МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет ім. Івана Франка

РОЗРАХУНОК ЦІНИ ОПЦІОНІВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторної роботи

Затверджено
на засіданні кафедри
математичної економіки,
економетрії, фінансової
та страхової математики
Протокол N 3 від 26.10.2021

Львів 2021

Мета роботи – навчити проводити розрахунок ціни опціонів методом Монте-Карло.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Коротка історія

Метод статистичного імітаційного моделювання у своєму найпростішому варіанті полягає у розрахунку характеристик досліджуваної випадкової величини шляхом імітації її реалізацій. Інша назва методу – метод Монте-Карло. Монте-Карло – район Монако, відомий своїми казино, а рулетка є фізичним генератором рівномірно розподілених випадкових величин.

Появі методу передували дослідження по обчисленню числа π методом Бюффона, методи обчислення інтегралів на основі геометричного трактування ймовірності, аналоговий пристрій Енріко Фермі FERMIAC та інші.

Це метод започаткований у повоєнні роки у роботах Н. Метрополіса, Дж. Неймана, С. Уляма [5].

Станіслав Улям закінчив Львівську політехніку у 1932 р. Приймав участь у засіданнях Львівської математичної школи, якою керували Гуго Штайнгауз та Стефан Банах. У 1936 році був запрошений Джоном фон Нейманом до Прінстонського університету. Остаточно емігрував у США у серпні 1939 р. Приймав участь у Манхеттенському проекті з розробки атомної бомби у США. Пізніше, разом з Е. Теллером та Г. Гамовим працював над створенням водневої бомби. Є співавтором патенту на неї. Займався проблемами керованого термоядерного синтезу, розробки ядерних ракетних двигунів та рядом інших.

У 1976 вийшла у світ автобіографічна книга С. Уляма "Пригоди математика".

1.2 Основні етапи методу Монте-Карло

Умовно метод Монте-Карло можна розбити на чотири етапи [2, 4]:

1. Встановлення природи досліджуваної стохастичної величини

Вивчають природу досліджуваної стохастичної величини, її залежність від інших випадкових та детермінованих величин.

2. Імітація поведінки вхідних параметрів

Досліджують вхідні дані, їх емпіричний розподіл та можливість моделювання відомими розподілами.

3. Здійснення моделювання

На основі виявлених функціональних залежностей від вхідних величин, будують наближення шуканої випадкової величини в аналітичній чи алгоритмічній формі. Воно дозволяє отримати результат моделювання для конкретних вхідних даних.

4. Багаторазове повторення процесу та розрахунок емпіричних характеристик

Повторюючи моделювання багато разів, отримують емпіричну вибірку, за якою розраховують емпіричні характеристики: емпіричні функції розподілу та щільності, оцінки математичного сподівання, дисперсії та інших характеристик.

1.3. Необхідні теоретичні відомості

1.3.1 Емпіричний розподіл та основні статистики

Розглянемо деяку мультимножину реалізацій випадкової величини ξ:

$$\Xi_n = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}, \qquad (1)$$

яку називають *первинною статистичною сукупністю* або *вибіркою* потужності n з загальної сукупності. Після впорядкування елементів первинної вибірки отримують *впорядковану вибірку*:

$$\hat{\xi}_1 \le \hat{\xi}_2 \le ... \le \hat{\xi}_n . \qquad (2)$$

Величину $\hat{\xi}_k$ називають k-ю порядковою статистикою (k-th order statistic), а ряд (2) – рядом порядкових статистик (series of order statistics).

Різні елементи вибірки називають *варіантами*, а кількості їх повторень у вибірці – *частотами*, або *кратностями*:

$$\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2 = ... = \hat{\xi}_{k_1} < \hat{\xi}_{k_1+1} = \hat{\xi}_{k_1+2} = ... = \hat{\xi}_{k_1+k_2} < ... < \hat{\xi}_{k_1+...+k_{m-1}+1} = ... = \hat{\xi}_{k_1+...+k_{m-1}+k_m} .$$

Варіанти можна означити так:

$$x_i = \hat{\xi}_{k_1+...+k_{i-1}+1} = ... = \hat{\xi}_{k_1+...+k_{i-1}+k_i}, \ i = 1, 2, ..., m .$$

Кількість варіант називають *розмірністю вибірки*, а впорядковану множину варіант – *варіаційним рядом вибірки або рядом варіант:*

$$x_1 < x_2 < ... < x_m .$$

Нехай розмірність вибірки дорівнює m, підрахуємо кратності варіант – k_i, та їх відносні частоти – $p_i = k_i / n$, $i = 1, 2, ..., m$; $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Перелік варіант та відповідних їм відносних частот називають *статистичним розподілом вибірки* і подають у вигляді таблиці так:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

Цей розподіл визначає деяку емпіричну дискретно розподілену випадкову величину.

Функцію розподілу (cumulative distribution function) випадкової величини ξ визначають за формулою:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} . \qquad (3)$$

На основі статистичного розподілу отримаємо:

$$F_n(x) = \sum_{\{i \mid x_i < x\}} p_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{(-\infty,\, x)}(\xi_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_+(x - \hat{\xi}_k)\ , \tag{43}$$

де $U_+(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$ – ліва асиметрична одинична функція,

$\mathbf{1}_A(z) = \begin{cases} 1, \ z \in A \\ 0, \ z \notin A \end{cases}$ – індикаторна функція множини A.

Цю функцією називають *статистичною або емпіричною функцією розподілу*. Її графік показано на рис. 1.

Емпірична функція розподілу $F_n(x)$ дає незміщену рівномірну строго консистентну оцінку функції розподілу $F(x)$ [1, п.3.3].

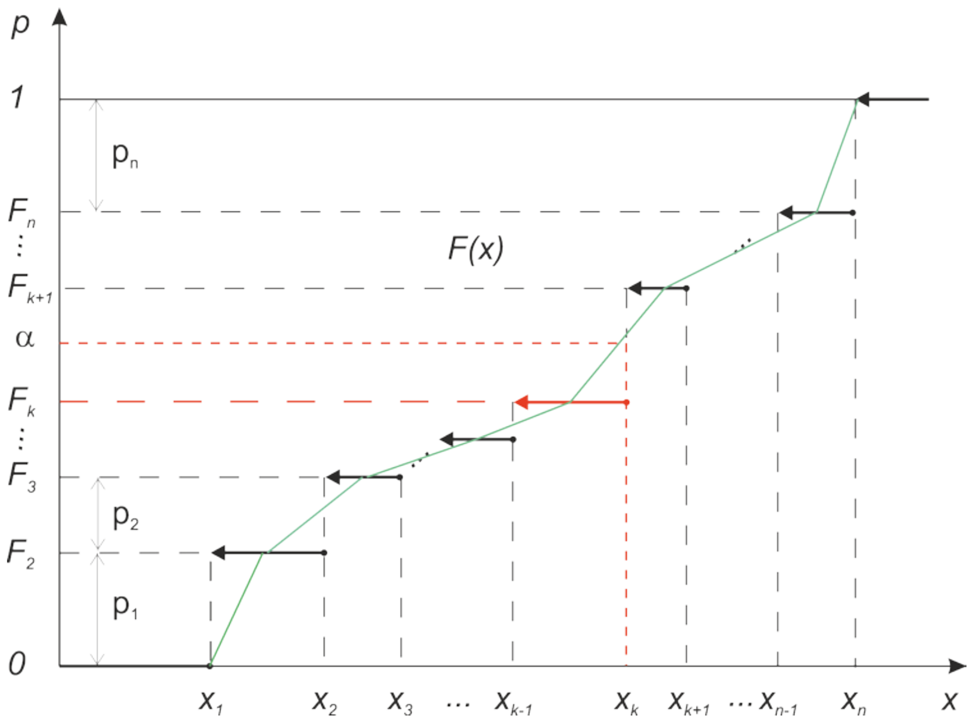

Рис. 1. Емпірична функція розподілу та її кусково-лінійне наближення

Точкова оцінка у математичній статистиці – це число, що обчислюється на основі вибірки, для наближення деякої числової характеристики генеральної сукупності.

Важливими характеристиками точкових оцінок є консистентність (слушність, справедливість), незміщеність та оптимальність.

Слушною (консистентною, справедливою) оцінкою θ_n параметра θ називають точкову оцінку, що збігається за ймовірністю до оцінюваного параметра:

$$\theta_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta \ , \quad \text{що еквівалентно} \ \ \forall\ \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\theta_n - \theta\right| > \varepsilon\right\} = 0. \qquad (5)$$

Незміщена оцінка – це точкова оцінка, математичне сподівання якої рівне параметру, що оцінюється:

$$M(\theta_n) = \theta. \qquad (6)$$

Оптимальною називають оцінку, яка має найменшу дисперсію серед деякого класу оцінок.

Незміщеною справедливою оцінкою математичного сподівання є вибіркове середнє:

$$\overline{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \ , \qquad (7)$$

а незміщеною справедливою оцінкою дисперсії – незміщена вибіркова дисперсія:

$$D_n = s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 \ . \qquad (8)$$

Нагадаємо, що квантилем рівня α для функції розподілу випадкової величини ξ називають дійсне число x_α, яке задовольняє умову:

$$x_\alpha = \sup\left\{x \left| F(x) \le \alpha\right.\right\}. \qquad (9)$$

Використовують також означення.

$$x'_\alpha = \sup\left\{x \,|\, F(x) < \alpha\right\} = \inf\left\{x \,|\, F(x) \ge \alpha\right\}. \qquad (9')$$

Різниця, між вказаними означеннями проявляється на ділянках, де функція розподілу стала, зокрема для дискретно-розподілених в.в. Якщо випадкова величина є неперервною та строго зростає, тоді квантиль визначається однозначно:

$$x_\alpha = F^{-1}(\alpha). \qquad (10)$$

Оскільки емпірична функція розподілу (4) є кусково сталою, для розрахунку вибіркових квантилів використовують дискретні та лінійні апроксимації.

Питання консистентності вибіркових квантилів розглянуто у [1, п.3.4].

В середовищі R реалізовано 9 методів розрахунку вибіркових квантилів: три методи (type 1, 2, 3) дають квантиль як розривну функцію ймовірності, а інші 6-ть (type 4-9) – як неперервну [The R Reference Index. – https://cran.r-project.org/manuals.html].

У Python реалізовано 5-ть методів розрахунку квантилів, див. [https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.quantile.html].

1.3.2 Генерація випадкових чисел

Випадкові числа, рівномірно розподілені на проміжку $(0,1)$ називають стандартними випадковими числами, або просто – випадковими числами, позначають $\xi \sim U(0,1)$.

Існує два основні типи генераторів випадкових чисел: фізичні та алгоритмічні [2, п.1.1]

Якщо, проградуювати гральну рулетку від 0 до 1 з деякою шкалою, то вона буде фізичним генератором випадкових чисел. Сучасні реалізації фізичних генераторів використовують шуми, зумовлені рухом електронів у провідниках.

Для генерації випадкових чисел на комп'ютерах використовують спеціальні алгоритми. Однак, отримана ними послідовність чисел починає повторюватися через скінчену кількість кроків, тому отримувані числа називають псевдовипадковими.

За допомогою рівномірного розподілу можна згенерувати будь-який розподіл, використовуючи наступне твердження [2, с.36].

Нехай в. в. η має неперервну строго зростаючу функцію розподілу $F_\eta(x)$, а в. в. ξ є рівномірно розподіленою – $\xi \sim U(0,1)$.

Тоді в. в. $F_\eta^{-1}(\xi)$ має такий же розподіл як і в. в. η: $F_\eta^{-1}(\xi) \sim \eta$.

1.4 Опціони

1.4.1 Основні види опціонів

Опціон – це контракт, який надає право (але не зобов’язання) його власникові купити або продати обумовлену кількість фінансових активів за фіксованою ціною у визначений момент часу протягом терміну дії контракту в обмін на опціонну премію [3].

У перекладі "опціон" (англ. option) означає вибір. Саме можливість вибору і є основною характеристикою опціонів. Предметом опціонної угоди можуть бути різноманітні фінансові інструменти: валюта, акції, індекси, цінні папери, кредити, ф’ючерсні контракти, фондові індекси, казначейські векселі, державні облігації тощо.

Опціони бувають двох типів: опціони, які дають право купити – **опціони купівлі – колл-опціони** (call options), та опціони, які дають право продати – **опціони продажу – пут-опціони** (put options).

Опціони бувають **європейського стилю** (European-style) з фіксованим терміном виконання і **американського стилю** (American-style), які можуть бути пред'явленими власником опціону на виконання в будь-який момент часу до фіксованої крайньої дати закінчення контракту.

До стандартних опціонів відносять також **середньоатлантичні опціони** (бермудські опціони, квазі-американські) (Mid-Atlantic-style). Вони можуть буди виконані у деякі конкретні проміжки часу, які називають вікнами (можуть тривати кілька днів).

Ринкова вартість опціону визначається в результаті аукціонних торгів на опціонній біржі. Ціну, на яку погоджуються продавець і покупець опціону, називають **премією**.

1.4.2 Справедлива ціна опціонного контракту

Розглянемо європейські опціони на купівлю (call-опціони). Позначимо:

$S_t = S(t)$ – ринкова вартість активу на час t;

X – ціна виконання опціону;

T – термін дії опціону;

f – безризикова неперервна процентна ставка за одиницю часу;

$C = C(0)$ C – вартість (ціна) опціону на купівлю.

Грошові потоки для покупця європейського call-опціону ілюструє Рис.2.

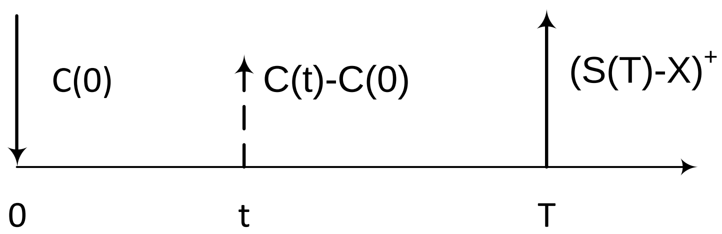

Рис. 2. Грошові потоки для покупця європейського колл-опціону

Прибуток (збитки) покупця європейського call-опціону, на акції без дивідендів, буде дорівнювати:

$$R(T) = (S(T) - X)^{+} - C(0) \cdot e^{fT} \qquad (11)$$

де $(Y)^{+} = max\{0,\ Y\}$.

Залежність прибутку (11) покупця опціону при $r = 0$ від ціни акції S_T (яка наперед – невідома) показана на Рис. 3 суцільною лінією. Прибуток продавця є цілком протилежний – штрихова лінія.

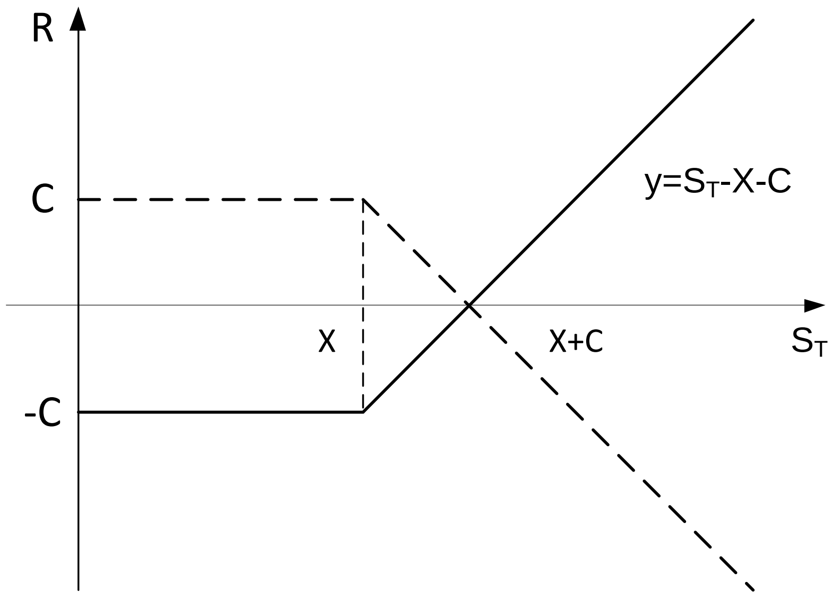

Рис. 3. Залежність прибутку покупця та продавця європейського колл-опціону від ціни акції.

Легко бачити, що втрати покупця колл-опціону обмежені премією, а прибутки можуть значними при зростанні ціни акції. З іншого боку, прибутки продавця обмежені премією, а втрати – нічим не обмежені. Тому дуже важливо встановити справедливу ціну опціону, яка в деякому сенсі зрівноважує позиції покупця і продавця.

Оскільки ціна акції $S(T)$ наперед невідома її можна моделювати деякою випадковою величиною. Тоді, дохід покупця (11) – також випадкова величина. Справедливу ціну опціону знаходять з умови рівності нулю математичного сподівання доходу покупця опціону (11):

$$C(0) = e^{-fT} M\left((S(T) - X)^{+}\right). \qquad (12)$$

Аналогічно для пут-опціону

$$P(0) = e^{-fT} M\left((X - S(T))^{+}\right). \qquad (13)$$

Для випадку, коли ціна акції описується моделлю Самуельсона (див. п.4.1), легко отримати аналітичний вираз для (12), який називають формулою Блека-Шоулса.

У стандартних позначеннях вона записується так

$$C = S_0 N(d^+) - Xe^{-rT} N(d^-), \tag{14}$$

де

$$d^{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(ln\frac{S_0}{X} + T\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\right). \tag{15}$$

Ціна put-опціону знаходиться на основі формули паритету опціонів :

$$P = -S_0 N(-d^+) + Xe^{-rT} N(-d^-). \tag{16}$$

Виграш покупця американського кол-опціону, закритого у час t дорівнює:

$$R_{AM}(t) = (S(t) - X)^+ - C_{AM}(0) \cdot e^{f\,t}, \tag{17}$$

Тому, справедливу ціну у цьому випадку визначають так:

$$C_{AM}(0) = M\left(\max_{t\in(0,T]} e^{-f\,t}\left(S(t) - X\right)^+\right). \tag{18}$$

Виграш покупця азіатського кол-опціону при фіксованій страйк-ціні (також відомої як "середня ставка") дорівнює:

$$R_{AS}(T) = (A[0,T] - X)^+ - C_{AS}(0) \cdot e^{f\,T} , \tag{19}$$

де $A[0,T]$ позначає середнє значення. Наприклад при дискретному моніторингу у моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_N$): $A[0,T] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S(t_k)$.

Справедлива ціна дорівнює:

$$C_{AS}(0) = e^{-f\,T} M\left((A[0,T] - X)^+\right). \tag{20}$$

1.5. Мето Монте-Карло

1.5.1 Модель ціни акції

Поширеною моделлю ціни акцій є геометричний броунівський рух, який визначають як розв’язок стохастичного диференціального рівняння:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)\delta W, S_0 = S(0) > 0 \qquad (21)$$

де

$S(t)$ – ціна акції в момент часу t,

μ – коефіцієнт зносу (зсуву),

σ – коефіцієнт дифузії (волатильність),

$\delta W = W(t + dt) - W(t) \sim N(0; dt)$ – приріст вінерівського процесу,

$W(t)$ – вінерівський випадковий процес (процес броунівського руху).

Аналітичний розв’язок стохастичного диференціального рівняння (21) має вигляд:

$$S(t) = S(0)\exp\left(mt + \sigma W(t)\right), \quad m = \mu - \sigma^2 / 2. \qquad (22)$$

Отже, як легко бачити ціна $S(t)$ є логнормально розподіленою в. в. з математичним сподіванням

$$M(S(t)) = e^{\mu t} S(0), \qquad (23)$$

та дисперсією

$$D(S(t)) = e^{2\mu t} S_0^2 (e^{\sigma^2 t} - 1). \qquad (24)$$

З іншого боку, випадкова величина логарифмічного приросту $r(t) = ln(S(t)/S(0))$ є нормально розподілена з параметрами

$$M(r(t)) = mt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \ D(r(t)) = \sigma^2 t. \qquad (25)$$

За припущення про безарбітражність ринку виконується рівність

$$M(S(t)) = e^{f t} S(0), \qquad (26)$$

тоді $\mu = f$, а $m = f - \frac{1}{2}\sigma^2$ – безризикова процентна ставка за неперервного нарощення процентів.

1.5.2 Застосування методу Монте-Карло до ціноутворення опціонів

На основі (18) розглянемо дискретну модель ціни. Введемо на проміжку $[0,T]$ $[0,T]$ рівномірну сітку $\{t_k = k\Delta t,\ k = 0,1,\dots N\}$ з кроком $\Delta t = T / N$.

Нехай $r_k = \ln\left(S_k / S_{k-1}\right)$ – логарифмічна дохідність за період $[t_{k-1}, t_k]$. Тоді з використанням (19)-(21) отримаємо подання ціни у момент часу t_k :

$$S_k = S(t_k) = S(0)\exp(r_1 + r_2 + \dots + r_k),\ k = 1,2,\dots,N;\ \ S_0 = S(0), \quad (27)$$

$$r_k = \ln\left(S_k / S_{k-1}\right) \sim N(m_k; \sigma_k^2), \qquad m_k = m\Delta t,$$

$$\sigma_k = \sigma\sqrt{\Delta t}\, m_i = m\Delta t \sigma_i = \sigma\sqrt{\Delta t}. \qquad (28)$$

Зауважимо, у загальному випадку величини логарифмічної дохідності r_k можуть мати довільний розподіл, який визначаємо емпірично.

Для моделювання ціни акцій використаємо дискретне представлення (27). Результат моделювання з номером j позначимо через S_k^j, кількість випробувань (спроб, тестів) – n .

Тоді для розрахунку ціни опціонів за методом Монте-Карло можна отримаємо наступні формули:

1) для вартості опціонів на купівлю та продаж європейського стилю:

$$C_E = \frac{e^{-fT}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(S_N^j - X\right)^+ , \qquad (29)$$

$$P_E = \frac{e^{-fT}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X - S_N^j\right)^+ . \qquad (30)$$

2) для опціонів американського стилю:

$$C_{AM} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\max_{1\le k\le N}\left(e^{-f\,t_k}(S_k^j - X)^+\right) , \qquad (31)$$

$$P_{AM} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\max_{1\le k\le N}\left(e^{-f\,t_k}(X - S_k^j)^+\right) .P_{AM} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\max_{0\le t\le T}\left(e^{-rt}\left(K - S_t^j\right)^+\right) \qquad (32)$$

3) для азійських опціонів з середньою ціною:

$$C_{AS} = \frac{e^{-fT}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(A^j[0,T] - X\right)^+ ,\ P_{AS} = \frac{e^{-fT}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X - A^j[0,T]\right)^+ , \quad (33)$$

де середнє значення ціни розраховуємо за формулою прямокутників:

$$A[0,T] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S\left(t_k\right) \quad . \tag{34}$$

1.5.3 Похибка методу Монте-Карло

Виклад проведемо у спрощених позначеннях, коли шуканою величиною є математичне сподівання $M = M(Z)$ деякої в. в. Z з математичним сподіванням m та дисперсією σ^2. Тоді

$$M(Z) \approx \overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \ , \qquad (35)$$

Оцінимо похибку цього наближення, яка є по-суті інтервальною оцінкою вибіркового математичного сподівання.

Величину $\overline{Z}_n$ можна вважати сумою n незалежних випадкових величин з однаковим розподілом, що відповідає в. в. Z. Тому, за центральною граничною теоремою при великих n розподіл цієї величини близький до нормального з математичним сподіванням

$$M(\overline{Z}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(Z_j) = m \qquad (36)$$

та дисперсією

$$D(\overline{Z}_n) = \sum_{j=1}^{n} D\left(\frac{1}{n}Z_j\right) = n\frac{1}{n^2}D(Z) = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad (37)$$

Величини m та σ^2 оцінюємо за формулами :

$$m \approx \overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j \ , \quad \sigma^2 \approx s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \overline{Z}_n)^2 \ . \qquad (38)$$

Якщо α – рівень довіри, то легко отримати таку інтервальну оцінку:

$$P\left(\left|\overline{Z}_n - m\right| \le \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \alpha \, , \qquad (39)$$

де $k = N^{-1}\big((1+\alpha)/2\big)$, зокрема $k(0.95) = 1.960$, $k(0.90) = 1.645$.

Останнє співвідношення дає нам оцінку похибки методу Монте-Карло в ймовірнісному сенсі. Зокрема, якщо задатися необхідною точністю

$$\frac{k\sigma}{\sqrt{n}} \le \varepsilon, \tag{40}$$

то отримаємо необхідну кількість симуляцій (випробувань, тестів):

$$n \ge \frac{k^2\sigma^2}{\varepsilon^2}. \tag{41}$$

Отож, точність методу обернено пропорційна до кореня з кількості симуляцій. Для покращення точності на порядок потрібно збільшити кількість симуляцій на два порядки.

2. ЗАВДАННЯ

2.1. Апробація методу Монте-Карло для європейських опціонів

Підготуйте на мові Python програму для розрахунку ціни європейського опціону за формулою Блека-Шоулса та методом Монте-Карло за даними, які відповідають вашому варіанту, див. табл. 1. (Початкові параметри). Проведіть графічне порівняння ціни опціону розрахованою за формулою Блека-Шоулса та методом Монте-Карло для різної кількості статистичних випробувань $N = 2000(2000)16000$.

Зробіть висновки.

2.2. Дослідження залежності ціни опціону від параметрів

Підготуйте на мові Python програму для розрахунку ціни опціону методом Монте-Карло за даними, які відповідають вашому варіанту, див. табл. 1. (тип опціону, стиль опціону, початкові параметри). Проведіть графічне дослідження залежності ціни цього опціону та європейського опціону відповідного типу від вказаного параметра (Параметр дослідження).

Зробіть висновки.

Таблиця 1. Варіанти завдань з дослідження ціни опціонів

Варіант	Тип опціону	Стиль опціону	Початкові параметри					Параметр дослідження
			S_0	K	T	σ	r	
1	call	американський	100	120	0,5	0,3	0,25	$S_0 = 50(10)150$
2	put	американський	100	110	0,5	0,3	0,25	$K = 50(10)150$
3	call	азійський з середньою ціною	100	100	0,5	0,3	0,25	$T = 0.1(0.1)1$
4	put	азійський з середньою ціною	100	90	0,5	0,3	0,25	$\sigma = 0.05(0.05)$
5	call	американський	100	80	0,5	0,3	0,25	$r = 0.05(0.01)0.20$
6	put	американський	90	120	1,0	0,10	0,15	$S_0 = 50(10)150$
7	call	азійський з середньою ціною	90	110	1,0	0,10	0,15	$K = 50(10)150$
8	put	азійський з середньою ціною	90	100	1,0	0,10	0,15	$T = 0.1(0.1)1$
9	call	американський	90	90	1,0	0,10	0,15	$\sigma = 0.05(0.05)$
10	put	американський	90	80	1,0	0,10	0,15	$r = 0.05(0.01)0.20$
11	call	азійський з середньою ціною	110	120	0,8	0,2	0,10	$S_0 = 50(10)150$
12	put	азійський з середньою ціною	110	110	0,8	0,2	0,10	$K = 50(10)150$
13	call	американський	110	100	0,8	0,2	0,10	$T = 0.1(0.1)1$
14	put	американський	110	90	0,8	0,2	0,10	$\sigma = 0.05(0.05)$
15	call	азійський з середньою ціною	110	80	0,8	0,2	0,10	$r = 0.05(0.01)0.20$

3. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

3.1. Апробація методу Монте-Карло для європейських опціонів

Для розрахунків за формулою Блека-Шоулса використовуємо формули (14)-(16). Алгоритм методу Монте-Карло описано у п. 1.5.1–1.5.3.

Нижче наведено фрагмент коду програми на мові Python, з якої легко зрозуміти, які бібліотеки використовуються.

```
#
# Європейський кол-опціон
# Формула Бека-Шоулса
# Метод Монте-Карло
#
import sys
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log, sqrt, exp
from scipy import stats
import random
N = 500
T = 0.5
S0 = 40.0
sigma = 0.335
r = 0.25
K = 42
NK = 20

def BSM(T, S0, sigma, r, K):# Формула Блека-Шоулса
    S0 = float(S0)
    d1 = (log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))
    d2 = (log(S0 / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))
    rez  =  (S0  *  stats.norm.cdf(d1,  0.0,  1.0)  -  K  *  exp(-r  *  T)  *
stats.norm.cdf(d2, 0.0, 1.0))
    return rez

def EMK(T, S0, sigma, r, K, NK, N): # Монте-Карло для євро колл-опціону
    a = r
    m = a - 0.5 * sigma ** 2  # матсподівання приросту
    dT = T / NK  # крок по часу
    dm = m * dT  # матсподівання на кроці
```

```
    ds = sigma * sqrt(dT)  # волатильність на кроці
    Kr = K / S0
    random.seed()
    sum=0
    for i in range(N):  # цикл по тестах
        pr_max = 0.
        rs = 0.
        for k in range(NK):  # цикл по кроках
            t = (k + 1) * dT
            rs = rs + random.gauss(dm, ds)
            st = max(exp(rs) - Kr, 0)
        sum = sum + st
    C_eu = exp(-t * r) * S0 * sum / N
    return C_eu
#Основна програма
C_bsm = []
C_mk = []
Range = []
N=10
for i in range(1, 6, 1):
    N=N*10
    C_bsm_i = BSM(T, S0, sigma, r, K)
    C_mk_i = EMK(T, S0, sigma, r, K, NK, N)
    C_bsm.append(C_bsm_i)
    C_mk.append(C_mk_i)
    Range.append(log(N,10))

plt.plot(Range, C_bsm, linestyle='-',  color='red')
plt.plot(Range, C_mk, linestyle=' ', marker='^', color='green')
plt.xlabel("log(N,10)- десятковий логарифм кількості випробувань")
plt.ylabel("ціна європейського колл-опціону")
# plt.ylim(4,6)
plt.title("Точність методу Монте-Карло")
plt.grid(True)
plt.legend(['BSM', 'Monte-Carlo',],  # список легенди
            loc='upper right')       # положення легенди
plt.show()
```

Результат роботи програми показано на рис. 4.

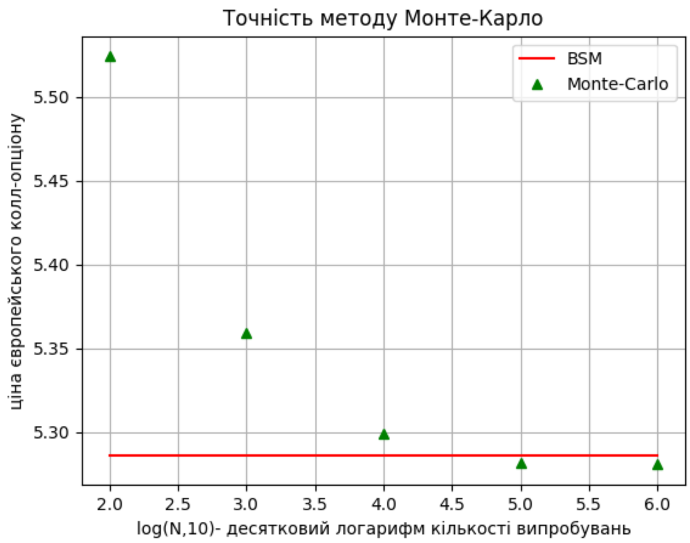

Рис. 4. Ілюстрація збіжності методу Монте-Карло

3.2. Дослідження залежності ціни опціону від параметрів

Програма дослідження залежності ціни американського колл-опціону від ціни виконання приведена нижче.

```
#
# Європейський кол-опціон
# Формула Бека-Шоулса
# Американський кол-опціон
#
import sys
import matplotlib.pyplot as plt
from math import log, sqrt, exp
from scipy import stats
import random
N = 10000
T = 1.0
S0 = 100.0
sigma = 0.2
r = 0.15
K = 120
NK = 20

def BSM(T, S0, sigma, r, K):# Модель Блека-Шоулса
    S0 = float(S0)
```

```
    d1 = (log(S0 / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))
    d2 = (log(S0 / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * sqrt(T))
    rez  =  (S0  *  stats.norm.cdf(d1,  0.0,  1.0)  -  K  *  exp(-r  *  T)  *
stats.norm.cdf(d2, 0.0, 1.0))
    return rez

def EUC(T, S0, sigma, r, K, NK, N): # Монте-Карло для Євро колл-опціону
    a = r
    m = a - 0.5 * sigma ** 2  # матсподівання приросту
    dT = T / NK  # крок по часу
    dm = m * dT  # матсподівання на кроці
    ds = sigma * sqrt(dT)  # волатильність на кроці
    Kr = K / S0
    random.seed()
    sum=0
    for i in range(N):  # цикл по тестах
        pr_max = 0.
        rs = 0.
        for k in range(NK):  # цикл по кроках
            t = (k + 1) * dT
            rs = rs + random.gauss(dm, ds)
            st = max(exp(rs) - Kr, 0)
        sum = sum + st
    C_eu = exp(-t * r) * S0 * sum / N
    return C_eu
def AMC(T, S0, sigma, r, K, NK, N): # Монте-Карло для Амер колл-опціону
    a = r
    m = a - 0.5 * sigma ** 2  # матсподівання приросту
    dT = T / NK  # крок по часу
    dm = m * dT  # матсподівання на кроці
    ds = sigma * sqrt(dT)  # волатильність на кроці
    Kr = K / S0
    random.seed()
    sum=0
    for i in range(N):  # цикл по тестах
        pr_max = 0.
        rs = 0.
        for k in range(NK):  # цикл по кроках
            t = (k + 1) * dT
```

```
            rs = rs + random.gauss(dm, ds)
            st = max(exp(rs) - Kr, 0)
            pr_max=max(exp(-t*r)*st,pr_max)
        sum = sum + pr_max
    C_am = S0 * sum / N
    return C_am

C_bsm = []
C_euc = []
C_amc = []
Range = []
for K in range(50, 200, 10):
    C_bsm_i = BSM(T, S0, sigma, r, K)
    C_euc_i = EUC(T, S0, sigma, r, K, NK, N)
    C_amc_i = AMC(T, S0, sigma, r, K, NK, N)
    C_bsm.append(C_bsm_i)
    C_euc.append(C_euc_i)
    C_amc.append(C_amc_i)
    Range.append(K)

plt.plot(Range, C_bsm, linestyle='--',  color='red')
plt.plot(Range, C_euc, linestyle=' ', marker='^', color='green',markersize=8)
plt.plot(Range, C_amc, linestyle=' ', marker='*', color='blue', markersize=10)
plt.xlabel("ціна виконання")
plt.ylabel("ціна колл-опціону")
#plt.ylim(4,6)
plt.title("Залежність ціни опціону від ціни виконання")
plt.grid(True)
plt.legend(['BSM',
            'Euro call-option', 'Amer call-option',],      # список легенди
            loc='upper right')    # положення легенди
plt.show()
```

Розрахунки проведено для наступних даних:

ціна виконання K = 50(10)150$K = 42$,

початкова ціна акції S_0 = 100,

термін T = 1.0,

без ризикова процентна ставка r = 0.15$r = 0.25$,

волатильність ціни акції $\sigma = 0.335$ σ = 0.20, кількість випробувань $N = 10000$.

Отриманий графік показано на наступному рисунку.

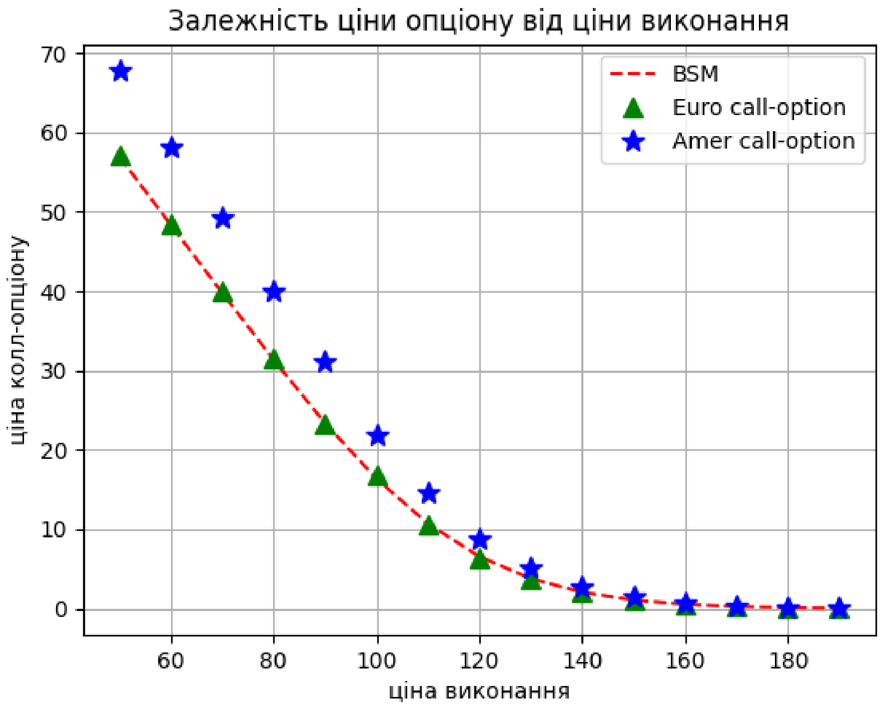

Рис. 5. Залежність ціни опціонів від ціни виконання.

4. ВИМОГИ ДО ЗВІТУ

4.1 Зміст

Звіт про лабораторну роботу повинен включати:

1. Титульну сторінку (див. Додаток А)
2. Мету роботи.
3. Короткі теоретичні відомості, включаючи формули.
4. Варіант завдання.
5. Виконання завдань відповідно до варіанту, з отриманими результатами, поясненнями та висновками.
6. Загальні висновки.

4.2 Вимоги до оформлення

Звіт оформляється за допомогою редактора Word на листах формату А4.

Поля: ліве – 3 см, праве – 1 см, нижнє та верхнє – 2 см. Нумерація сторінок – вгорі справа.

Основний шрифт Times New Roman – звичайний, розмір – 14 пт, міжстрічковий інтервал – 1,5.

Рубрикація, оформлення формул, таблиць, рисунків, додатків – як у цих вказівках.

4.3 Захист роботи

Захист роботи здійснюється у два етапи:

1. Здача роботи у електронній формі, пояснення ходу виконання завдань.
2. Здача звіту в текстовій формі, відповідь на контрольні запитання.

5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Опишіть коротко метод статистичного імітаційного моделювання.
2. Чому метод статистичного імітаційного моделювання ще називають методом Монте-Карло?
3. Назвіть найпростіший фізичний генератор рівномірно розподілених випадкових чисел.
4. Хто започаткував метод Монте-Карло в сучасному розумінні?
5. Назвіть основні етапи методу Монте-Карло.
6. Як побудувати емпіричну функцію розподілу?
7. Що є справедливою (консистентною) незміщеною оцінкою математичного сподівання?
8. Яку оцінку параметра називають слушною (справедливою, консистентною)?
9. Яку оцінку параметра називають незміщеною?
10. Які випадкові числа називають стандартними випадковими числами?
11. Як використовуючи стандартні випадкові числа згенерувати вибірку з заданим розподілом.
12. Назвіть основні типи опціонів.
13. Опишіть опціони європейського стилю.
14. Опишіть опціони американського стилю.
15. Опишіть опціони азійського стилю.
16. Як залежить точність розрахунку ціни опціонів від кількості симуляцій?

6. ЛІТЕРАТУРА

1. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика: Посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 494 с.
2. Михайлов Г.А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Академия, 2006. – 368 с.
3. Халл Дж. К. Опционы, фьючерсы и другие финансовые инструменты. – 6-е изд. – М.: Вильямс, 2008. – 1024 с.
4. Ясинська Л.І., Ясинський В. К., Юрченко В.І. Імітаційне статистичне моделювання на ЕОМ. – Чернівці: Зелена Буковина, 1999. – 345с.
5. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo method // J. Amer. Statist. Assos., 1949. – V.44, N 247.– P.335-341.

Додаток А
Оформлення титульної сторінки звіту

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет ім. Івана Франка

ЗВІТ
про виконання лабораторної роботи № 3
РОЗРАХУНОК ЦІНИ ОПЦІОНІВ
МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Виконав: ст. гр. МтФ-51м
Іваненко П. П.

Прийняв: доц. Прокопишин І. А.

Львів 2022