового активу є нормально розподілена з параметрами μ та σ^2. Тоді частка коштів, вкладена інвестором у фінансовий актив, та її вибіркова оцінка становлять

$$w_T = \alpha^{-1}\frac{\mu - r_f}{\sigma^2},\ \hat{w}_T = \frac{\hat{\mu} - r_f}{\hat{\sigma}^2}.$$

Теорема 17. *Нехай* $X_1,\ X_2,\ ..., X_n$ *незалежна вибірка дохідностей ризикового цінного паперу та* $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *для* $i = 1, ..., n$ *і нехай* $n \geq 2$. *Тоді функція густини вибіркової оцінки* $\hat{w}_T$ *має вигляд*

$$f_{\hat{w}_T}(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}\sigma/\sqrt{n}}\Big(\frac{n-1}{2\sigma^2}\Big)^{(n-1)/2}\frac{1}{\Gamma((n-1)/2)}\times \tag{43}$$
$$\times e^{-\frac{n(\mu-r_f)^2}{2\sigma^2}}a^{-(n+1)/4}\Big(\sqrt{a}\Gamma((n+1)/4)_1F_1(b^2/4a|(n+1)/4, 1/2) -$$
$$-b\Gamma((n+3)/4)_1F_1(b^2/4a|(n+3)/4, 3/2)\Big),$$

де $a = \frac{\alpha^2 x^2}{2\sigma^2/n}$, $b = \frac{n-1}{2\sigma^2} - n\alpha^2 x w_T$ *і* ${}_1F_1(\cdot|\cdot,\cdot)$ *– вироджена гіпергеометрична* *функція. Крім того, за $n \geq 4$ маємо*

$$M(\hat{w}_T) = \frac{n-1}{n-3} w_T,$$

а за $n \geq 6$ –

$$D(\hat{w}_T) = \frac{\alpha^{-2}}{\sigma^2} \frac{(n-1)^2}{n(n-3)(n-5)} + 2w_T^2 \frac{(n-1)^2}{(n-3)^2(n-5)}.$$

Доведення. Оскільки вибіркові оцінки параметрів розподілу дохідності ризикового цінного паперу незалежні, то

$$f_{\hat{w}_T}(x) \;=\; \int_0^\infty f_{\hat{w}_T|\hat{\sigma}^2}(x|y) f_{\hat{\sigma}^2}(y) dy,$$

причому $\hat{w}_T|\hat{\sigma}^2 = y \sim \mathcal{N}(\alpha^{-1}\frac{\mu - r_f}{y}, \frac{\alpha^{-2}}{n}\frac{\sigma^2}{y^2})$ та $(n-1)\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. Підставляючи відповідні густини у вираз для $f_{\hat{w}_T}(x)$, отримаємо

$$f_{\hat{w}_T}(x) = \frac{\alpha\sqrt{n}((n-1)/2\sigma^2)^{(n-1)/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Gamma((n-1)/2)} e^{-\frac{n(\mu - r_f)^2}{2\sigma^2}} \times$$
$$\times \int_0^\infty y^{(n-1)/2} exp\Big(-\frac{n\alpha^2}{2}\frac{x^2}{\sigma^2} y^2 - \frac{1}{2}\frac{n - 1 - 2nx\alpha(\mu - r_f)}{\sigma^2} y\Big) dy.$$

Зауважимо, що інтеграл у попередньому виразі є перетворенням Лапласа від $s^{p-1}e^{-as^2}$ і b може бути як додатним, так і від'ємним. Нехай $p = (n+1)/2$ і $a > 0$, тобто $x \neq 0$, тоді

$$\int_0^\infty s^{p-1} e^{-as^2 - bs} ds = \int_0^\infty s^{p-1} e^{-as^2} \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i b^i s^i}{i!} ds =$$
$$= \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i b^i}{i!} \int_0^\infty s^{p+i-1} e^{-as^2} ds =$$
$$= \frac{1}{2} a^{-p/2} \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{(b/\sqrt{a})^i \Gamma((p+i)/2)}{i!} =$$

$$= \frac{1}{2}a^{-p/2}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{(b/\sqrt{a})^{2i}\Gamma((p+2i)/2)}{(2i)!} -$$
$$-\frac{(b/\sqrt{a})^{2i+1}\Gamma((p+2i+1)/2)}{(2i+1)!}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}a^{-p/2}\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\frac{(b^2/4a)^i 2^{2i}\Gamma(p/2+i)}{(2i)!} -$$
$$-\frac{b}{\sqrt{a}}\frac{(b^2/4a)^i 2^{2i}\Gamma((p+1)/2+i)}{(2i+1)!}\Big).$$

Зауважимо, що $2^{2i}/(2i)! = \Gamma(1/2)/(\Gamma(i+1/2)i!)$ та, використовуючи представлення вироджених гіпергеометричних функцій у формі ряду, отримаємо

$$\int_0^{\infty} s^{p-1}e^{-as^2-bs}ds =$$
$$= \frac{1}{2}a^{-(p+1)/2}\Big(\sqrt{a}\Gamma(p/2)_1F_1(b^2/4a|p/2,1/2) -$$
$$-b\Gamma((p+1)/2)_1F_1(b^2/4a|(p+1)/2,3/2)\Big).$$

Отже перестановка інтеграла та нескінченої суми правильна, оскільки обидва є абсолютно збіжними. Теорему доведено.

Зауваження. За $x = 0$ значення густини $f_{\hat{w}_T}$ обчислюємо як границю $\lim\limits_{x\to 0} f_{\hat{w}_T}(x)$, яка дорівнює

$$f_{\hat{w}_T}(0) = \frac{2\sqrt{n}\alpha\sigma}{\sqrt{2\pi}(n-1)}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n-1)/2)}e^{-\frac{n(\mu-r_f)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ми розглянули деякі статистичні властивості вибіркових оцінок ваг та характеристик оптимальних портфелів. Бачимо, навіть припускаючи, що дохідності фінансових активів поводяться як нормально розподілені випадкові величини, розподіли вибіркових оцінок є доволі складними. Тому використання отриманих розподілів неможливе без комп'ютера та відповідних комп'ютерних програм. Зауважимо також, що отримані результати можуть бути використані для імітаційного моделювання поведінки портфеля та його характеристик, що доволі часто використовують у великих фінансових установах світу.

Література

[1] Bachelier L. Theorie de la speculation / L. Bachelier // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. – 1900. – N 3 (17). – P. 21 – 86.

[2] Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // Journal of finance. – 1952. – N 7. – P. 77 – 91.

[3] Krokhmal P. Modeling and optimization of risk / P. Krokhmal, M. Zabarankin, S. Uryasev // Surveys in operations research and management science. – 2011. – N 16. – P. 49 – 66.

[4] Basel Committee on Banking Supervision // Operational Risk Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord. – January 2001. – 30 p.

[5] Artzner P. Coherent measures of risk / P. Artzner, F. Delbaen, J. M. Eber, D. Heath // Mathematical finance. 1999. N 9(3). P. 203 228.

[6] Pflug. G. Ch. Some remarks on the value-at-risk and conditional value-at-risk / G. Ch. Pflug // Probabilistic constrained optimization: methodology and applications / ed. S. Uryasev. – Netherlands : Kluwer, 2000. – P. 272 – 281.

[7] Magnus J. R. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics / J. R. Magnus, H. Neudecker. – New York : Wiley, 1999. – 450 p.

[8] Fama E. F. Foundations of finance / E. F. Fama. – New York : Basic Books, 1976. – 391 p.

[9] Muirhead R. J. Aspects of Multivariate Statistical Theory / R. J. Muirhead. New York : Wiley, 1982. 675 p.

[10] Bodnar T. Econometrical analysis of the sample efficient frontier / T. Bodnar, W. Schmid // The European Journal of Finance. – 2009. – N 15. – P. 317 – 335.

[11] Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке / Н. Джонсон, Ф. Лион. – Москва : Мир, 1980. – 520 с.

[12] Johnson N. L. Continuous univariate distributions /N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan. – New York : Wiley, 1995. – Vol. 2. – 719 p.

[13] Lam Y.-M. Confidence limits for non-centrality parameters of non-central chi-square and F distributions / Y.-M. Lam // ASA 1987, Proceedings of the Statistical Computing Section. – 1987. – P. 441-443.

Навчальне видання

Заболоцький Микола Васильович

Заболоцький Тарас Миколайович

СТАТИСТИКА ПОРТФЕЛІВ

Навчальний посібник

Редактор Р. П. Спринь

Комп'ютерне верстання Т. М. Заболоцький

Формат 64х84/16. Ум. друк. арк. 4.

Тираж 150 пр. Зам. №

Видавець та виготовлювач:

Львівський національний університет імені Івана Франка,

вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції. Серія ДК № 3059 від 13.12.2007