Моделювання часових рядів

МАРІАННА ОЛІСКЕВИЧ

ПРОФЕСОР КАФЕДРИ

МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ, ЕКОНОМЕТРІЇ,

ФІНАНСОВОЇ ТА СТРАХОВОЇ МАТЕМАТИКИ

Стаціонарні процеси часових рядів

Маріанна Оліскевич

Модуль 1

- 1. Поняття часового ряду. Стаціонарність
- 2. Типи стаціонарних процесів. Процес білого шуму
- 3. Процеси рухомого середнього (MA процеси)
- 4. Авторегресійні процеси (AR процеси)
- 5. ARMA процеси
- Пакет EViews

Часовий ряд

Означення 1.1.1. Якщо кожному t з множини Q поставлено у відповідність випадкову величину Y_t, то говорять, що на Q задано випадковий процес $\{Y_t, t \in Q\}$.

Означення 1.1.2. Реалізацією випадкового процесу $\{Y_t, t \in Q\}$ є функція $Y_t : Q \to \Omega$, яка ставить у відповідність кожному $t \in Q$ одне з можливих значень $y_t \in \Omega$ (Ω – множина можливих значень величин Y_t).

Ми розглядатимемо випадкові процеси, для яких $Q = \mathbb{Z}$ і інтерпретуватимемо t як час.

Одновимірна модель часового ряду

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots) \qquad (1)$$

Математичне сподівання, автоковаріації

Математичне сподівання часового ряду, якщо воно існує, дорівнює

$$E[Y_t] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} y_t f_{Y_t}(y_t) dy_t \,. \tag{1.3.1}$$

Автоковаріація описується як другий момент процесу y_t.

$$\begin{aligned} \gamma_{kt} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (y_t - \mu_t)(y_{t-k} - \mu_{t-k}) \times \\ & \times f_{Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k}}(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-k}) dy_t \, dy_{t-1} \dots dy_{t-k} = \\ = & E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t-k} - \mu_{t-k})]. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Слабка стаціонарність

Означення 1.5.1. *Якщо математичне сподівання μ_t і автоковаріації γ_{kt} для всіх k не залежать від часу, то часовий ряд y_t називається коваріаційно - стаціонарним або слабко стаціонарним.*

Тобто, для коваріаційно - стаціонарного процесу

$$E[Y_t] = \mu \qquad \text{для всіх } t\,,$$
$$E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k \qquad \text{для всіх } t \text{ і будь-якого } k.$$

Слабка стаціонарність

Лема 1.5.1. *Для коваріаційно - стаціонарного процесу* γ_k *і* γ_{-k} *збігаються, тобто*

$$\gamma_k = \gamma_{-k} \quad \text{для всіх цілих } k\,. \tag{1.5.1}$$

Доведення. З означення коваріації маємо

$$\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)]\,. \tag{1.5.2}$$

Якщо процес є коваріаційно - стаціонарним, тоді ця величина є однаковою для будь-якого t. Тому можемо замінити t на $t+k$

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E[(Y_t - \mu)(Y_{(t-k} - \mu)] = \\ &= E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_{(t+k)-k} - \mu)] = E[(Y_{t+k} - \mu)(Y_t - \mu)] = \\ &= E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-(-k)} - \mu)]\,.\end{aligned}$$

Але за означенням коваріації (1.4.1) останній вираз – це γ_{-k}. Отже, для кожного коваріаційно - стаціонарного процесу виконується (1.5.1). □

Сильна стаціонарність

Означення 1.5.2. *Процес називається сильно стаціонарним, якщо для різних* $j_1, j_2, ..., j_n$ *сукупний розподіл* $(Y_t, Y_{t+j_1}, Y_{t+j_2}, ..., Y_{t+j_n})$ *залежить тільки від інтервалів часу* $(j_1, j_2, ..., j_n)$ *і не залежить від самого* t. *Зокрема, у цьому випадку розподіл* Y_t *не залежатиме від* t.

Зауважимо, якщо процес сильно стаціонарний з обмеженими другими моментами, то він є коваріаційно - стаціонар-

Обернене твердження не правильне.

Означення 1.5.3. *Процес* $\{Y_t\}$ *називається Гауссівським, якщо сукупна щільність*

$$f_{Y_t, Y_{t+j_1}, ..., Y_{t+j_n}}(y_t, y_{t+j_1}, ..., y_{t+j_n})$$

є щільністю нормального стандартного багатовимірного розподілу для всіх $j_1, ..., j_n$.

Проста модель економіки

простої моделі економіки країни, яка задається такими рівняннями:

Структурна модель

$$Y_t = C_t + I_t + G_t\,, \tag{2}$$
$$C_t = \alpha + \beta\, Y_t + \varepsilon_t\,, \tag{3}$$
$$I_t = \delta\,(Y_t - Y_{t-1})\,, \tag{4}$$
$$G_t = \rho\, Y_{t-1} + G'\,, \tag{5}$$

Модель часових рядів

де ендогенні змінні Y_t, C_t, I_t, G_t є, відповідно, реальним доходом, споживанням, інвестиціями та урядовими витратами у момент часу t, а α, β, δ, ρ, G' – додатні сталі.

підставивши (3), (4) та (5) у (2), отримаємо рівняння для доходу у зведеному вигляді

$$Y_t = \lambda + \pi\, Y_{t-1} + u_t\,, \tag{6}$$

де

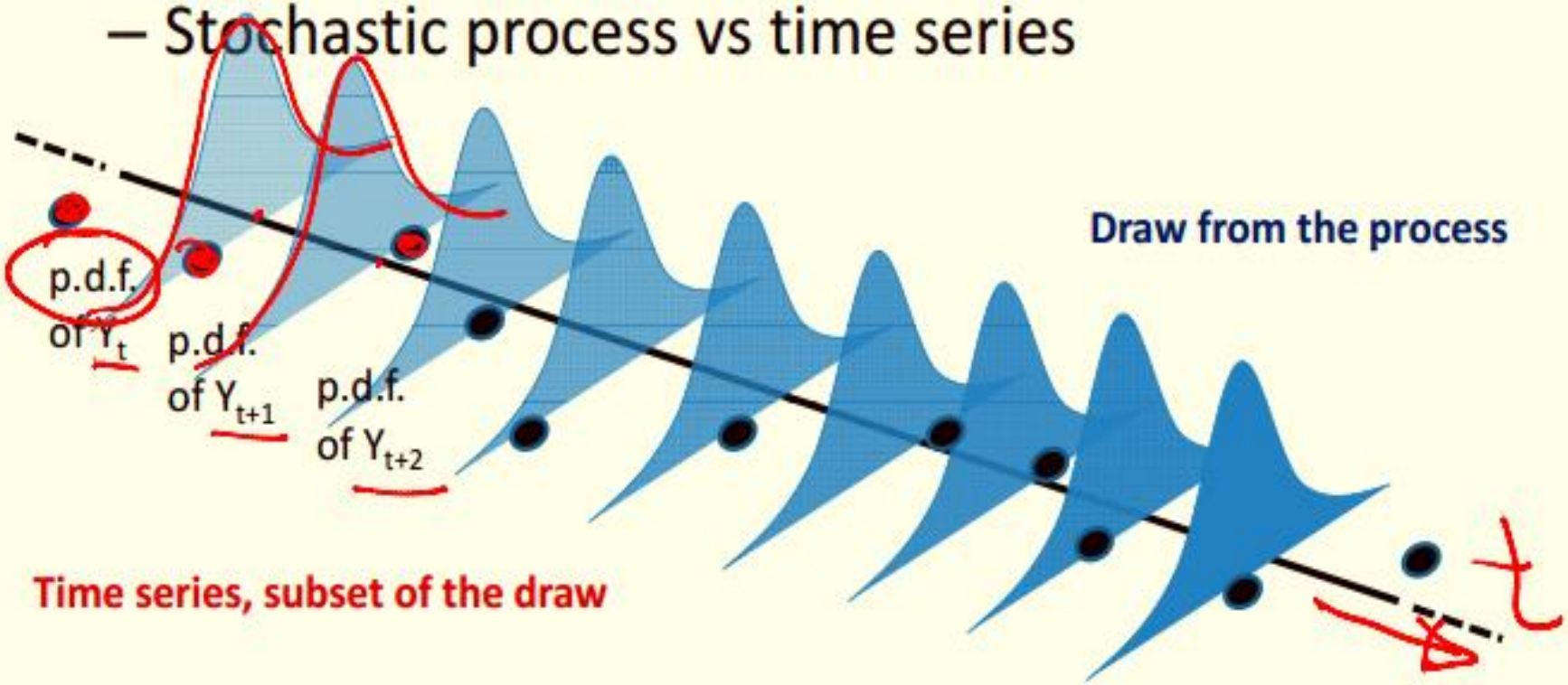
$$\lambda = \frac{\alpha + G'}{1 - \beta - \delta}\,, \quad \pi = \frac{\rho - \delta}{1 - \beta - \delta}\,, \quad u_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \beta - \delta}\,.$$

Модуль 2

- 1. Поняття часового ряду. Стаціонарність
- 2. Типи стаціонарних процесів. Процес білого шуму
- 3. Процеси рухомого середнього (MA процеси)
- 4. Авторегресійні процеси (AR процеси)
- 5. ARMA процеси
- Пакет EViews

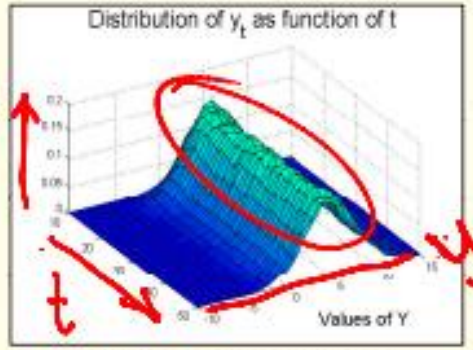
Стаціонарні процеси

- Univariate analysis
  - Stochastic process vs time series

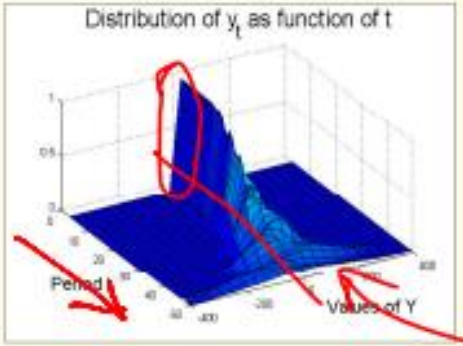


Стаціонарні процеси

- Stationary?



V

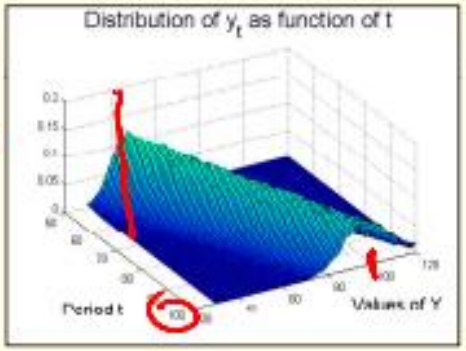


Var changes

X

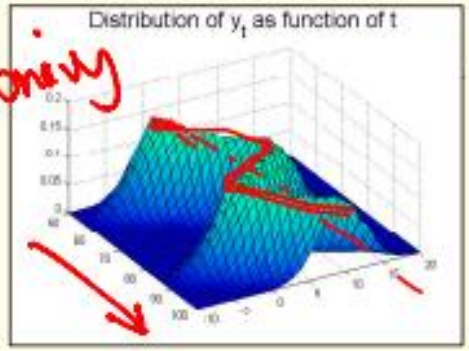
↑ t
↑ σ^2

Mean changes



X

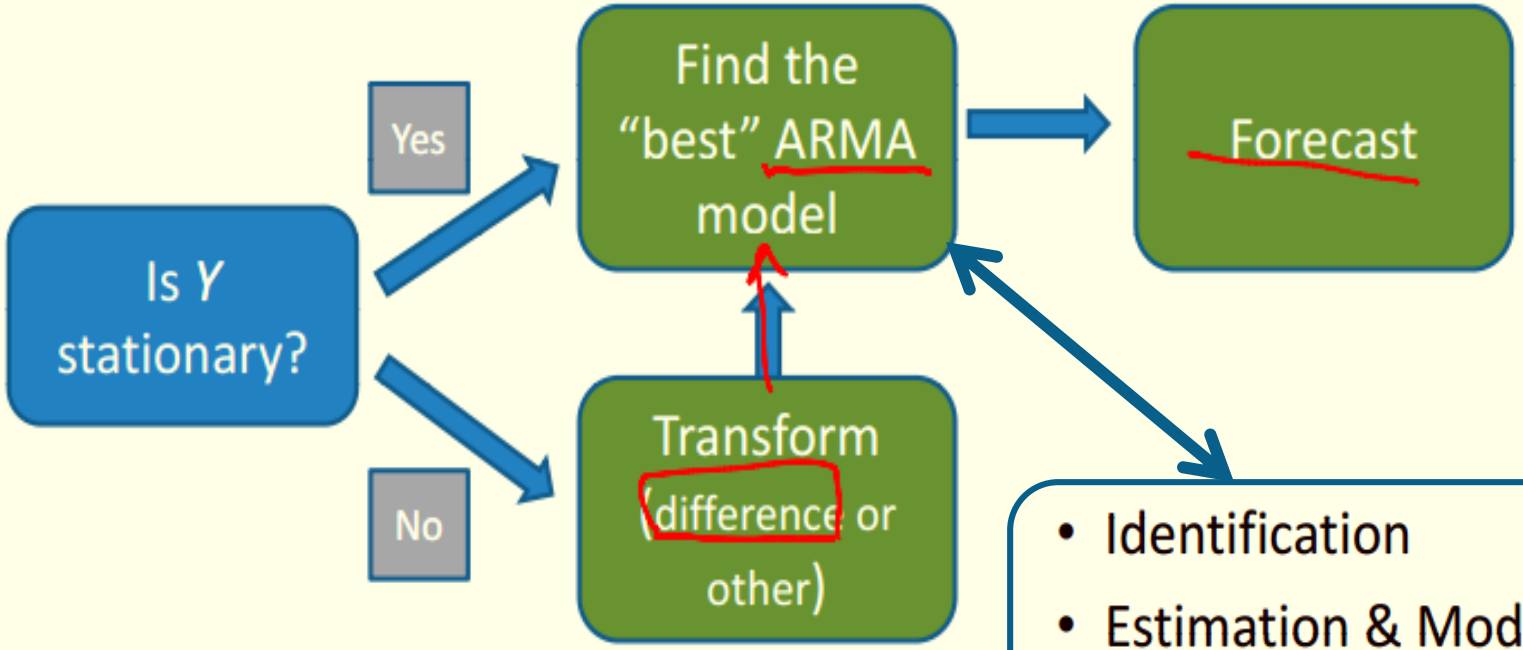
Non-stationary



X

Стаціонарні процеси

- Understanding behavior and forecasting



- Identification
- Estimation & Model Selection
- Putting it all together

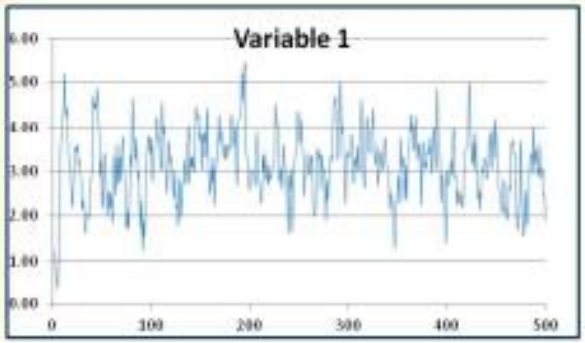
"You can observe a lot just by watching" Yogi Berra

The first step is visual inspection: graph and observe your data.

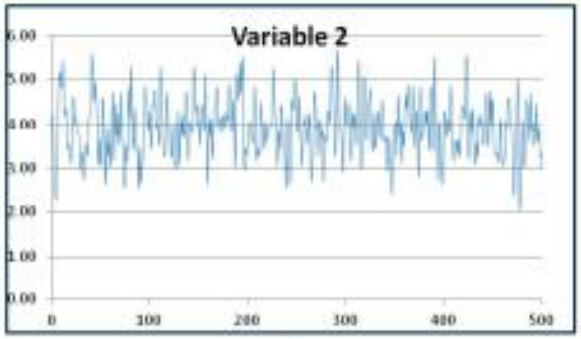
Does the series look stationary?

Autoregressive

AR(1)



✓



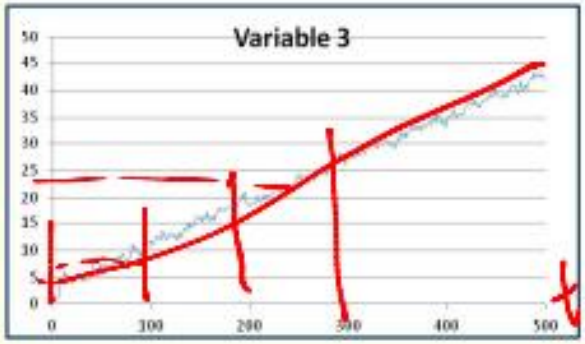
Moving Average

✓

MA(1)

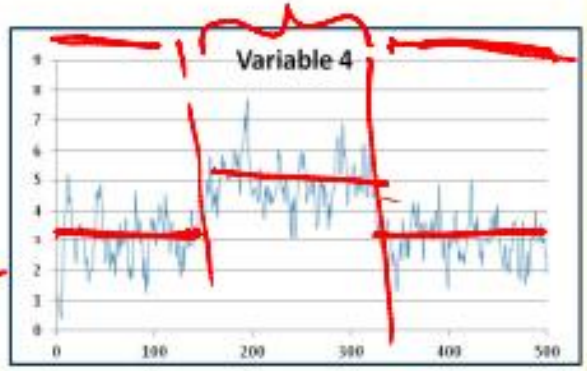
Mean changes

AR(1) with trend



✗

Struct break



Nonstat

✗

AR(1) with break

"You can observe a lot just by watching" Yogi Berra

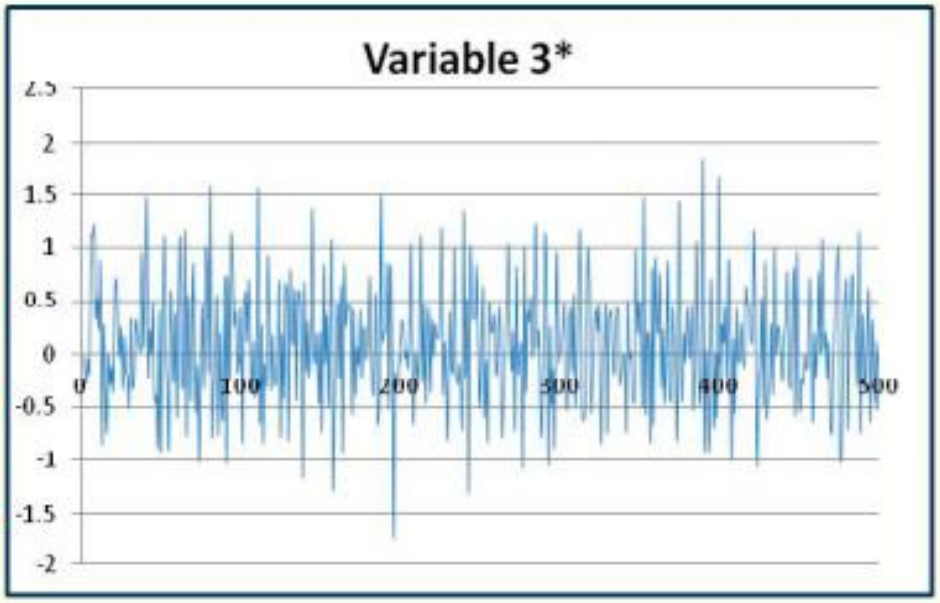
The first step is visual inspection: graph and observe your data.

Note: *differencing* can remove the trend:

$$y_t^* = y_t - y_{t-1}$$

$y_{12} - y_{11}$

$y_7 - y_8$



Stationary

↓

Methods

Типи стаціонарних процесів

Assuming that the process is stationary, there are three basic types that interest us:

random disturbance

- Autoregressive (AR) $y_t = a + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \ldots + b_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

max

- Moving Average (MA) $y_t = \mu + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \ldots + \phi_q u_{t-q}$
- Combined (ARMA)

$$y_t = a + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \ldots + b_p y_{t-p} + u_t + \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \ldots + \phi_q u_{t-q}$$

Процес білого шуму

White noise $\boxed{y_t = \varepsilon_t}$

1. $E[\varepsilon_t] = 0$
2. $Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$
3. $Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = 0, \quad t \neq s$

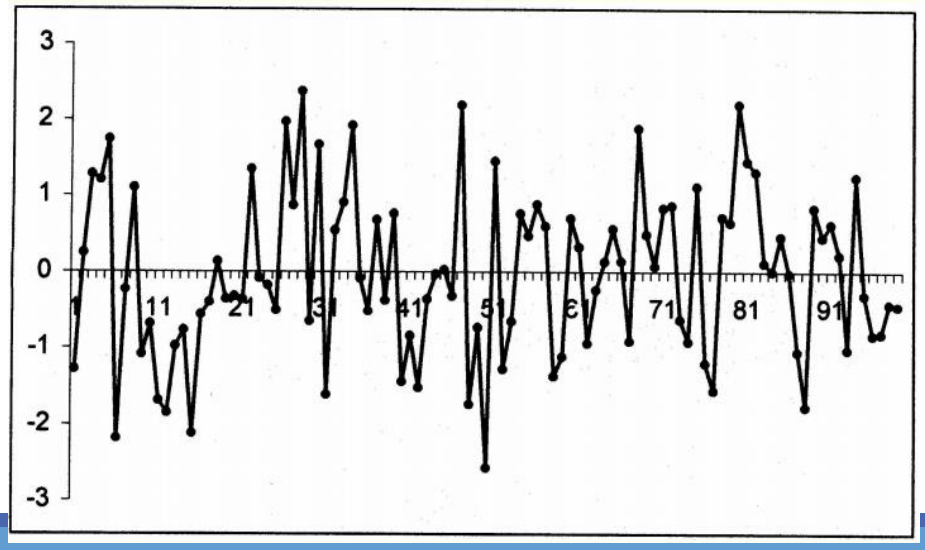
$\mathrm{Var}[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t^2]$,

$\mathrm{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = E[\varepsilon_t \varepsilon_s]$.

Gaussian white noise

$$\varepsilon_t \sim N[0; \sigma^2]$$

i.d.d (independent identically distributed)
незалежні, однаково розподілені



Модуль 3

- 1. Поняття часового ряду. Стаціонарність
- 2. Типи стаціонарних процесів. Процес білого шуму
- 3. Процеси рухомого середнього (MA процеси)
- 4. Авторегресійні процеси (AR процеси)
- 5. ARMA процеси
- Пакет EViews

Процеси рухомого середнього

MA(1) – a first-order moving average process

процес рухомого середнього першого порядку

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\, \varepsilon_{t-1}$$

1. математичне сподівання $E[y_t] = E[\mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}] =$

$$= \mu + E[\varepsilon_t] + \theta E[\varepsilon_{t-1}] = \mu\,,$$

2. дисперсі: $\gamma_0 = \mathrm{Var}[y_t] = E[(y_t - \mu)^2] =$

$$= E[\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2] = (1+\theta^2)\sigma^2\,.$$

3. автоковаріація першого порядку

$$\gamma_1 = E[(y_t - \mu)(y_{t-1} - \mu)] =$$
$$= E[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-1}^2 + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-2} + \theta^2\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}] = \theta\sigma^2\,,$$

4. автоковаріація k - того порядку

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] =$$
$$= E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} + \theta\varepsilon_{t-k-1})] = 0 \quad \text{для} \quad k > 1\,.$$

Процеси рухомого середнього

MA(1) – a first-order moving average process

процес рухомого середнього першого порядку

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\, \varepsilon_{t-1}$$

5. автокореляції

$$\rho_k = \mathrm{Corr}[y_t, y_{t-k}] = \frac{\mathrm{Cov}[y_t, y_{t-k}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[y_t]}\sqrt{\mathrm{Var}[y_{t-k}]}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}\,.$$

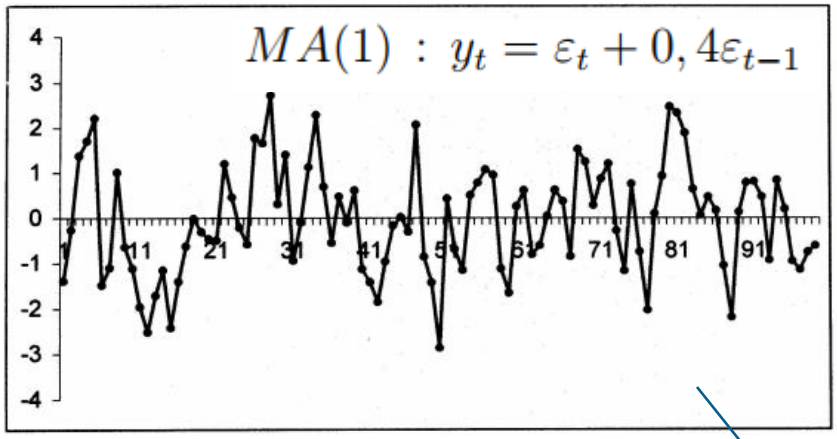
$$\rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}\,, \qquad \rho_k = 0 \quad \text{для} \quad k = 2, 3, \ldots\,.$$

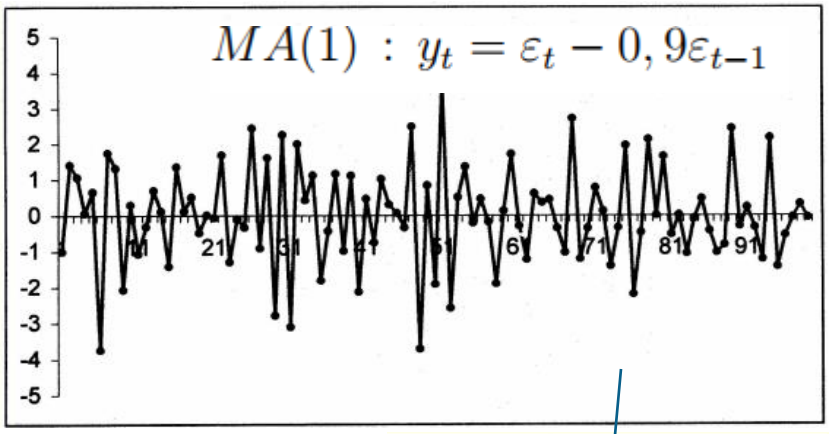
Процеси рухомого середнього

MA(1) – a first-order moving average process

процес рухомого середнього першого порядку

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\, \varepsilon_{t-1}$$

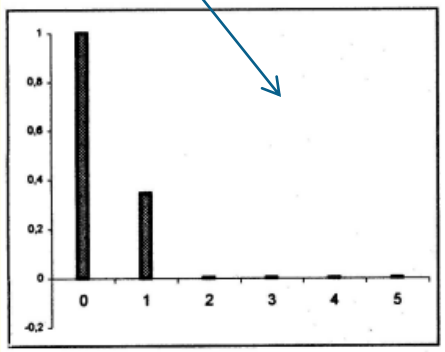


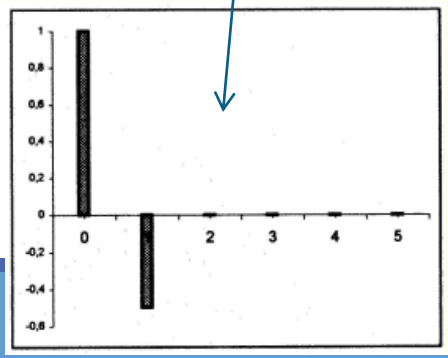


Автокореляції ρ_k,

$$\rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \qquad \rho_k = 0 \quad \text{для} \quad k = 2, 3, \ldots .$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, 5$$





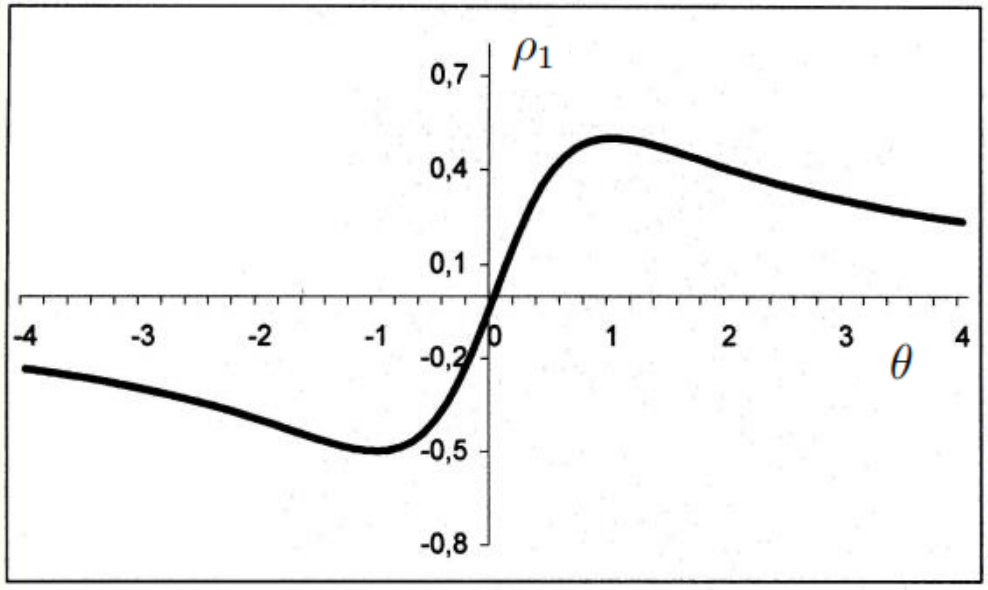
Процеси рухомого середнього

MA(1) – a first-order moving average process

процес рухомого середнього першого порядку

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\, \varepsilon_{t-1}$$

Залежність ρ_1 від параметра $MA(1)$ процесу



$$\rho_1 = \frac{(1/\theta)}{1+(1/\theta)^2} = \frac{\theta^2(1/\theta)}{\theta^2[1+(1/\theta)^2]} =$$

$$= \frac{\theta}{\theta^2+1}.$$

Процеси рухомого середнього

MA(q) – a q-order moving average process

процес рухомого середнього р - того порядку

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

1. математичне сподівання $$E[y_t] = E[\mu] + E[\varepsilon_t] + \sum_{j=1}^{q} \theta_j E[\varepsilon_{t-j}] = \mu,$$

2. дисперсія
$$\begin{aligned}\gamma_0 &= E[(y_t - \mu)^2] = \\ &= E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q})^2] = \\ &= (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 .\end{aligned}$$

3. автоковаріація k - того порядку

k = 1, 2, …, q :
$$\begin{aligned}\gamma_k = &E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}) \times \\ &\times (\varepsilon_{t-k} + \theta_1\varepsilon_{t-k-1} + \theta_2\varepsilon_{t-k-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-k-q})] = \\ &= E[\theta_k\varepsilon_{t-k}^2 + \theta_{k+1}\theta_1\,\varepsilon_{t-k-1}^2 + \theta_{k+2}\theta_2\,\varepsilon_{t-k-2}^2 + \cdots + \theta_q\theta_{q-k}\,\varepsilon_{t-q}^2] .\end{aligned}$$

k = q+1, q+2, … : для $k > q$ всі γ_k дорівнюють нулю.

Процеси рухомого середнього

MA(2) **процес рухомого середнього другого порядку**

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

для процесу $MA(2)$

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2,$$
$$\gamma_1 = (\theta_1 + \theta_2\theta_1)\sigma^2,$$
$$\gamma_2 = \theta_2\sigma^2,$$
$$\gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0.$$

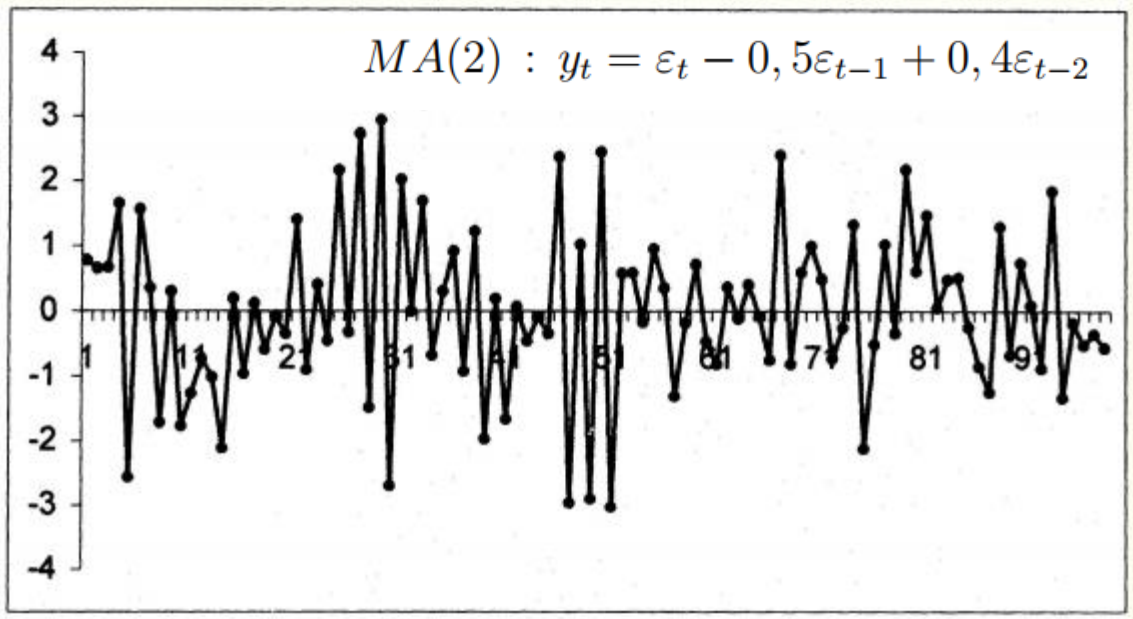
автокореляції $MA(2)$ процесу

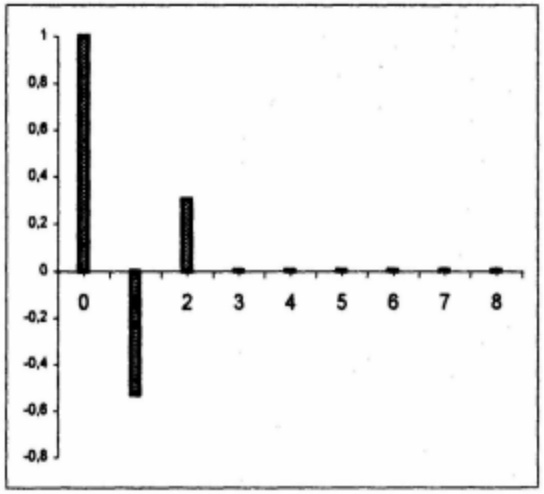
$$\rho_0 = 1,$$
$$\rho_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2\theta_1}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2},$$
$$\rho_2 = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2},$$
$$\rho_3 = \rho_4 = \ldots = 0.$$

Процеси рухомого середнього

MA(2) **процес рухомого середнього другого порядку**

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$



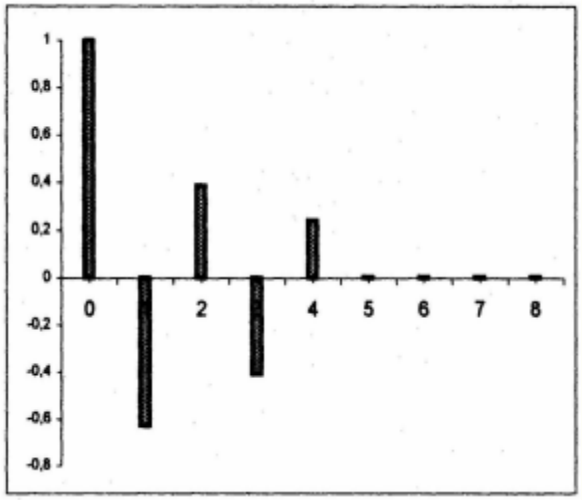


Автокореляції ρ_k

Процеси рухомого середнього

MA(4)

$$y_t = \varepsilon_t - 0,7\varepsilon_{t-1} + 0,3\varepsilon_{t-2} - 0,5\varepsilon_{t-3} + 0,5\varepsilon_{t-4}.$$



Автокореляції ρ_k

Процеси рухомого середнього

MA(∞) – an infinite-order moving average process

процес рухомого середнього нескінченого порядку

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots$$

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \,,$$

Припускаємо : $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \,.$ → **MA(∞) – коваріаційно стаціонарний**

$$E[y_t] = \lim_{q\to\infty} E[\mu + \psi_0\varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \psi_q\varepsilon_{t-q}] =$$
$$= \mu \,,$$

$$\gamma_0 = E[(y_t - \mu)^2] =$$
$$= \lim_{q\to\infty} E[(\psi_0\varepsilon_t + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + \psi_q\varepsilon_{t-q})^2] =$$
$$= \lim_{q\to\infty} (\psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots + \psi_q^2)\,\sigma^2 =$$
$$= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty \,,$$

$$\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k})] =$$
$$= \sigma^2(\psi_k\psi_0 + \psi_{k+1}\psi_1 + \psi_{k+2}\psi_2 + \psi_{k+3}\psi_3 + \ldots) =$$
$$= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\psi_{j+k} < \infty \,.$$

Модуль 4

- 1. Поняття часового ряду. Стаціонарність
- 2. Типи стаціонарних процесів. Процес білого шуму
- 3. Процеси рухомого середнього (MA процеси)
- 4. Авторегресійні процеси (AR процеси)
- 5. ARMA процеси
- Пакет EViews

Авторегресійний процес 1-го порядку

AR(1) – a first-order autoregressive process

авторегресійний процес першого порядку

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned} y_t =& (c+\varepsilon_t) + \phi(c+\varepsilon_{t-1}) + \phi^2(c+\varepsilon_{t-2}) + \cdots = \\ =& c(1+\phi+\phi^2+\phi^3+\ldots)+ \\ &+ \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \ldots . \end{aligned}$$

Якщо $|\phi| < 1$, то ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_k| = \sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j$$

є збіжним і його сума дорівнює $1/(1-|\phi|)$.

AR(1) → **MA(∞)** **– коваріаційно стаціонарний**

$$y_t = (c+\varepsilon_t) + \phi(c+\varepsilon_{t-1}) + \phi^2(c+\varepsilon_{t-2}) + \cdots =$$
$$= c(1+\phi+\phi^2+\phi^3+\ldots) +$$
$$+ \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \ldots .$$

AR(1) : $y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

Визначення числових характеристик – 1 спосіб (через MA(∞))

1. математичне сподівання

$$E[y_t] = c(1+\phi+\phi^2+\phi^3+\ldots) + 0 + 0 + \ldots =$$
$$= \frac{c}{1-\phi},$$

$$\boxed{\mu = \frac{c}{1-\phi}}$$

2. дисперсія

$$\gamma_0 = E[(y_t-\mu)^2] = E[(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \ldots)^2] =$$
$$= \sigma^2(1+\phi^2+\phi^4+\phi^6+\ldots) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2},$$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}}$$

3. автоковаріація *k* - того порядку

$$\gamma_k = E[(y_t-\mu)(y_{t-k}-\mu)] =$$
$$= E[(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^k\varepsilon_{t-k} + \phi^{k+1}\varepsilon_{t-k-1} + \ldots)\times$$
$$\times(\varepsilon_{t-k} + \phi\varepsilon_{t-k-1} + \phi^2\varepsilon_{t-k-2} + \ldots)] =$$
$$= (\phi^k + \phi^{k+2} + \phi^{k+4} + \ldots)\sigma^2 = \sigma^2\frac{\phi^k}{1-\phi^2}.$$

4. автокореляція *k* - того порядку

$$\boxed{\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k}$$

Авторегресійний процес 1-го порядку

AR(1) : $y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$

Визначення числових характеристик – 2 спосіб

наперед припустити коваріаційну стаціонарність

1. математичне сподівання

припускаємо, що

$$E[y_t] = E[y_{t-1}] = \mu$$

$$E[y_t] = c + \phi E[y_{t-1}] + E[\varepsilon_t]$$

$$\boxed{\mu = \frac{c}{1-\phi}}$$

2. дисперсія

$$y_t = \mu(1-\phi) + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\boxed{(y_t - \mu) = \phi(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t}$$

$$E[(y_t-\mu)^2] = \phi^2 E[(y_{t-1}-\mu)^2] + 2\phi E[(y_{t-1}-\mu)\varepsilon_t] + E[\varepsilon_t^2].$$

$$E[(y_{t-1} - \mu)\varepsilon_t] = 0.$$

припускаємо, що

$$E[(y_t - \mu)^2] = E[(y_{t-1} - \mu)^2] = \gamma_0.$$

$$\boxed{\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}}$$

3. автоковаріація *k* - того порядку

$$E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] =$$
$$= \phi E[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] + E[\varepsilon_t(y_{t-k} - \mu)]$$
$$E[(y_{t-1} - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = E[(y_{t-1} - \mu)(y_{(t-1)-(k-1)} - \mu)]$$

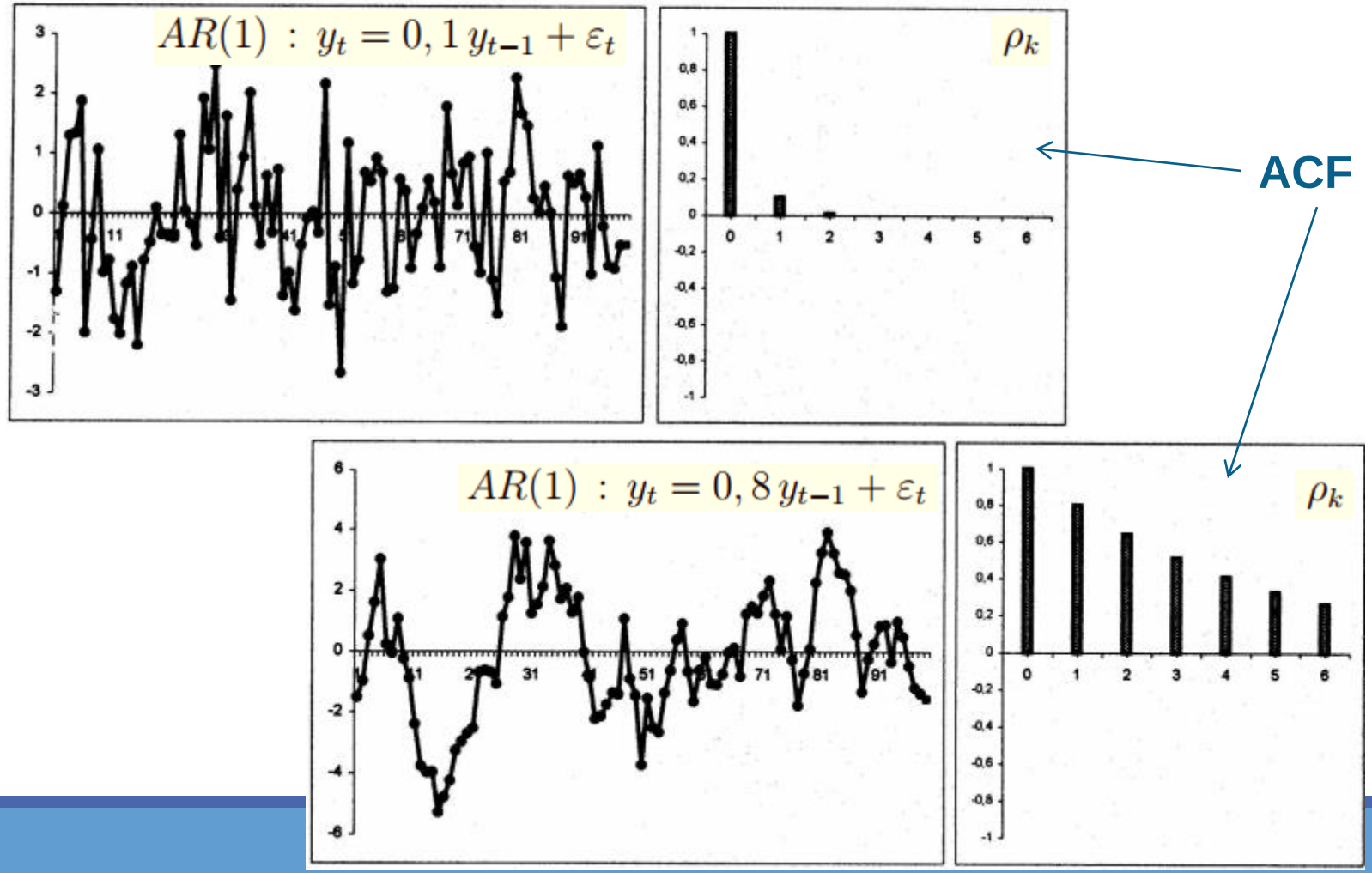
$$\gamma_k = \phi\gamma_{k-1}.$$

$$\gamma_k = \phi^k \gamma_0;$$

$$\boxed{\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k}$$

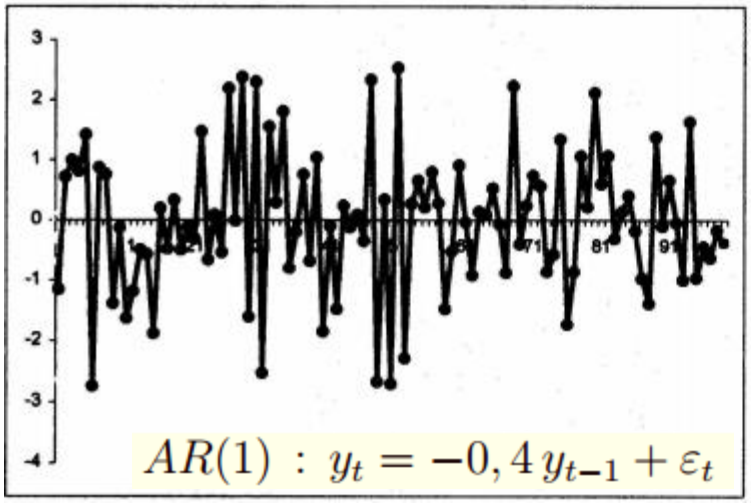
Авторегресійний процес 1-го порядку

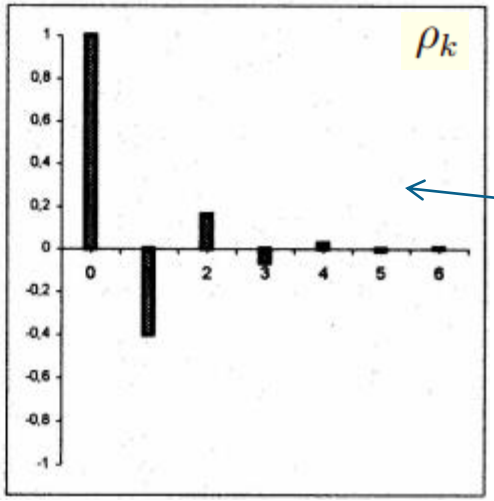
AR(1) : $y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$



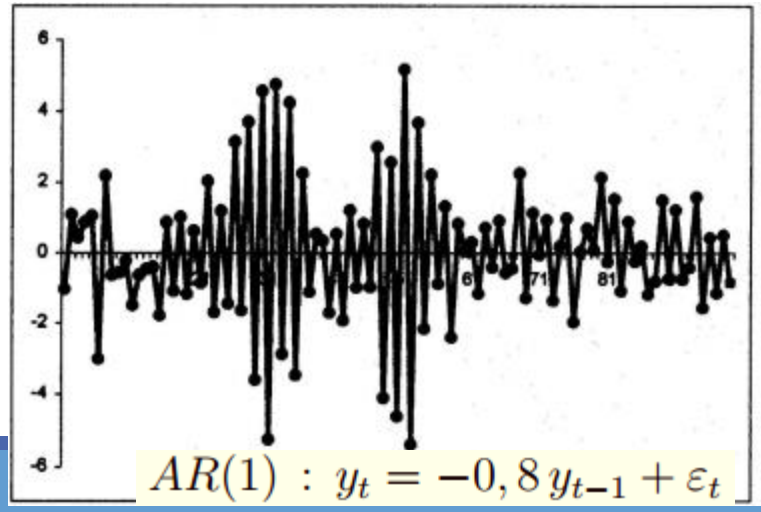
Авторегресійний процес 1-го порядку

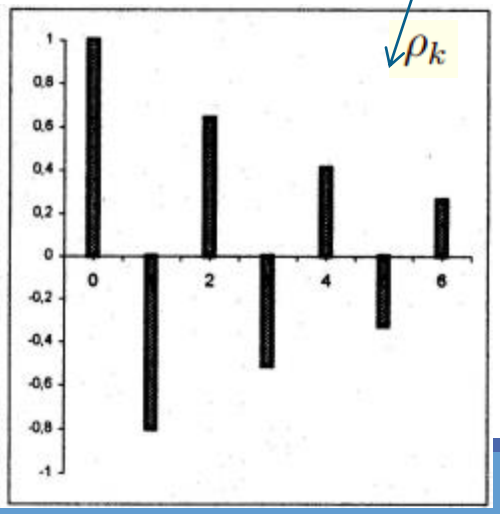
AR(1) : $y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$





ACF





Авторегресійний процес 2-го порядку

AR(2) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

Лема 2.6.1. *Оператор* $1-\phi_1 L-\phi_2 L^2$ *має обернений, якщо корені характеристичного рівняння*

$$1-\phi_1 z-\phi_2 z^2=0 \qquad (2.6.3)$$

лежать поза одиничним кругом.

лаговий оператор (оператор зсуву) L,

$$L\,y_t = y_{t-1}\,,$$
$$L^2\,y_t = L\,(L\,y_t) = L\,y_{t-1} = y_{t-2}\,,$$
$$\ldots$$
$$L^n y_t = y_{t-n}\,.$$

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)y_t = c+\varepsilon_t\,.$$

Доведення. Розглянемо квадратний тричлен $1-\phi_1\,z-\phi_2\,z^2$ і розкладемо його на множники

$$1-\phi_1\,z-\phi_2\,z^2=(1-\lambda_1\,z)\,(1-\lambda_2\,z)\,,$$

Розглянемо оператор $1-\lambda_1\,L$. Якщо $|\lambda_1|<1$, то до цього оператора існує обернений

$$(1-\lambda_1\,L)^{-1}=1+\lambda_1\,L+\lambda_1^2\,L^2+\lambda_1^3\,L^3\ldots\,.$$

Аналогічно, якщо $|\lambda_2|<1$, то існує

$$(1-\lambda_2\,L)^{-1}=1+\lambda_2\,L+\lambda_2^2\,L^2+\lambda_2^3\,L^3\ldots\,.$$

Отже, якщо обидва $|\lambda_i|<1$, то існує оператор обернений до $1-\phi_1 L-\phi_2 L^2$, який визначається як

$$(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2)^{-1}=(1-\lambda_1\,L)^{-1}(1-\lambda_2\,L)^{-1}=$$
$$=(1+\lambda_1\,L+\lambda_1^2\,L^2+\ldots)(1+\lambda_2\,L+\lambda_2^2\,L^2+\ldots)=$$
$$=1+(\lambda_1+\lambda_2)\,L+(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)\,L^2+\ldots\,.$$

Оскільки $z_i=1/\lambda_i$, то умова $|\lambda_i|<1$ означає, що $|z_i|>1$. Отож, для існування оберненого оператора другого порядку необхідно, щоб обидва корені характеристичного рівняння по модулю були більшими за одиницю, тобто лежали ззовні одиничного круга. □

Авторегресійний процес 2-го порядку

AR(2) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

Лема 2.6.2. *Якщо корені характеристичного рівняння (2.6.3) лежать поза одиничним кругом, то $AR(2)$ процес (2.6.1) можна подати у вигляді $MA(\infty)$ зображення*

$$y_t = \mu + \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots , \qquad (2.6.4)$$

де

$$\psi_0 = 1 , \quad \mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2} , \qquad (2.6.5)$$

причому виконується умова

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty . \qquad (2.6.6)$$

Наслідок 2.6.1. *Якщо корені характеристичного рівняння лежать поза одиничним кругом, то $AR(2)$ процес коваріаційно - стаціонарний.*

Авторегресійний процес 2-го порядку

AR(2) : $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

Визначення числових характеристик – 2 спосіб

наперед припустити коваріаційну стаціонарність

1. математичне сподівання

$$E[y_t] = c + \phi_1 E[y_{t-1}] + \phi_2 E[y_{t-2}] + E[\varepsilon_t].$$

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2}.$$

2. автокореляції

$$y_t = \mu(1 - \phi_1 - \phi_2) + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$$

AR(2) : $$(y_t - \mu) = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t.$$

домножуємо на $(y_{t-k} - \mu)$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Рівняння Юла – Уолкера (Yule – Walker)

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}.$$

для $k = 1$, оскільки $\rho_{-1} = \rho_1$ і $\rho_0 = 1$, то $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$

для $k = 2$ $\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$.

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2.$$

Авторегресійний процес 2-го порядку

AR(2) : $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$

Визначення числових характеристик – 2 спосіб

AR(2) : $$(y_t - \mu) = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t .$$

3. дисперсія

домножуємо на $(y_t - \mu)$

$$E[(y_t - \mu)^2] = \phi_1 E[(y_{t-1} - \mu)(y_t - \mu)] + \\ + \phi_2 E[(y_{t-2} - \mu)(y_t - \mu)] + E[\varepsilon_t(y_t - \mu)]$$

$$E[\varepsilon_t(y_t - \mu)] = E[\varepsilon_t(\phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t)] = \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma^2 .$$

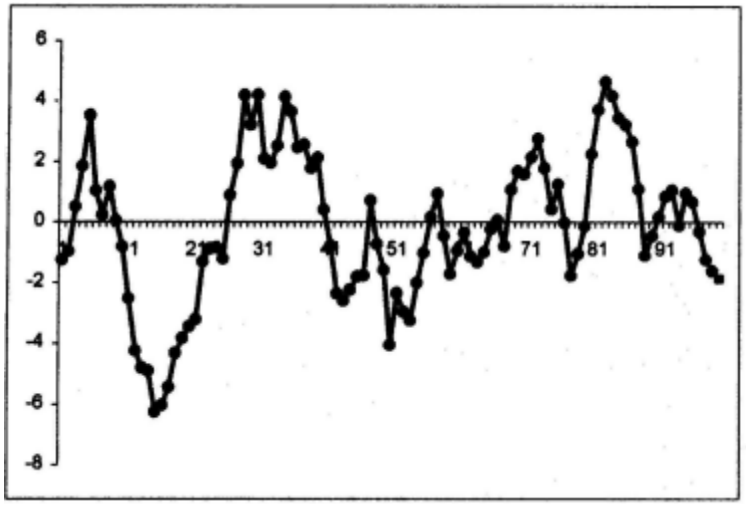
$$\gamma_0 = \phi_1\rho_1\gamma_0 + \phi_2\rho_2\gamma_0 + \sigma^2$$

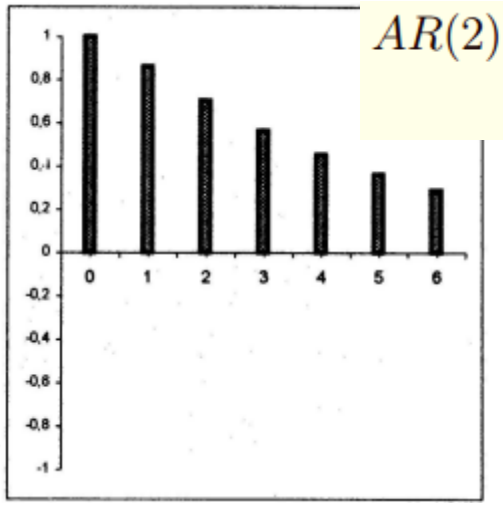
$$\gamma_0 = \left[\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \frac{\phi_2\,\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2^2\right]\gamma_0 + \sigma^2$$

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2]}$$

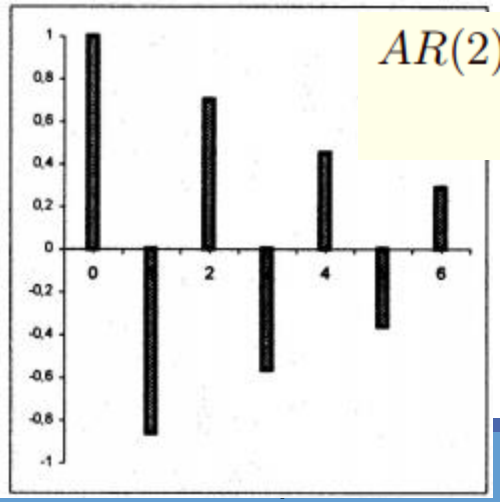
Авторегресійний процес 2-го порядку

AR(2) : $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$





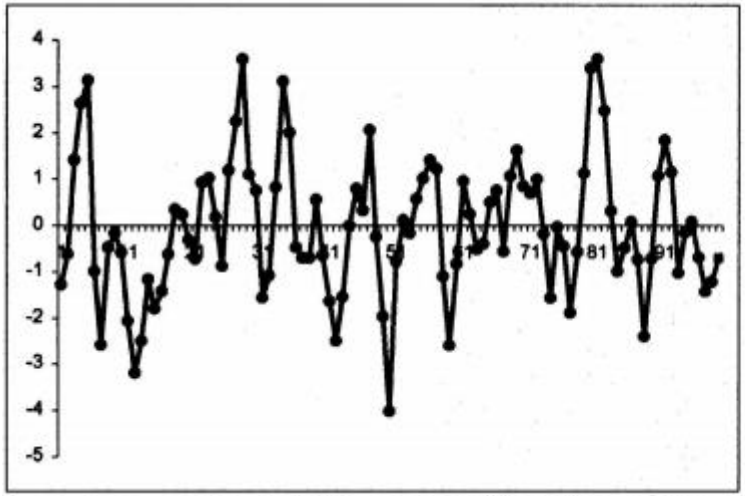
$$AR(2):\ y_t = y_{t-1} - 0,16\, y_{t-2} + \varepsilon_t,$$
$$\lambda_1 = 0,2,\ \ \lambda_2 = 0,8$$

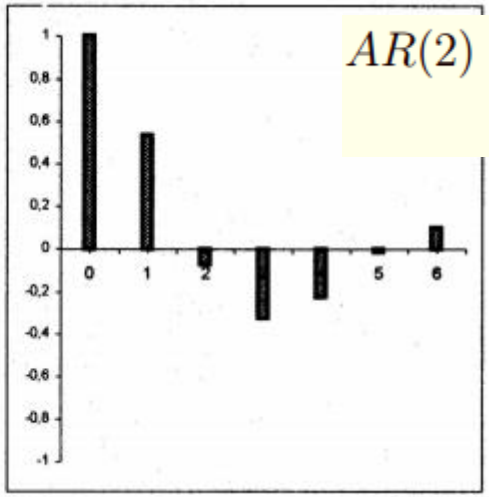


$$AR(2):\ y_t = -y_{t-1} - 0,16\, y_{t-2} + \varepsilon_t,$$
$$\lambda_1 = -0,2,\ \ \lambda_2 = -0,8$$

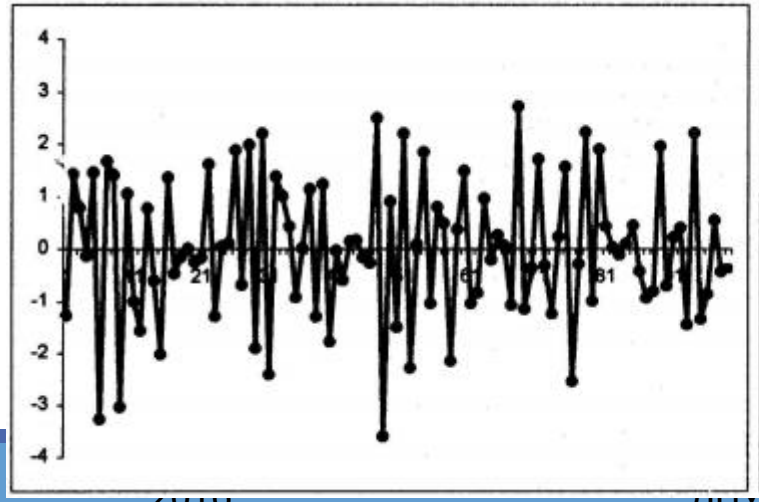
Авторегресійний процес 2-го порядку

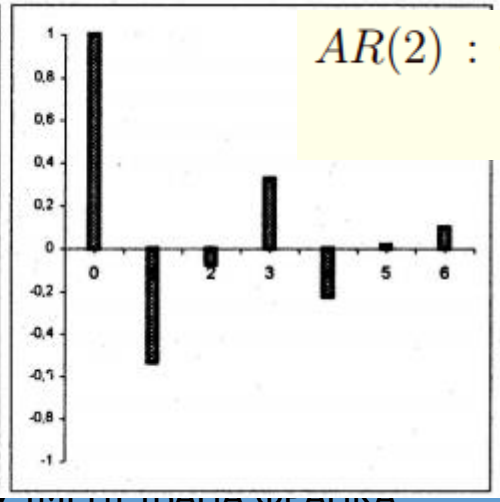
AR(2) : $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$





$$AR(2): \; y_t = 0,8\, y_{t-1} - 0,5\, y_{t-2} + \varepsilon_t,$$
$$\lambda_{1,2} = 0,4 \pm 0,3i$$

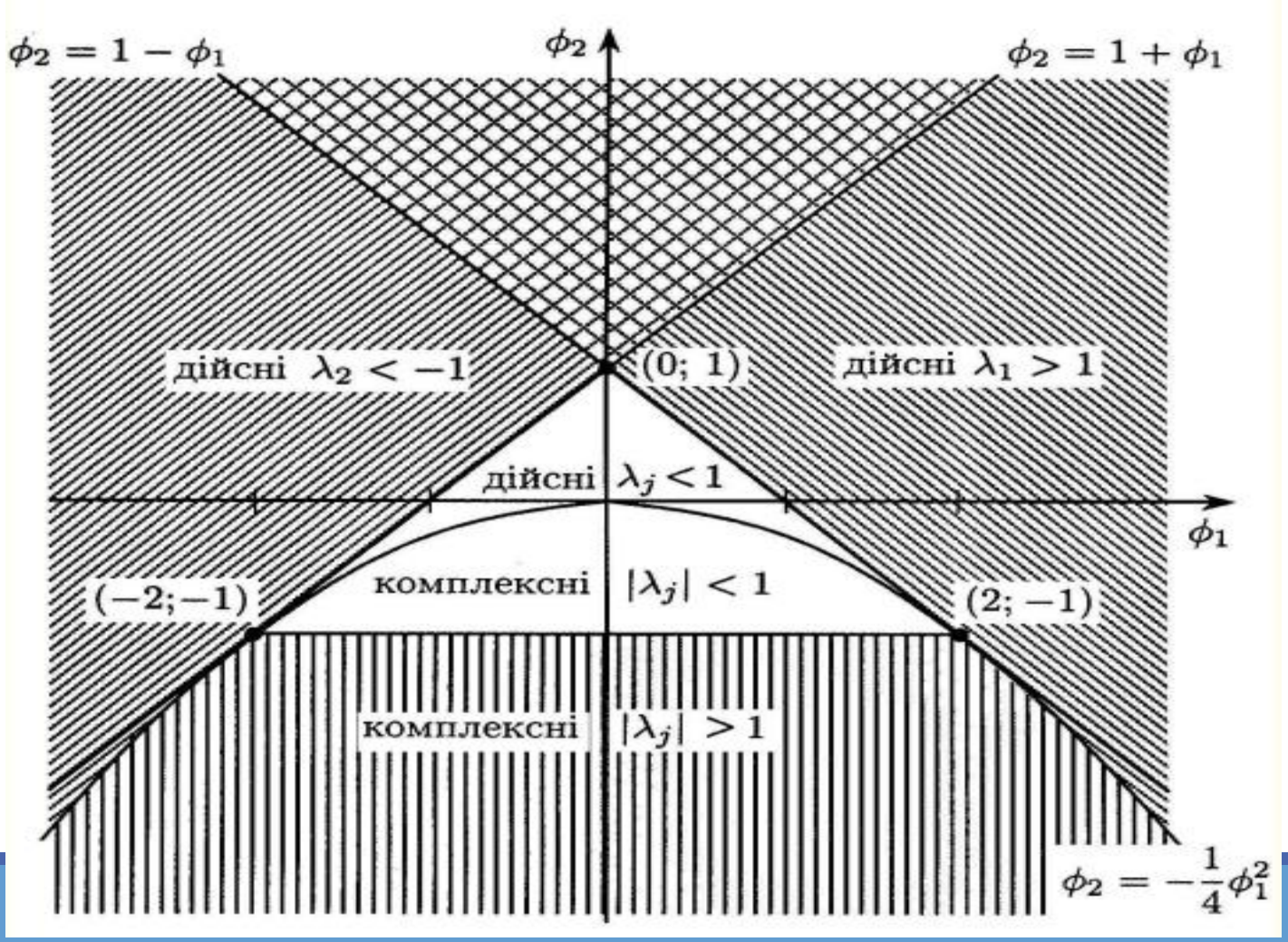




$$AR(2): \; y_t = -0,8\, y_{t-1} - 0,5\, y_{t-2} + \varepsilon_t,$$
$$\lambda_{1,2} = -0,4 \pm 0,3i$$

Авторегресійний процес 2-го порядку

AR(2) : $y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$



Авторегресійний процес *p*-го порядку

AR(*p*) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) y_t = c + \varepsilon_t \,.$$

Характеристичне рівняння

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$$

$$\begin{aligned}\psi(L) =& (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p)^{-1} = \\ =& (1 - \lambda_1 L)^{-1}(1 - \lambda_2 L)^{-1} \cdots (1 - \lambda_p L)^{-1}\end{aligned}$$

Лема 2.7.1. *Якщо корені характеристичного рівняння (2.7.2) лежать поза одиничним кругом, то AR(p) процес (2.7.1) можна звести до MA(∞) процесу*

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + \psi(L)\varepsilon_t = \\ &= \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots , \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

причому

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \,. \tag{2.7.4}$$

AR(p) процес – стаціонарний, якщо корені характеристичного рівняння лежать поза одиничним кругом

Авторегресійний процес *p*-го порядку

AR(*p*) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

Припускаючи стаціонарність процесу,

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p}.$$

AR(p) :

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_0 \rho_1 + \ldots + \phi_p \gamma_0 \rho_p + \sigma^2,$$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \cdots + \phi_p\gamma_p + \sigma^2,$$
$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{k-p}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \ldots - \phi_p \rho_p}.$$

Система рівнянь Юла – Уолкера (Yule – Walker)

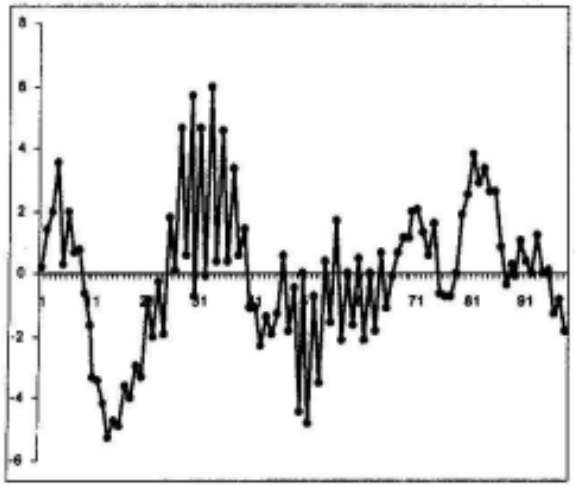
$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

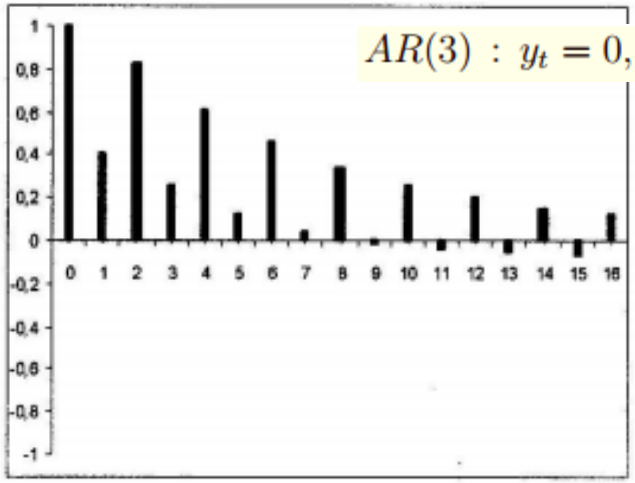
AR(3) :

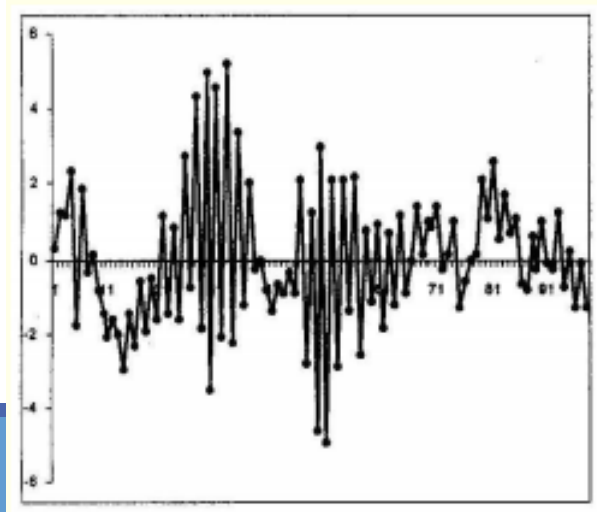
$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_2 + \phi_3\rho_2, \\ \rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \phi_3\rho_1, \\ \rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1 + \phi_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\phi_1 + \phi_2\phi_3}{1 - \phi_2 - \phi_3(\phi_1 + \phi_3)}, \\ \rho_2 &= \frac{(1 - \phi_2)\phi_2 - \phi_1(\phi_1 + \phi_3)}{1 - \phi_2 - \phi_3(\phi_1 + \phi_3)}. \end{aligned}$$

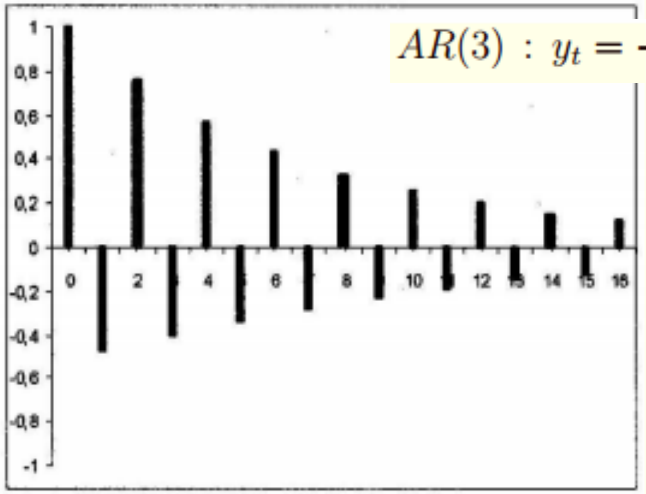
Авторегресійний процес *p*-го порядку

AR(*p*) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$



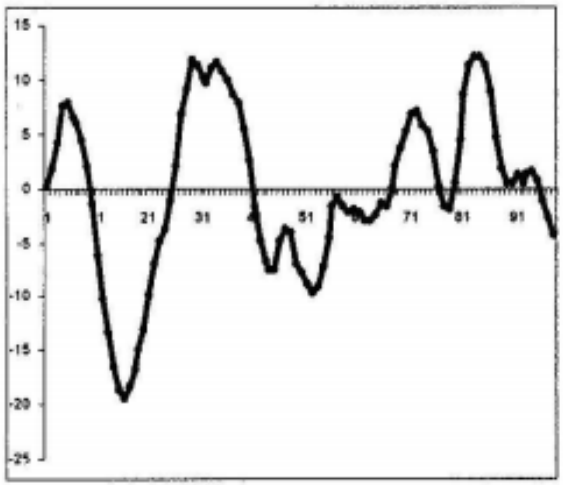


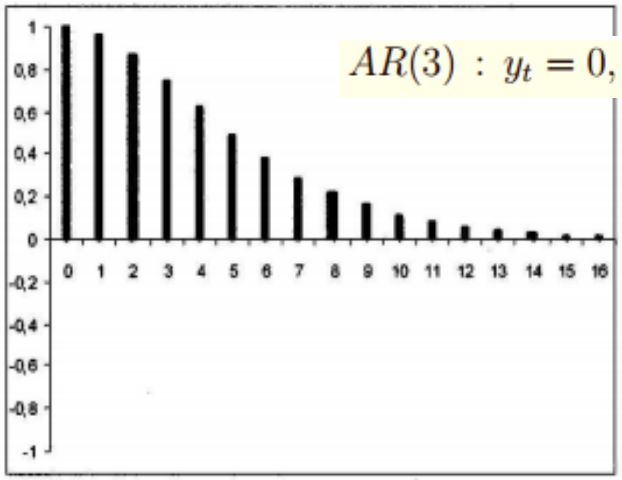




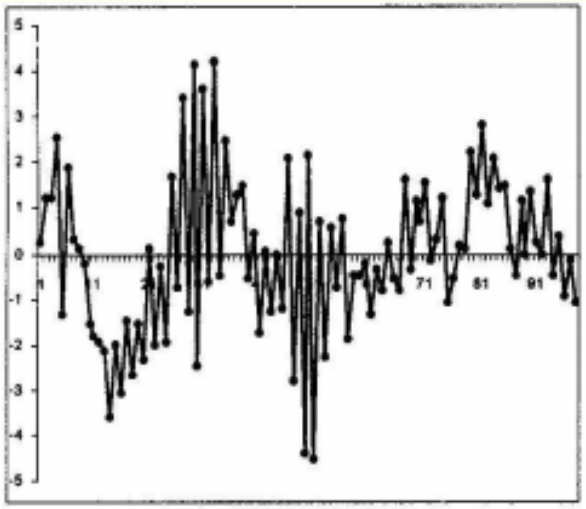
Авторегресійний процес *p*-го порядку

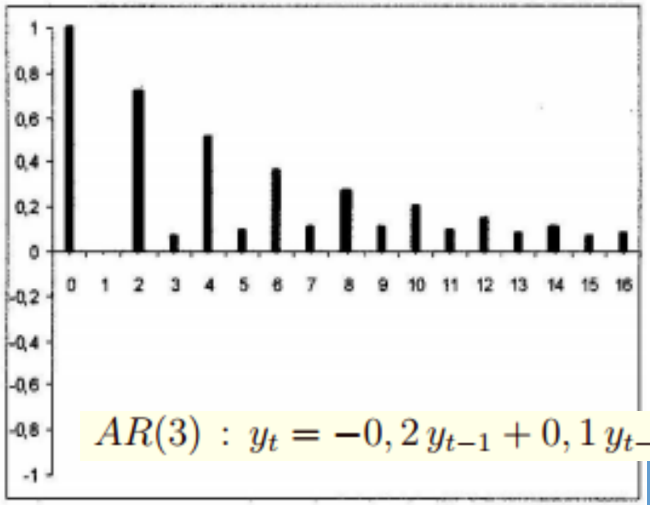
AR(*p*) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$





$AR(3)\ :\ y_t = 0,5\, y_{t-1} + 1,4\, y_{t-2} - 0,5\, y_{t-3} + \varepsilon_t$

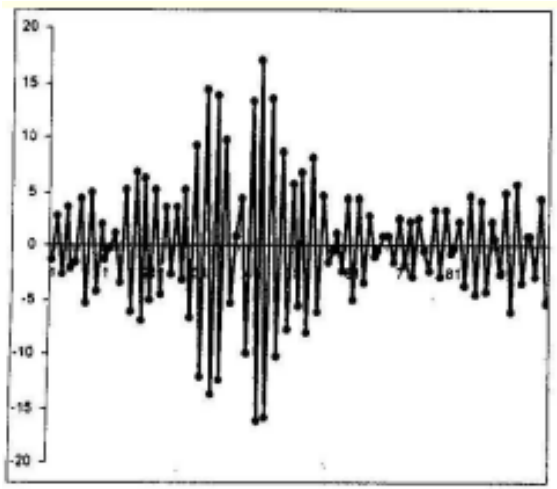


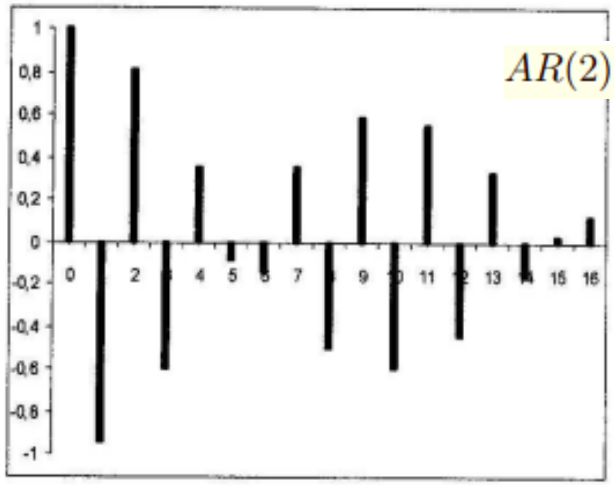


$AR(3)\ :\ y_t = -0,2\, y_{t-1} + 0,1\, y_{t-2} + 0,7\, y_{t-3} + \varepsilon_t$

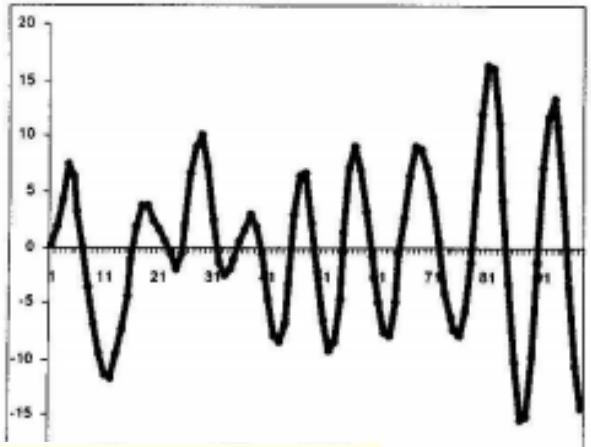
Авторегресійний процес *p*-го порядку

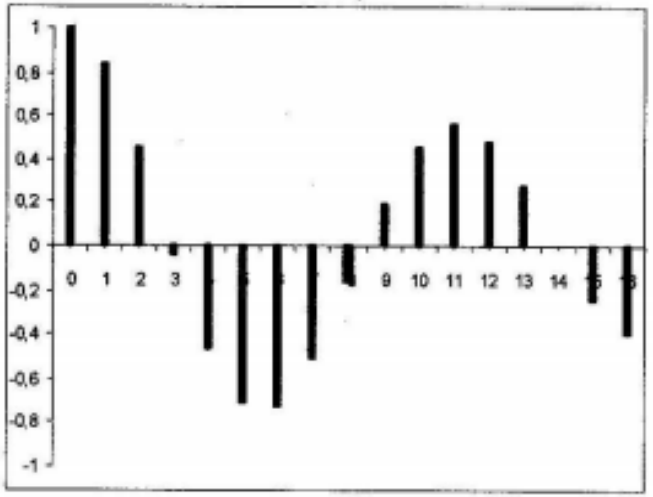
AR(*p*) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$





$AR(2)\ :\ y_t = -1,8\, y_{t-1} - 0,9\, y_{t-2} + \varepsilon_t$

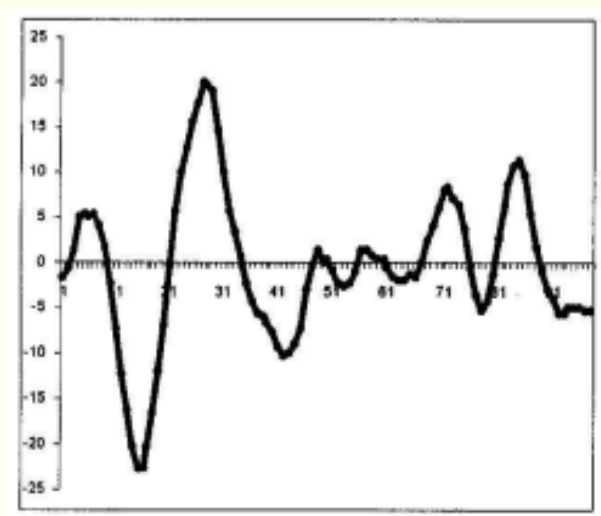


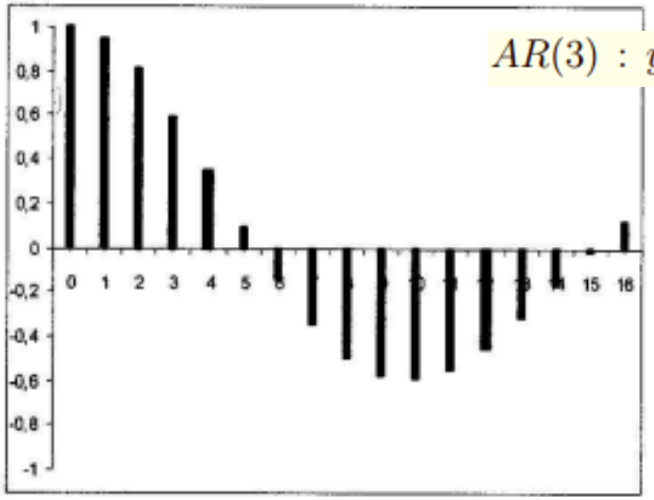


$AR(3)\ :\ y_t = 0,3\, y_{t-1} + 1,6\, y_{t-2} - 0,9\, y_{t-3} + \varepsilon_t$

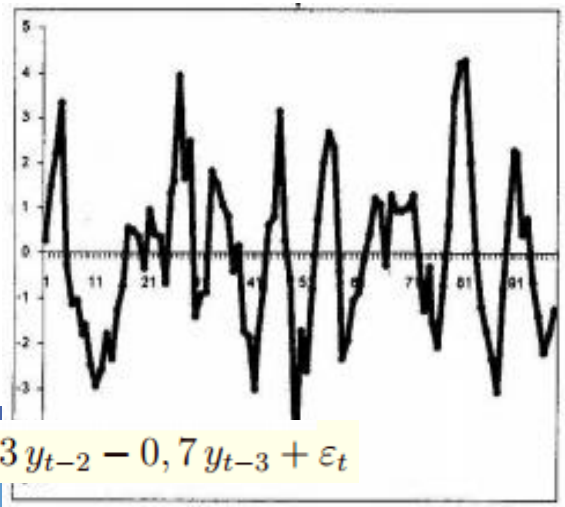
Авторегресійний процес *p*-го порядку

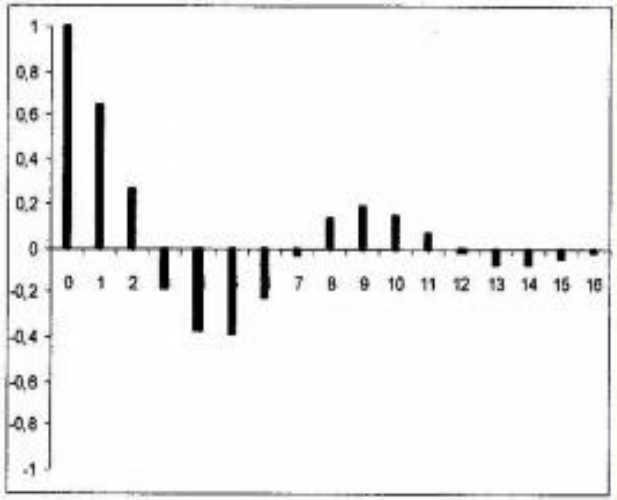
AR(*p*) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$





$AR(3)\ :\ y_t = 1,8\, y_{t-1} - 0,9\, y_{t-2} + \varepsilon_t$





$AR(3)\ :\ y_t = -0,6\, y_{t-1} + 1,3\, y_{t-2} - 0,7\, y_{t-3} + \varepsilon_t$

Модуль 5

- 1. Поняття часового ряду. Стаціонарність
- 2. Типи стаціонарних процесів. Процес білого шуму
- 3. Процеси рухомого середнього (MA процеси)
- 4. Авторегресійні процеси (AR процеси)
- 5. ARMA процеси
- Пакет EViews

Мішана модель авторегресії порядку *p* та рухомого середнього порядку *q*

ARMA(p,q) – a mixed autoregressive moving average process

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \ldots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p) y_t = \\ = c + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q)\varepsilon_t \,.$$

$$y_t = \mu + \psi(L)\varepsilon_t \,,$$

$$\psi(L) = \frac{1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} \,, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \,,$$

$$\mu = \frac{c}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p}$$

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \phi_2(y_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \\ + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \,.$$

Для $k > q$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad \text{для} \quad k = q+1, q+2, \ldots \,.$$

Мішана модель авторегресії порядку *p* та рухомого середнього порядку *q*

ARMA(1,1) : $y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

якщо $|\phi_1| < 1$.

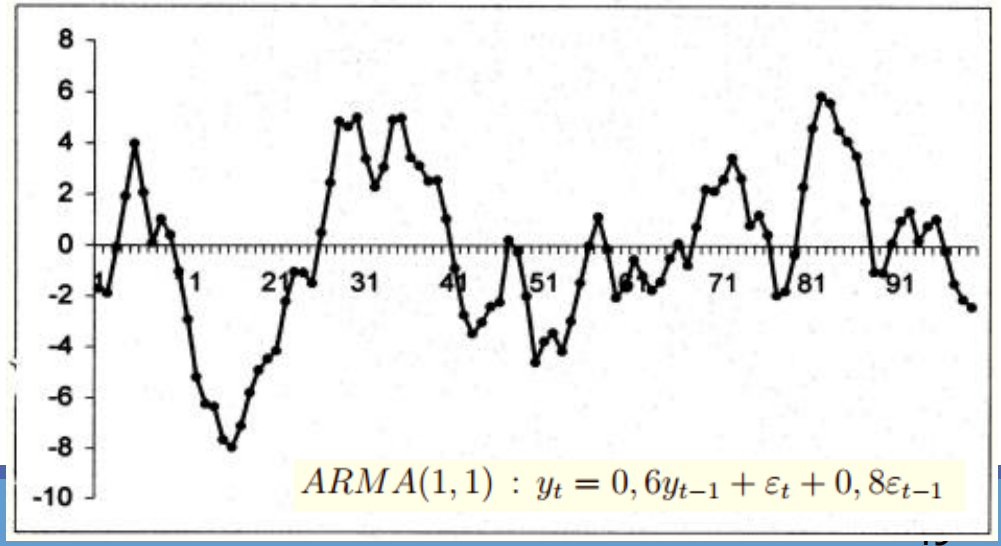
$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2 (1 + \theta_1^2), \\
\gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \sigma^2 \theta_1, \\
\gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1, \\
\gamma_3 &= \phi_1 \gamma_2 = \phi_1^2 \gamma_1, \\
&\ldots \\
\gamma_k &= \phi_1^{k-1} \gamma_1.
\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1 (1 + \theta_1^2 + \theta_1 \phi_1) + \theta_1 (1 - \phi_1^2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_1 \phi_1},$$

$$\rho_k = \phi_1^{k-1} \rho_1, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_1 \phi_1)}{1 - \phi_1^2},$$

$$\gamma_1 = \sigma^2 \left[\frac{\phi_1 (1 + \theta_1^2 + \theta_1 \phi_1)}{1 - \phi_1^2} + \theta_1 \right].$$



Дякую за увагу!