Моделювання часових рядів

МАРІАННА ОЛІСКЕВИЧ

ПРОФЕСОР КАФЕДРИ

МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ,

ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Експоненціальне згладжування

Методи Брауна, методи Голта-Вінтерса

Маріанна Оліскевич

Модуль 1

- 6. Методи експоненціального згладжування
- 7. Фільтр Годріка – Прескотта
- 8. Методи інтерполяції часових рядів
- 9. Циклічність
- Пакет EViews

Експоненціальне згладжування
Exponential Smoothing

Просте експоненціальне згладжування Брауна (один параметр)

$$\boxed{\hat{y}_t = \alpha\, y_t + (1-\alpha)\,\hat{y}_{t-1}}$$

$0 \le \alpha \le 1$ – параметр згладжування.

$$\min\{y_t, \hat{y}_{t-1}\} \le \hat{y}_t \le \max\{y_t, \hat{y}_{t-1}\}$$

Нехай $\hat{y}_1 = l_0$.

$$\begin{aligned}
\hat{y}_2 &= \alpha\, y_2 + (1-\alpha)\,\hat{y}_1\,,\\
\hat{y}_3 &= \alpha\, y_3 + (1-\alpha)\,\hat{y}_2\,,\\
\hat{y}_4 &= \alpha\, y_4 + (1-\alpha)\,\hat{y}_3\,,\\
&\dots\\
\hat{y}_t &= \alpha\, y_t + (1-\alpha)\,\hat{y}_{t-1}\,.
\end{aligned}$$

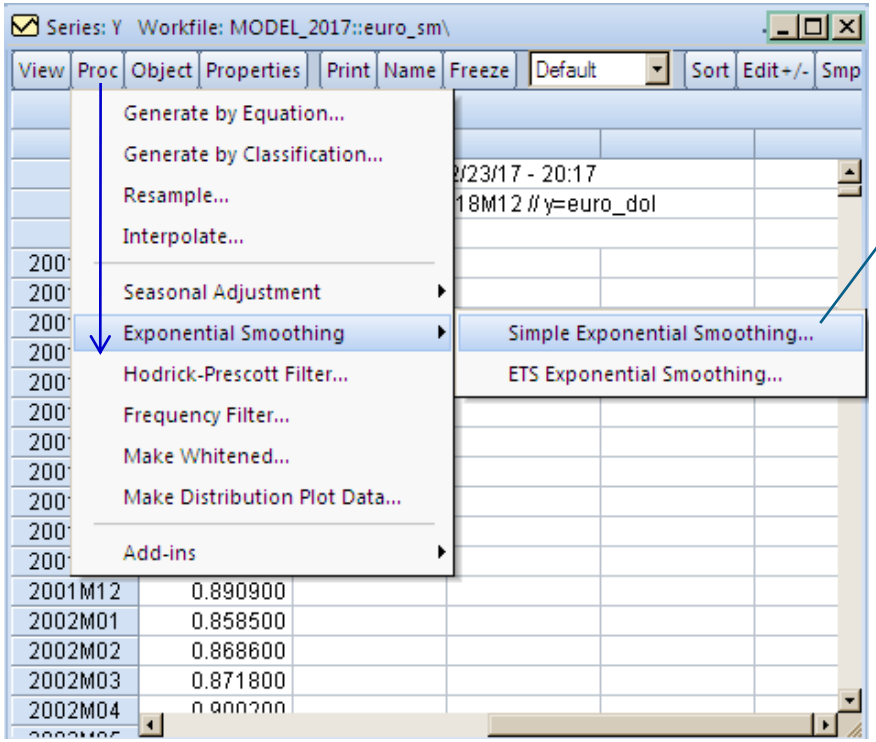
$$\begin{aligned}
\hat{y}_3 &= \alpha\, y_3 + (1-\alpha)\,(\alpha\, y_2 + (1-\alpha)\, l_0) =\\
&= \alpha\, y_3 + \alpha\,(1-\alpha)\, y_2 + (1-\alpha)^2\, l_0\,,\\
\hat{y}_4 &= \alpha\, y_4 + (1-\alpha)\,(\alpha\, y_3 + \alpha\,(1-\alpha)^2\, y_2 + (1-\alpha)^2\, l_0) =\\
&= \alpha\, y_4 + \alpha\,(1-\alpha)\, y_3 + \alpha\,(1-\alpha)^2\, y_2 + (1-\alpha)^3\, l_0\,,\\
&\dots\\
\hat{y}_t &= \alpha\,(y_t + (1-\alpha)\, y_{t-1} + (1-\alpha)^2\, y_{t-2} + \dots (1-\alpha)^{t-2}\, y_2) +\\
&\quad + (1-\alpha)^{t-1}\, l_0\,.
\end{aligned}$$

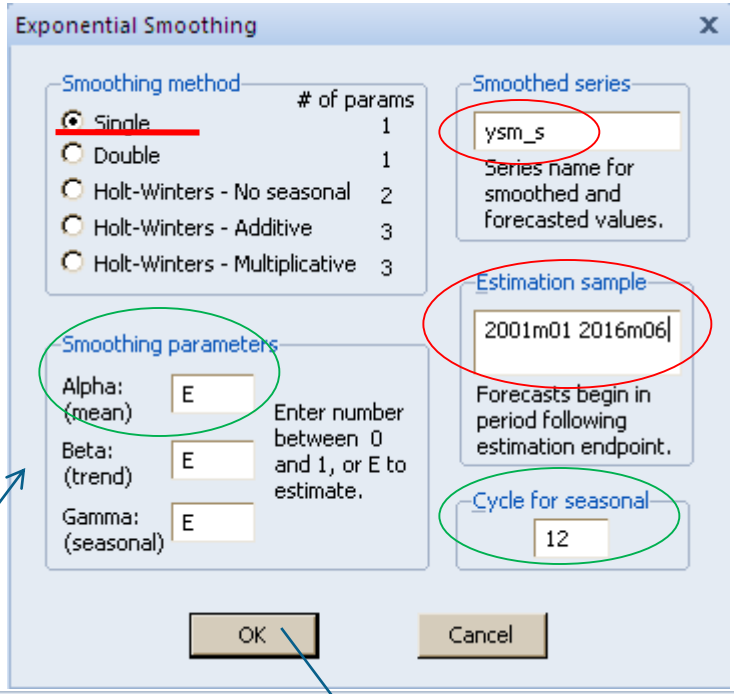
$$\boxed{\hat{y}_t = \alpha \sum_{k=0}^{t-2} (1-\alpha)^k\, y_{t-k} + (1-\alpha)^{t-1}\, l_0\,.}$$

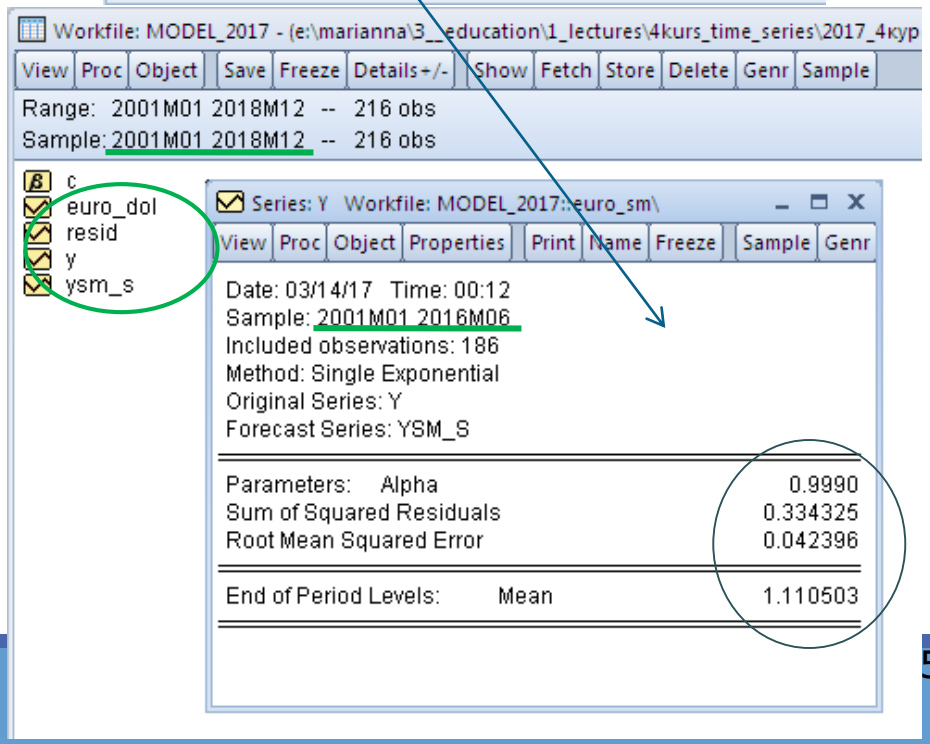
Прогнозовані значення $\boxed{\hat{y}_{T+k} = \hat{y}_T \quad \text{для} \quad k > 0}$

без тренду
без сезонності

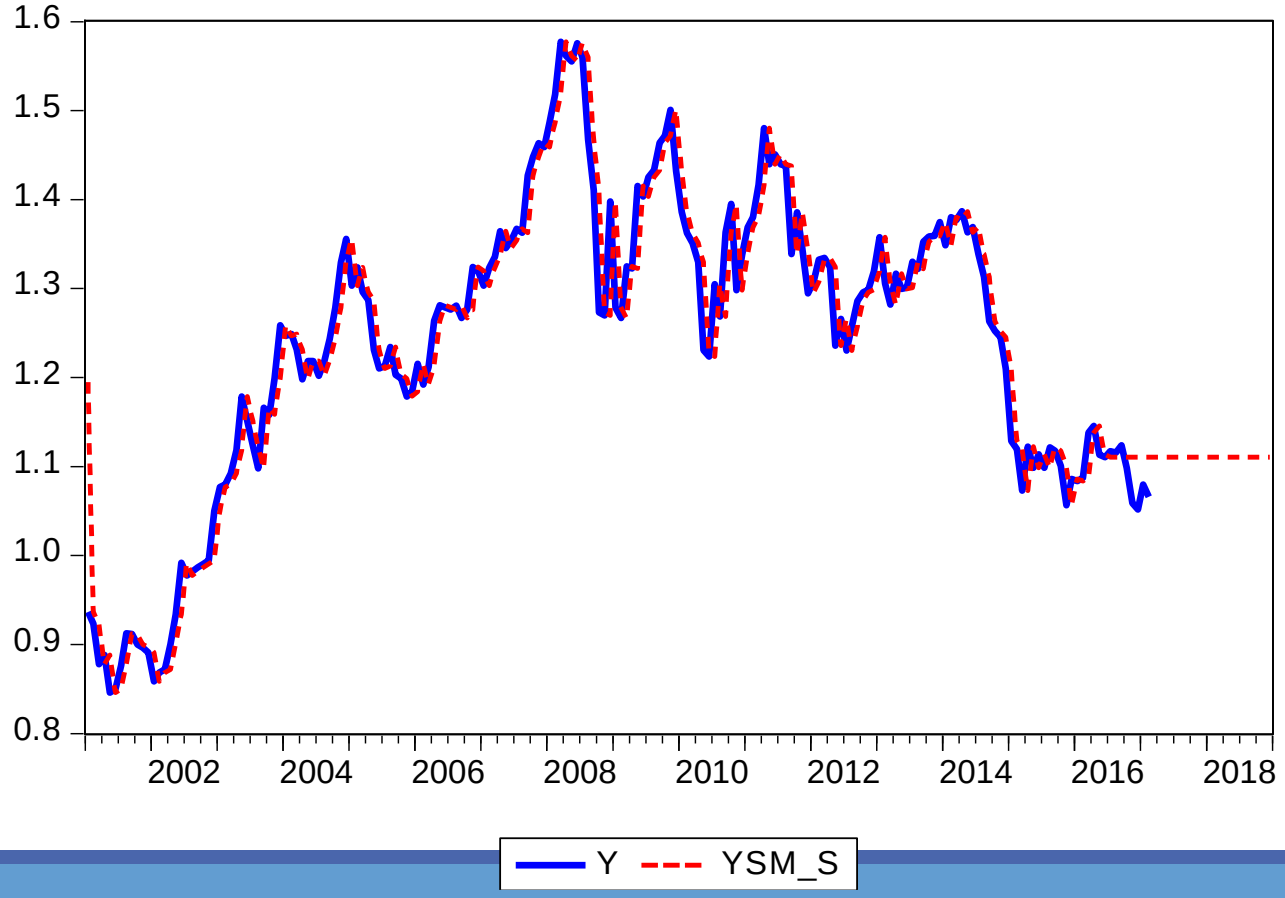
EViews : page – sm







Просте експоненціальне згладжування Брауна (валютний курс)



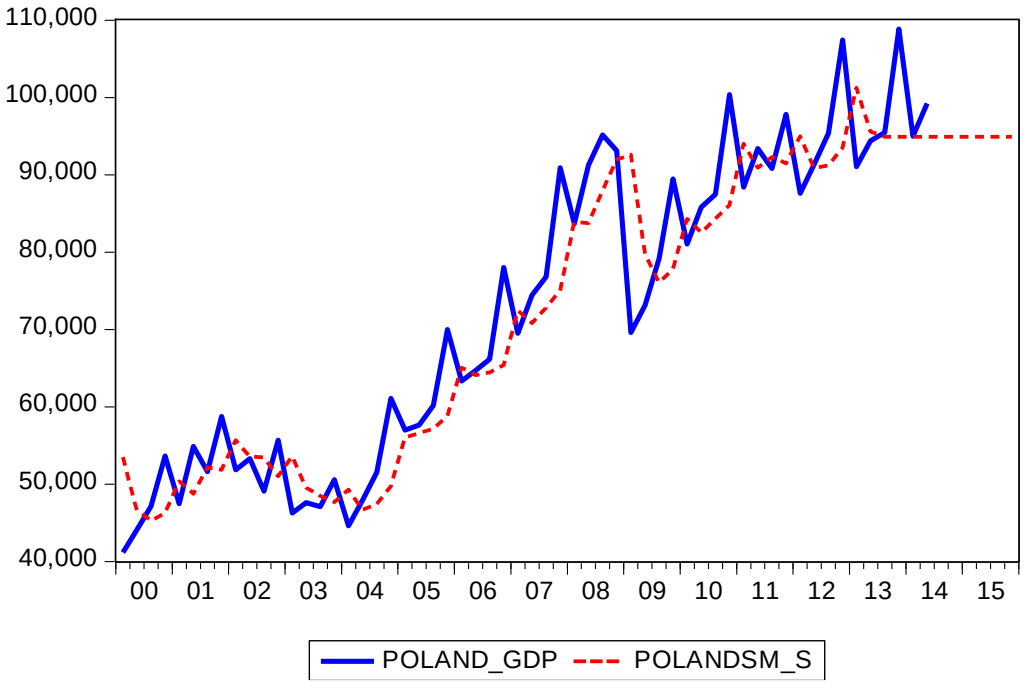
Просте експоненціальне згладжування Брауна (ВВП Польщі)

Series: POLAND_GDP Workfile: MODEL_2017::gdp_sm\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | S

Date: 03/14/17 Time: 00:22
Sample: 2000Q1 2013Q2
Included observations: 54
Method: Single Exponential
Original Series: POLAND_GDP
Forecast Series: POLANDSM_S

Parameters:	Alpha	0.5560
Sum of Squared Residuals		2.71E+09
Root Mean Squared Error		7087.517
End of Period Levels:	Mean	94920.94



Експоненціальне згладжування
Exponential Smoothing

Подвійне експоненціальне згладжування Брауна (один параметр)

$$S_1 = y_1\,, \qquad D_1 = y_1\,, \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} S_t &= \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}\,, \\ D_t &= \alpha S_t + (1-\alpha) D_{t-1}\,, \end{aligned}}$$

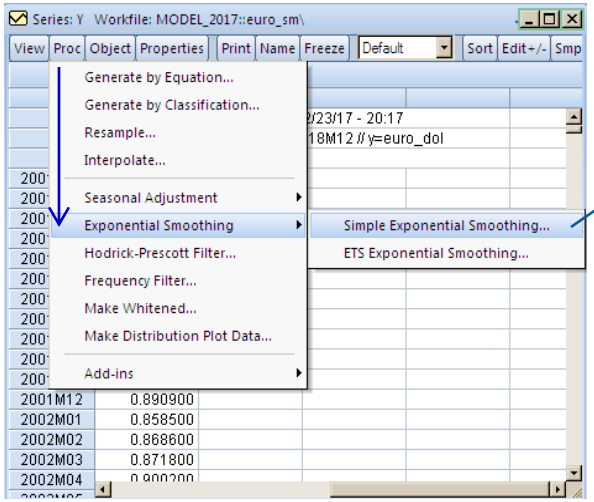
$0 \le \alpha \le 1$ – параметр згладжування.

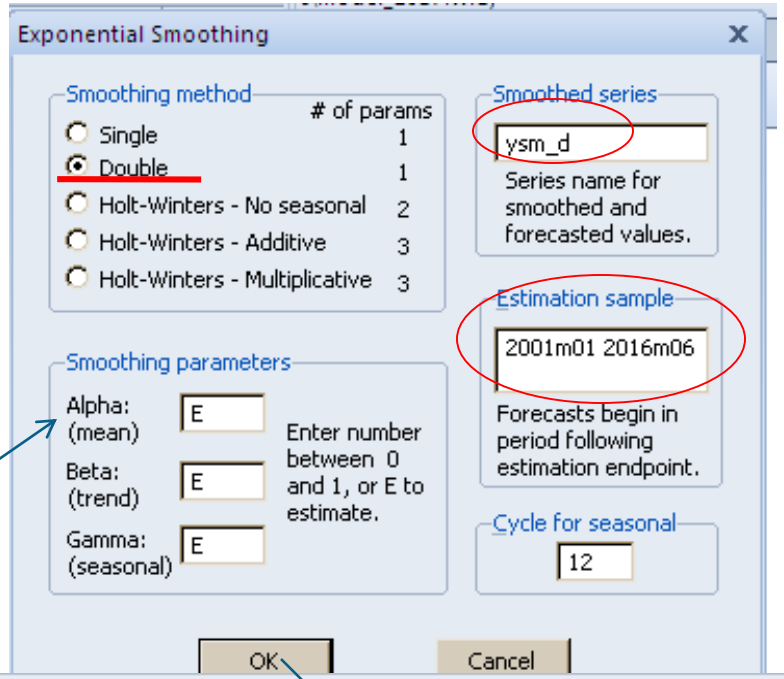
Прогнозовані значення

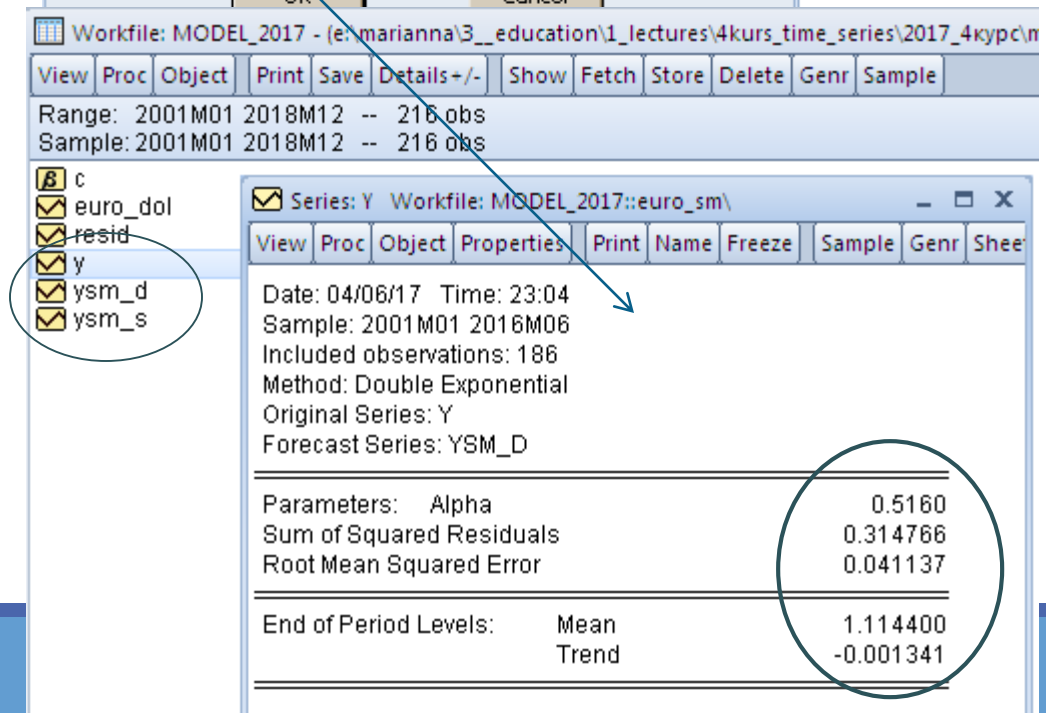
$$\boxed{\begin{aligned} \hat{y}_{T+k} &= \left(2 + \frac{\alpha k}{1-\alpha}\right) S_T - \left(1 + \frac{\alpha k}{1-\alpha}\right) D_T = \\ &= (2S_T - D_T) + \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_T - D_T)\,k\,, \quad k > 0\,. \end{aligned}}$$

з трендом
без сезонності

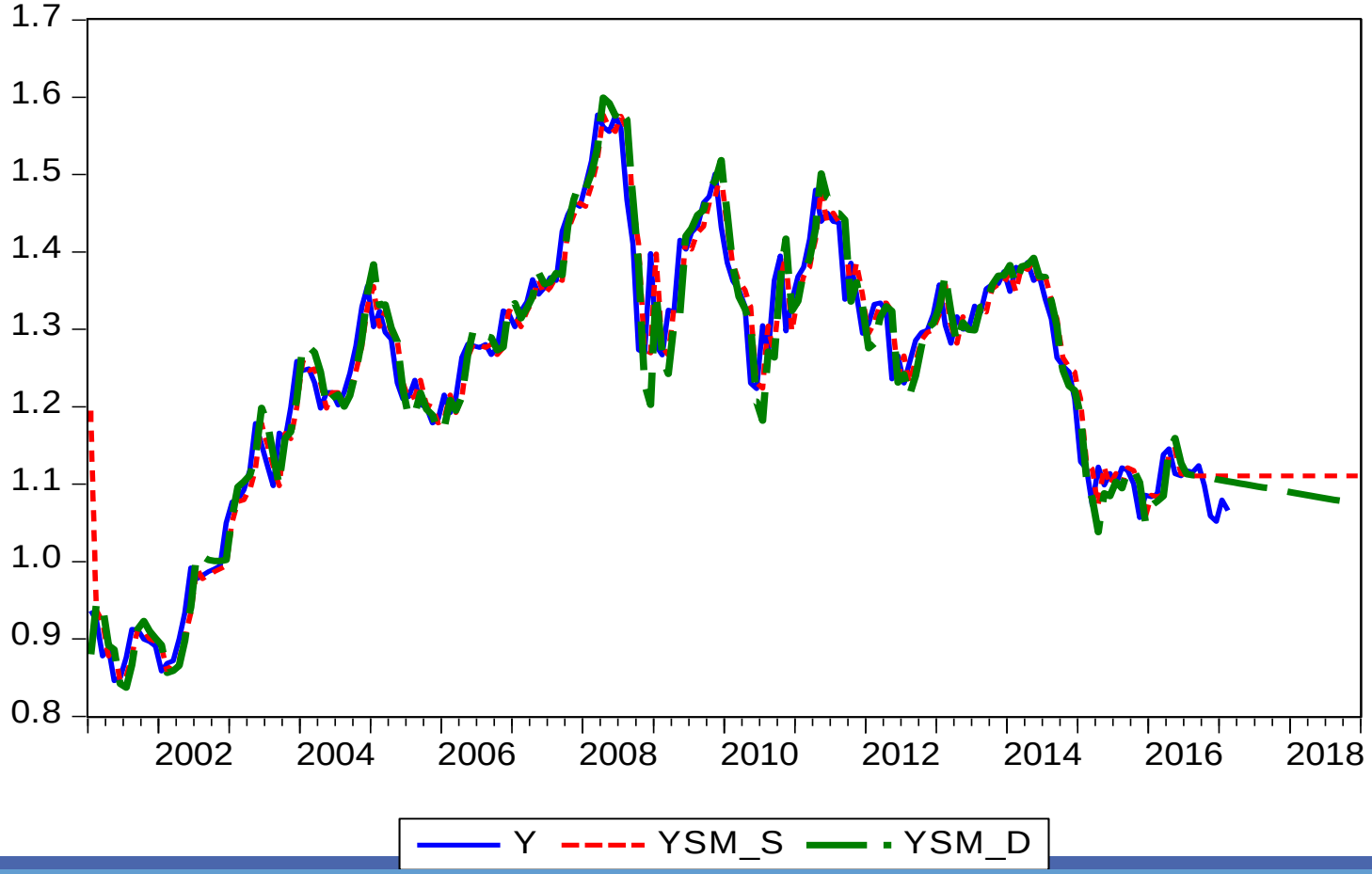
EViews : page – sm







Подвійне експоненціальне згладжування Брауна (валютний курс)



Експоненціальне згладжування
Exponential Smoothing

Потрійне експоненціальне згладжування Брауна

$$
\begin{aligned}
S_t &= \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}\,, \\
D_t &= \alpha S_t + (1-\alpha) D_{t-1}\,, \\
\hat{y}_t &= \alpha D_t + (1-\alpha) \hat{y}_{t-1}\,.
\end{aligned}
$$

Адаптивне згладжування

$$
\hat{y}_t = \alpha_t\, y_t + (1-\alpha_t)\, \hat{y}_{t-1}\,,
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_t &= \left| \frac{E_t}{M_t} \right|\,, \\
E_t &= \beta(y_t - \hat{y}_t) + (1-\beta) E_{t-1}\,, \\
M_t &= \beta\, |y_t - \hat{y}_t| + (1-\beta) M_{t-1}\,.
\end{aligned}
$$

Експоненціальне згладжування
Exponential Smoothing

Подвійне експоненціальне згладжування Голта-Вінтерса (Holt-Winters – два параметра)

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t|t-1} &= a_{t-1} + b_{t-1}\,, \\ a_t &= \alpha\, y_t + (1-\alpha)\,(a_{t-1} + b_{t-1})\,, \\ b_t &= \beta\,(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{t-1}\,, \end{aligned}$$

$0 < \alpha, \beta < 1$ – параметри згладжування.

Прогнозовані значення

$$\hat{y}_{T+k} = a_T + b_T\, k \quad k > 0\,.$$

з трендом
без сезонності

Експоненціальне згладжування
Exponential Smoothing

Адитивна модель Голта-Вінтерса (три параметри)

$$\hat{y}_{t|t-1} = a_{t-1} + b_{t-1} + c_{t-s}\,,$$

$$a_t = \alpha(y_t - c_{(t-s)}) + (1-\alpha)(a_{t-1} + b_{t-1})\,,$$
$$b_t = \beta(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}\,,$$
$$c_t = \gamma(y_t - a_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)c_{(t-s)}\,,$$

a – компонента рівня,
b – трендова компонента,
c – адитивні сезонні фактори.

$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ – параметри згладжування,

s – сезонна періодичність,

Прогнозовані значення

$$\hat{y}_{T+k} = a_T + b_T\,k + c_{T+k-s}\,,$$

з трендом
адитивна сезонність

Експоненціальне згладжування
Exponential Smoothing

Мультиплікативна модель Голта-Вінтерса (три параметри)

$$\hat{y}_{t|t-1} = (a_{t-1} + b_{t-1})\, c_{t-s}\,,$$

$$a_t = \alpha \frac{y_t}{c_{t-s}} + (1-\alpha)\,(a_{t-1} + b_{t-1})\,,$$

$$b_t = \beta\,(a_t - a_{t-1}) + (1-\beta)\, b_{t-1}\,,$$

$$c_t = \gamma \frac{y_t}{a_t} + (1-\gamma)\, c_{t-s}\,,$$

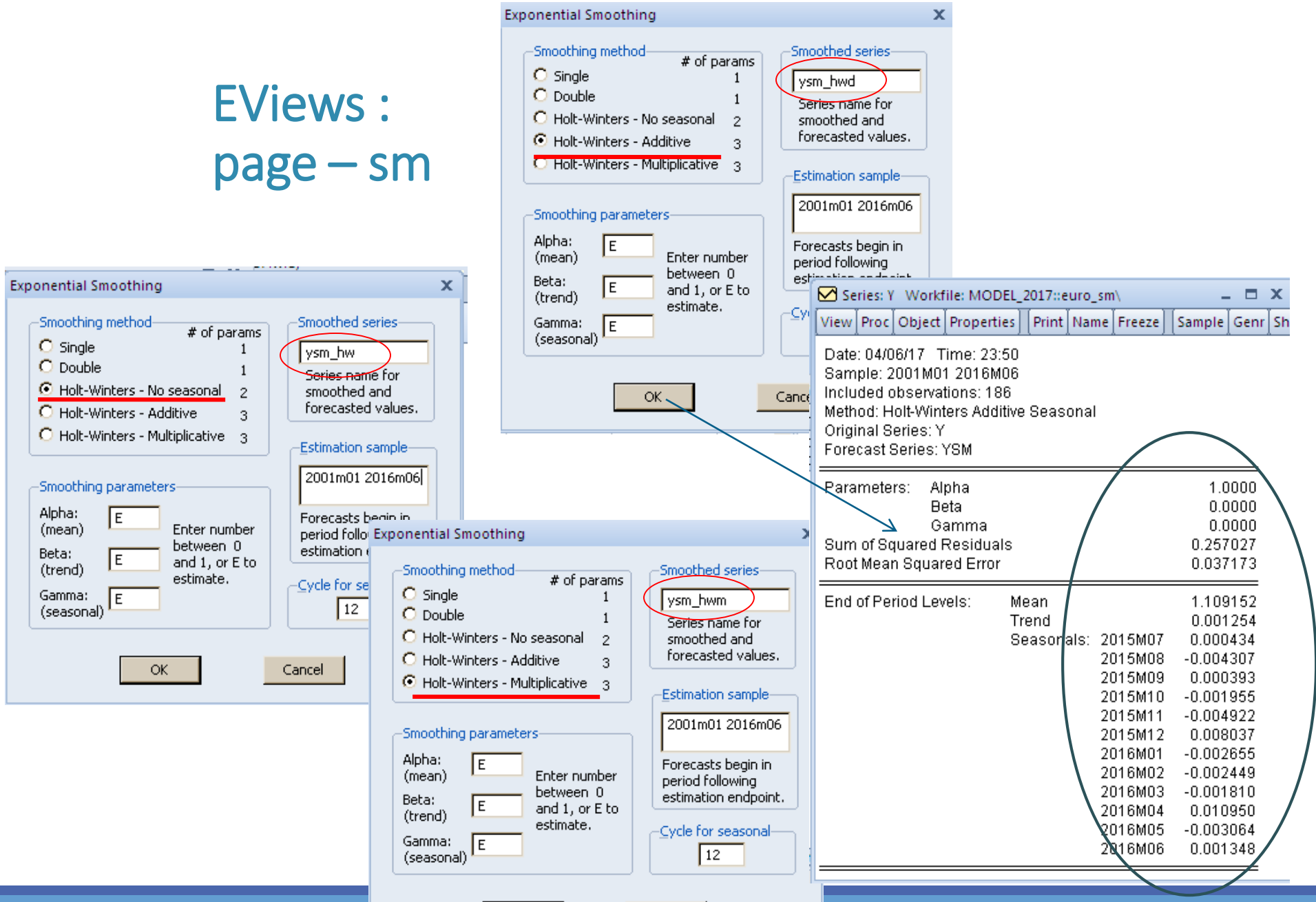
a – компонента рівня (перетин),
b – трендова компонента,
c – мультиплікативний сезонний фактор.
$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ – параметри згладжування,
s – сезонна періодичність,

Прогнозовані значення

$$\hat{y}_{T+k} = (a_T + b_T\, k)\; c_{T+k-s}\,,$$

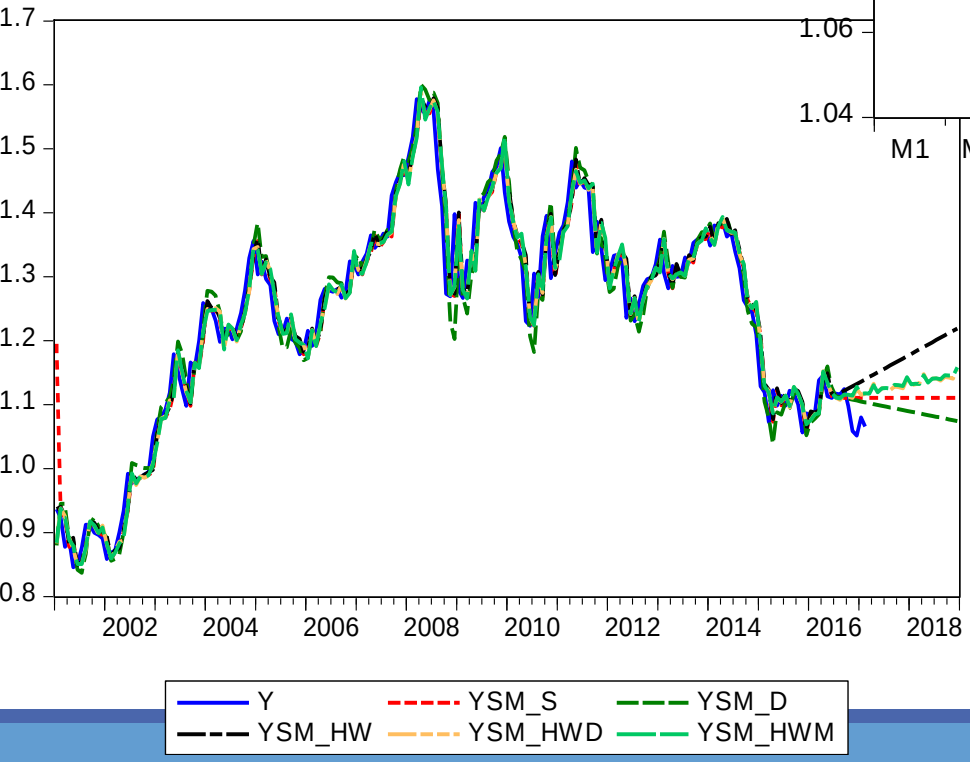
з трендом
мультиплікативна сезонність

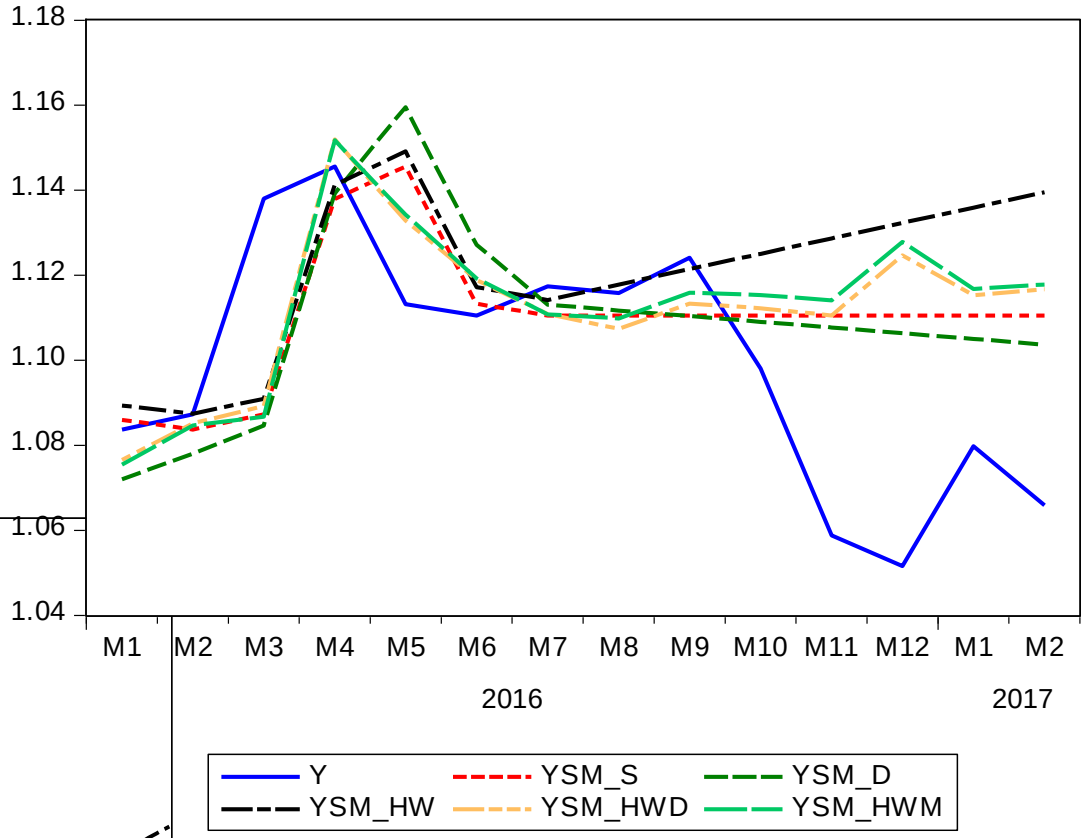
EViews : page – sm



EVviews : page – sm

Прогнозовані значення валютного курсу





EViews : page – sm

Похибки прогнозів

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=T+1}^{T+n}(\hat{y}_t - y_t)^2},$$

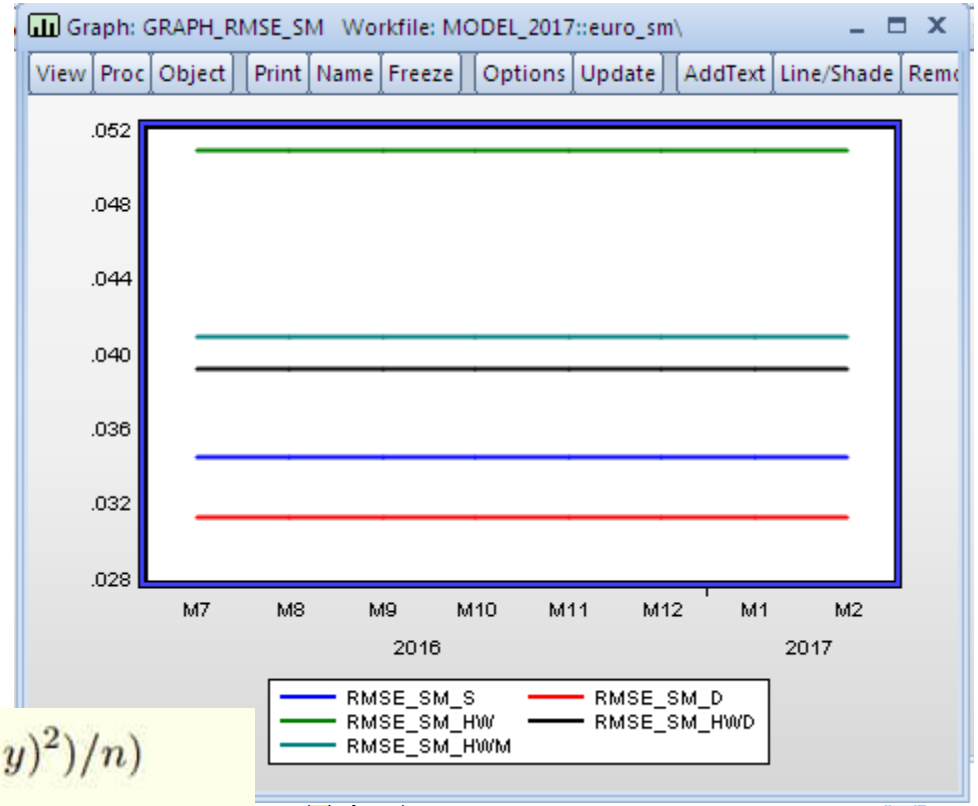
$$rmse_sm_s = sqr((@sum((ysm_s - y)^2)/n)$$

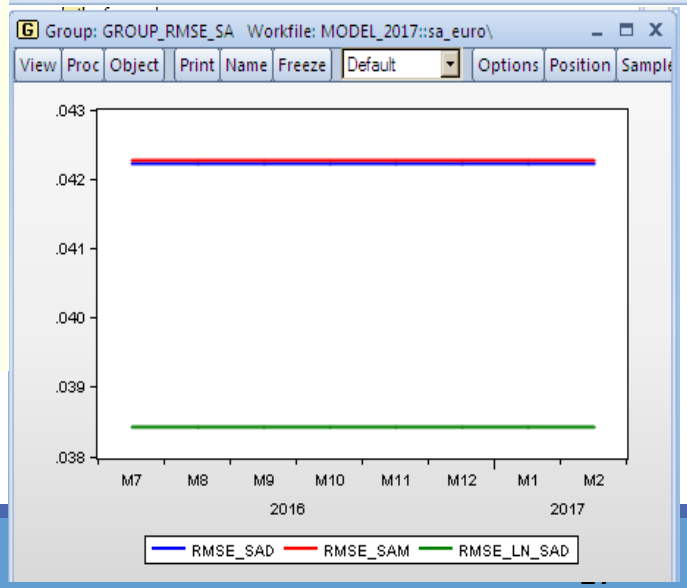
$$rmse_sm_d = sqr((@sum((ysm_d - y)^2)/n)$$

$$rmse_sm_hw = sqr((@sum((ysm_hw - y)^2)/n)$$

$$rmse_sm_hwd = sqr((@sum((ysm_hwd - y)^2)/n)$$

$$rmse_sm_hwm = sqr((@sum((ysm_hwm - y)^2)/n)$$





Індивідуальне завдання 1 (продовження)

21. за допомогою методу простого та подвійного експоненціального згладжування Брауна побудувати згладжений ряд та визначити прогнозовані значення ряду, проаналізувати оцінене значення параметра;
22. за допомогою методу Голта – Вінтерса (без урахування сезонності) побудувати згладжений ряд та визначити прогнозовані значення ряду; проаналізувати оцінені значення параметрів;
23. за допомогою адитивного методу Голта – Вінтерса (з урахуванням сезонності) побудувати згладжений ряд та визначити прогнозовані значення ряду; проаналізувати оцінені значення параметрів;
24. за допомогою адитивного методу Голта – Вінтерса (з урахуванням сезонності) побудувати згладжений ряд та визначити прогнозовані значення ряду; проаналізувати оцінені значення параметрів;
25. на одному рисунку зобразити динаміку вихідного ряду та згладжених різними методами рядів на повній вибірці, а також для періоду на яких здійснювалось прогнозування;
26. на обчислити RMSE побудованих прогнозів за допомогою різних методів експоненціального згладжування, порівняти їх між собою.

Дякую за увагу!
Успіхів у моделюванні!