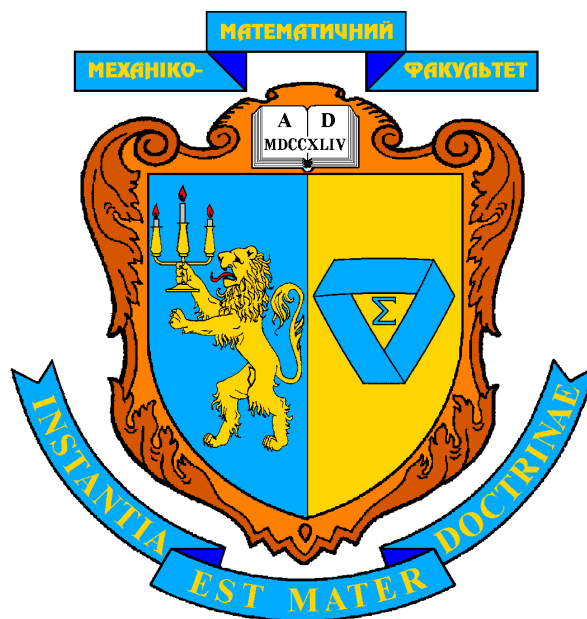


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет ім. Івана Франка



РОЗРАХУНОК ЦІНИ ТА ДОХІДНОСТІ ОБЛІГАЦІЙ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторної роботи № 3
з курсу "Фінансова математика"

Львів 2021

Мета роботи – навчити студентів проводити розрахунки основних показників облігації, зокрема повної ціни, ефективної та номінальної доходності до погашення та дюрації за допомогою електронних таблиць.

1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основні поняття

Облігація (bond) – цінний папір, який засвідчує факт надання грошового кредиту інвестором емітенту, забезпечує інвесторові право на отримання регулярних фіксованих дивідендних доходів, а при погашенні облігації – суми кредиту, яка здебільшого дорівнює номінальній вартості облігації.

Основні параметри облігації – **номінальна вартість** (nominal, principal, par, or face value), **дата погашення** (maturity date), **розміри і терміни платежів**. Регулярні процентні виплати за облігацією називають **купонами** (coupons).

З моменту емісії і до погашення облігації продають і купують на фондовому ринку. **Котирувальна** або **чиста ціна** облігації (clean price) встановлюється на біржі відразу після виплати чергового купона і може дорівнювати її номіналу, бути вищою або нижчою за номінал. **Повна** або "брудна" ціна облігації (dirty price) дорівнює чистій ціні плюс **нарощений купонний дохід** – **НКД** (accrued interest).

Позначимо:

N – номінал облігації;

d_0, \dots, d_n – дати купонних виплат у форматі D.M.Y (день.місяць.рік);

d – дата купівлі облігації;

t_0, t_1, \dots, t_n , t – відповідні часові моменти у роках;

$C_i = \frac{f_i}{m} N$ – розмір купонної виплати у момент часу $d_i (t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$;

f_i – річна купонна ставка для купонного періоду (d_{i-1}, d_i) ;

m – кількість купонних виплат на рік;

N_i – розмір амортизаційної виплати у момент $d_i (t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

найчастіше $N_i = 0$, $i \neq n$, $N_n = N$;

P_c – котирувальна (чиста) ціна облігації;

A – нарощений купонний дохід;

$TP = P = P_c + A$ – повна вартість облігації;

$P_f = P_{fair}$ – справедлива ціна облигації;

r – ефективна дохідність до погашення.

1.2 План погашення облигації та розрахункові формули

Розглянемо типовий випуск єврооблигації з параметрами:

номинал	$N = \$1000$
термін	$T = 5$ років
дата випуску	$d_0 = 24.10.2017$
кількість виплат на рік	$m = 2$
номинальна річна купонна ставка	$f = 8,00\%$
дата виплати першого купона	$d_1 = 25.04.2018$
кількість купонних періодів	$n = 10$

Припустимо, що виплати купонів здійснюється рівними сумами, тому

$\frac{C_i}{N} = \frac{f_i}{m} = 0,04$. План погашення цієї облигації, у долях до номіналу, показано у

наступній таблиці.

Номер купонного періоду	Початок	Кінець	Купон, річних, %	Погашення номіналу, %	Час, у роках кінця періоду	Купонна виплата, у % до номіналу	Загальна виплата, у % до номіналу
1	24.10.2017	25.04.2018	0,08		0,5028	0,04	0,04
2	25.04.2018	24.10.2018	0,08		1,0000	0,04	0,04
3	24.10.2018	25.04.2019	0,08		1,5028	0,04	0,04
4	25.04.2019	24.10.2019	0,08		2,0000	0,04	0,04
5	24.10.2019	25.04.2020	0,08		2,5028	0,04	0,04
6	25.04.2020	24.10.2020	0,08		3,0000	0,04	0,04
7	24.10.2020	25.04.2021	0,08		3,5028	0,04	0,04
8	25.04.2021	24.10.2021	0,08		4,0000	0,04	0,04
9	24.10.2021	25.04.2022	0,08		4,5028	0,04	0,04
10	25.04.2022	24.10.2022	0,08	100,00%	5,0000	0,04	1,04

Тепер розглянемо метод визначення кількості днів між датами, який застосовують при розрахунках єврооблигацій [8].

Нехай $d_1 = D1.M1.Y1$, $d_2 = D2.M2.Y2$. У методах 30/360 кількість днів обчислюють за формулою:

$$d_2 - d_1 = (Y2 - Y1) * 360 + (M2 - M1) * 30 + (D2 - D1), \quad (1)$$

з деякими уточненнями величин $D1$ та $D2$ для довгих місяців та лютого. Зокрема, у методі **30E/360** для єврооблигацій встановлена корекція: якщо $D1 = 31$, тоді покладають $D1 := 30$, і аналогічно, якщо $D2 = 31$, тоді – $D2 := 30$.

Нехай d дата купівлі облігації $d \in [d_{s-1}, d_s)$, а $t \in [t_{s-1}, t_s)$ – відповідний момент часу у роках. **Котирувальна або чиста ціна облігації**, яку встановлюють на біржі відразу після виплати чергового купона – в момент часу t_{s-1} , пов’язана з ефективною дохідністю до погашення r на цей час формулою:

$$P = \sum_{k=s}^n \frac{C_k + N_k}{(1+r)^{t_k - t_{s-1}}}. \quad (2)$$

За припущення, що спот-ставка (для облігацій цього класу) є сталою і дорівнює r формула (2) також визначає справедливу ціну облігації на момент часу $t = t_{s-1}$.

Нарощений купонний дохід (НКД) обчислюють за формулою:

$$A(t) = \frac{t - t_{s-1}}{t_s - t_{s-1}} (C_s + N_s), \quad t_{s-1} \leq t < t_s. \quad (3)$$

Повна (брудна) ціна облігації на час $t \in [t_{s-1}, t_s)$ складає

$$TP(t) = P(t) = P_c(t) + A(t). \quad (4)$$

Ефективну річну дохідність до погашення на час t знаходять як розв’язок відносно r рівняння

$$TP(t) = \sum_{k=s}^n \frac{C_k + N_k}{(1+r)^{t_k - t}}, \quad t_{s-1} \leq t < t_s. \quad (5)$$

а **номінальну річну дохідність** r_{nom} отримують з співвідношення

$$\left(1 + \frac{r_{nom}}{m}\right)^m = 1 + r. \quad (6)$$

З іншого боку, якщо спот-ставка, яка визначає криву дохідності, стала і дорівнює r , то права частина рівняння (5) визначає **справедливу ціну облігації** P_{fair} на момент часу t :

$$P_{fair}(t) = P_f(t) = \sum_{k=s}^n \frac{C_k + N_k}{(1+r)^{t_k - t}}, \quad t_{s-1} \leq t < t_s. \quad (7)$$

Формула для дюрації облігації (у роках) на час купівлі t записується так

$$D(t) = \frac{1}{TP(t)} \sum_{k=s}^n \frac{(t_k - t)(C_k + N_k)}{(1+r)^{t_k - t}}. \quad (8)$$

2. ЗАВДАННЯ

2.1. Дослідження залежності повної ціни та справедливої ціни облігації від часу купівлі

Відповідно до свого варіанта у Табл. 1, сформууйте план погашення облігації.

Розрахуйте таблицю залежності повної ціни, справедливої ціни та дюрації облігації від часу купівлі на основі формул (4), (7) та (8). Величини купонних та амортизаційних виплат подайте у процентах (долях) від номіналу, тоді результат для цін буде також у процентах від номіналу.

Побудуйте графіки залежності вказаних величин від часу купівлі.

Дослідження проведіть для значень дохідності менших, рівних та більших від річної купонної ставки. Зробіть висновки.

Варіанти завдань подано у таблиці нижче.

Таблиця 1. Варіанти завдань

Номер варіанта	Дата випуску	Дата виплати першого купона	Термін у роках	Річна ставка, %	Дата купівлі
1	05.09.2017	07.03.2018	3	6	03.05.2018
2	12.09.2017	14.03.2018	3	6	17.05.2018
3	19.09.2017	21.03.2018	3	6	31.05.2018
4	26.09.2017	28.03.2018	3	6	14.06.2018
5	03.10.2017	04.04.2018	3	6	28.06.2018
6	05.09.2017	07.03.2018	4	7	12.07.2018
7	12.09.2017	14.03.2018	4	7	26.07.2018
8	19.09.2017	21.03.2018	4	7	09.08.2018
9	26.09.2017	28.03.2018	4	7	23.08.2018
10	03.10.2017	04.04.2018	4	7	06.09.2018
11	05.09.2017	07.03.2018	5	8	20.09.2018
12	12.09.2017	14.03.2018	5	8	04.10.2018
13	19.09.2017	21.03.2018	5	8	18.10.2018
14	26.09.2017	28.03.2018	5	8	01.11.2018
15	03.10.2017	04.04.2018	5	8	15.11.2018

2.2. Аналіз залежності повної ціни та справедливої ціни облігації від дохідності

Зафіксуйте дату купівлі облігації, яка відповідає вашому варіанту. На основі даних про облігації з Табл. 1 сформууйте таблицю залежності повної ціни, справедливої ціни та дюрації облігації від дохідності на основі формул (4), (7) та (8).

Побудуйте графіки залежності вказаних величин від дохідності.

Зробіть висновки.

2.3. Розрахунок дохідності до погашення

Задайте дату купівлі облігації, яка відповідає вашому варіанту. Для трьох значень повної ціни знайдіть ефективну дохідність до погашення з рівняння (5).

Також розрахуйте номінальну дохідність на основі рівності (6).

Нанесіть отримані результати на відповідну діаграму з попереднього завдання. Зробіть висновки.

3. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Приклад виконання роботи подано у файлі 18_SM_Lab_1_Bonds.xlsm за даними єврооблігації Ukraine 20.

3.1. Дослідження залежності повної ціни та справедливої ціни облігації від часу купівлі

Для обчислення актуальної кількості днів користування грошима потрібно просто відняти відповідні дати (у форматі дати), а для методів 30/360 скористатися функцією EXCEL *ДНЕЙ360* з категорії **Дата і Час**.

Для проведення розрахунків за формулами (2)-(5), (7), (8) зручно запрограмувати відповідні функції користувача на мові Visual Basic for Applications (VBA).

Для цього спочатку додаємо вкладку **Розробник**, яка початково відсутня на полосі меню Excel. Для цього натисніть значок **Кнопка Microsoft Office**, далі – **Параметри Excel**, і відзначте галочкою пункт **Показувати вкладку Розробник** на полосі.

На вкладці **Розробник** натисніть кнопку **Безпека макросів** і виберіть **Включити усі макроси**.

Далі, на вкладці **Розробник**, натисніть кнопку **Visual Basic**. Відкриється вікно середовища розробки Microsoft Visual Basic. У меню виберіть **Insert > Module** (рис. 1). До книги EXCEL буде додано модуль, у який за допомогою вікна редактора коду справа додаємо код необхідних функцій.

Зауважимо, що перенесення частини формули на іншу стрічку потрібно набрати пропуск і знак підкреслення. Також відзначимо, що перелік вбудованих функцій Microsoft Visual Basic є іншим ніж в середовищі EXCEL. Одна і таж функція може мати різне написання. Однак, в VB можна скористатися функціями EXCEL. Наприклад, щоб використати функцію стандартного нормального розподілу з EXCEL *NormSDist (par)*, потрібно застосувати посилання `Application.WorksheetFunction.NormSDist(par)`.

Після набору коду необхідно зберегти файл EXCEL (з розширенням *.xlsm) скориставшись кнопкою меню **File**. Тоді запрограмована функція стає доступна в середовищі EXCEL як стандартна функція в категорії **Визначені користувачем**.

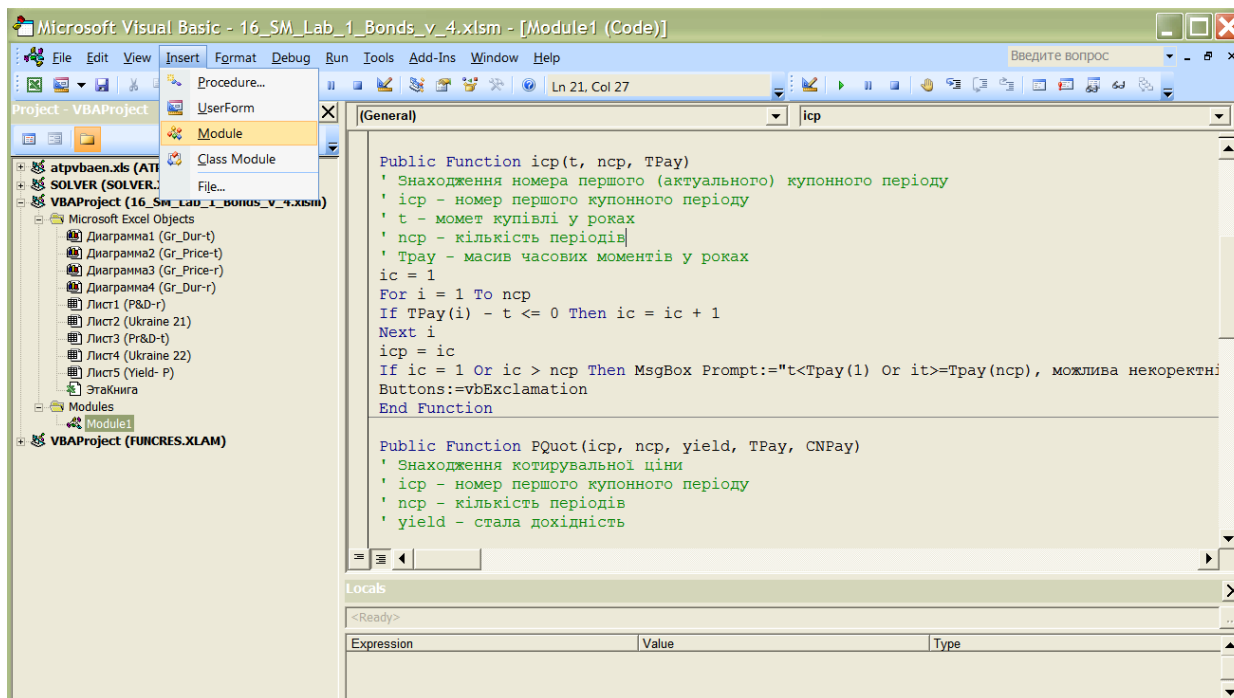


Рис. 1. Програмування функції користувача в редакторі VBA.

Для створеної функції можна додати опис (допомогу), який буде показаний при її виклику. Для цього на вкладці **Розробник** натисніть кнопку **Макроси**, далі у відповідному вікні введіть ім'я функції і натисніть кнопку **Параметри**. У вікні параметрів здійсніть опис функції.

При розрахунках показників облігації на момент часу t актуальними є лише дані для поточного та наступних купонних періодів. Функція знаходження номера s поточного (актуального) купонного періоду подана нижче

```
Public Function icp(t, ncp, TPay)
' Знаходження номера першого(поточного) купонного періоду
' icp - номер першого (актуального) купонного періоду
' t - момент купівлі у роках
' ncp - загальна кількість періодів
' Tpay - масив часових моментів у роках
ic = 1
For i = 1 To ncp
If TPay(i) - t <= 0 Then ic = ic + 1
Next i
icp = ic
If ic = 1 Or ic > ncp Then MsgBox Prompt:="t<Tpay(1) Or t>=Tpay(ncp),
можлива некоректність", _
Buttons:=vbExclamation
End Function
```

Аналогічно легко записати функції розрахунку справедливої та котирувальної ціни, нарощеного купонного доходу та дюрації.

```
Public Function PFair(t, icp, ncp, yield, TPay, CNPay)
' Знаходження справедливої ціни
' t - момент купівлі у роках
' icp - номер першого (актуального) купонного періоду
' ncp - кількість періодів
' yield - стала дохідність
' Tpay - масив часових моментів у роках
' CNPay - загальний грошовий потік
PT = 0
For i = icp To ncp
PT = PT + CNPay(i) / (1 + yield) ^ (TPay(i) - t)
Next i
PFair = PT
End Function
```



```

Public Function PQuot(icp, ncp, yield, TPay, CNPay)
' Знаходження котирувальної ціни
' icp - номер першого (актуального) купонного періоду
' ncp - кількість періодів
' yield - стала дохідність
' TPay - масив часових моментів у роках
' CNPay - загальний грошовий потік
PQ = 0
t1 = TPay(icp - 1)
For i = icp To ncp
PQ = PQ + CNPay(i) / (1 + yield) ^ (TPay(i) - t1)
Next i
PQuot = PQ
End Function

```

```

Public Function AccrInt(t, icp, TPay, CPay)
' Знаходження нарощеного купонного доходу
' t - момет купівлі у роках
' icp - номер першого (актуального) купонного періоду
' TPay - масив часових моментів у роках
' CPay - потік купонних виплат
t1 = TPay(icp - 1)
t2 = TPay(icp)
A = (t - t1) * CPay(icp) / (t2 - t1)
AccrInt = A
End Function

```

```

Public Function Dur(t, icp, ncp, yield, TPay, CNPay, PTot)
' Знаходження дюрації
' t - момет купівлі у роках
' icp - номер першого (актуального) купонного періоду
' ncp - кількість періодів
' yield - стала дохідність
' TPay - масив часових моментів у роках
' CNPay - загальний грошовий потік
' PTot - повна ціна
For i = icp To ncp
D = D + CNPay(i) * (TPay(i) - t) / (1 + yield) ^ (TPay(i) - t)
Next i
Dur = D / PTot
End Function

```

Реалізація першого завдання проведена на листі **Pr&D-t** згаданої книги **18_SM_Lab_1_Bonds.xlsm**. Зеленим кольором виділено вхідні дані. Графіки цін подано на листі **Gr_Price-t**, а графік дюрації – **Gr_Dur-t**.

Проведіть аналогічні розрахунки за своїми даними, результати подайте у вигляді графіків.

3.2. Аналіз залежності повної ціни та справедливої ціни облігації від дохідності

Фіксуємо дату купівлі облігації, відповідно до свого варіанта.

З використанням запрограмованих функцій формуємо таблицю залежності повної та справедливої ціни та дюрації від дохідності r , яку задаємо від 0,01 з кроком 0.01 до 0,50.

Будуємо відповідні графіки для цін та дюрації. Деталі див. на листі **P&D-r**.

3.3. Розрахунок дохідності до погашення

Фіксуємо дату купівлі облігації – ту ж що у попередньому завданні.

Визначаємо максимальне можливе значення повної ціни задаючи у відповідній формулі ефективну дохідність рівною нулю.

Далі фіксуємо три допустимі значення повної ціни, більші, рівні та менші одиниці. Шукану ефективну дохідність знаходимо як розв'язок рівняння (5), використовуючи програму SOLVER.

Отримані результати показуємо на діаграмі цін попереднього завдання.

Деталі див. на листі **Yield- P**.

4. ВИМОГИ ДО ЗВІТУ

4.1 Зміст

Звіт про лабораторну роботу повинен включати:

1. Титульну сторінку (див. Додаток А).
2. Мету роботи.
3. Короткі теоретичні відомості, включаючи формули.
4. Номер варіанта та вихідні дані. Хід виконання завдань відповідно до варіанта, з отриманими результатами (план погашення облігації, графіки залежностей), поясненнями та висновками.
5. Загальні висновки.

4.2 Вимоги до оформлення

Звіт оформляється за допомогою редактора Word на листах формату А4. Поля: ліве – 3 см, праве – 1 см, нижнє та верхнє – 2 см. Нумерація сторінок – вгорі справа.

Основний шрифт Times New Roman – звичайний, розмір – 14 пт, міжстрічковий інтервал – 1,5.

Рубрикація, оформлення формул, таблиць, рисунків, додатків – як у цих вказівках.

4.3 Захист роботи

Захист роботи здійснюється у два етапи:

1. Здача роботи у електронній формі, пояснення ходу виконання завдань.
2. Здача звіту в текстовій формі, відповідь на контрольні запитання.

5. КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

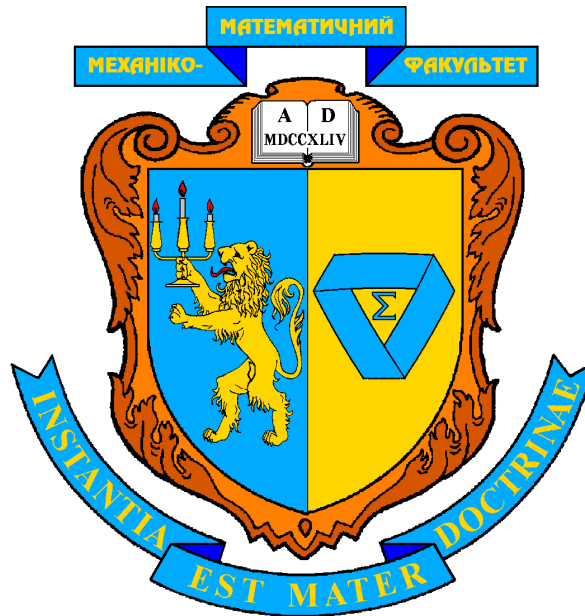
1. Що таке облігація?
2. Назвіть основні параметри облігації.
3. Що називають кривою дохідності спот?
4. Дайте означення ефективної дохідності облігації до погашення.
5. Що таке номінальна дохідності облігації до погашення?
6. Запишіть формулу зв'язку між номінальною та ефективною дохідністю.
7. Запишіть формулу для чистої ціни облігації.
8. Що таке нарощений купонний дохід?
9. Як розраховують повну ціну облігації?
10. Як розрахувати справедливу ціну облігації?
11. Чому дорівнює розрив повної ціни облігації (4) як функції часу купівлі t в момент виплати чергового купона t_k ?
12. Чому дорівнює розрив справедливої ціни облігації (7) як функції часу купівлі t в момент виплати чергового купона t_k ?
13. Чому дорівнює розрив дюрації облігації (8) як функції часу купівлі t в момент виплати чергового купона t_k ?
14. Запишіть рівняння для знаходження ефективної дохідності до погашення.
15. Дайте означення дюрації облігації.

6. ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. – М.: М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. – 352 с.
2. Гарнаев А. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах. – Спб.: БХВ, 2000. – С.74-106.
3. Инвестиционная группа АТОН. Облигационный калькулятор [Электронный ресурс]. – Режим доступа:
http://www.atonbroker.com/ru/research/fixed_income/bond_calculator/
4. Информационная агенция Cbonds. Облигационный калькулятор [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://data.cbonds.info/files/cbondscal/HelpCalculator.pdf>
5. Мельников А. В., Попова Н. В., Скорнякова В. С. Математические методы финансового анализа. – М.: Анкил, 2006. – 439 с.
6. Фабоцци Ф. Управление инвестициями. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 932 с.
7. Benninga S. Financial modeling. – 3-rd ed. – MIT Press, 2008. – 1133 p.
8. 2006 ISDA Definitions. – International Swaps and Derivatives Associations, New York 2006. – 145 p. (Section 4.16 Day Count Fraction, p.11-13.)

Додаток А
Оформлення титульної сторінки звіту

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет ім. Івана Франка



ЗВІТ
про виконання лабораторної роботи № 3
РОЗРАХУНОК ЦІНИ ТА ДОХІДНОСТІ ОБЛІГАЦІЙ
з курсу "Фінансова математика"
"

Виконав: ст. гр. МТМ-42
Іваненко П. П.

Прийняв: доц. Прокопишин І. А.

Львів 2021