Основи математичної економіки

Основи математичної економіки

Теорія споживання

В.А.Козицький
С.П.Лавренюк
М.О.Оліскевич

Навчальний посібник

Львівський національний університет
імені Івана Франка
2004

УДК 517; 519.6

В.А.Козицький, С.П.Лавренюк, М.О.Оліскевич Основи математичної економіки. Теорія споживання: Навчальний посібник.– Львів: Видавництво «Піраміда». 2004.– 264с.

У посібнику викладено основні ідеї та поняття теорії споживання. На підставі поняття корисності побудовано математичні моделі споживання, досліджено зміну попиту залежно від зміни цін та доходу. Крім того, виведено рівняння Слуцького, проаналізовано його, розглянуто задачу інтегровності.

Для студентів, аспірантів і наукових працівників.

Рецензенти:

М.М.Зарічний, д-р. фіз.-мат. наук, проф. (Львівський національний університет імені Івана Франка);

П.С.Яницький, канд. екон. наук, Ректор Львівського інституту менеджменту;

П.І.Островерх, канд. екон. наук, доц. (Львівський національний університет імені Івана Франка).

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка. Протокол №21/7 від 1.07.2004

Навчальне видання

Валерій Андрійович Козицький
Сергій Павлович Лавренюк
Маріанна Олександрівна Оліскевич

Основи математичної економіки.
Теорія споживання

Навчальний посібник

Редактор Н.Й.Плиса

Підп. до друку Формат 60Н84/16.
Папір друк. Друк офс. Умовн. друк. арк. Тираж

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000 Львів, вул.Університетська, 1

Зміст

Передмова

Вивчаючи математичними методами ті загальні економічні явища, які відносяться або до держав, або до індивідуумів, Леон Вальрас[1] створив по суті нову науку.

Шарль Пеги "Un économiste socialiste, Mr Léon Walras", La Revue Socialiste, N 146, 1897.

Економіку як науку поділяють на мікроекономіку та макроекономіку. Мікроекономіка вивчає поведінку окремих економічних одиниць: споживачів, працівників, інвесторів, землевласників, окремі компанії — будь-яку особу чи організацію, що відіграє певну роль у функціонуванні нашої економіки. Мікроекономіка пояснює те, як і чому ці одиниці приймають економічні рішення. Наприклад, як споживачі приймають рішення про купівлю і як зміна цін і доходів впливає на їх вибір; як фірми вирішують, скільки працівників найняти, як робітники вибирають місце праці і який обсяг роботи виконати.

Іншим важливим об'єктом вивчення мікроекономіки є відстеження, як внаслідок взаємодії первинних економічних одиниць формуються більші підрозділи - ринки і галузі промисловості.

Економіка як наука аналізує і прогнозує явища, що спостерігаються людиною. Чому, наприклад, фірми наймають і звільняють працівників, коли змінюється ціна на сировину, необхідну для виробничого процесу? Скільки працівників, за

[1] Леон Вальрас (1834-1910) – франко-швейцарський економіст, професор Лозанського університету (1870-1892), засновник математичного напрямку в економічній теорії, розробив модель загальної економічної рівноваги.

попередніми оцінками, наймуть або звільнять компанії чи галузі, якщо ціна сировини зросте, скажімо, на 10%?

В економіці, як і в інших галузях науки, аналіз і прогнозування грунтуються на теоріях. Теорії розробляють з метою пояснення явищ - об'єктів спостереження - в межах базових правил і припущень. Теорія фірм, наприклад, розпочинається з простого припущення: фірми намагаються максимізувати свої прибутки. Теорія використовує це припущення, щоб пояснити, як фірми визначають для себе кількість робочої сили, капіталу й сировини, необхідної для виробництва, а також обсяг виробництва продукції. Вона пояснює, як цей обсяг залежить від ціни на фактори виробництва (наприклад, на робочу силу, капітал і сировину), а також як він впливає на ціну, яку фірма може отримати за свою продукцію.

Економічні теорії є також базою для прогнозування. Наприклад, теорія фірми інформує про те, зростатиме чи спадатиме рівень виробництва продукції внаслідок збільшення рівня зарплати чи зниження ціни на сировину.

Разом зі статистичними та економетричнми методами, теорії використовують для побудови моделей, на підставі яких здійснюється кількісне прогнозування. Модель -це математичне зображення фірми, компанії, ринку чи будь-якої іншої реалії, що грунтується на економічній теорії. Наприклад, розробимо модель конкретної фірми та використаємо її, щоб спрогнозувати, наскільки зміниться рівень виробництва продукції внаслідок, скажімо, 10%—го зниження ціни на сировину.

Мікроекономіка вирішує як позитивні, так і нормативні проблеми. Позитивні проблеми пов'язані з аналізом і прогнозуванням, нормативні - з плануванням.. Припустимо, що уряд запроваджує квоту на імпорт автомобілів. Як зміниться ціна на автомобілі та рівень їх виробництва і збуту? Як це впливатиме на споживачів, працівників автомобільної промисловості? На всі ці запитання дає відповідь позитивний аналіз. Він посідає чільне місце в мікроекономіці. Отже, для пояснення явищ розробляють теорії, перевіряють на практиці та використовують для побудови моделей, на підставі яких здійснюють прогнозування.

Використання економічної теорії під час прогнозування важливе як для менеджерів компаній, так і для урядовців. Припустимо, що уряд з'ясовує можливість підвищення розміру податку на бензин. Цей податок вплине на ціну бензину, вибір споживачем автомобіля за критерієм економічності, інтенсивність його експлуатації тощо. Щоб раціонально планувати свою роботу, нафтові й автомобільні компанії, виробники запчастин і туристичні компанії хотіли б знати можливі наслідки підвищення цього податку. Урядовцям також необхідне кількісне прогнозування наслідків нового податку з метою визначення додаткових витрат, що лягають на споживачів (яких, можливо, за рівнем доходів поділено на різні категорії), впливу на рівень прибутків у нафтовій, автомобільній промисловості та туристичній індустрії, а також попередньо розрахованого обсягу щорічних податкових надходжень.

Іноді ми прагнемо вийти за межі аналізу та прогнозування, аби з'ясувати: що найкраще? Це потребує використання нормативного аналізу, що є важливим як для менеджерів компаній, так і для осіб, зайнятих розробкою нової державної політики. Ще раз звернімося до прикладу з підвищенням податку на бензин. Автомобільні компанії, якщо вже діє новий податок, прагнули б визначити оптимальне (те, що максимізує прибутки) співвідношення випуску автомобілів різних класів або суму коштів, необхідну на переоснащення машин економічнішими двигунами. Головним для урядовців буде визначення, чи відповідає розмір податку державним інтересам. Такі ж проблеми на урядовому рівні (скажімо, збільшення державних доходів від оподаткування і зменшення залежності від імпорту нафти) можна було б вирішити за рахунок зниження витрат, використовуючи інший вид податку (наприклад, тариф на імпорт нафти).

Нормативний аналіз передбачає не лише можливість вибору альтернативної урядової політики, а й розробку конкретних політичних кроків. Наприклад, якщо доведено доцільність підвищення податку на бензин, то спірним є питання щодо його розміру. Складаючи баланс витрат і прибутків, ми хочемо визначити, яким є оптимальний розмір цього податку.

Нормативний аналіз часто доповнюється неформальними міркуваннями щодо пріоритету цінностей. Наприклад, порівнюючи податок на бензин і тариф на імпорт нафти, робимо висновок, що податок на бензин легше піддається регулюванню, проте більше від нього терплять споживачі з низькими доходами. У цьому випадку суспільство має вирішити, що є для нього важливішим: соціальна справедливість чи економічна ефективність. Якщо ухвалено рішення щодо пріоритету цінностей, мікроекономіка безсила визначити, яка політика найкраща. Проте вона може пояснити причини суперечностей і таким чином вплинути на вирішення спірних питань.

Значна частина рішень щодо пріоритету цінностей, у тім числі рішення у сфері економічної політики, зводиться лише до такої суперечності - соціальна справедливість чи економічна ефективність.

Окремі економічні одиниці залежно від їх функцій ми можемо поділити на дві великі групи - покупці та продавці. До покупців належать споживачі, що купують товари та послуги, і компанії, котрі купують робочу силу, капітал і сировину, яку використовують для виробництва товарів і послуг. До продавців належать компанії, що продають свої товари та послуги, робітники, які продають свою робочу силу, і власники ресурсів, що здають в оренду землю або продають фірмам корисні копалини. Безперечно, більшість людей та фірм діють і як покупці, і як продавці. Проте нам зручніше зачислити їх до покупців, коли вони щось купують, і до продавців, коли вони щось продають.

Покупці та продавці взаємодіють між собою, утворюючи ринок, внаслідок чого з'являється можливість обміну. Зверніть увагу, що ринок — це більше, ніж галузь промисловості, котра визначається як сукупність фірм, що продають однакові або споріднені товари. Галузь є тією стороною ринку, що втілює пропозицію.

Ринок перебуває у центрі економічної активності, і безліч найцікавіших запитань і проблем економіки стосується того, як він працює. Наприклад, чому на деяких ринках лише кілька фірм конкурує між собою, тоді як на інших - їх значно більше? Чи завжди споживачі виграють від великої кількості фірм? Якщо так, то чи слід урядові втручатися у функціонування ринку з незначною кількістю фірм? Чому на одному ринку ціни різко зросли або впали, а на іншому - майже не змінилися? Які з ринків обіцяють найкращі можливості для підприємця, котрий збирається займатися бізнесом?

Ми вивчаємо поведінку ринків як з конкуренцією, так і без неї. На ринку з чистою конкуренцією е багато покупців і продавців, отже, жоден покупець чи продавець не має значного впливу на ціну. Здебільшого ринки сільськогосподарської продукції максимально наближені до ринків з чистою конкуренцією. Наприклад, тисячі фермерів вирощують пшеницю, яку купують тисячі покупців для виробництва борошна чи інших продуктів. Жоден фермер або покупець не може істотно вплинути на ціну пшениці.

Безліч інших ринків можна розглядати як ринки з чистою конкуренцією. Наприклад, світовий ринок міді нараховує кілька десятків основних виробників. Цього досить, щоб проігнорувати зміну ціни в разі, якщо один із виробників вийде з бізнесу. Це стосується також безлічі ринків мінеральних і природних ресурсів, таких як ринок вугілля, заліза, олова чи лісоматеріалів.

Ринок надає можливість здійснювати операції між покупцями та продавцями. Значна кількість товару продаються за окремими цінами. На ринку з чистою конкуренцією звичайно переважає єдина ціна - ринкова.

На тому, що не є ринком з чистою конкуренцією, фірми можуть встановлювати різні ціни на однотипний товар, оскільки одна фірма намагається "відвоювати"покупців у своїх конкурентів або покупці віддають перевагу певній марці товару, що дає змогу деяким фірмам встановлювати ціни вищі, ніж у їхніх конкурентів. Наприклад, в одному супермаркеті дві марки прального порошку можуть продаватися за різними цінами. Або ж у двох супермаркетах одного міста та ж марка порошку може продаватися за різними цінами. У тих випадках, коли ми звертаємося до ринкової ціни, маємо на увазі середню ціну різних марок товару у різних супермаркетах.

Ринкова ціна більшості товару змінюється протягом певного часу, і для багатьох його видів її розмір може значно коливатися. Це особливо стосується товару, що продається на ринку з конкуренцією. Ринок акцій, наприклад, є висококонкурентним: за акціями будь-якої з корпорацій стоїть багато покупців та продавців. Ті, хто вкладає кошти в ринок акцій, знають, що ціна певної акції змінюється кожної хвилини і може істотно зрости або знизитися протягом одного дня. Ціна на такий товар, як пшениця, бобові, кава, нафта, золото, срібло або лісоматеріали, може також значно змінитися протягом дня або тижня. Тому на сучасному етапі розвитку математичної освіти вивчення математичних основ економіки є більш ніж необхідним.

Запропонований курс лекцій написаний на основі книг [6], [10],[11],[17] - [24] і складається з чотирьох розділів: теорія споживання, теорія фірми, теорія загальної рівноваги та теорії росту. Для вивчення окремих його параграфів необхідна фундаментальна математична підготовка. З цією ціллю введено розділ - математичний додаток. Водночас значна частина матеріалу буде цілком зрозумілою для читачів, знайомих лише з основами диференціального та інтегрального числення, лінійної алгебри, елементами опуклого аналізу та методами оптимізації. Курс насичено ілюстрованим матеріалом, котрий безумовно сприятиме кращому засвоєнню матеріалу. Всі рисунки підготував асистент Г.Є. Грабчак, за що автори тексту цих лекцій висловлює йому щиру вдячність.

Вступ

Нашою задачею є строга побудова формалізованої поведінки споживача. По–перше, ми маємо вміти дати формальне зображення людських потреб, які відображають різну ступінь їх задоволення. Це дасть змогу пояснити вибір, який здійснюють споживачі, що представляють собою окремі індивідууми або сім'ї. По–друге, ми маємо вивчити, як будуть діяти споживачі в установленій інституціональній структурі для всієї економіки при розгляді загальної рівноваги.

Ведемо припущення важливої економічної моделі поведінки споживача. За цими припущеннями про перевагу і байдужість споживача у виборі різних наборів товарів буде розвинено поняття функції попиту споживача та ринкової функції попиту, на яких грунтується загальний аналіз попиту. Теорія споживчого вибору використовує припущення, що споживач оптимізує вибір товару при обмеженні доходу.

Ринковий попит формується на основі рішень, які приймають окремі особи, що керуються власними потребами і наявними засобами. Для того, щоб розподілити свої доходи між різними товарами, треба мати деяку спільну основу для їх зіставлення. У кінці XIX ст. економісти за таку основу прийняли корисність.

Термін "корисність" ввів англійський філософ І. Бентам.[1] Згідно з Бентамом максимізація корисності є основним психологічним принципом поведінки людей в їхньому бажанні уникнути страждань, збільшити задоволення або щастя.

Економісти, прийнявши утилітарну доктрину корисності, змогли створити теорію споживчої поведінки (теорію споживання), яка базувалась на гіпотезі про порівняння корисності

[1] Бентам И. Введение в основания нравственности и законодательства// Изб. соч. СПб.,1867-Т.1.

різних благ і послуг. Було прийнято, що при заданих цінах споживач намагається так розподілити свій дохід на купівлю різних товарів, щоб максимізувати очікуване задоволення або корисніть від їх споживання, керуючись власними смаками та поглядами.

Отже, визначена корисність має особистий, суб'єктивний характер. Наприклад, курець оцінює корисність цигарок високо, незважаючи на те, що куріння шкодить його здоров'ю і він про це знає.

Для максимізації очікуваної корисності споживач повинен порівнювати, зіставляти корисності різних товарів та їхніх наборів. Відомі два основні підходи до розв'язання цієї проблеми - кількісний і порядковий. *Кількісну теорію* корисності, в основу якої покладено гіпотезу про можливість *порівнювати* корисності різних благ, запропонували У.Джевонс, К.Менгер, Л.Вальрас, А.Маршал. Альтернативну теорію - *порядкову теорію* корисності, яка не тільки не допускає можливості та необхідності порівнювати корисності товарів і послуг для пояснення поведінки споживачів, а й взагалі будь-якого згадування про корисність, запропонували Ф.Еджуорт, В.Парето, І.Фішер. У 30-х роках XX ст. ця теорія в працях Р.Аллена і Дж.Хікса отримала завершену форму, стала загальноприйнятою і поширеною, незважаючи на виникнення так званих нових теорій .[2] Ми почнемо розгляд теорії споживання з порядкової теорії корисності.

[2]Хикс Дж., Аллен З. Пересмотр теории ценности// Вехи экономической мысли. СПб.,1993.-Вип.1

Список основних позначень

Математика

$\square$	кінець доведення теореми
$\blacktriangle$	кінець прикладу
$a \Longrightarrow b$	імплікація з посиланням a та висновком b
$a \Longleftrightarrow b$	еквівалентність висловлень a та b
$a \in X$	a є елемент множини X
$A \cup B$	об'єднання множин A і B
$A \cap B$	перетин множин A і B
$A \subset B$	множина A міститься в множині B
$\varnothing$	порожня множина
$\{a \in X : *\}$	підмножина в X елементи якої задовольняють умову $*$
$f : A \to B$	відображення f множини A в множину B
$a \to f(a)$	відображення f яке точці a ставить у відповідність множину $f(a)$
$f(X)$	образ множини X при відображені f
$f \circ g$	композиція функцій f і g
∂X	межа множини X
$\operatorname{int} X$	внутрішність множини X
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел
$\max, \min$	максимум, мінімум
$\sum\limits_{i \in I}, \sum\limits_{i=1}^{L}$	символ сумування за індексом $i \in I$ або від 1 до L
$\mathbb{R}^L$	L - вимірний Евклідовий простір
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix}$	вектор із $\mathbb{R}^L$
x_i	i-та координата вектора x

$x \geqslant y$	$x_i \geqslant y_i$ для всіх $i = 1, \ldots, L$
$x > y$	$x \geqslant y$ і $x \neq y$
$x \gg y$	$x_i > y_i$ для всіх $i = 1, \ldots, L$
$\mathbb{R}^L_+$	невід'ємний ортант в $\mathbb{R}^L$; тобто $\{x \in \mathbb{R}^L : x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}^L_{++}$	строго додатний ортант в $\mathbb{R}^L$; тобто $\{x \in \mathbb{R}^L : x \gg 0\}$
x^τ	вектор транспонований до x
$x \cdot y$	скалярний добуток векторів x і y
Av	добуток матриць A і v
$v \cdot Av$	квадратична форма породжена матрицею A
$\|x\|$	норма вектора x
$\nabla f(x)$	градієнт функції $f : X \to \mathbb{R}$ в точці x
C^r, $r \geqslant 0$	простір r раз неперервно диференційовних функцій
$\mathrm{D}f(x)$	похідна функції $f : X \to \mathbb{R}^L$ в точці x
$\mathrm{D}_y f(y,z)$ $(\mathrm{D}_z f(y,z))$	частинна похідна за зміною y (за z) відображення $y \to f(y,z)$ $(z \to f(y,z))$
$\mathrm{D}^2 f$	друга похідна функції f

Економіка

l	номер товару
$\mathbb{R}^L$	простір товарів
p	вектор цін
X	множина доступних споживчих наборів зазвичай одна з множин $\mathbb{R}^L_+$, $\mathbb{R}^L_{++}$
w	дохід споживача
$B_{p,\mathrm{w}}$	бюджетна множина
$x(p, \mathrm{w})$	функція попиту Вальраса

$h(p, u)$	функція попиту Хікса
$S(p, \mathrm{w})$	матриця Слуцького
$u(\cdot)$	функція корисності
$v(\cdot)$	непряма функція корисності
$e(\cdot)$	функція видатків
$\mathrm{MU}(x)$	вектор граничних корисностей
$\succsim$	відношення переваги
$\succ$, $\sim$	відношення строгої переваги і відношення еквівалентності породжене $\succsim$

ТЕОРІЯ СПОЖИВАННЯ

Розділ 1

Перевага і вибір

1.1 Відношення переваги: основні властивості

Порядковий підхід до аналізу корисності та попиту є сучаснішим, грунтується на менш жорстких припущеннях ніж кількісний. Від споживача не вимагають вміти вимірювати корисність певного товару в деяких одиницях виміру. Достатньо, щоб споживач міг впорядкувати всі можливі набори за їх "перевагою". В сучасній економічній теорії цінностей прийнято вважати, що для прогнозування поведінки споживача найліпше використовувати припущення про наявність у нього системи переваг стосовно споживчих благ.

Під товаром розумітимемо деякі блага або послуги, які надійшли в продаж у визначений час, у визначеному місці. На підставі цього можемо стверджувати, що зерно, яке постачали в Одесу 1998 р., та зерно, яке доставляли до Києва у 1999 р., розглядається як окремий товар. Вважатимемо, що перелік економічних товарів і учасників економічної системи для певного суспільства визначено. Припускаємо, що число наявних економічних товарів скінченне і дорівнює L (пронумеровані $l = 1, \ldots, L$). Припустимо також, що всі товари мають властивість довільної подільності, тобто можна купити будь-яку його кількість. Кількість кожного з них, куплених споживачем, описується споживчим набором (вектором) $x = (x_1, \ldots, x_L)^\tau$, де x_i – кількість товару i, і розглядається як точка простору $\mathbb{R}^L$, який назвемо *простором товарів.*

Формально *множину наборів споживчих благ* X визначимо як підмножину простору товарів $\mathbb{R}^L$, елементами якої є всі уявні набори x споживчих благ (товарів), які фізично доступні споживачеві в розглядуваному середовищі.

У теорії споживання суб'єктивна перевага споживача на множині наборів споживчих благ формалізується як бінарне відношення $\succsim$ на множині X, яке задовольняє такі аксіоми:

(A$_1$) (рефлексивності) для кожного набору $x \in X$, $x \succsim x$;

(A$_2$) (транзитивності) для будь-яких наборів $x, y, z \in X$, якщо $x \succsim y$ і $y \succsim z$, то $x \succsim z$;

(A$_3$) (повноти) для довільних двох наборів $x, y \in X$, ми маємо або $x \succsim y$ або $y \succsim x$.

Відношення $x \succsim y$ для $x, y \in X$ означає, що споживач надає перевагу набору x перед набором y, або набори рівноцінні для споживача. Аксіома (A$_3$) не виключає можливості того, що одночасно $x \succsim y$ і $y \succsim x$. Зауважимо також, що аксіома (A$_1$) є наслідком аксіоми (A$_3$).

Означення 1.1.1. Бінарне відношення $\succsim$ на X, яке задовольняє аксіоми (A$_1$), (A$_2$), (A$_3$) називається ***відношенням переваги*** на множині наборів споживчих благ X; пара $(X, \succsim)$ називається полем переваг.

Приклад 1.1.1. Невід'ємний ортант $\mathbb{R}_+^L$ простору $\mathbb{R}^L$ є найпростішим прикладом множини споживчих наборів, які особливо часто розглядають в економічно-математичній літературі.

Нехай $X = \mathbb{R}_+^2$. Прикладом відношення переваги є відношення визначене наступним чином: з двох наборів (x_1, x_2) і (y_1, y_2) споживач віддає перевагу тому, в якого більша кількість першого товару, і тому, у якого більша кількість другого товару, якщо кількості першого однакові. ▲

Нехай задано поле переваг $(X, \succsim)$. Введемо додаткові бінарні відношення, які пов'язані з відношенням переваги $\succsim$.

Означення 1.1.2. Нехай $x, y \in X$. Відношення строгої переваги $\succ$ визначимо так: $x \succ y \iff x \succsim y$, а відношення $y \succsim x$ не виконується.

Відношення байдужості $\sim$ визначимо як $x \sim y \iff x \succsim y$ і $y \succsim x$.

Зауважимо, що аксіому (A_3), аксіому повної впорядкованості, можна трактувати так: споживач може впорядкувати всі споживчі набори товарів за допомогою відношення строгої переваги $\succ$ і відношення байдужості $\sim$. Це означає, що для кожної пари споживчих наборів x і y споживач може зазначити таке: або $x \succ y$ (x має перевагу над y), або $y \succ x$ (y має перевагу над x), або $x \sim y$ (x і y рівноцінні).

Очевидно, що ця аксіома не дуже жорстка. Вона лише виключає можливість відповіді "не знаю"на запитання: "Якому з двох споживчих наборів Ви надаєте перевагу?".

Наведемо очевидне твердження.

Лема 1.1.1. *Нехай задано поле переваг $(X, \succsim)$, тоді:*

(i) $\succ$ – *іррефлексивне (для жодного $x \in X$ не виконується $x \succ x$) і транзитивне (якщо $x \succ y$ і $y \succ z$, то $x \succ z$, $x, y, z \in X$);*

(ii) $\sim$ – *рефлексивне ($x \sim x$ для кожного $x \in X$), транзитивне (якщо $x \sim y$ і $y \sim z$, то $x \sim z$, $x, y, z \in X$), симетричне (якщо $x \sim y$, то $y \sim x$);*

(iii) *якщо $x \succ y \succsim z$, то $x \succ z$, $x, y, z \in X$.*

Відношення байдужості $\sim$ задовольняє всі три аксіоми, які визначають відношення еквівалентності на X. Отже, відношення $\sim$ індукує розбиття елементів множини X на класи еквівалентності, які назвемо *множинами* або *поверхнями байдужості*, кожна з яких складається з усіх наборів, які байдужі заданому набору x: $E_x = \{y \in X : y \sim x\}$.

Поверхні байдужості часто використовують для графічного зображення відношення $\succsim$.

Приклад 1.1.2 (Шеплі). "Джин і тонік". На ринку є два товари – джин x_1 і тонік x_2. Кожний учасник ринку має деяке відношення переваги, яке описується кривими байдужості E_x, які зображено на рис. 1.1.1. Класи еквівалентності, з віддаленням відповідних їм кривих байдужості від початку координат, відповідають вищим рівням переваги. Щоб зрозуміти це графічне зображення, припустимо, що деякий споживач може отримати лише одну склянку напою, а частку джину і тоніку в ньому визначає сам споживач. Іншими словами, ми розглядаємо множину $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 + x_2 = 1\}$. Ця множина

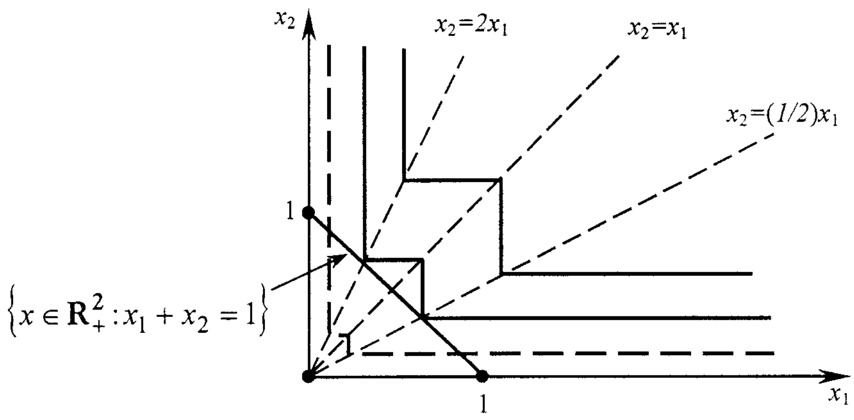


Рис. 1.1.1.

перетинається поверхнями байдужості вищих рівнів, коли відношення $\dfrac{x_1}{x_2}$ близьке до $\dfrac{1}{2}$ або до 2. Це означає, що споживач вибирає напої, які містять компоненти в цілком визначених пропорціях, а саме 1 : 2 або 2 : 1; суміш "половина на половину" він відкидає і, ймовірно, повністю відмовиться від напою, ніж буде пити "нерозбавлене" (чи то чистий джин, чи то чистий тонік). ▲

Зауваження 1.1.1. Елементи множини X, які з погляду математика є векторами простору $\mathbb{R}^L$, економісти часто називають партіями товарів. З погляду економіста, наприклад, сталь виплавлена в цьому році загалом не та сама, яку виплавлятимуть у наступному році. Товари споживчих наборів можна "датувати", а можна і не "датувати". Якщо товари не датовані, то споживчий набір (елемент множини X) має зміст "меню споживання" протягом одного періоду, наприклад, за рік, тобто зображає собою величину "потокового" типу. Якщо ж деякі споживчі набори датовані, тобто мають часову відмітку, яка простягається більше ніж на один період, то відповідне поле переваг $(X, \succsim)$ описує перевагу споживача серед різних варіантів "потоків споживання", які охоплюють одночасно декілька періодів. Крім того, за допомогою поля переваг можна описати випадки, коли в систему включені різні товари довгострокового користування, наприклад, телевізори, меблі, квартири тощо, які споживають протягом декількох періодів.

Зауваження 1.1.2. Описуючи поведінку споживача, вважатимемо, що додатні компоненти x_l споживчого набору $x = (x_1, \ldots, x_L)^\tau$ означають, що споживач отримав x_l одиниць товару l у своє користування, а від'ємні компоненти означають, що він віддав відповідну кількість l–го продукту.

Здебільшого перевага споживача має властивість неперервності. Неперервність відношення переваги означає таке: якщо споживач надає перевагу набору x^0 перед набором y^0, то він надасть перевагу набору x перед набором y, якщо набори x і y близькі відповідно до x^0, y^0.

Означення 1.1.3. Нехай $(X, \succsim)$ - поле переваг. Відношення переваги $\succsim$ називається неперервним, якщо для кожної пари послідовностей $\{(x^n, y^n)\}_{n=1}^{\infty}$ таких, що $x^n \succsim y^n$ для всіх n, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ і $y = \lim\limits_{n\to\infty} y^n$, ми маємо $x \succsim y$.

Легко бачити, що означення неперервності відношення переваги $\succsim$ еквівалентне такому означенню.

Означення 1.1.4. Відношення переваги $\succsim$ на X називається неперервним, якщо для кожного набору $x \in X$ множини $G_x = \{y \in X : x \succsim y\}$, $F_x = \{y \in X : y \succsim x\}$ замкнуті.

Приклад 1.1.3. Прикладом відношення переваги, яке не є неперервним, є *лексикографічне відношення,* яке визначаємо так:

$$x \succ y, \qquad \text{де} \quad x = (x_1, \dots, x_L)^\tau \quad \text{і} \quad y = (y_1, \dots, y_L)^\tau,$$
$$\text{якщо} \qquad x_1 > y_1,$$
$$\text{або} \quad x_1 = y_1 \quad \text{і} \quad x_2 > y_2,$$
$$\text{або} \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots, x_p = y_p \quad \text{і} \quad x_{p+1} > y_{p+1}.$$

Нехай $L = 2$. Розглянемо послідовності $x^n = (\frac{1}{n}, 0)^\tau$ і $y^n = (0, 1)^\tau$. Для всіх n, $x^n \succ y^n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y^n = (0, 1) \succ (0, 0) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$. Звідки випливає, що лексикографічне відношення переваги не є неперервним. ▲

Означення 1.1.5. Нехай $(X, \succsim)$ - поле переваг. Відношення переваги $\succsim$ називається монотонним, якщо $x, y \in X$ і $y \gg x$, тоді $y \succ x$.

Відношення переваги є строго монотонним, якщо $y \geqslant x$, $y \neq x$, то маємо $y \succ x$.

Економісти вважають, що такий зв'язок між відношеннями $\succsim$ і $\gg$ узгоджується з поведінкою споживача в багатьох ситуаціях. Припущення про монотонність за своїм змістом означає, що всі товари потрібні, чим їх більше, тим краще. Здавалося б, коли йдеться про матеріальні товари, то це природно, проте не завжди. Наприклад, існує товар "праця споживача" , який прагне звести його до мінімуму.

Означення 1.1.6. Нехай $(X, \succsim)$ - поле переваг. Відношення переваги $\succsim$ називається локально ненасичуваним, якщо для кожного $x \in X$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує $y \in X$ таке, що $\| y - x \| \leqslant \varepsilon$ і $y \succ x$.

Наведемо очевидне твердження.

Лема 1.1.2. *Нехай* $(X, \succsim)$ *– поле переваг.*

1. *Якщо відношення переваги є строго монотонним, то воно монотонне.*
2. *Якщо відношення переваги є монотонним, то воно локально ненасичуване.*

Часто властивість строгої монотонності відношення переваги розглядають як аксіому ненасичуваності споживача: якщо набір x містить не меншу кількість кожного товару, а одного з них більше, ніж набір y, то $x \succ y$.

Отже, припускаємо, що збільшення споживання будь-якого товару при фіксованих об'ємах інших товарів покращує становище споживача.

Іншим традиційним припущенням в економіці стосовно споживчих переваг (крім неперервності) є опуклість.

Означення 1.1.7. Нехай X - опукла множина. Відношення переваги $\succsim$ на X називається опуклим, якщо для кожного набору $x \in X$ множина $F_x = \{y \in X : y \succsim x\}$ опукла, тобто, якщо $y \succsim x$ і $z \succsim x$, то $\alpha y + (1 - \alpha) z \succsim x$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$.

Відношення переваги $\succsim$ на X називається строго опуклим, якщо для кожного набору x множина F_x строго опукла, тобто справджується умова

$$y \succsim x, \ \ z \succsim x \quad \text{і} \quad y \neq z \implies \alpha y + (1-\alpha) z \succ x \qquad (1.1.1)$$

для всіх $\alpha \in (0,1)$.

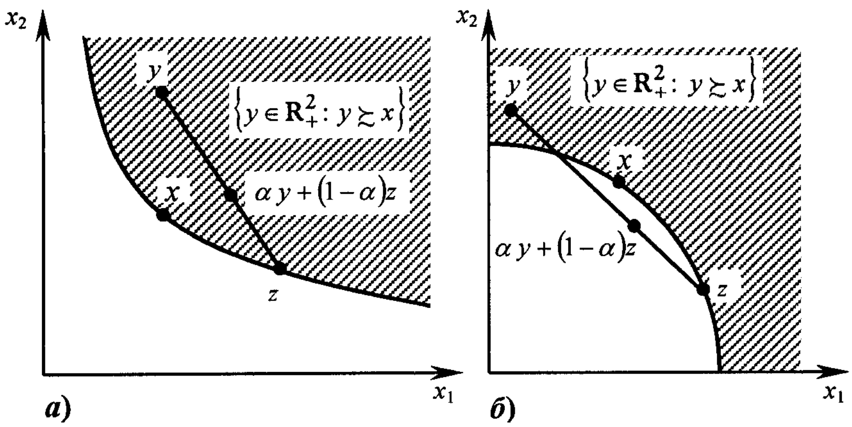


Рис. 1.1.2. Опукле (а) та неопукле (б) відношення переваги

Означення 1.1.8. Поле переваг $(X, \succsim)$ називається (строго) опуклим, якщо множина X опукла і відношення переваги $\succsim$ (строго) опукле.

Приклад 1.1.4. Лексикографічне відношення переваги є строго монотонним і строго опуклим. ▲

Опуклість – це геометрична властивість, яка чітко простежується, коли розглядають поверхні байдужості. Опуклість відношення переваги $\succsim$ свідчить, що поверхні байдужості повернуті ввігнутістю вверх, тобто обмежують опуклу область. Строга опуклість цього відношення переваги свідчить, що жодна з цих поверхонь не містить відрізка прямої.

Приклад 1.1.5. *Відношення переваги Леонтьєва:* $x'', x' \in \mathbb{R}^2_+$, $x'' \succsim x'$ тоді і лише тоді, коли $\min\{x''_1, x''_2\} \geqslant \min\{x'_1, x'_2\}$, є монотонним і опуклим. Відношення переваги з прикладу 1.1.2 не є опуклим. ▲

Легко бачити, якщо поле переваг $(X, \succsim)$ – опукле, тоді правильне твердження:

> якщо $x \sim y$, $x, y \in X$, то $\alpha x + \beta y \succsim x \sim y$ для всіх $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$.

Переходячи від споживчого набору $x = (x_1, \ldots, x_L)^\tau$ до зваженої комбінації двох таких наборів $\alpha x + \beta y$, споживач відмовляється від частини споживчих товарів βx, отримуючи взамін βy. Отже, сформульоване твердження засвідчує, якщо два набори байдужі один до одного, то будь-які їхні відповідні частини взаємозамінні без зниження рівня споживання. Можна зауважити, що причина того, що поєднання набору αx з набором βy є не гіршим, ніж поєднання αx з βx, полягає у відсутності дії взаємного погіршення частин набору один на одного. Принцип відсутності дії взаємного погіршення частин комбінованого меню один на одного – це основне припущення економічного напряму, а саме опуклість полів переваги в нормальних ситуаціях.

1.2 Порядкові функції корисності. Теорема Дебре

Кількісний підхід до аналізу корисності грунтується на уяві про можливості вимірювання різних товарів у гіпотетичних одиницях корисності – ютилах (від анг. utility – корисність).

Наприклад, споживач може сказати, що споживання 1 яблука дає йому задоволення на 15 ютилів, щоденне споживання 2 яблук – 25 ютилів і т.д.

Варто зауважити, що кількісні оцінки корисності того чи іншого товару або набору товарів має лише індивідуальний (суб'єктивний) характер. Кількісний підхід не дає змоги об'єктивно вимірювати корисність певного товару в ютилах. У кількісній теорії корисності припускається, що споживач може дати кількісну оцінку в ютилах корисності будь-якого споживчого набору. Формально це можна записати у вигляді *функції корисності*

$$u = u(x_1, \dots, x_L),$$

де u – загальна корисність від спожитого набору x.

Означення 1.2.1. Нехай $(X, \succsim)$ - поле переваг. Функція $u : X \to \mathbb{R}$ називається ***функцією корисності***, що зображає відношення переваги $\succsim$, якщо

$$\text{для всіх } x, y \in X, \quad x \succsim y \iff u(x) \geqslant u(y). \tag{1.2.1}$$

Отже, функція корисності (індикатор поля переваг) дає нам числове зображення порядкової структури поля переваг.

Лема 1.2.1. *Нехай функція корисності $u(\cdot)$ зображає відношення переваги $\succsim$, тоді поверхні рівнів функції корисності* *є поверхнями байдужості для відношення переваги. Тобто, для будь-якого* $x \in X$

$$\{\, y \in X : u(y) = u(x) \,\} = \{\, y \in X : y \sim x \,\}.$$

Доведення. Рівняння $u(x) = u(y)$ засвідчує, що одночасно $u(x) \geqslant u(y)$ і $u(x) \leqslant u(y)$. Тоді згідно з означенням функції корисності маємо $x \succsim y$ і $y \succsim x$, тобто $x \sim y$. □

Лема 1.2.2. *Нехай* $u(\cdot)$ *функція корисності для поля переваг* $(X, \succsim)$ *і* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *строго зростаюча функція, тоді суперпозиція* $f(u(x))$ *також є функцією корисності для поля переваг* $(X, \succsim)$.

Доведення. Оскільки

$$(f(u(x)) \geqslant f(u(y))) \Longleftrightarrow (u(x) \geqslant u(y)) \Longleftrightarrow (x \succsim y),$$

то лема доведена. □

Правильне зворотне твердження.

Лема 1.2.3. *Нехай* $u(\cdot)$ *і* $v(\cdot)$ *функції корисності для поля переваг* $(X, \succsim)$, *тоді існує строго зростаюча функція* $f(\cdot)$, *визначена на* $u(X)$, *що* $v(x) = f(u(x))$, $x \in X$.

Доведення. Шукану функцію $f(\cdot)$ можна побудувати так. Приймемо $f(t) = v(x)$ для $t \in u(X)$ і для будь-якого x з множини $u^{-1}(t) = \{x : u(x) = t\}$. Значення $f(t)$ буде визначено однозначно, оскільки $u^{-1}(t)$ поверхня байдужості для $\succsim$. Отже, $v(x) = v(y)$, для всіх $x, y \in u^{-1}(t)$. Далі функція $f(\cdot)$ строго зростаюча, бо якщо $s, t \in u(X)$ і $s > t$, то $x \succ y$ для будь-яких $x \in u^{-1}(s)$, $y \in u^{-1}(t)$ так, що $f(s) = v(x) > v(y) = f(t)$. Нарешті, співвідношення $v(x) = f(u(x))$, $x \in X$ виконується за побудовою функції $f(\cdot)$. □

Із наведених міркувань випливає таке: коли для будь-якого поля переваг існує хоча б одна функція корисності, то існує й безліч функцій корисності, які отримують одну з одної за допомогою строго монотонно зростаючих перетворень; функція корисності для заданого поля переваг єдина з точністю до всіляких таких перетворень. Наприклад, функція корисності Коба-Дугласа $u(x) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ і функція $v(x) = \alpha \ln x_1 + (1-\alpha) \ln x_2$, яка є її монотонною трансформацією, зображають одне і теж відношення переваги. Зауважимо далі, що лінійні перетворення $f(t) = \alpha t + \beta$ з додатними коефіцієнтами α утворюють підмножину множини всіх строго зростаючих скалярних перетворень. Якщо вважати дві функції корисності поля переваг еквівалентними, коли вони пов'язані між собою лінійним перетворенням зазначеного типу, то всі функції корисності для заданого поля переваг розбиваються на класи еквівалентності. Це означає, що про вимірність (у числах) корисності можна говорити, коли існує така властивість поля переваг, яка зберігається при всіх лінійних строго зростаючих перетвореннях індикаторів переваг (функцій корисності), за допомогою якої виділяється єдиний клас серед усіх класів еквівалентності індикаторів переваг. У випадку вимірної корисності функція корисності визначається єдиним чином з точністю до лінійних перетворень так, що для чисельного вимірювання відношення переваги потрібно довільно обрати одиницю масштабу та початок відліку.

Поле переваг не для всіх випадків можна описати за допомогою функцій корисності. Умови, за яких поле переваг має функцію корисності, сформульовані в праці Ж.Дебре. [1]

Теорема 1.2.1 (Дебре). *Нехай множина X є зв'язною, а відношення переваги $\succsim$ неперервним, тоді існує неперервна функція корисності для поля переваг $(X, \succsim)$.*

Доведення. Доведення теореми Дебре загалом громіздке. Тому ми обмежимося доведенням цієї теореми для випадку, коли $X = \mathbb{R}_+^L$ і відношення переваги $\succsim$ володіє властивістю монотонності. Інше доведення цієї теореми можна знайти в праці І.Розенмюллера.[2] Позначимо через Z діагональний промінь в $\mathbb{R}_+^L$, тобто $Z = \{\, z \in \mathbb{R}_+^L : z = \alpha e,\ e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}_+^L,\ \alpha \in \mathbb{R}_+ \}$. Нехай x – довільний споживчий набір, $x \in \mathbb{R}_+^L$. Тоді за властивістю монотонності $\succsim$ одержуємо, що $x \succsim 0$. Зауважимо, що для кожного $\bar{\alpha}$ такого, що $\bar{\alpha} e \gg x$, ми маємо $\bar{\alpha} e \succ x$.

Нехай $A^+ = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha e \succsim x\}$, $A^- = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ : x \succsim \alpha e\}$. Легко бачити, що A^+, A^- непорожні та замкнуті (за властивістю неперервності $\succsim$) множини. З аксіоми повноти $\succsim$ випливає $\mathbb{R}_+ \subset (A^+ \cup A^-)$. Оскільки $\mathbb{R}_+$ зв'язна замкнута множина, то $A^+ \cap A^- \neq \varnothing$. Отже, існує $\alpha = \alpha(x) \in [0, \bar{\alpha}] : \alpha(x) e \sim x$ і за властивістю монотонності $\succsim$ число $\alpha(x)$ єдине.

Функцію корисності $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ визначимо так: $u(x) = \alpha(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}_+^L$. Перевіримо правильність співвідношення (1.2.1). Припустимо, що $\alpha(x) \geqslant \alpha(y)$, тоді за властивіс-

[1] Debreu G. Theory of Value. New York,1959.

[2] Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. М.,1974

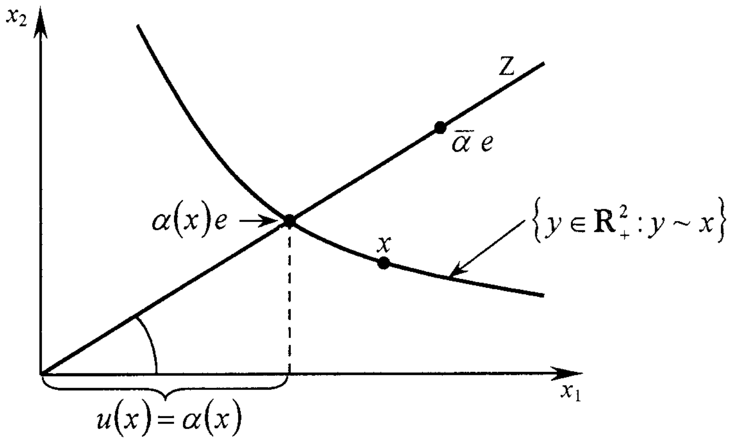


Рис. 1.2.3. Конструкція функції корисності

тю монотонності $\succsim$ маємо $\alpha(x)e \succsim \alpha(y)e$. Оскільки $x \sim \alpha(x)e$ і $y \sim \alpha(y)e$, то $x \succsim y$. Навпаки, нехай $x \succsim y$, тоді $\alpha(x)e \sim x \succsim y \sim \alpha(y)e$ і за монотонністю $\succsim$ маємо $\alpha(x) \geqslant \alpha(y)$. Отже, $\alpha(x) \geqslant \alpha(y) \Leftrightarrow x \succsim y$.

Залишається перевірити, що функція $u(\cdot)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}^L_+$, тобто для кожної послідовності $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до x, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(x^n) = \alpha(x)$. Отже, розглянемо послідовність $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, яка збігається до x. За властивістю монотонності відношення переваги $\succsim$ маємо: для кожного $\varepsilon > 0$ і для кожного $\acute{x} \in \mathbb{R}^L_+$ такого, що $\| \acute{x} - x \| \leqslant \varepsilon$ випливає $\alpha(\acute{x}) \in [\alpha_0, \alpha_1]$.

Оскільки $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до x, то існує номер N такий, що $\alpha(x^n) \in [\alpha_0, \alpha_1]$ для всіх $n \geqslant N$. Отож, із послідовності $\{\alpha(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{\alpha(x^{m(n)})\}_{n=1}^{\infty}$. Залишилось показати, що кожна збіжна підпослідовність $\{\alpha(x^{m(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $\alpha(x)$. Припустимо протилежне, що $\{\alpha(x^{m(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $\acute{\alpha} \neq \alpha(x)$. Нехай $\acute{\alpha} > \alpha(x)$. Тоді за властивістю монотонності відношення переваги $\succsim$ маємо $\acute{\alpha}e \succ \alpha(x)e$. Приймемо $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}[\acute{\alpha} + \alpha(x)]$. Тоді $\hat{\alpha}e \in Z$ і перебуває поміж точок $\acute{\alpha}e$ і $\alpha(x)e$ та $\hat{\alpha}e \succ \alpha(x)e$. Оскільки $\alpha(x^{m(n)}) \to \acute{\alpha} > \hat{\alpha}$, то існує $\bar{N}$ таке, що $\alpha(x^{m(n)}) > \hat{\alpha}$ для всіх $n > \bar{N}$.

Отож, для всіх $n > \bar{N}$, $x^{m(n)} \sim \alpha(x^{m(n)})e \succ \hat{\alpha}e$. Тоді за властивістю неперервності випливає, що $x \succsim \hat{\alpha}e$. Оскільки $x \sim \alpha(x)e$, то $\alpha(x)e \succsim \hat{\alpha}e$ і $\alpha(x) \geqslant \hat{\alpha}$, що суперечить припущенню $\acute{\alpha} > \alpha(x)$. Аналогічно розглядається випадок $\acute{\alpha} < \alpha(x)$.

Отже, всі збіжні підпослідовності послідовності $\{\alpha(x^n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігаються до $\alpha(x)$, тобто функція $u(\cdot)$ неперервна. □

Зауваження 1.2.1. Згідно з теоремою Дебре для неперервного відношення переваги $\succsim$ визначеного на зв'язній множині X існує неперервна функція корисності $u : X \to \mathbb{R}$, яка його зображає. Навпаки, якщо функція корисності $u : X \to \mathbb{R}$ неперервна, то відношення переваги, що нею зображається, є неперервним.

Справді, множина $\{y \in X : y \succsim x\}$ співпадає з множиною $\{y \in X : u(y) \geqslant u(x)\}$ і є замкнутою, якщо функція $u(\cdot)$ неперервна. Те ж саме стосується множини $\{z \in X : x \succsim z\}$.

Зауваження 1.2.2. Функція корисності, яка зображає неперервне відношення переваги, не завжди диференційовна. Наприклад, функція корисності $u(x) = \min\{x_1, x_2\}$, яка зображає відношення переваги Леонтьєва не є диференційовною.

Зауваження 1.2.3. У термінах функції корисності властивість монотоності $\succsim$ означає, що функція корисності $u(\cdot)$, яка його зображає, зростає: $u(x) > u(y)$, якщо $x \gg y$.

Розглянемо властивість опуклості (строгої опуклості) відношення переваги $\succsim$ в термінах функції корисності $u(\cdot)$.

Лема 1.2.4. *Нехай $(X, \succsim)$ – поле переваг і X є опуклою множиною. Відношення переваги $\succsim$ є опуклим тоді і лише тоді, коли функція корисності $u(\cdot)$, що зображає це відношення, квазіввігнута, тобто множини вигляду $S_\beta = \{y \in X : u(y) \geqslant \beta\}$ для всіх $\beta \in \mathbb{R}$ опуклі, що еквівалентно до виконання нерівності $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \min\{u(x), u(y)\}$ для всіх $x, y \in X$ і для кожного $\alpha \in [0,1]$.*

Відношення переваги $\succsim$ строго опукле тоді і тільки тоді, коли $u(\cdot)$ – строго квазіввігнута, тобто $u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \min\{u(x), u(y)\}$ для всіх $x, y \in X$, $x \neq y$ і для кожного $\alpha \in (0,1)$.

Доведення. Нехай відношення переваги $\succsim$ є опуклим і β довільне число з $\mathbb{R}$. Розглянемо множину S_β. Тоді можливі два випадки: а) $S_\beta = \varnothing$ або $S_\beta = X$ – такі множини опуклі; б) $\beta \in u(X)$, тобто існує споживчий набір $x \in X$ такий, що $u(x) = \beta$. Нехай $y, z \in S_\beta$, тоді згідно з означенням функції корисності $u(\cdot)$ маємо, що $y \succsim x$, $z \succsim x$. Проте $\alpha y + (1-\alpha)z \succsim x$

або $u(\alpha y + (1-\alpha)z) \geqslant u(x)$, тобто $\alpha y + (1-\alpha)z \in S_\beta$ для всіх $\alpha \in [0,1]$, що й засвідчує опуклість S_β.

Навпаки, якщо множина S_β, $\beta = u(x)$ для будь-якого $x \in X$, опукла, то з умови $\alpha y + (1-\alpha)z \in S_\beta$ для всіх $\alpha \in [0,1]$ випливає, що $u(\alpha y + (1-\alpha)z) \geqslant u(x)$. Звідки $\alpha y + (1-\alpha)z \succsim x$ для всіх $\alpha \in [0,1]$, тобто відношення переваги опукле. Щодо другого твердження цієї леми, то його можна одержати безпосереднім перекладом на мову функції корисності співвідношення (1.1.1). $\square$

Нехай множина наборів споживчих благ $X = \mathbb{R}^L_+$.

Припустимо, що функція корисності $u(\cdot)$, яка зображає відношення переваги $\succsim$, диференційовна.

Означення 1.2.2. Вектор

$$\begin{aligned}\mathrm{MU}(x) &= \nabla u(x)\\ &= \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_L}\right) = (\,\mathrm{MU}_1(x), \ldots, \mathrm{MU}_L(x)\,)\end{aligned}$$

називається вектором граничних корисностей, а $\mathrm{MU}_l(x)$ - граничною корисністю товару l (MU-marginal utiliti).

Гранична корисність товару – це приріст загальної корисності споживчого набору при збільшенні обсягу споживання цього товару на одну одиницю.

Зауважимо, що у разі виконання аксіоми ненасичуваності (строгої монотонності $\succsim$) маємо $\mathrm{MU}(x) \gg 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^L_+$, тобто для будь-якої точки простору товарів $\mathbb{R}^L_+$ збільшення споживання будь-якого товару при незмінному об'ємі споживання решти товарів – загальна корисність, яку отримує споживач, зростає: $\mathrm{MU}_l(x) > 0$ для всіх $l = 1, \ldots, L$.

Зауважимо, що квазіввігнуті функції досить незручні в роботі; вони утворюють занадто великий клас для того, щоб успішно застосовувати низку відпрацьованих методів. Значно зручніше працювати з ввігнутими і строго ввігнутими функціями.

Нехай функція корисності $u(\cdot)$ двічі неперервно диференційовна і строго ввігнута, тоді матриця Гесе

$$H(x) \;=\; \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{L}$$

є від'ємно визначеною на $\mathbb{R}^L_+$, тобто

$$\text{для всіх} \quad x \in \mathbb{R}^L_+, \qquad v \cdot H(x)\, v < 0 \quad \text{для всіх } \; v \in \mathbb{R}^L, \; v \neq 0.$$

Звідси для кожного $l = 1, \ldots, L$ маємо

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_l^2} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\,\mathrm{MU}_l(x) \right) < 0 \quad \text{для всіх } \; x \in \mathbb{R}^L_+. \tag{1.2.2}$$

Умова (1.2.2) виражає відомий в економіці **перший закон Госена**, згідно з яким гранична корисність будь-якого товару зменшується зі збільшенням споживання цього товару.

Закон Госена – принцип спадаючої граничної корисності полягає в тому, що зі збільшенням споживання будь-якого товару (при незмінному обсягу споживання решти) загальна корисність, яку отримує споживач, збільшується, проте збільшується все більш поволі.

Принцип спадаючої граничної корисності не є універсальним. У багатьох випадках гранична корисність наступних одиниць товару спочатку збільшується, досягаючи максимуму і лише потім починає зменшуватися. Така залежність характерна для невеликих порцій подільних товарів. Оскільки споживач закуповує на ринку не окремі акти споживання (наприклад, частину яблука), то можемо вважати, що для наявних на ринку товарів перший закон Госена правильний.

Означення 1.2.3. Відношення переваги $\succsim$ на $X=(-\infty,+\infty)\times\mathbb{R}_+^{L-1}$ називається квазілінійним стосовно першого товару (товар у цьому випадку вибирають за одиницю рахунку - numeraire commodity), якщо правильні умови:[1]

(i) $x, y \in X$, $x \sim y \Rightarrow (x+\alpha e_1) \sim (y+\alpha e_1)$ для $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ і для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) товар 1 бажаний, тобто $x+\alpha e_1 \succ x$ для всіх $x \in X$ і для кожного $\alpha > 0$.

Приклад квазілінійного відношення переваги стосовно першого товару (у випадку наявності двох товарів) зображено на рис. 1.2.4.

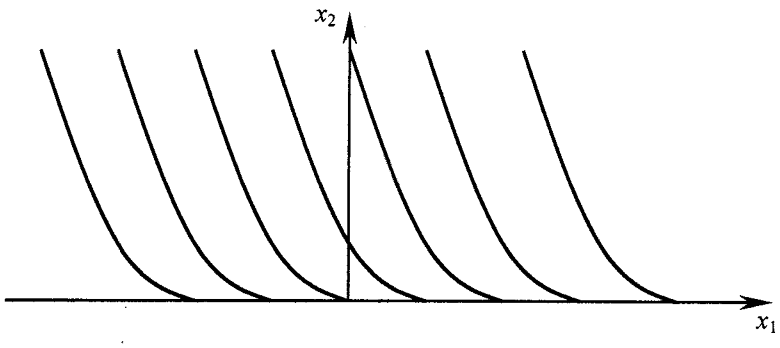


Рис. 1.2.4. Квазілінійне відношення переваги

Лема 1.2.5. Неперервне $\succsim$ на $X = (-\infty, +\infty) \times \mathbb{R}_+^{L-1}$ квазілінійне стосовно першого товару тоді і тільки тоді, коли

[1] Означення квазілінійності відношення переваги можна сформулювати для будь-якого товару l.

функція корисності, яка його зображає, має вигляд $u(x) = x_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_L)$.

Наведемо найпоширеніші приклади функцій корисності.

Приклад 1.2.1. Квадратична функція корисності має вигляд

$$u(x) = a \cdot x + \frac{1}{2} x \cdot A\, x,$$

де $x = (x_1, \ldots, x_L)^\tau$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^L$ – стала матриця, $a = (a_1, \ldots, a_L)^\tau$ – сталий вектор. Для того щоб відношення переваги, яке зображається цією функцію корисності, справджувало аксіому ненасичуваності, потрібно, щоб

$$\mathrm{MU}(x) = a + Ax > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^L.$$

Якщо матриця A від'ємно визначена, то відношення переваги строго опукле (функція корисності $u(\cdot)$ – строго ввігнута). ▲

Приклад 1.2.2. *Логарифмічна функція корисності* (функція корисності Бернуллі)

$$u(x) = \sum_{i=1}^{L} a_i \log(x_i - \bar{x}_i),$$

де $a_i > 0, \quad x_i > \bar{x}_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, L.$ ▲

Приклад 1.2.3. *Функція корисності зі сталою еластичністю заміщення* (або CES)

$$u(x) = k\,[\, \alpha_1 x_1^\rho + \alpha_1 x_2^\rho \,]^{1/\rho},$$

де $k > 0, \; \alpha_i > 0, i = 1, 2; \; \rho \leqslant 1.$

1. Якщо $\rho = 1$, то маємо *лінійну функцію корисності.*

2. Якщо $\rho \to 0$, то отримаємо *функцію корисності Коба-Дугласа*
$$u(x) \;=\; k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}.$$

3. Якщо $\rho \;\to\; -\infty$, то отримаємо *функцію корисності Леонтьєва*
$$u(x) \;=\; k \min\{\, x_1,\, x_2 \,\}.$$

▲

Завдання до розділу 1

1. Розбиття множини X називається сім'я таких непорожніх підмножин X, що довільний елемент $x \in X$ належить рівно одному елементу розбиття. Довести, що будь-яке розбиття множини X є множиною $X/\sim$ класів еквівалентності, породженою деяким відношенням еквівалентності $\sim$ на X.

2. Довести, що властивість неперервності відношення переваги еквівалентна припущенню, якщо $x^1 \succ x^2 \succ x^3$, то довільна неперервна крива, яка проходить через x^1 і x^3, проходить через набір x^4 такий, що $x^4 \sim x^2$.

3. Довести, що властивість опуклості відношення переваги і закон Госена є залежні, але не еквівалентні.

4. Відношення переваги називається слабо монотонним, якщо $x, y \in X$ і $x \geqslant y$, тоді $x \succsim y$. Довести, якщо $\succsim$ – локально ненасичуване і слабо монотонне, то воно монотонне.

Розділ 2

Споживчий вибір: порядковий підхід

Порядковий підхід до аналізу корисності та попиту сучасніший і грунтується на значно менших припущеннях, ніж кількісний. Від споживача не вимагають вміти вимірювати корисність певного товару в деяких штучних одиницях виміру. Достатньо лише, щоб споживач був здатний впорядкувати всі доступні споживчі набори згідно з їхніми перевагами. При порядковому підході використовують криві та карту байдужості. Криві байдужості – це множина точок, кожна з яких зображає такий набір товарів, що споживачеві байдуже, який із цих наборів вибирати. Якщо заповнити $\mathbb{R}_{+}^{L}$ кривими байдужості так щільно, як це можливо, то отримаємо карту байдужості.

Криві байдужості мають такі властивості.

Якщо відношення переваги задовольняє аксіому ненасичуваності, то крива байдужості, яка лежить вище і правіше іншої кривої, зображає набори товарів, які мають більшу перевагу для споживача. Крім того, криві байдужості не перетинаються.

Якщо відношення переваги володіє властивістю опуклості, то криві байдужості мають від'ємний нахил і опуклі до початку координат.

2.1 Задача раціонального вибору. Попит Вальраса

Нехай задано поле переваг $(X, \succsim)$ і підмножину Y множини X.

Означення 2.1.1. Споживчий набір $x \in Y$ називається набором, що має найбільшу перевагу (максимальним елементом) в Y, якщо $x \succsim \acute{x}$ для всіх $\acute{x} \in Y$.

Припустимо, що X – замкнута опукла множина і має нижню границю, тобто існує вектор $c \in \mathbb{R}^L$ такий, що $x \geqslant c$ для всіх $x \in X$.

Зауваження 2.1.1. Загалом для споживача можна вказати мінімальний рівень споживання різних продуктів, який потрібний для підтримки його існування. За суто фізичними причинами можливість пропонувати такі виробничі послуги, як "кількість праці за рік", обмежена. Це і є виправданням зробленого припущення про обмеження знизу множини наборів споживчих благ.

Позначимо через $p = (p_1, \ldots, p_L)^\tau$ вектор цін на товари, де p_l – ціна за одиницю товару l. Припустимо для простоти, що $p \gg 0$, тобто $p_l > 0$ для всіх l. Позначимо через $\mathrm{w} > \min\{p \cdot x : x \in X\}$ – рівень доходу (в грошових одиницях) споживача.

Споживчий набір $x \in X$ можна придбати, якщо його вартість не перевищує рівня доходу споживача, тобто

$$p \cdot x = p_1 x_1 + \ldots + p_L x_L \leqslant \mathrm{w}.$$

Вектор p і число w визначають гіперплощину $H_{p,\mathrm{w}} = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x = \mathrm{w}\}$, яка породжує півпростір $H^-_{p,\mathrm{w}} = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \leqslant \mathrm{w}\}$.

Означення 2.1.2. *Конкурентною бюджетною множиною* $B_{p,\mathrm{w}} = X \cap H^-_{p,\mathrm{w}} = \{x \in X : p \cdot x \leqslant \mathrm{w}\}$ називається множина всіх доступних споживчих наборів, які можна придбати на ринку при цінах p і доходу w.

Множина $\{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x = \mathrm{w}\}$ називається *бюджетною гіперплощиною* (при $L = 2$ – *бюджетною лінією* з нахилом, який дорівнює $-\dfrac{p_1}{p_2}$).

> **Задача раціонального вибору споживача**: при заданому відношенні переваги $\succsim$ і "бюджетному обмеженні" – цінах p і доходу w, знайти оптимальний (той, що має найбільшу перевагу) набір товарів x із $B_{p,\mathrm{w}}$, тобто знайти $x \in B_{p,\mathrm{w}}$ такий, що $x \succsim \acute{x}$ для всіх $\acute{x} \in B_{p,\mathrm{w}}$.

Теорема 2.1.1. *Нехай задано поле переваг* $(X, \succsim)$, *де* X – *замкнута обмежена знизу множина, відношення переваги* $\succsim$ *неперервне. Тоді для кожної пари ціна-дохід* (p, w) *множина* $x(p, \mathrm{w}) = \{x \in B_{p,\mathrm{w}} : x \succsim \acute{x}$ *для всіх* $\acute{x} \in B_{p,\mathrm{w}}\}$ *непорожня і компактна.*

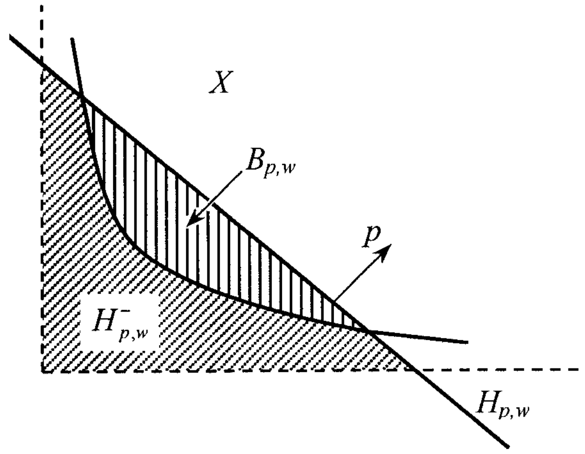


Рис. 2.1.1. Конкурентна бюджетна множина

Доведення. Розглянемо для кожного $x \in B_{p,\mathrm{w}}$ множину $V_x = \{z \in B_{p,\mathrm{w}} \ : \ z \succsim x\}$. Покажемо, що сім'я замкнутих підмножин $\{V_x \ : \ x \in B_{p,\mathrm{w}}\}$ множини $B_{p,\mathrm{w}}$ володіє властивістю скінченного перетину, тобто будь-яке скінченне число цих підмножин має спільну точку. Справді, розглянемо споживчі набори $x^1, \ldots, x^m$ із $B_{p,\mathrm{w}}$ і необмежуючи загальності, можна припустити, що $x^1 \succsim x^j$ для всіх $j = 1, \ldots, m$. Тоді $x^1 \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} V_{x^j}$. Звідки з врахуванням компактності множини $B_{p,\mathrm{w}}$ маємо, що $\bigcap\limits_{x \in B_{p,\mathrm{w}}} V_x \neq \varnothing$, де ліва частина – сукупність всіх шуканих оптимальних наборів. Ця сукупність утворює компактну множину, оскільки вона зображається у вигляді перетину замкнутих підмножин V_x компактної множини $B_{p,\mathrm{w}}$. $\square$

Означення 2.1.3. Відображення, яке кожній парі ціна-дохід (p, w) ставить у відповідність множину $x(p, \mathrm{w})$, називається *попитом Вальраса*. Якщо для кожної пари (p, w) множина $x(p, \mathrm{w})$ складається з однієї точки, то назвемо це відображення *функцією попиту Вальраса*.

Означення 2.1.4. Попит Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ називається напівнеперервним зверху в точці $(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, якщо для кожної послідовності $(p^n, \mathrm{w}^n) \to (\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, $x^n \in x(p^n, \mathrm{w}^n)$ для всіх n і $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ маємо $\bar{x} \in x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$. Це відображення називається напівнеперервним зверху, якщо воно напівнеперервне зверху в кожній точці (p, w).

Нехай задано поле переваг $(X, \succsim)$. Бюджетну множину споживача позначимо через $b(p, \mathrm{w}) = \{x \in X : p \cdot x \leqslant \mathrm{w}\}$. Нехай $S \subset \mathbb{R}^{L+1}$ множина пар ціна-дохід для яких бюджетна множина є непорожня. Тоді $b(\cdot)$ визначає багатозначне відображення із S в $\operatorname{int}\mathbb{R}^L$.

Лема 2.1.1. *Відображення $b : S \to X$ має замкнутий графік і є напівнеперервним знизу в кожній точці (p, w) для якої $\mathrm{w} > \min\{p \cdot x : x \in X\}$.*

Відображення $x : S \to X$, яке визначається так:

$$x(p, \mathrm{w}) = \{x \in b(p, \mathrm{w}) : x \succsim x' \text{ для всіх } x' \in b(p, \mathrm{w})\}$$

називається попитом.

Теорема 2.1.2. [1] *Нехай $x(p, \mathrm{w}) \neq \varnothing$ для всіх $(p, \mathrm{w}) \in S$ і при-*

[1] Sonnenschein H. "Demand theory without transitive preferences, with applications to the theory of competitive equilibrium", in: J.S. Chipman et al.(eds),1971- P.215-223.

пустимо, що $b(\cdot)$ *є неперервним в точці* $(p^0, \mathrm{w}^0) \in S$. *Якщо відношення переваги неперервне, то попит* $x(\cdot)$ *є напівнеперервним зверху в точці* (p^0, w^0).

Теорема 2.1.3. *Нехай* $\succsim$ *– неперервне відношення переваги на* X *таке, що множина* $\{x' \in X : x' \succ x\}$ *опукла для кожного* $x \in X$. *Тоді* $x(p, \mathrm{w}) \neq \varnothing$, *якщо* $b(p, \mathrm{w}) \neq \varnothing$.

Означення 2.1.5. Попит Вальраса $x(p,\mathrm{w})$ задовольняє умову Вальраса, якщо для кожної пари ціна-дохід (p, w) маємо $p \cdot x = \mathrm{w}$ для всіх $x \in x(p, \mathrm{w})$.

Теорема 2.1.4. *Нехай* $(X, \succsim)$ *– поле переваг, де* X *– замкнута, опукла й обмежена знизу множина, відношення переваги* $\succsim$ *неперервне. Тоді попит Вальраса* $x(p, \mathrm{w})$ *має такі властивості:*

(i) *однорідний степеня нуль:* $x(\alpha p, \alpha \mathrm{w}) = x(p, \mathrm{w})$ *для всіх* p, w *і* $\alpha > 0$;

(ii) *якщо* $\succsim$ *опукле, то* $x(p, \mathrm{w})$ *– опукла множина. Зокрема, якщо* $\succsim$ *строго опукле, то множина* $x(p, \mathrm{w})$ *складається лише з однієї точки;*

(iii) *якщо* $\succsim$ *локально ненасичуване, то* $x(p, \mathrm{w})$ *задовольняє умову Вальраса;*

(iv) *попит Вальраса* $x(p, \mathrm{w})$ *напівнеперервний зверху. Зокрема, функція попиту Вальраса* $x(p, \mathrm{w})$ *неперервна.*

Доведення. Доведемо лише властивості (i), (ii) і (iii). Властивість (iv) доведемо пізніше.

(i) Доведення цієї властивості випливає з рівності $B_{\alpha p,\alpha \mathrm{w}} = B_{p,\mathrm{w}}$ для всіх $\alpha > 0$.

(ii) Нехай x^1,x^2 довільні споживчі набори з множини $x(p,\mathrm{w})$, тоді $x^1 \succsim \acute{x}$ і $x^2 \succsim \acute{x}$ для всіх $\acute{x} \in B_{p,\mathrm{w}}$. Оскільки $B_{p,\mathrm{w}}$ опукла множина і $\succsim$ є опуклим, то для кожного $\alpha \in [0,1]$, $x^\alpha = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \succsim \acute{x}$ для всіх $\acute{x} \in B_{p,\mathrm{w}}$, тобто $x^\alpha \in x(p,\mathrm{w})$. Отже, $x(p,\mathrm{w})$ опукла множина.

Припустимо, що є два різні оптимальні набори x^1 і x^2 та $\succsim$ строго опукле. Тоді $x^1 \sim x^2$ і набір $\dfrac{1}{2}x^1 + \dfrac{1}{2}x^2$ має строгу перевагу над цими наборами. Одержали суперечність. Отже, є лише один оптимальний споживчий вибір.

(iii) Нехай відношення переваги $\succsim$ локально ненасичуване і $p \cdot x < \mathrm{w}$ для деякого $x \in x(p,\mathrm{w})$. Тоді існує споживчий набір y такий, що $p \cdot y < \mathrm{w}$ і $y \succ x$. Одержана суперечність доводить властивість. $\square$

Попит Вальраса залежить від $L+1$ аргументу. Оскільки $x(p,\mathrm{w})$ є однорідним степеня нуль, то, обравши деякий товар за одиницю виміру (наприклад, перший товар) та приймаючи коефіцієнт пропорційності $\alpha = \dfrac{1}{p_1}$, подамо попит у вигляді $x(\cdot) = x(1, \dfrac{p_2}{p_1}, \ldots, \dfrac{p_L}{p_1}, \dfrac{\mathrm{w}}{p_1})$. Цей вираз показує залежність попиту від L аргументів: відносних цін $\dfrac{p_2}{p_1}, \ldots, \dfrac{p_L}{p_1}$ та реального доходу $\dfrac{\mathrm{w}}{p_1}$, якщо перший товар вибрати за одиницю відліку. Звичайно за одиницю відліку можна вибрати будь-який товар l, $1 \leqslant l \leqslant L$ або без втрати загальності можемо прийняти $\mathrm{w} = 1$.

Тепер функцію попиту визначимо без використання відношення переваги.

Означення 2.1.6. Функція $x : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to X$ називається *функцією попиту Вальраса,* якщо вона неперервна і для кожної пари ціна-дохід (p, w) справджуються умови:

(i) $p \cdot x(p, \mathrm{w}) = \mathrm{w}$,

(ii) $x(\alpha p, \alpha \mathrm{w}) = x(p, \mathrm{w})$ для всіх $\alpha > 0$.

Приклад 2.1.1. 1. Нехай $X = \mathbb{R}^3_+$. Функцію попиту визначимо так:

$$x_1(p, \mathrm{w}) = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{\mathrm{w}}{p_1};$$
$$x_2(p, \mathrm{w}) = \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{\mathrm{w}}{p_2};$$
$$x_3(p, \mathrm{w}) = \frac{\beta p_1}{p_1 + p_2 + p_3} \frac{\mathrm{w}}{p_3}.$$

Ця функція попиту є однорідною степеня нуль і при $\beta = 1$ задовольняє умову Вальраса.

2. Нехай $X = \mathbb{R}^3$. Функцію попиту визначимо так:

$$x_1(p, \mathrm{w}) = \frac{p_2}{p_3};$$
$$x_2(p, \mathrm{w}) = -\frac{p_1}{p_3};$$
$$x_3(p, \mathrm{w}) = \frac{\mathrm{w}}{p_3}.$$

Ця функція є однорідною степеня нуль і задовольняє умову Вальраса.

3. Нехай $X = \mathbb{R}^L_+$. Функцію попиту визначимо так:

$$x_l(p, \mathrm{w}) = \frac{\mathrm{w}}{\sum\limits_{i=1}^{L} p_i} \quad \text{для всіх} \quad l.$$

Легко перевірити, що ця функція попиту задовольняє умови означення 2.1.6. ▲

2.2 Зміна цін і доходу

Надалі припустимо: $X = \mathbb{R}^L_+$ (опуклий компакт) і $x(p, \mathrm{w}) = (x_1(p, \mathrm{w}), \ldots, x_L(p, \mathrm{w}))^\tau$ – функція попиту Вальраса. Припустимо також, що $x(p, \mathrm{w})$ *неперервно диференційовна.*

Ефект доходу

Нехай ціна $p = \bar{p}$ фіксована. Тоді функція попиту $x(\bar{p}, \mathrm{w})$, як функція від доходу, називається функцією Енгеля. В $\mathbb{R}^L_+$ множина $E_{\bar{p}} = \{x(\bar{p}, \mathrm{w}) : \mathrm{w} > 0\}$ визначає криву дохід-споживання.

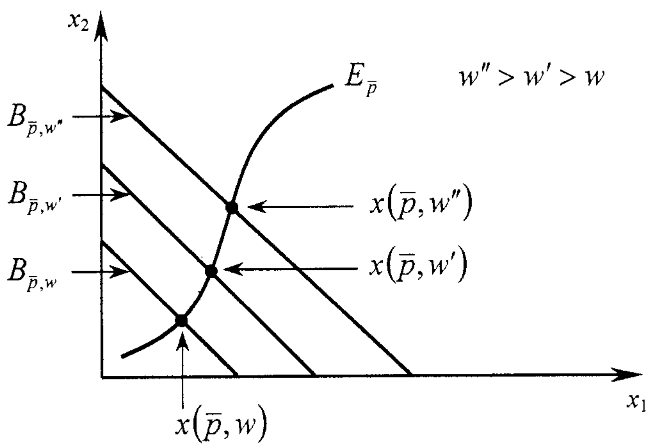


Рис. 2.2.2. Крива дохід-споживання

Для кожної пари ціна-дохід (p,w) значення похідної $\partial x_l(p,\mathrm{w})/\partial\mathrm{w}$ визначимо як *ефект доходу* для товару l.

Товар l назвемо *цінним* (*якісним*) для пари ціна-дохід (p,w), якщо $\partial x_l(p,\mathrm{w})/\partial\mathrm{w} \geqslant 0$, тобто, якщо зі збільшенням доходу попит на цей товар не спадає, і *малоцінним* (*товаром низької якості*), якщо $\partial x_l(p,\mathrm{w})/\partial\mathrm{w} < 0$. Якщо кожний товар цінний для всіх (p,w), то маємо попит на цінні товари.

У матричному вигляді ефект доходу має таке зображення:

$$\mathrm{D_w}x(p,\mathrm{w}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(p,\mathrm{w})}{\partial\mathrm{w}} \\ \\ \dfrac{\partial x_2(p,\mathrm{w})}{\partial\mathrm{w}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_L(p,\mathrm{w})}{\partial\mathrm{w}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L.$$

Ефект ціни

Для кожної пари ціна-дохід (p,w) значення похідної $\partial x_l(p,\mathrm{w})/\partial p_k$ визначимо як *ефект ціни* p_k на попит товару l.

Товар l назвемо *товаром Гіфена* (Giffen good) для пари ціна-дохід (p,w), якщо $\partial x_l(p,\mathrm{w})/\partial p_l > 0$. На рис. 2.2.3, *б* товар 2 є товаром Гіфена для пари ціна-дохід $(\bar{p}_1,\acute{p}_2,\mathrm{w})$. Товар l називається *нормальним* для пари (p,w), якщо $\partial x_l(p,\mathrm{w})/\partial p_l \leqslant 0$.

У матричному вигляді ефект ціни запишемо так

$$\mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(p,\mathrm{w})}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(p,\mathrm{w})}{\partial p_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_L(p,\mathrm{w})}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_L(p,\mathrm{w})}{\partial p_L} \end{pmatrix}.$$

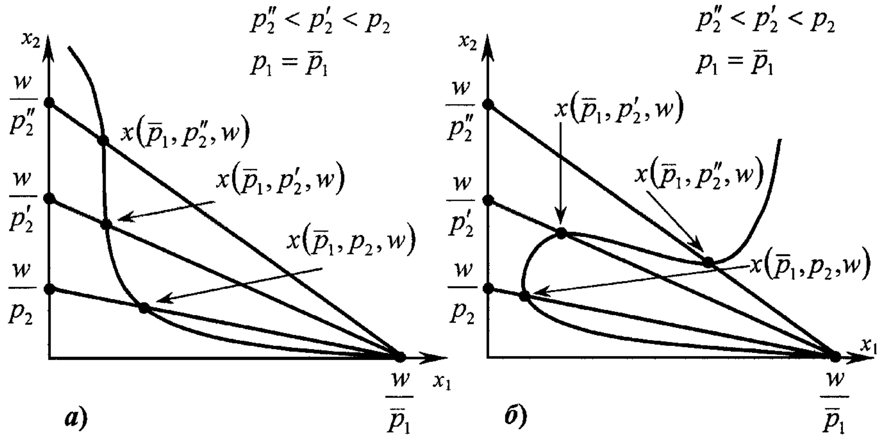


Рис. 2.2.3. Крива ціни-споживання (a); товар x_2 - малоцінний ($б$)

Теорема 2.2.1. *Нехай* $x(p, \mathrm{w})$ *– функція попиту Вальраса , тоді для всіх* p *і* w

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} \mathrm{w} \ = \ 0 \quad \textit{для} \ \ l = 1, \ldots, L, \qquad (2.2.1)$$

або в матричному вигляді

$$\mathrm{D}_p \, x(p, \mathrm{w}) \, p + \mathrm{D}_{\mathrm{w}} \, x(p, \mathrm{w}) \, \mathrm{w} \ = \ 0. \qquad (2.2.2)$$

Доведення. Оскільки функція попиту Вальраса є однорідною степеня нуль: $x_l(\alpha p, \alpha \mathrm{w}) - x_l(p, \mathrm{w}) = 0$ для $l = 1, \ldots, L$ і $\alpha > 0$, то диференціюючи ці рівності за параметром α і приймаючи $\alpha = 1$, отримаємо доведення теореми. □

Аналізуючи попит, нас часто цікавить не його абсолютний обсяг, а зміна у відповідь на зміну доходу або ціни товару. Проте обсяг попиту різних товарів вимірюється в різних одиницях (метрах, тоннах). Наприклад, нехай $x(p)$ функція попиту на цукор, тоді значення похідної $x'(p)$ залежить від того, в яких одиницях вимірюється попит на цукор у кілограмах чи в центнерах. У першому випадку похідну вимірюють в кг/грн., в другому – ц/грн. Отже, значення похідної при тому самому значенні ціни будуть різними залежно від одиниць виміру величини попиту. Тому в економіці для виміру чутливості зміни функції до зміни аргументу використовують показники відносної зміни. Це приводить нас до поняття еластичності.

У математиці еластичністю називають відношення відносного приросту функції до відносного приросту незалежної змінної. *Коефіцієнт еластичності* $\varepsilon(x)$ функції[1] $y = f(x)$ у точці x визначається рівністю

$$\varepsilon(x) = \frac{x}{f(x)} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\mathrm{M}f}{\mathrm{A}f},$$

де $\mathrm{M}f$ – граничне (маржинальне) значення функції $f(\cdot)$ в точці x, $\mathrm{A}f$ – середнє значення функції в точці x. Цю еластичність називають граничною або точковою еластичністю. Отож,

[1] У дискретному випадку, а також при наближеному визначені еластичності за дискретним набором даних, визначення еластичності вже не є таким однозначним, як у неперервному випадку, тому розрізняють

процентну еластичність $\varepsilon(x) = \left[\frac{y_2 - y_1}{y_1}\right] / \left[\frac{x_2 - x_1}{x_1}\right]$,

дугову еластичність $\varepsilon(x) = \left[\frac{2(y_2 - y_1)}{y_1 + y_2}\right] / \left[\frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2}\right]$,

а також логарифмічну еластичність $\varepsilon(x) = \ln\left[\frac{y_2}{y_1}\right] / \ln\left[\frac{x_2}{x_1}\right]$.

еластичність можна виразити у вигляді відношення граничної $(\mathrm{M}f)$ і середньої $(\mathrm{A}f)$ величини.

Оскільки $\mathrm{d}\ln f = \mathrm{d}f/f$, а $\mathrm{d}\ln x = \mathrm{d}x/x$, то еластичність можна записати у вигляді "логарифмічної похідної" $\varepsilon(x) = \mathrm{d}\ln f/\mathrm{d}\ln x$.

Коли функція f є функцією багатьох змінних $f(x) = f(x_1,\ldots,x_L)$, то вживають *часткові коефіцієнти еластичності*

$$\varepsilon_i(x) = \frac{x_i}{f(x)}\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,\ldots,L,$$

які є безрозмірними величинами, які легко порівняти між собою.

Для функції ринкового попиту такими незалежними змінними будуть ціна заданого товару, ціни всіх інших товарів і дохід. Використовуючи описаний підхід, чутливість попиту на товар l стосовно зміни цін p_k та доходу w можна визначити як еластичність попиту $x_l(p,\mathrm{w})$ за цінами p_k та доходом w

$$\varepsilon_{l\,k}(p,\mathrm{w}) = \frac{\partial x_l(p,\mathrm{w})}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_l(p,\mathrm{w})}$$

і

$$\varepsilon_{l\,\mathrm{w}}(p,\mathrm{w}) = \frac{\partial x_l(p,\mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}}\frac{\mathrm{w}}{x_l(p,\mathrm{w})}.$$

Еластичність попиту за ціною $\varepsilon_{l\,k}(p,\mathrm{w})$ характеризує відносну зміну (у відсотковому виразі) величини попиту на товар l при зміні ціни p_k на один відсоток і характеризує чутливість споживача до зміни цін на продукцію. Якщо цінова еластичність попиту $\varepsilon_{l\,l}(p,\mathrm{w})$ за абсолютною величиною більша від одиниці, то попит називають *еластичним*, якщо $\mid \varepsilon_{l\,l}(p,\mathrm{w}) \mid < 1$, то попит називають *нееластичним*. Якщо $\mid \varepsilon_{l\,l}(p,\mathrm{w}) \mid = 1$, то говорять, що попит має *одиничну еластичність*. Пряма еластичність $\varepsilon_{l\,l}(p,\mathrm{w})$ попиту за ціною залежить від наявності товарів-замінників. Чим більше таких товарів-замінників, чим ближчі їхні основні властивості, тим еластичніший попит на цей товар. Відсутність товарів-замінників визначає нееластичність попиту (наприклад, кухонна сіль). Чим агрегованішу групу товарів ми розглядаємо, тим менша еластичність попиту (наприклад, попит на м'ясопродукти менш еластичний, ніж попит на ковбасу).

Еластичність залежить також від кількості можливостей використання цього товару і чим більше таких можливостей, тим більша його еластичність.

Пряма еластичність залежить від степеня насичення потреб і від фактора часу. Попит у довгостроковий період еластичніший, ніж в короткостроковий період.

Основний фактор, який визначає перехресну еластичність $\varepsilon_{l\,k}(p, \mathrm{w})$, – природні властивості товару та їхня можливість заміняти один одного в споживанні. Якщо два товари з однаковим успіхом можна використати для задоволення тієї самої потреби, то коефіцієнт перехресної еластичності цих товарів за ціною вищий і навпаки. Зауважимо, що перехресна еластичність може бути асиметричною. Якщо ціна м'яса зменшиться, то попит на кетчуп збільшиться; якщо ціна кетчупа збільшиться, то малоймовірно, що це вплине на попит м'яса.

Якщо $\varepsilon_{l\,k}(p, \mathrm{w}) > 0,\ (l \neq k)$, то товари l і k називаються *взаємозамінними*, зростання ціни товару k призводить до збільшення попиту на товар l (наприклад, різні види палива).

Якщо $\varepsilon_{l\,k}(p, \mathrm{w}) < 0,\ (l \neq k)$, то товари l і k називаються *взаємодоповнюючими*, зростання ціни товару k призводить до зменшення попиту на товар l (наприклад, автомашини і бензин).

Якщо $\varepsilon_{l\,k}(p, \mathrm{w}) = 0,\ (l \neq k)$, то товари l і k називаються *незалежними*, зростання ціни одного товару не впливає на попит іншого товару (наприклад, хліб і цемент).

Еластичність попиту за доходом $\varepsilon_{l\,\mathrm{w}}(p, \mathrm{w})$ характеризує відносну зміну (у відсотках) величини попиту на товар l при зміні доходу w споживача на один відсоток. Додатна еластичність $\varepsilon_{l\,\mathrm{w}}(p,\mathrm{w})$ описує цінні (якісні) товари, від'ємна еластичність – малоцінні товари (товари низької якості). Серед цінних товарів можна виділити дві групи: *товари першої необхідності*, для яких $\varepsilon_{l\mathrm{w}} \leqslant 1$, і *товари розкоші*, для яких $\varepsilon_{l\mathrm{w}} > 1$.

Високий додатний коефіцієнт попиту за доходом у галузі засвідчує, що її вклад в економічний ріст є більшим, ніж частка в структурі економіки, і має шанси на розширення в майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике або від'ємне значення, то її може очікувати застій і перспектива скорочення виробництва.

Нехай $x(p,\mathrm{w}) \in \mathbb{R}^L_{++}$. Тоді враховуючи формулу (2.2.1), отримуємо, що для кожного товару *сума всіх еластичностей повинна бути нульовою, тобто*

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{l\,k}(p,\mathrm{w}) \, + \, \varepsilon_{l\,\mathrm{w}}(p,\mathrm{w}) \, = 0 \;\text{ для }\; l = 1,\ldots,L.$$

Теорема 2.2.2. *Нехай $x(p,\mathrm{w})$ – функція попиту Вальраса, тоді для всіх p і w*

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \, \frac{\partial x_l(p,\mathrm{w})}{\partial p_k} \, + \, x_k(p,\mathrm{w}) \, = \, 0 \quad \textit{для } \; k = 1,\ldots,L, \tag{2.2.3}$$

або в матричному вигляді

$$p \cdot \mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w}) \, + \, x(p,\mathrm{w})^{\tau} \, = \, 0^{\tau}. \tag{2.2.4}$$

Доведення. Доведення отримуємо безпосереднім диференціюванням умови Вальраса $p \cdot x(p,\mathrm{w}) = \mathrm{w}$ за змінною p_k. □

Із рівності (2.2.3) одержимо

$$x_k(p,\mathrm{w}) \, = \, -\sum_{l=1}^{L} p_l \, \frac{\partial x_l(p,\mathrm{w})}{\partial p_k}, \;\; k = 1,..,L, \tag{2.2.5}$$

що *значення попиту на товар k дорівнює зваженій сумі змін значень попиту стосовно ціни товару k, в якій за ваги взято ціни.*

Співвідношення (2.2.5) називається *умовою агрегації Курно.*

Теорема 2.2.3. *Нехай $x(p, \mathrm{w})$ – функція попиту Вальраса, тоді всі товари з кошика споживача одночасно не можуть бути малоцінними, тобто для всіх p і w*

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} = 1, \tag{2.2.6}$$

або в матричному вигляді

$$p \cdot \mathrm{D_w}\, x(p, \mathrm{w}) = 1. \tag{2.2.7}$$

Доведення. Продиференціювавши умову Вальраса і врахувавши, що $p_l > 0,\ l = 1, \ldots, L$, одержуємо доведення теореми. □

Співвідношення (2.2.6) називається *умовою агрегації Енгеля.*

Завдання до розділу 2

1. Дати геометричну інтерпретацію еластичності.
2. Довести, що еластичності за відносними цінами і доходом дорівнюють відповідним еластичностям за грошовими цінами і доходом.
3. Показати геометрично вплив доходу і вплив заміни для товару Гіфена.

Розділ 3

Слабка і сильна аксіоми виявленої переваги

3.1 Закон попиту

Ми переконалися, що можна використати інформацію про відношення переваги споживача для визначення його попиту. Тепер розглянемо зворотний процес і покажемо, як можна використати інформацію про попит споживача для вираження його відношення переваги. Доти, доки ми не ввели означення функції попиту, то припускали, що відношення переваги є заданим. Проте в реальному житті відношення переваги не простежується, тому ми змушені визначити його за поведінкою споживача. Коли йдеться про визначення відношення переваги споживача за його поведінкою, то припускаємо, шо воно незмінне протягом певного проміжку часу. Перш ніж перейти до дослідження, домовимось, що шукане відношення переваги є строго опуклим. Це дасть змогу отримати лише один набір товарів при кожному бюджетному обмеженні. Розглянемо рис. 3.1.1, де зображено оптимальний вибір споживача (x_1, x_2) та інший довільний набір товарів (y_1, y_2), який лежить нижче від бюджетної лінії. Що ми можемо сказати про перевагу

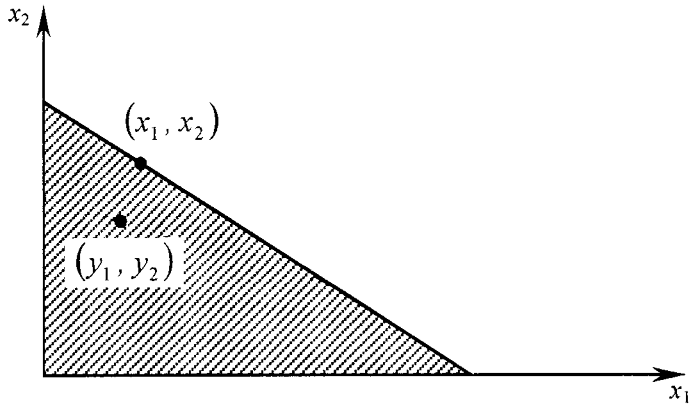


Рис. 3.1.1.

між цими двома наборами споживача? Набір (y_1, y_2) доступний споживачеві - при бажанні він може його купити і зберегти частину доходу. Оскільки (x_1, x_2) - оптимальний набір, то він є кращим від будь-якого іншого, який споживач може купити. Зокрема, він кращий від (y_1, y_2). Нехай (x_1, x_2) - набір товарів за цінами (p_1, p_2) і доходом w, тобто

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathrm{w}.$$

Водночас

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 \leqslant \mathrm{w}.$$

Отже,

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \geqslant p_1 y_1 + p_2 y_2. \tag{3.1.1}$$

Якщо нерівність (3.1.1) виконується для набору (y_1, y_2), відмінного від (x_1, x_2) і доступного споживачеві, то кажемо, що

(x_1, x_2) *прямо виявлено переважає* (y_1, y_2). Зауважимо, що поняття "виявлено переважає" не має нічого спільного з відношенням переваги. Сформулюємо це як поняття.

Принцип виявленої переваги. *Нехай* (x_1, x_2) *- вибраний набір товарів за цінами* (p_1, p_2) *і нехай* (y_1, y_2) *- деякий інший набір товарів такий, що* $p_1x_1+p_2x_2 \geqslant p_1y_1+p_2y_2$. *Якщо споживач вибирає* (x_1, x_2) *серед тих, які він може досягти, то маємо* $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$.

Припустимо, що (y_1, y_2) є оптимальним набором за цінами (q_1, q_2) і що (y_1, y_2) є виявленою перевагою перед набором (z_1, z_2), тобто

$$q_1y_1 + q_2y_2 \geqslant q_1z_1 + q_2z_2.$$

Отже, $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ і $(y_1, y_2) \succsim (z_1, z_2)$. Виявлена перевага і транзитивність свідчить про те, що (x_1, x_2) кращий набір ніж (z_1, z_2).

У цьому випадку (x_1, x_2) *непрямо виявлено переважає* (z_1, z_2). Якщо набір прямо чи непрямо виявлено переважає інший, то скажемо, що перший набір *виявлено переважає* другий. Розглянемо рис. 3.1.2. Ми маємо декілька одержаних наборів при різних бюджетних обмеженнях. Оскільки набір (x_1, x_2) є виявленою перевагою (прямою чи непрямою) стосовно всіх інших наборів із заштрихованої області, то (x_1, x_2) справді переважає ці набори. Тобто, крива байдужості, що проходить через точку (x_1, x_2), лежатиме вище заштрихованої області. Простежуючи вибір споживача, можемо вивчити його перевагу. Така інформація є важливою у прийнятті рішень. Економічна політика передбачає заміну одних товарів іншими: якщо буде накладено податок на взуття і надано субсидії на одяг, то ми, ймовірно, матимемо більше одягу і менше взуття. Отже, вивчаючи вибір споживача, отримаємо інформацію щодо переваги споживача за допомогою використання виявленої переваги.

Ці міркування примусили П.Самуельсона відмовитися від поняття переваги в тому вигляді, в якому ми його визначили вище. Він рекомендував будувати теорію споживання безпосередньо на функції попиту $x(p, \mathrm{w})$.

Можна постулювати, що система виявлених переваг не суперечлива, іншими словами, що набору x' не можна надавати переваг перед набором x, коли x має перевагу над набором x', що формально виражається наступною умовою на функцію попиту $x(p, \mathrm{w})$.

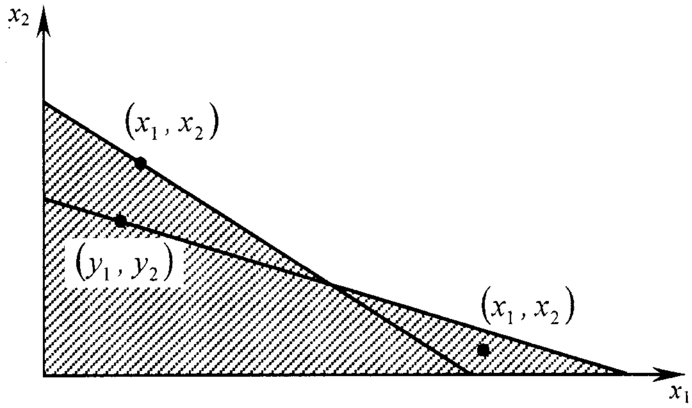


Рис. 3.1.2.

Означення 3.1.1. Функція попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги (weak axiom of revealed preference - WA), якщо вона володіє такою властивістю: для будь-яких двох ситуацій ціна-дохід (p, w) і $(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}})$, якщо $p \cdot x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}}) \leqslant \mathrm{w}$ і $x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}}) \neq x(p, \mathrm{w})$, то $\acute{p} \cdot x(p, \mathrm{w}) > \acute{\mathrm{w}}$.

Отож, слабка аксіома виявленої переваги стверджує, якщо при цінах p та доходу w споживач міг купити споживчий набір $x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}})$, але вибрав набір $x(p, \mathrm{w})$, то у випадку, коли при цінах $\acute{p}$ та доходу $\acute{\mathrm{w}}$ вибрано набір $x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}})$, набір $x(p, \mathrm{w})$ не може бути куплений споживачем.

Випадок $L = 2$ зображено на рис. 3.1.3.

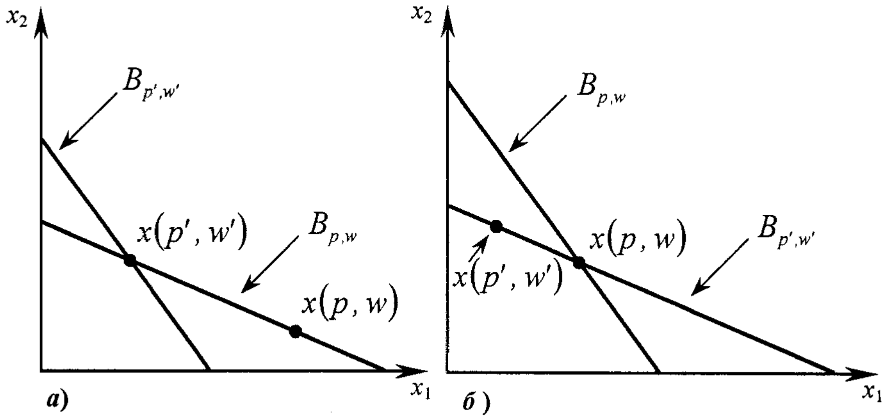


Рис. 3.1.3. Функція попиту задовольняє WA (*а*);
функція попиту не задовольняє WA (*б*)

Приклад 3.1.1. Визначимо функцію $x : \mathbb{R}^2_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^2_+$ так:

$$x(p, \mathrm{w}) = (x_1(p, \mathrm{w}), x_2(p, \mathrm{w}))^\tau, \quad \text{де}$$

$$x_1(p, \mathrm{w}) = \frac{\alpha \mathrm{w}}{p_1}, \;\; x_2(p, \mathrm{w}) = \frac{(1-\alpha)\mathrm{w}}{p_2}, \;\; \alpha \in (0, 1).$$

Легко бачити, що функція $x(p, \mathrm{w})$ неперервна, однорідна степеня нуль і задовольняє умову Вальраса, тобто є функцією попиту Вальраса. Покажемо, що вона задовольняє слабку аксіому виявленої переваги. Справді, нехай $x(p,\mathrm{w}) \neq x(p',\mathrm{w}')$ і $p \cdot x(p',\mathrm{w}') \leqslant \mathrm{w}$. Тоді

$$\mathrm{w}' \left(\frac{\alpha p_1}{p_1'} + \frac{(1-\alpha)p_2}{p_2'}\right) \leqslant \mathrm{w}.$$

Оскільки функція $f(t) = \dfrac{1}{t}$ є строго опукла на $\mathbb{R}_{++}$, то маємо

$$\mathrm{w}' \leqslant \frac{\mathrm{w}}{\alpha\dfrac{p_1}{p_1'} + (1-\alpha)\dfrac{p_2}{p_2'}} < \frac{p_1'}{p_1}\alpha\mathrm{w} + \frac{p_2'}{p_2}(1-\alpha)\mathrm{w},$$

тобто функція попиту задовольняє WA. ▲

Можна показати, якщо функція попиту Вальраса побудована на основі відношення переваги $\succsim$, то вона задовольняє WA.

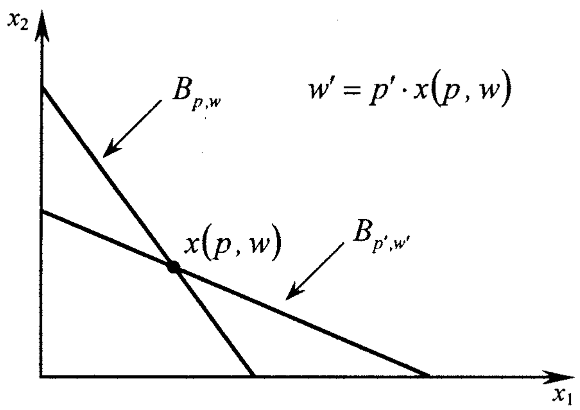


Рис. 3.1.4. Компенсована зміна ціни з (p,w) до (p',w')

Нехай споживач при цінах p і доході w вибрав набір $x(p, \mathrm{w})$. Тоді при зміні ціни до $\acute{p}$ для купівлі цього самого набору новий дохід споживача повинен дорівнювати $\acute{\mathrm{w}} = \acute{p} \cdot x(p, \mathrm{w})$. Величина зміни доходу має вигляд $\triangle \mathrm{w}_{Slutsky} = \triangle p \cdot x(p, \mathrm{w})$, де $\triangle p = \acute{p} - p$, і називається *компенсацією доходу за Слуцьким.* Зміна ціни, при якій одночасно змінився дохід так, що початковий оптимальний вибір $x(p, \mathrm{w})$ залишився доступним споживачеві, називається *компенсованою зміною ціни за Слуцьким.* Компенсована зміна ціни це така зміна ціни, яка призводить до компенсованої зміни доходу. Геометрично бюджетна гіперплощина, яка відповідає (p', w'), визначається вектором $x(p, \mathrm{w})$. Для випадку $L = 2$ (рис. 3.1.4) бюджетна пряма, яка відповідає (p', w'), отримується поворотом бюджетної прямої $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : p \cdot x = \mathrm{w}\}$ навколо точки $x(p, \mathrm{w})$ до величини кутового коефіцієнта $-\dfrac{p'_1}{p'_2}$.

Теорема 3.1.1. *Функція попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги тоді і лише тоді, коли вона володіє властивістю:*

> *для всіх компенсованих змін цін до початкової ситуації (p, w), з новим набором ціна-дохід $(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}}) = (\acute{p}, \acute{p} \cdot x(p, \mathrm{w}))$, справджується нерівність*
>
> $$(\acute{p} - p) \cdot [x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}}) - x(p, \mathrm{w})] \leqslant 0, \qquad (3.1.2)$$
>
> *яка виконується строго при $x(p, \mathrm{w}) \neq x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}})$.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція попиту $x(p, \mathrm{w})$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги і $x(p, \mathrm{w}) \neq x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}})$. Враховуючи, що $\acute{\mathrm{w}} = \acute{p} \cdot x(p, \mathrm{w})$, $p \cdot x(\acute{p}, \acute{\mathrm{w}}) > \mathrm{w}$ і виконання умови Вальраса $\acute{p} \cdot x(\acute{p}, \acute{w}) = \acute{w}$, $p \cdot x(p, w) = w$, маємо

$$\begin{aligned} &(\acute{p} - p) \cdot [x(\acute{p}, \acute{w}) - x(p, w)] \\ = &\acute{p} \cdot [x(\acute{p}, \acute{w}) - x(p, w)] - p \cdot [x(\acute{p}, \acute{w}) - x(p, w)] \\ = &- p \cdot [x(\acute{p}, \acute{w}) - x(p, w)] < 0. \end{aligned}$$

Достатність. Нехай для всіх компенсованих змін цін справджується нерівність (3.1.2) і строга нерівність при $x(p, w) \neq x(\acute{p}, \acute{w})$. Для доведення теореми достатньо показати виконання такого твердження: слабка аксіома виявленої переваги справджується тоді і тільки тоді, коли вона справджується для всіх компенсованих змін цін.

Припустимо, що слабка аксіома виявленої переваги не справджується, тобто існують дві пари ціна-дохід $(\acute{p}, \acute{w})$ і (p'', w'') такі, що $x(\acute{p}, \acute{w}) \neq x(p'', w'')$, $\acute{p} \cdot x(p'', w'') \leqslant \acute{w}$ і $p'' \cdot x(\acute{p}, \acute{w}) \leqslant w''$. Ми розглядаємо випадок некомпенсованих цін, тому останні нерівності повинні виконуватись строго $\acute{p} \cdot x(p'', w'') < \acute{w}$ і $p'' \cdot x(\acute{p}, \acute{w}) < w''$. Виберемо значення $\alpha \in (0, 1)$ з умови $(\alpha\acute{p}+(1-\alpha)p'') \cdot x(\acute{p}, \acute{w}) = (\alpha\acute{p}+(1-\alpha)p'') \cdot x(p'', w'')$ і позначимо через $p = \alpha\acute{p}+(1-\alpha)p''$ і $w = (\alpha\acute{p}+(1-\alpha)p'') \cdot x(\acute{p}, \acute{w})$. Ця конструкція зображена на рис. 3.1.5.

Отже, маємо

$$\begin{aligned} \alpha\acute{w} + (1 - \alpha)w'' &> \alpha\acute{p} \cdot x(\acute{p}, \acute{w}) + (1 - \alpha)p'' \cdot x(\acute{p}, \acute{w}) \\ &= w \\ &= p \cdot x(p, w) \\ &= \alpha\acute{p} \cdot x(p, w) + (1 - \alpha)p'' \cdot x(p, w). \end{aligned}$$

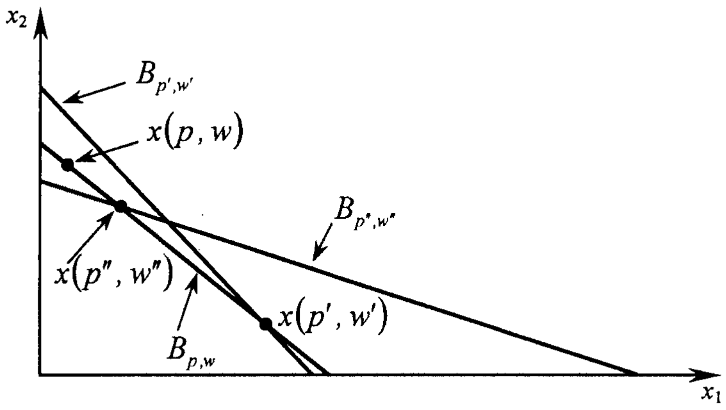


Рис. 3.1.5.

Звідси випливає або $\acute{p}\cdot x(p,\mathrm{w}) < \acute{\mathrm{w}}$, або $p''\cdot x(p,\mathrm{w}) < \mathrm{w}''$. Припустимо, що виконується перша нерівність. Тоді маємо $x(p,\mathrm{w}) \neq x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$, $p\cdot x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) = \mathrm{w}$ і $\acute{p}\cdot x(p,\mathrm{w}) < \acute{\mathrm{w}}$. Звідси отримуємо, що слабка аксіома виявленої переваги для компенсованої зміни ціни (p,w) до $(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$ не справджується.

Отже, залишилося довести, що слабка аксіома виявленої переваги справджується, якщо для всіх пар ціна-дохід (p,w), $(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$ таких, що $p\cdot x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) = \mathrm{w}$, $x(p,\mathrm{w}) \neq x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$ маємо $\acute{p}\cdot x(p,\mathrm{w}) > \acute{\mathrm{w}}$.

Припустимо протилежне: існує пара ціна-дохід $(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$ і деяка компенсована зміна ціни (p,w) така, що $x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) \neq x(p,\mathrm{w})$, $p\cdot x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) = \mathrm{w}$ і $\acute{p}\cdot x(p,\mathrm{w}) \leqslant \acute{\mathrm{w}}$. Оскільки $x(\cdot)$ задовольняє умову Вальраса, то $p\cdot[x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) - x(p,\mathrm{w})] = 0$ і $\acute{p}\cdot[x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) - x(p,\mathrm{w})] \geqslant 0$.

Отже, одержуємо $(\acute{p}-p)\cdot[x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) - x(p,\mathrm{w})] \geqslant 0$ і $x(p,\mathrm{w}) \neq$

$x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$, що суперечить виконанню нерівності (3.1.2) для всіх компенсованих змін цін (і строгої нерівності при $x(p,\mathrm{w}) \neq x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}})$). $\square$

Нерівність (3.1.2) можна переписати у вигляді

$$\triangle p \cdot \triangle x \leqslant 0, \tag{3.1.3}$$

де $\triangle p = \acute{p} - p$, $\triangle x = [x(\acute{p},\acute{\mathrm{w}}) - x(p,\mathrm{w})]$, і вона інтерпретується як (компенсований) *закон попиту або ефект загального заміщення: попит і ціна змінюється в протилежних напрямах.*

Попит на товар не може збільшуватися, якщо його ціна зростає; ціни інших товарів залишаються незмінними, а дохід збільшується на стільки, щоб він міг компенсувати це підвищення ціни.

Якщо змінюється лише ціна товару l, то відбувається *ефект часткового заміщення*

$$\triangle p_l \triangle x_l \leqslant 0. \tag{3.1.4}$$

Нерівності (3.1.2), (3.1.4) справджуються для змін цін, які компенсовані так, що початковий набір товарів може бути купленим при новому доході і в нових цінах.

3.2 Матриця Слуцького

Нехай функція попиту $x(p,\mathrm{w})$ диференційовна. Тоді нерівність (3.1.3) у диференціальній формі набуде вигляду

$$\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}\,x \leqslant 0. \tag{3.2.1}$$

Оскільки $\mathrm{dw} = x(p,\mathrm{w}) \cdot \mathrm{d}p$ (диференціальний аналог $\triangle \mathrm{w} = x(p,\mathrm{w}) \cdot \triangle p$), то

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x &= \mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w})\, \mathrm{d}p + \mathrm{D}_\mathrm{w}\, x(p,\mathrm{w})\, \mathrm{dw}\\ &= \mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w})\, \mathrm{d}p + \mathrm{D}_\mathrm{w}\, x(p,\mathrm{w})\, [\, x(p,\mathrm{w}) \cdot \mathrm{d}p\,]\\ &= [\, \mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w}) + \mathrm{D}_\mathrm{w}\, x(p,\mathrm{w})\, x(p,\mathrm{w})^\tau\,]\, \mathrm{d}p.\end{aligned}$$

Отже, нерівність (3.2.1) можна переписати у вигляді

$$\mathrm{d}p \cdot [\, \mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w}) + \mathrm{D}_\mathrm{w}\, x(p,\mathrm{w})\, x(p,\mathrm{w})^\tau\,]\, \mathrm{d}p \leqslant 0. \tag{3.2.2}$$

Введемо позначення

$$S(p\,\mathrm{w}) = \begin{pmatrix} s_{11}(p,\mathrm{w}) & \dots & s_{1L}(p,\mathrm{w}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{L1}(p,\mathrm{w}) & \dots & s_{LL}(p,\mathrm{w}) \end{pmatrix},$$

де для всіх (l,k)

$$s_{lk}(p,\mathrm{w}) = \frac{\partial x_l(p,\mathrm{w})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,\mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}}\, x_k(p,\mathrm{w}). \tag{3.2.3}$$

Матриця $S(p,\mathrm{w})$ називається *матрицею Слуцького* (або *матрицею заміщення*), її елементи називаються *ефектом заміщення.*

Отож, нерівність (3.2.2) можна записати у вигляді

$$\mathrm{d}p \cdot S(p,\mathrm{w})\, \mathrm{d}p \leqslant 0. \tag{3.2.4}$$

Тому правильна така теорема.

Теорема 3.2.1. *Нехай функція попиту Вальраса $x(p,\mathrm{w})$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги, тоді для всіх (p,w) матриця Слуцького $S(p,\mathrm{w})$ задовольняє умову $v \cdot S(p,\mathrm{w})\, v \leqslant 0$ для всіх $v \in \mathbb{R}^L$, тобто матриця Слуцького від'ємно квазінапіввизначена.*

Оскільки матриця $S(p, \mathrm{w})$ від'ємно квазінапіввизначена, то для всіх $l = 1, ..., L$, $s_{ll}(p, \mathrm{w}) \leqslant 0$: тобто, компенсоване зростання ціни товару завжди призводить до незростання попиту на цей товар.

З нерівності

$$s_{ll}(p, \mathrm{w}) = \frac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial p_l} + \frac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} x_l(p, \mathrm{w}) \leqslant 0$$

випливає таке: $\dfrac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial p_l} > 0$, то $\dfrac{\partial x_l(p, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} < 0$, тобто товаром Гіффена для системи ціна-дохід (p, w) можуть бути лише малоцінні товари.

З властивостей, яким задовольняє функція попиту Вальраса, випливає, що матриця Слуцького є завжди вироджена, тобто її ранг менший за L.

Теорема 3.2.2. *Нехай функція попиту Вальраса $x(p.\mathrm{w})$ диференційовна, тоді $p \cdot S(p, \mathrm{w}) = 0$ і $S(p, \mathrm{w})p = 0$.*

Легко переконатися, що при $L = 2$ матриця Слуцького $S(p, \mathrm{w})$ завжди симетрична. Проте для випадку $L > 2$ зроблених припущень стосовно функції попиту (однорідність нульового степеня, виконання умови Вальраса і слабкої аксіоми) недостатньо для виконання умови інтегровності, яка полягає в тому, що матриця ефектів заміщення $S(p, \mathrm{w})$ є симетричною. Подібну умову, необхідну для побудови функції корисності (означення якої подано вище) дає *сильна аксіома виявленої переваги.*

За сильною аксіомою виявленої переваги, якщо набір x^1 явно переважає набір x^2, набір x^2 явно переважає набір x^3,..., набір x^{n-1} явно переважає набір x^n, то набір x^n не може бути явно переважаючим x^1.

Звичайно, сильна аксіома виявленої переваги враховує слабку аксіому (як окремий випадок для $L = 2$). За певних додаткових умов регулярності ці дві аксіоми еквівалентні. Сильна аксіома за деяких умов неперервності характеризує таку послідовну множину переваг, що задовольняються умови інтегровності, необхідні для побудови функції корисності.

Означення 3.2.1. Функція попиту $x(p,\mathrm{w})$ задовольняє сильну аксіому виявленої переваги (strong axiom of revealed preferance - SA), якщо для кожної сукупності ситуацій $(p^1, \mathrm{w}^1), ..., (p^N, \mathrm{w}^N)$ таких, що $p^n \cdot x(p^{n+1}, \mathrm{w}^{n+1}) \leqslant \mathrm{w}^n$ і $x(p^{n+1}, \mathrm{w}^{n+1}) \neq x(p^n, \mathrm{w}^n)$ для всіх $n \leqslant N - 1$, маємо $p^N \cdot x(p^1, \mathrm{w}^1) > \mathrm{w}^N$.

Теорема 3.2.3. *Нехай функція попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ задовольняє сильну аксіому виявленої переваги, тоді існує відношення переваги $\succsim$ для якого $x(p, \mathrm{w})$ є функцією попиту, тобто для всіх (p, w), $x(p, \mathrm{w}) \succ y$ для кожного $y \neq x(p, \mathrm{w})$, $y \in B_{p,\mathrm{w}}$.*[1]

3.3 Ринкова функція попиту

Нехай $T \subset \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$. Функція $\varphi : T \to \mathbb{R}^L_+$ називається функцією попиту з областю визначення T, якщо вона неперервна і задовольняє умови: (i) $p \cdot \varphi(p, \mathrm{w}) = \mathrm{w}$ для всіх $(p\,\mathrm{w}) \in T$, і (ii) $\varphi(\lambda p, \lambda \mathrm{w}) = \varphi(p, \mathrm{w})$ для всіх $\lambda > 0$, (p, w) таких, що $(p, \mathrm{w}) \in T$ і $(\lambda p, \lambda \mathrm{w}) \in T$. При цьому $\varphi(p, \mathrm{w})$ інтерпритується

[1] Ricnter M. Revealead preference theory// Econometrica 34.-1966.-P.635-645.

як набір благ який може бути куплений при цінах p і доході w. Нехай $\varphi(p, \mathrm{w})$ функція попиту з областю визначення T і існує відношення переваги $\succsim$ таке, що для всіх $(p, \mathrm{w}) \in T$, $\varphi(p, \mathrm{w})$ - єдиний розв'язок задачі раціонального вибору споживача, тобто єдиний елемент множини $\{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leqslant \mathrm{w}$ і $x \succsim x'$ для всіх x' таких, що $p \cdot x' \leqslant \mathrm{w}\}$, тоді $\varphi(\cdot)$ називається функцією попиту споживача. Нехай $\varphi(\cdot)$ функція попиту і P відношення на $\mathbb{R}^L_+$: xPy, якщо x і y різні набори і існує $(p, \mathrm{w}) \in T$ таке, що $x = \varphi(p, \mathrm{w})$ і $p \cdot y \leqslant \mathrm{w}$. Функція попиту $\varphi(\cdot)$ задовольняє слабку аксіому виявленої переваги (WA), тоді і лише тоді, коли P - асиметричне відношення, і $\varphi(\cdot)$ задовольняє сильну аксіому виявленої переваги (SA), тоді і лише тоді, коли P - ациклічне відношення. Якщо $\varphi(\cdot)$ функція попиту споживача, то вона задовольняє SA, і якщо $\varphi(\cdot)$ задовольняє SA , то вона є функцією попиту споживача. Нехай $\varphi(\cdot)$ функція попиту споживача і нехай вона є диференційовна, тоді матриця $\mathrm{D}_p\varphi(p, \mathrm{w})$ від'ємно напіввизначена на підпросторі $\{z \in \mathbb{R}^L : z \cdot \varphi(p, \mathrm{w}) = 0\}$ і $\bar{z} \cdot \mathrm{D}_p\varphi(p, \mathrm{w})z = z \cdot \mathrm{D}_p\varphi(p, \mathrm{w})\bar{z}$ для всіх z і $\bar{z}$ з цього підпростору.

Означення 3.3.1. Функція попиту $\varphi(\cdot)$ називається ринковою функцією попиту, якщо існує $I \geqslant 1$ додатних чисел $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_I$, $\sum\limits_i \delta_i = 1$ і I функцій попиту споживачів $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, ..., $x_I(\cdot)$ таких, що $\varphi(p, \mathrm{w}) = \sum\limits_{i=1}^{I} x_i(p, \delta_i \mathrm{w})$ для кожної пари ціна-дохід (p, w) в області визначення $\varphi(p, \mathrm{w})$.

Де δ_i - інтерпретується як доля i-го споживача в сукупному доході w.

Припустимо, що є I споживачів, кожний з яких має відношення переваги $\underset{i}{\succsim}$ і відповідну функцію попиту $x_i(p, \mathrm{w}_i)$, де w_i - дохід i -го споживача. Тоді $\mathrm{w} = \sum\limits_i \mathrm{w}_i$ - сукупний дохід, а

$\delta_i = \dfrac{\mathrm{w}_i}{\mathrm{w}}$.

Отож, ринкова функція попиту (або сукупна функція попиту - aggregate demand) має вигляд

$$\varphi(p, \mathrm{w}) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, \delta_i \mathrm{w}).$$

Приклад 3.3.1. 1. Припустимо, що всі споживачі мають відношення переваги $\underset{i}{\succsim}$, які зображаються функціями корисності Коба-Дугласа $u_i(x_i) = x_{1i}^{\alpha_i} x_{2i}^{1-\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, ..., I$. Тоді функцію попиту i -го споживача знаходимо як розв'язок задачі

$$u_i(x_i) \to \max, \qquad x_i \in \mathbb{R}_+^2, \quad p_1 x_{1i} + p_2 x_{2i} = \mathrm{w}_i, \ \ i = 1, ..., I.$$

З необхідних умов оптимальності (4.1.4) знаходимо

$$x_{1i} = \frac{\alpha_i \mathrm{w}_i}{p_1}, \qquad x_{2i} = \frac{(1-\alpha_i)\mathrm{w}_i}{p_2}, \quad i = 1, ..., I.$$

Отже, сукупний попит на ринку кожного товару буде

$$\varphi(p, \mathrm{w}) = \Big(p_1^{-1} \sum_i \alpha_i \mathrm{w}_i,\ p_2^{-1}(\mathrm{w} - \sum_i \alpha_i \mathrm{w}_i)\Big), \quad \mathrm{w} = \sum_i \mathrm{w}_i.$$

2. Припустимо, що є три споживачі, попит кожного з яких на товар x визначається лінійною функцією:

$$x_1 = 10 - p_x, \quad x_2 = 20 - 6p_x, \quad x_3 = 50 - 4p_x.$$

Оскільки попит кожного споживача не є від'ємним, то

$$\varphi(p_x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 80 - 11p_x, & 0 \leqslant p_x \leqslant 3,33, \\ x_1 + x_3 = 60 - 5p_x, & 3,33 < p_x \leqslant 10, \\ x_3 = 50 - 4p_x, & 10 < p_x \leqslant 12,5. \end{cases}$$

▲

Означення 3.3.2. Відношення переваги володіє властивістю гомотетії, якщо функція корисності, яка його зображає, однорідна першого степеня.

Теорема 3.3.1. [1] *Ринковий попит* $\varphi = \sum\limits_i x_i : \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^L_+$ *незалежить від розподілу доходу і функцій попиту споживачів тоді і лише тоді, коли існує відношення переваги* $\succsim$ *на* $\mathbb{R}^L_+$*, яке володіє властивістю гомотетії і визначає функцію попиту для кожного споживача* $x_i(\cdot)$.

Теорема 3.3.2. [2] *Нехай* $\varphi(\cdot)$ *неперервно диференційовна функція попиту на* L *товарів. Тоді для кожної пари ціна-дохід* $(p, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_+$ *існує ринкова функція попиту породжена функціями попиту* I *споживачів* $\{x_i(\cdot)\}$ *така, що*

$$\varphi(p, \mathrm{w}) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p, \mathrm{w}/I) \quad i$$

$$\frac{\partial \varphi_l(p, \mathrm{w})}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x_{li}(p, \mathrm{w}/I)}{\partial p_j} \quad \text{для всіх } l, j.$$

[1] Antonelli G. Sulla Teoria Matematica della Economia Politica. Pisa: Nella Tipognafia del Folchetto. English translation: J.S.Chopman, A.P.Kirman, in: Chipman, J.S., L. Hurwicz, M. Richter, H. Sonnenschein, eds., Preferences, utility, and demand. New York, 1971, pp. 333-360.

[2] H. Sonnenschein Do Walras' identity and continuity characterize the class of community excess demand functions?// Journal of Economic Theory,6,1973.- pp.345-354.

3.4 Індекси цін і реального доходу

Нас часто цікавить зміна вартості життя у зв'язку зі зміною доходів і (або) цін.

Припустимо, що видатки споживача дорівнюють його доходам і становлять у початковому (базовому) періоді

$$\mathrm{w}^0 = \sum x^0 p^0, \quad \text{де } x^0 \in x(p^0, \mathrm{w}^0),$$

в поточному

$$\mathrm{w}^t = \sum x^t p^t, \quad \text{де } x^t \in x(p^t, \mathrm{w}^t),$$

де верхній індекс 0 відповідає показникам базового, індекс t - поточного періоду; x і p - відповідно кількість товарів, які купують і їхні ціни, під знаком $\sum$ розуміємо суму видатків на купівлю споживчого кошика.

Щоб оцінити зміни вартості життя в поточному періоді порівняно з базовим, треба визначити індекси номінального доходу і цін.
Індекс номінального доходу визначають за формулою

$$\mathcal{M}_{\mathrm{w}} = \frac{\mathrm{w}^t}{\mathrm{w}^0}.$$

Індекс цін можна визначити двома способами:

1) як індекс Ласпейреса

$$\mathcal{L}_p = \frac{\sum x^0 p^t}{\sum x^0 p^0};$$

2) як індекс Паше

$$\mathcal{P}_p = \frac{\sum x^t p^t}{\sum x^t p^0}.$$

Індекс Ласпейреса припускає зважування цін двох періодів за обсягом споживання товарів у базовому, а індекс Паше - за обсягом їх споживання в поточному періоді.

Ці індекси не враховують впливу зміни цін на структуру споживання, тому ні один з них не дає правильного уявлення про зміну цін. Очевидно, якщо (в двопродуктовій моделі) ціна товару x_1 зростає ($p_1^t > p_1^0$), то обсяг купівлі його зменшується ($x_1^t < x_1^0$) і, навпаки, зі зниженням ціни ($p_1^t < p_1^0$) обсяг купівлі збільшується ($x_1^t > x_1^0$). Значення індексу Ласпейреса, у визначенні якого використовують як вагові множники обсяги споживання x^0, дає перебільшуване уявлення про зміну цін у випадку їх зростання, але занадто зменшене у випадку їх зниження. Навпаки, значення індексу Паше, де як вагові множники використовують обсяги споживання x^t, дає зменшене уявлення про зміну цін у випадку їх зростання, але перебільшене у випадку їх зниження. В будь-якому випадку індекс Ласпейреса є більшим за індекс Паше $\mathcal{L}_p > \mathcal{P}_p$.

Розглянемо індекс Ласпейреса. Якщо $\sum x^0 p^t \leqslant \mathrm{w}^t$, то початковий набір товарів x^0 доступний споживачеві при поточних цінах p^t і доходів w^t. Отже, при змінених умовах споживач міг би купити початковий набір x^0. Якщо фактично в поточному періоді споживач купує набір x^t, то або

$$\sum x^0 p^t < \sum x^t p^t, \tag{3.4.1}$$

що свідчить про те, що набір x^t належить поверхні байдужості вищого рівня переваг, тобто споживач отримає більше задоволення, ніж вибираючи набір x^0, або

$$\sum x^0 p^t = \sum x^t p^t.$$

Це означає, що набори x^0 і x^t мають однакову вартість, тобто належать тій самій бюджетній прямій, але споживач явно надає перевагу набору x^t, який належить кривій байдужості вищого рівня переваг.

Розділивши обидві частини нерівності (3.4.1) на $\sum x^0p^0$, одержимо

$$\frac{\sum x^0p^t}{\sum x^0p^0} < \frac{\sum x^tp^t}{\sum x^0p^0}. \tag{3.4.2}$$

Ліва частина цієї нерівності є індексом Ласпейреса, права - індексом номінального доходу. Отже,

$$\mathcal{L}_p < \mathcal{M}_{\mathrm{w}}.$$

Тому становище споживача в поточному періоді буде кращим, ніж в базовому, проте індекс Ласпейреса виявляється меншим за індекс номінального доходу.

Тепер розглянемо індекс Паше. Якщо $\sum x^0p^0 > \sum x^tp^0$, то набір x^t, який вибирають у період t, доступний і в період 0. Якщо тоді він надавав перевагу набору x^0, то лише тому, що цей набір належав кривій байдужості вищого порядку. Поділивши обидві частини нерівності на $\sum x^tp^t$, одержимо

$$\frac{\sum x^0p^0}{\sum x^tp^t} < \frac{\sum x^tp^0}{\sum x^tp^t}, \tag{3.4.3}$$

або

$$\frac{\sum x^tp^t}{\sum x^0p^0} < \frac{\sum x^tp^t}{\sum x^tp^0}. \tag{3.4.4}$$

Ліва частина нерівності (3.4.4) є індексом номінального доходу, права - індексом цін Паше. Отже,

$$\mathcal{P}_p > \mathcal{M}_{\mathrm{w}}.$$

Становище споживача в поточному періоді буде гіршим, ніж у базовому.

Індекс реального доходу характеризує зміну купівельної спроможності номінального доходу. Якщо при розрахунку індексу цін ціни товарів зважують за об'ємами їх придбання в базовому або поточному періоді, то при розрахунку індексу реального доходу, навпаки, об'єми споживання кожного періоду зважують за цінами базового або поточного періоду. *Індекс реального доходу Ласпейреса* має вигляд

$$\mathcal{R}_{\mathcal{L}} = \frac{\sum p^0 x^t}{\sum p^0 x^0}, \tag{3.4.5}$$

а *індекс реального доходу Паше*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \frac{\sum p^t x^t}{\sum p^t x^0}. \tag{3.4.6}$$

Знаменик (3.4.5) є номінальним доходом у період 0, чисельник - дохід, який необхідний для купівлі в період t набору x^t при цінах базового періоду. Чисельник (3.4.6) є номінальним доходом у період t.

Використання індексів (3.4.5) і (3.4.6) дає той самий результат, якщо ціни залишаються незмінними $p^t = p^0$, а змінюється лише номінальний дохід, або якщо при незмінному номінальному доході всі ціни міняються в одному напрямі. Якщо ціни змінюються, то результати розрахунків за формулами (3.4.5) і (3.4.6) можуть виявитися різними. Якщо обсяги споживання різних товарів змінюються в різних напрямах (споживання одних збільшується, а інших зменшується), то може трапитись так, що один індекс свідчитиме про ріст, а інший - про зниження реального доходу.

Індекси доходу і цін пов'язані певним співвідношенням. Поділивши індекс номінального доходу на індекс цін Паше, отримаємо індекс доходу Ласпейреса

$$\frac{\mathcal{M}_{\mathrm{w}}}{\mathcal{P}_p} = \frac{\sum p^t x^t}{\sum p^0 x^0} : \frac{\sum p^t x^t}{\sum p^0 x^t} = \frac{\sum p^0 x^t}{\sum p^0 x^0} \equiv \mathcal{R}_{\mathcal{L}}.$$

Відповідно поділивши індекс номінального доходу на індекс цін Ласпейреса, отримаємо індекс реального доходу Паше

$$\frac{\mathcal{M}_{\mathrm{w}}}{\mathcal{L}_p} = \frac{\sum p^t x^t}{\sum p^0 x^0} : \frac{\sum p^t x^0}{\sum p^0 x^0} = \frac{\sum p^t x^t}{\sum p^t x^0} \equiv \mathcal{R}_{\mathcal{P}}.$$

Завдання до розділу 3

1.

2.

3.

4. Перевірити, що товар є товаром Гіфена, якщо він малоцінний і частка доходу, витраченого на цей товар, перевищує відношення еластичності від'ємної компенсованої ціни до еластичності за доходом цього товару.

5. Нехай функція корисності має вигляд $u(x_1, x_2) = \max(\min\{2x_1, x_2\}, \min\{x_1, 2x_2\})$. Зобразити класи еквівалентності відношення переваги, яке зображається функцією корисності $u(\cdot)$.

Розділ 4

Споживчий вибір: кількісний підхід

4.1 Задача максимізації корисності

Нехай $u(\cdot)$ *неперервна функція корисності поля переваг* $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$, *де* $\succsim$ - *неперервне, локально ненасичуване відношення переваги.*

> **Задача максимізації корисності (UMP - utility maximization problem):** при заданих системі цін $p \gg 0$ і рівні доходу $\mathrm{w} > 0$ знайти допустимий споживчий набір, для якого рівень корисності найбільший, тобто
>
> $$u(x) \to \max, \;\; x \in B_{p,\mathrm{w}} = \{\, x \in \mathbb{R}^L_+ \, : \, p \cdot x \leqslant \mathrm{w}\}. \qquad \text{(UMP)}$$

Теорема 4.1.1. *Нехай* $p \gg 0$ *і* $u(\cdot)$ *неперервна функція, тоді задача максимізації корисності* (UMP) *має розв'язок.*

Доведення. Якщо $p \gg 0$, то бюджетна множина $B_{p,\mathrm{w}}$ компактна, тобто обмежена (для кожного $l = 1, ..., L$, $x_l \leqslant \dfrac{\mathrm{w}}{p_l}$ для всіх $x \in B_{p,\mathrm{w}}$) та замкнута. Тому за теоремою Вейєрштрасса неперервна функція $u(\cdot)$ на компактній множині досягає максимального значення. Отже, задача (UMP) має розв'язок.

□

Означення 4.1.1. Відображення, яке кожній парі ціна-дохід $(p, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ ставить у відповідність множину $x(p, \mathrm{w}) = \{x \in B_{p,\mathrm{w}} : u(x) = \max\limits_{\acute{x} \in B_{p,\mathrm{w}}} u(\acute{x})\}$ - оптимальних споживчих наборів задачі (UMP), називається ***попитом Вальраса***. Якщо для кожної пари (p, w) множина $x(p, \mathrm{w})$ складається з однієї точки, то назвемо це відображення ***функцією попиту Вальраса***.[1]

Теорема 4.1.2. *Нехай $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ - поле переваг, $u(\cdot)$ неперервна функція корисності, яка зображає локально ненасичуване відношення переваги. Тоді попит Вальраса володіє властивостями:*

(i) *однорідний степеня нуль:* $x(\alpha p, \alpha \mathrm{w}) = x(p, \mathrm{w})$ *для всіх* $(p, \mathrm{w}) \gg 0$ *і* $\alpha > 0$;

(ii) *задовольняє умову Вальраса: для кожної пари* (p, w) $p \cdot x = \mathrm{w}$ *для всіх* $x \in x(p, \mathrm{w})$;

(iii) *якщо* $\succsim$ *опукле* ($u(\cdot)$*- квазіввігнута функція*), *то* $x(p, \mathrm{w})$ *- опукла множина. Зокрема, якщо* $\succsim$ *строго опукле*

[1] Визначену функцію попиту називають також функцією попиту Маршала.

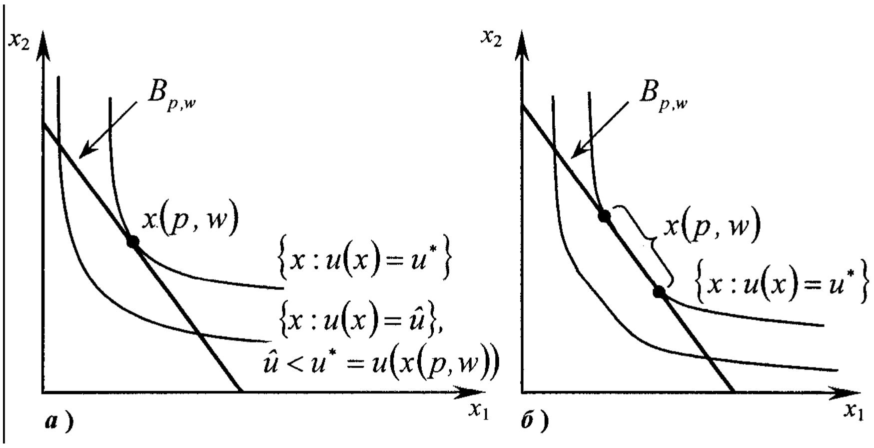


Рис. 4.1.1. Задача максимізації корисності:
розв'язок єдиний (*а*); множина розв'язків (*б*)

($u(\cdot)$ - *строго квазіввігнута*), *то множина* $x(p, \mathrm{w})$ *складається лише з однієї точки;*

(iv) *напівнеперервний зверху для всіх* $(p, \mathrm{w}) \gg 0$. *Зокрема, функція попиту Вальраса* $x(p, \mathrm{w})$ *неперервна.*

Доведення. (i) Оскільки для всіх $\alpha > 0$, $B_{\alpha p, \alpha \mathrm{w}} = \{\, x \in \mathbb{R}^L_+ : \alpha p \cdot x \leqslant \alpha \mathrm{w} \,\} = \{\, x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leqslant \mathrm{w} \,\} = B_{p,\mathrm{w}}$ множина допустимих споживчих наборів у задачі (UMP) при зміні ціни і доходу в однаковій пропорції $\alpha > 0$ не змінюється, то залишається незмінною і множина оптимальних споживчих наборів, тобто для всіх $\alpha > 0$, $x(\alpha p, \alpha \mathrm{w}) = x(p, \mathrm{w})$.

(ii) Виконання умови Вальраса випливає з властивості локальної ненасичуваності відношення переваги $\succsim$. Якщо $p \cdot x <$

w для деякого $x \in x(p, \mathrm{w})$, тоді існує споживчий набір $\acute{x} \in \mathbb{R}^L_+$ такий, що $p \cdot \acute{x} \leqslant \mathrm{w}$ і $\acute{x} \succ x$, тобто $u(\acute{x}) > u(x)$. Це суперечить тому, що набір x є оптимальним для задачі (UMP).

(iii) Нехай $u(\cdot)$ - квазіввігнута функція і x та $\acute{x}$, $x \neq \acute{x}$, два довільні споживчі набори з множини $x(p, \mathrm{w})$. Оскільки множина $B_{p,\mathrm{w}}$ - опукла, то $x^\alpha = \alpha x + (1-\alpha)\acute{x} \in B_{p,\mathrm{w}}$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$. Позначимо максимальний рівень корисності через u^*, тобто $u^* = u(x)$, де $x \in x(p, \mathrm{w})$. Тоді $u(x^\alpha) \geqslant \min\{u(x), u(\acute{x})\} = u^*$. Оскільки $x^\alpha \in B_{p,\mathrm{w}}$ і $u(x^\alpha) \geqslant u^*$, то $x^\alpha \in x(p, \mathrm{w})$. З цього випливає, що множина $x(p, \mathrm{w})$ опукла.

Припустимо, що $u(\cdot)$ строго квазіввігнута функція. Нехай множина $x(p, \mathrm{w})$ містить два різні споживчі набори x^1 і x^2. Тоді $\bar{x} = \dfrac{1}{2}x^1 + \dfrac{1}{2}x^2 \in B_{p,\mathrm{w}}$ і $u(\bar{x}) > u^*$. Однак це суперечить тому, що $x^1 \in x(p, \mathrm{w})$, $x^2 \in x(p, \mathrm{w})$. Одержане протиріччя доводить, що множина $x(p, \mathrm{w})$ складається лише з однієї точки.

(iv) Припустимо, що послідовність $\{(p^m, \mathrm{w}^m)\}_{m=1}^\infty \to (\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, $(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++}$, і послідовність $\{x^m\}_{m=1}^\infty$, $x^m \in x(p^m, \mathrm{w}^m)$ для всіх m така, що $x^m \to \tilde{x}$ і $\tilde{x} \notin x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$. Оскільки $p^m \cdot x^m \leqslant \mathrm{w}^m$ для всіх m, то при $m \to \infty$ маємо $\bar{p} \cdot \tilde{x} \leqslant \bar{\mathrm{w}}$. Отже, споживчий набір $\tilde{x}$ може придбати споживач. Оскільки $\tilde{x}$ не є оптимальним набором, то $u(\bar{x}) > u(\tilde{x})$ для деякого $\bar{x} \in B_{\bar{p},\bar{\mathrm{w}}}$ (див. рис. 4.1.2).

Згідно з неперервністю функції $u(\cdot)$ існує набір y досить близький до набору $\bar{x}$ такий, що $\bar{p} \cdot y < \bar{\mathrm{w}}$ і $u(y) > u(\tilde{x})$. Оскільки $(p^m, \mathrm{w}^m) \to (\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, то для досить великих m маємо $p^m \cdot y < \mathrm{w}^m$. Отже, y є елементом бюджетної множини B_{p^m,w^m}

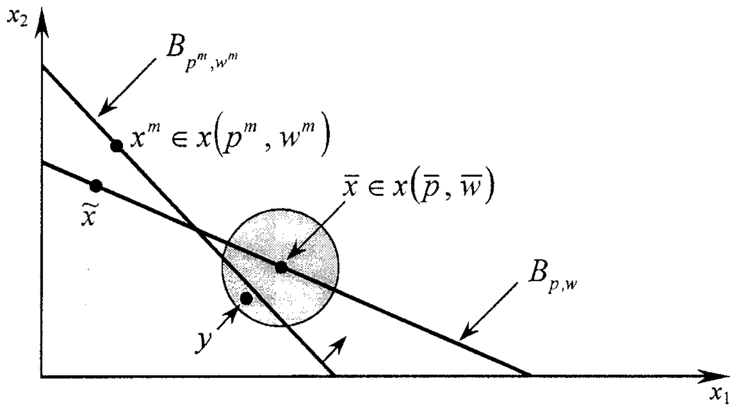


Рис. 4.1.2.

і $u(x^m) \geqslant u(y)$, бо $x^m \in x(p^m, \mathrm{w}^m)$. Перейшовши до границі $m \to \infty$ в останній нерівності та врахувавши неперервність $u(\cdot)$, одержимо, що $u(\tilde{x}) > u(y)$, тобто одержимо суперечність. Отже, $\tilde{x} \in x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, тобто попит Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ напівнеперервний зверху.

Аналогічними міркуваннями визначаємо неперервність функції попиту $x(p, \mathrm{w})$ (див. математ. додаток). □

Припустимо, що функція корисності $u(\cdot)$ *неперервно диференційовна.* Необхідними умовами оптимальності для задачі (UMP) є умови Куна-Таккера (див. математ. додаток): якщо $x^* \in x(p, \mathrm{w})$ є розв'язком задачі (UMP), то існує множник Лагранжа $\lambda \geqslant 0$ такий, що для всіх $i = 1, ..., L$:[1]

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} \leqslant \lambda\, p_i, \qquad \text{виконується рівність, якщо } x_i^* > 0. \quad (4.1.1)$$

У матричному вигляді умови (4.1.1) матимуть вигляд

$$\nabla\, u(x^*) \leqslant \lambda\, p\,, \tag{4.1.2}$$

$$x^* \cdot [\ \nabla\, u(x^*) - \lambda\, p\ ]\ =\ 0. \tag{4.1.3}$$

Зокрема, якщо оптимальний споживчий набір є внутрішнім для споживчої множини (тобто, якщо $x^* \gg 0$ - закуповують всі види товарів), то умови оптимальності набудуть вигляду

$$\nabla\, u(x^*) = \lambda\, p \quad (\ \mathrm{MU}(\,x^*)\ =\ \lambda\, p\ )\,. \tag{4.1.4}$$

У випадку внутрішнього оптимуму, умова (4.1.4) засвідчує, що *вектор* $\mathrm{MU}(x^*)$ *граничної корисності в точці оптимуму прямо пропорційний вектору p цін.*

Розглянемо випадок двох товарів $L = 2$. Тоді оптимальний споживчий набір x^*, за умови, що кожний товар купується, задовольняє систему рівнянь

$$\begin{aligned} \mathrm{MU}_1(x^*)\ -\ \lambda\, p_1\ &=\ 0, \\ \mathrm{MU}_2(x^*)\ -\ \lambda\, p_2\ &=\ 0. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

[1] Задачу (UMP) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} &-u(x) \to \min,\ \ x \in \mathbb{R}^L \\ &h(x) = p \cdot x - \mathrm{w} \leqslant 0, \qquad h_j(x) = -x_j \leqslant 0,\ j = 1, ..., L. \end{aligned}$$

Для цієї задачі умови Куна-Таккера виглядатимуть так:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} + \lambda\, p_i + \mu_i = 0,\ \ i = 1, ..., L, \\ &\lambda\,(p \cdot x^* - \mathrm{w}) = 0, \qquad \mu_i\,(-x_i^*) = 0,\ \ i = 1, ..., L, \\ &\text{де}\ \ x^* \in \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leqslant \mathrm{w},\ \},\ \ \lambda \geqslant 0,\ \ \mu_i \geqslant 0, i = 1, ..., L. \end{aligned}$$

Крім того, розв'язок задачі (UMP) належить деякій кривій байдужості $u(x) = u^*$, тоді нахил цієї кривої в точці x^* знаходимо з виразу

$$\mathrm{d}\,u(x_1, x_2) = \mathrm{MU}_1(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\,x_1 + \mathrm{MU}_2(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\,x_2 = 0$$

і дорівнює

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,x_1}\right|_{u(x)=u^*} = -\frac{\mathrm{MU}_1(x^*)}{\mathrm{MU}_2(x^*)}.$$

Врахувавши рівняння (4.1.5), одержимо, що в точці оптимуму x^* бюджетна пряма і відповідна крива байдужості дотикаються.

Цей факт справджується і у випадку $L > 2$, тобто поверхня байдужості в точці оптимуму дотикається бюджетної гіперплощини.

Якщо $\mathrm{MU}(x^*) \gg 0$, то в точці оптимуму можна отримати деякі класичні співвідношення між цінами та граничними нормами заміщення.

Теорію граничної корисності розробили незалежно і майже одночасно три економісти: С.Джевонс, К.Менгер і Л.Вальрас. Джевонс, Менгер і Вальрас корисність товару l зображали за допомогою функції $u_l(x_l)$, яка залежить від спожитої кількості цього товару, яка має неперервну монотонно спадну похідну. Корисність від спожитого набору товарів для споживача в цьому випадку $u(x) = \sum\limits_{l=1}^{L} u(x_l)$. Нехай споживання товару k збільшилось на величину $\mathrm{d}\,x_k$ і споживання товару l зменшилось на величину $\mathrm{d}\,x_l$ ($\mathrm{d}\,x_k$ додатне, $\mathrm{d}\,x_l$ від'ємне). Корисність спожитого набору залишається незмінною за умови, якщо споживач байдужий до результату одночасної зміни цих двох величин, тобто, якщо

$$\mathrm{d}\,u = u'_l \mathrm{d}\,x_l + u'_k \mathrm{d}\,x_k = 0,$$

або

$$-\frac{\mathrm{d}\,x_k}{\mathrm{d}\,x_l}\Big|_{\mathrm{d}\,u=0} = \frac{u'_l}{u'_k}.$$

Це відношення називається *граничною нормою заміщення товару l товаром k ($MRS_{l\,k}(x)$ -marginal rate of substitution of good l for good k at x)*: засвідчує, яку кількість товару k споживач повинен визначити для компенсації, якщо він зменшить на одну одиницю споживання товару l для того, щоб рівень корисності споживання не змінився. Згідно з означенням гранична норма заміщення товару l на товар k залежить від спожитої кількості товарів k і l і не залежить від кількості x_j інших товарів. Ця властивість погано узгоджується з дійсністю. Наприклад, кількість води, яка компенсує задане зменшення кількості вина, повинна загалом залежати від кількості пива, яка є наявна у споживача.

Для того щоб зобразити норми граничних заміщень, які не володіють зазначеною властивістю, Єджворт у 1881 р. ввів таку формалізацію. Функція корисності $u(x_1, ..., x_L)$ залежить від L аргументів x_l. Нехай ця функція диференційовна і відбувається зміна споживання тільки товарів x_l і x_k відповідно на $\mathrm{d}\,x_l$ і $\mathrm{d}\,x_k$ без зміни рівня корисності. Тоді

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\,\mathrm{d}\,x_l \;+\; \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\,\mathrm{d}\,x_k \;=\; 0.$$

Звідси, якщо споживач зменшує споживання товару x_l на $\mathrm{d}\,x_l < 0$ одиниць, то споживання товару x_k збільшиться на $\mathrm{d}\,x_k = \dfrac{\partial u(x)/\partial x_l}{\partial u(x)/\partial x_k}(-\mathrm{d}\,x_l)$ одиниць без зміни рівня корисності.

Отже, гранична норма заміщення товару l на товар k визначається як відношення

$$-\frac{\mathrm{d}\,x_k}{\mathrm{d}\,x_l}\Big|_{\mathrm{d}\,u=0} = \;\frac{\partial u(x)/\partial x_l}{\partial u(x)/\partial x_k}\Big|_{\mathrm{d}\,u=0} \;=\; \frac{\mathrm{MU}_l(x)}{\mathrm{MU}_k(x)}\Big|_{\mathrm{d}\,u=0} \;=\; MRS_{l\,k}(x).$$

Гранична норма заміщення може набувати різні значення, може дорівнювати нулю, може бути сталою або змінюватися, рухаючись уздовж кривої байдужості. У випадку опуклого відношення переваги, як на рис. 4.1.3, MRS спадає по мірі заміщення одного товару іншим, тобто споживач погоджується віддавати все меншу кількість товару, який заміщується, за ту саму кількість товару, який його заміщує (аналог спадаючої граничної корисності).

На рис. 4.1.3,*б* зображено, що споживач, перебуваючи в точці A, готовий віддати $x_2^1x_2^2$ продукту x_2 взамін приросту продукту x_1 на $x_1^1x_1^2$. Проте, маючи набір C, він за рівновеликий приріст продукту x_1 $(x_1^3x_1^4 = x_1^1x_1^2)$ згідний віддати лише $x_2^3x_2^4$ продукту x_2, величина якого менша за $x_2^1x_2^2$.

Нехай задано поле переваг $(\mathbb{R}^2, \succsim)$ і функцію корисності $u(\cdot)$, яка зображає строго монотонне (справджує аксіому ненасичуваності) і строго опукле відношення переваги. Припустимо, що $u(\cdot)$ двічі неперервно диференційовна. Рівняння кривої байдужості $u(x_1, x_2) = \bar{u}$ визначає x_2 як неявну функцію x_1 і

$$\frac{\mathrm{d}\, x_2}{\mathrm{d}\, x_1} = -\frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2}.$$

Оскільки відношення переваги строго монотонне, то

$$\frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_1} > 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial u(x_1, x_2(x_1))}{\partial x_2} > 0,$$

тобто вздовж кривої байдужості $\dfrac{\mathrm{d}\, x_2}{\mathrm{d}\, x_1} < 0$. Оскільки відношення переваги строго опукле, то крива байдужості опукла і $\dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}\, x_1^2} > 0$. Отже, $\dfrac{\mathrm{d}(MRS_{1\,2})}{\mathrm{d}\, x_1} = -\dfrac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}\, x_1^2} < 0$ і гранична норма заміщення товару x_1 на товар x_2 спадає.

Зауважимо, що норма граничного заміщення є інваріантною стосовно будь-якої зміни індексу корисності. Справді,

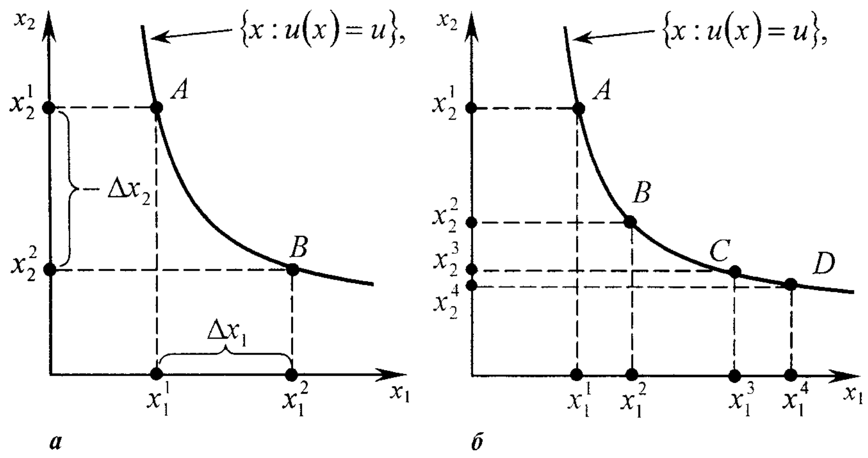


Рис. 4.1.3. Гранична норма заміщення

нехай $v(x) = f(u(x))$, де $f(\cdot)$ монотонно зростаюча і диференційовна функція. Тоді

$$\begin{aligned} MRS^v_{1\,2}(x) &= \frac{\mathrm{MV}_1(x)}{\mathrm{MV}_2(x)} \\ &= \frac{f'(\cdot)\,\mathrm{MU}_1(x)}{f'(\cdot)\,\mathrm{MU}_2(x)} = \frac{\mathrm{MU}_1(x)}{\mathrm{MU}_2(x)} \\ &= MRS^u_{1\,2}(x). \end{aligned}$$

Форми кривих байдужості свідчать про готовність замінити один товар іншим.

Для двох *абсолютно взаємозамінних товарів* $MRS(x) = a = const$. У цьому випадку криві байдужості є прямими лініями (лінія u_1 рис. 4.1.4)

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -a \Rightarrow x_2 + ax_1 = c.$$

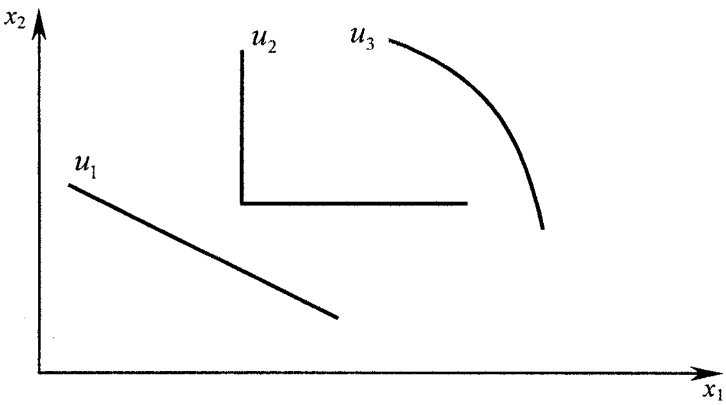


Рис. 4.1.4. Типи кривих байдужості

Зазвичай такі товари розглядають як один товар.

Можливі випадки, коли товари не можуть замінювати один одного, наприклад, лівий і правий туфель. Такі товари *абсолютно доповнюють один одного.* У цьому випадку криві байдужості вироджуються в два взаємно перпендикулярні відрізки (u_2 рис. 4.1.4): якщо $\mathrm{MRS}_{21} = 0$, то $x_2 = a$; якщо $\mathrm{MRS}_{21} = \infty$, то $x_1 = a$ ($\mathrm{MRS}_{12} = 0$). Інколи можливо, що чим більше деякого товару має споживач, тим більше він хотів би його мати. Тоді крива байдужості ввігнута і норма граничного заміщення зростає (u_3 рис. 4.1.4). Варто зауважити , що ні один із цих варіантів не можна виключити з розгляду, проте опуклість кривих байдужості і спадання граничної норми заміщення відображає найбільш загальну та поширену ситуацію.

Порядкова теорія корисності концентрує увагу на I квадранті карти байдужості (рис. 4.1.5). В цьому квадранті аксіома ненасичуваності виконується для обох товарів, тоді як в III квадранті потреба споживача в обох товарах насичена і

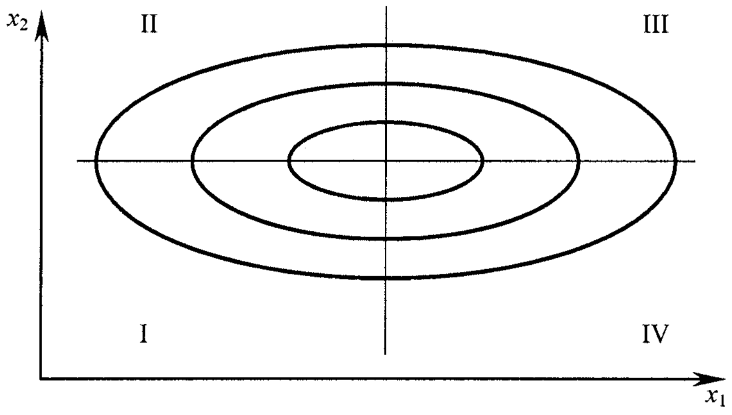


Рис. 4.1.5. Аксіома ненасичуваності справджується лише в I квадранті

збільшення їх споживання призведе лише до перенасичення. В квадранті II надлишковим був би лише ріст споживання товару x_2, а в квадранті IV - товару x_1.

Лише I квадрант цікавий для створення теорії споживання і лише в ньому існує проблема вибору та її оптимальне розв'язання. Для двох товарів l і k, які споживають у точці оптимуму, норма граничного заміщення товару l на товар k дорівнює відношенню цін p_l до p_k (див. рис.4.1.6)

$$MRS_{l\,k}(x^*) = \left.\frac{\mathrm{MU}_l(x^*)}{\mathrm{MU}_k(x^*)}\right|_{u(x)=u^*} = \frac{p_l}{p_k}. \qquad (4.1.6)$$

Розглянемо два товари k і l, де товар k споживається. Тоді зі співвідношення (4.1.1) одержуємо

$$MRS_{l\,k}(x^*) = \frac{\mathrm{MU}_l(x^*)}{\mathrm{MU}_k(x^*)} \leqslant \frac{p_l}{p_k}.$$

Гранична норма заміщення товару l на товар k менша або дорівнює відношенню ціни p_l до ціни p_k (тобто ціна p_l досить висока для того, щоб споживач хотів купити цей товар). На рис. 4.1.6, *б* зображено випадок, при якому товар x_2 не споживається.

Множник Лагранжа λ в умовах оптимальності (4.1.2) і (4.1.3) можна трактувати як характеристику зміни величини оптимального значення функції корисності $u^* = u(x(p, \mathrm{w}))$ при зміні константи обмеження w:[1]

$$\lambda = \frac{\partial u^*}{\partial \mathrm{w}}.$$

Справді, припустимо, що функція попиту $x(p, \mathrm{w})$ диференційовна і $x(p, \mathrm{w}) \gg 0$. Враховуючи виконання умови Вальраса $p \cdot x(p, \mathrm{w}) = \mathrm{w}$ і зокрема $p \cdot \mathrm{D_w}\, x(p, \mathrm{w}) = 1$ та умову (4.1.4), маємо

$$\frac{\partial u^*}{\partial \mathrm{w}} = \nabla u(x(p, \mathrm{w})) \cdot \mathrm{D_w}\, x(p, \mathrm{w}) = \lambda\, p \cdot \mathrm{D_w}\, x(p, \mathrm{w}) = \lambda.$$

Отже, у випадку, коли всі товари купуються, *оптимальний множник Лагранжа* λ, що за формулою (4.1.4) визначається як відношення граничної корисності товару до відповідної ціни, можна інтерпретувати як *граничну корисність доходу* споживача (або *граничну корисність грошей*). Величина λ засвідчує, наскільки ютилів збільшиться загальна корисність при збільшенні доходу споживача на 1 грн. [2]

[1]Знаючи величину значення множників Лагранжа можна отримати цінну інформацію про задачу. Множники Лагранжа, які відповідають розв'язкові задачі, вимірюють чутливість оптимального значення цільової функції до зміни констант обмеження. Наприклад, якщо деякий множник Лагранжа дорівнює нулю, то малі зміни відповідної константи обмеження не мають ніякого впливу на оптимальне значення цільової функції.

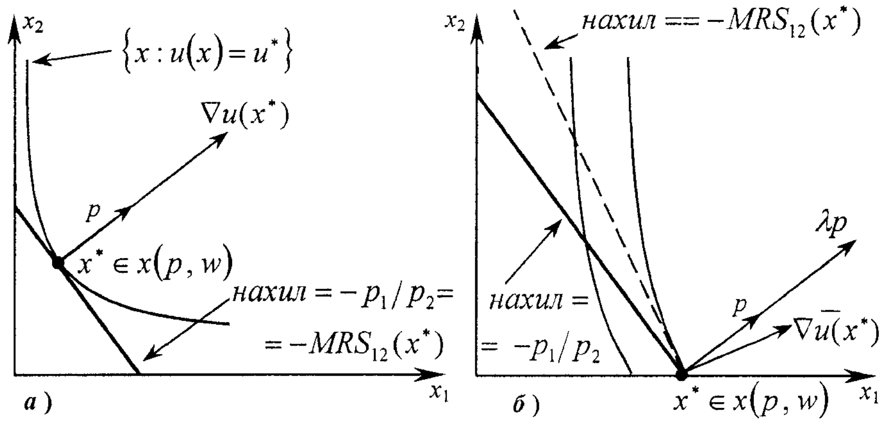


Рис. 4.1.6. Розв'язок внутрішній (*а*); розв'язок кутовий (*б*)

Рівність (4.1.4) можна переписати у вигляді

$$\frac{\mathrm{MU}_1(x^*)}{p_1} = ... = \frac{\mathrm{MU}_L(x^*)}{p_L} = \lambda. \tag{4.1.7}$$

Цю рівність можна інтерпретувати так. Відношення $\mathrm{MU}_l(x^*)/p_l$ - це приріст загальної корисності при збільшенні видатків споживача на товар l на одну грошову одиницю.

Отож, рівність (4.8.25) засвідчує, що *в оптимумі корисність, яку отримали за рахунок останньої грошової одиниці потраченої на купівлю будь-якого товару, однакова, незалежно від того, на який саме товар вона витрачена.* Цей факт називається другим законом Госена.

Зміст формули (4.1.2) полягає в тому, якщо 1 гривня, яку витратили на купівлю товару l, приносить недостатньо велику

[2] Якщо функція корисності $u(\cdot)$ зображає строго монотонне відношення переваги $\succsim$, тобто $\nabla u(x) \gg 0$ для всіх споживчих наборів x, тоді з умови (4.1.4) випливає, що $\lambda > 0$ для всіх розв'язків задачі (UMP).

користь для споживача, то він відмовляється від споживання цього товару.

Звернемо увагу на те, що умови (4.1.2) і (4.1.3) є лише необхідними умовами для того, щоб $x^* \in x(p, \mathrm{w})$. Якщо припустити, що функція корисності $u(\cdot)$ квазіввігнута, монотонна і $\nabla u(x) \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^L_+$, то умови Куна-Таккера є *достатніми умовами оптимальності* (див. математ. додаток).

Приклад 4.1.1. Модель Р.Стоуна

$$u(x) = \prod_{i=1}^{L} (\, x_i - a_i \,)^{\alpha_i} \to \max, \quad x \in B_{p,\mathrm{w}} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ \,:\, p \cdot x \leqslant \mathrm{w}\}, \tag{4.1.8}$$

де a_i - мінімально необхідна кількість i-го товару, яку купують в будь-якому випадку, і не є предметом вибору.

Для того щоб набір $(a_1, ..., a_L)$ міг купити споживач, необхідно, щоб рівень доходу w споживача був більшим за $\sum\limits_{i=1}^{L} p_i a_i$ - кількість грошей потрібних для купівлі цього набору. Коефіцієнти степеня $\alpha_i > 0$ характеризують відносну цінність товару для споживача.

Приєднавши до рівняння (4.1.4) бюджетне обмеження, одержуємо систему рівнянь для знаходження оптимального набору

$$\frac{\alpha_j \, u(x)}{x_j \; - \; a_j} \; - \; \lambda \, p_j \; = \; 0, \;\; j = 1, ..., L, \tag{4.1.9}$$

$$\sum_{j=1}^{L} p_j \, x_j \; = \; \mathrm{w} \tag{4.1.10}$$

для деякого $\lambda > 0$. З рівняння (4.1.9) знаходимо

$$x_j = a_j + \frac{\alpha_j\, u(x)}{\lambda\, p_j}, \quad j = 1, ..., L. \tag{4.1.11}$$

Домножимо кожне j - рівняння (4.1.11) на $\lambda\, p_j$ та підсумуємо за всіма j, врахувавши бюджетне обмеження (4.1.10), маємо

$$\frac{u(x)}{\lambda} = \frac{\mathrm{w} - \sum\limits_{j=1}^{L} p_j\, a_j}{\sum\limits_{j=1}^{L} \alpha_j}.$$

Звідки знаходимо функцію попиту на товари

$$x_j = a_j + \frac{\alpha_j\, (\mathrm{w} - \sum\limits_{j=1}^{L} p_j\, a_j)}{p_j \sum\limits_{j=1}^{L} \alpha_j}, \quad j = 1, ..., L.$$

Цій функції легко дати інтерпретацію. Спочатку купують мінімально необхідну кількість кожного виду товару a_j, потім суму грошей, яка залишилася після цієї покупки, розподіляють пропорційно "вагам" цінності α_j. Поділивши кількість грошей на ціну p_j, отримаємо додаткову кількість j-го товару і додаємо його до a_j.

Модель Стоуна має різні часткові випадки, наприклад, нехай всі $a_j = 0$, а всі α_j рівні між собою, тоді $x_j = \dfrac{\mathrm{w}}{L\, p_j}$, $j = 1, ..., L$ (тобто, дохід ділиться на L рівних частин і попит на товар j визначається як частка від ділення одержаної суми грошей на ціну товару). Ми бачимо, що попит росте при рості доходу з еластичністю, яка дорівнює одиниці, і зменшується з ростом ціни з еластичністю, яка дорівнює мінус одиниці.

Тобто, кожний товар у цій моделі нормальний і цінний, всі товари незалежні. Крім того, попит росте до нескінченності при нескіченному рості доходу, такі товари називають `товарами розкоші`. ▲

Щоб описати різні форми поведінки попиту на різні товари, треба, щоб модель містила інші складніші види функцій корисності. Наприклад, для функції корисності Торнквіста

$$u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{a-b} (x_1 + b - a)^{-b},$$

де a, b - параметри моделі, функція попиту має вигляд

(i) $x_1 = \dfrac{a\,\mathrm{w}}{\mathrm{w} + b\,p_1}$ - функція попиту на *товари першої необхідності,*

(ii) $x_2 = \dfrac{\mathrm{w}\,(\mathrm{w} + p_1\,(b - a))}{p_2\,(\mathrm{w} + b\,p_1)}$ - функція попиту на *товари розкоші.*

4.2 Непряма функція корисності

Для кожної пари ціна-дохід $(p, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ оптимальний рівень корисності задачі (UMP) позначимо через $v(p, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}$, тобто $v(p, \mathrm{w}) = u^* = u(x^*)$ для будь-якого $x^* \in x(p, \mathrm{w})$.

Означення 4.2.1. `Відображення, яке кожній парі ціна-дохід` $(p, \mathrm{w}) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{+}$ `ставить у відповідність число` $v(p, \mathrm{w})$ `називається` ***непрямою функцією корисності.***

Теорема 4.2.1. *Нехай* $u(\cdot)$ *неперервна функція корисності для поля переваг* $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ *і* $\succsim$ *локально ненасичуване відношення переваги. Тоді непряма функція корисності* $v(p, \mathrm{w})$ *володіє властивостями:*

(i) *однорідна степеня нуль:* $v(\alpha p, \alpha\mathrm{w}) = v(p, \mathrm{w})$ *для всіх* $(p, \mathrm{w}) \gg 0$ *і* $\alpha > 0$;

(ii) *строго зростає за змінною* w *і не зростає за змінною* p_l *для всіх* l*;*

(iii) *квазіопукла, тобто для будь-яких* $(p^i, \mathrm{w}^i) \gg 0$*,* $i = 1, 2$ *і для будь-якого* $\alpha \in [0, 1]$, $v(\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2, \alpha\mathrm{w}^1 + (1-\alpha)\mathrm{w}^2) \leqslant \max\{v(p^1, \mathrm{w}^1)\,, v(p^2, \mathrm{w}^2)\}$*;*

(iv) *неперервна за змінними* p *і* w*.*

Доведення. (i) Оскільки попит Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ є однорідним степеня нуль, то $v(\alpha p, \alpha\mathrm{w}) = u(x(\alpha p, \alpha\mathrm{w})) = u(x(p, \mathrm{w})) = v(p, \mathrm{w})$ для всіх $(p, \mathrm{w}) \gg 0$ і $\alpha > 0$.

(ii) Оскільки $\succsim$ локально ненасичуване, то оптимальний вибір споживача є точкою дотику поверхні рівня функції корисності до бюджетної гіперплощини. Тоді зі зростанням доходу w цей розв'язок перебуватиме на поверхні байдужості, яка відповідає вищому рівню корисності, тобто функція $v(p, \mathrm{w})$ строго зростає за змінною w.

Нехай $B_{\acute{p},\mathrm{w}} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ \ : \ \acute{p} \cdot x \leqslant \mathrm{w}\}$ і $\acute{p}_l \geqslant p_l$ $(\acute{p}_j = p_j,\ j \neq l)$, $l = 1, ..., L$. Тоді $B_{\acute{p},\mathrm{w}} \subseteq B_{p,\mathrm{w}}$. Отже, $\max\limits_{x \in B_{p,\mathrm{w}}} u(x) \geqslant \max\limits_{x \in B_{\acute{p},\mathrm{w}}} u(x)$, тобто $v(p, \mathrm{w}) \geqslant v(\acute{p}, \mathrm{w})$.

(iii) Нехай (p^1, w^1) і (p^2, w^2) довільні точки множини $\mathbb{R}^L_{++} \times \mathbb{R}_{++}$. Розглянемо точку $(p^\alpha, \mathrm{w}^\alpha) = (\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2,\ \alpha \mathrm{w}^1 + (1-\alpha)\mathrm{w}^2)$, $\alpha \in [0, 1]$. Нехай x^α розв'язок задачі (UMP) для пари $(p^\alpha, \mathrm{w}^\alpha)$. Тоді $x^\alpha \in B_{p^1,\mathrm{w}^1}$ або $x^\alpha \in B_{p^2,\mathrm{w}^2}$. Якщо це не так, то $p^1 \cdot x^\alpha > \mathrm{w}^1$ і $p^2 \cdot x^\alpha > \mathrm{w}^2$. Звідси маємо $(\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2) \cdot x^\alpha > \alpha \mathrm{w}^1 + (1-\alpha)\mathrm{w}^2$, а це суперечить тому, що x^α розв'язок задачі (UMP) для пари $(p^\alpha, \mathrm{w}^\alpha)$.

Отож, якщо $x^\alpha \in B_{p^1,\mathrm{w}^1}$, то $v(p^\alpha, \mathrm{w}^\alpha) = u(x^\alpha) \leqslant v(p^1, \mathrm{w}^1)$, або $x^\alpha \in B_{p^2,\mathrm{w}^2}$, то $v(p^\alpha, \mathrm{w}^\alpha) = u(x^\alpha) \leqslant v(p^2, \mathrm{w}^2)$, тобто $v(p^\alpha, \mathrm{w}^\alpha) \leqslant \max\{v(p^1, \mathrm{w}^1), v(p^2, \mathrm{w}^2)\}$ для всіх $\alpha \in [0, 1]$.

(iv) Доведення цієї властивості випливає з рівності $v(p, \mathrm{w}) = u(x(p, \mathrm{w}))$ і відповідної властивості попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ (властивість (iv) теореми 4.2). □

Приклад 4.2.1. Нехай споживач свій вибір виконує за допомогою функції корисності Коба-Дугласа $u(x_1, x_2) = k\, x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ при деякому $\alpha \in (0, 1)$ і $k > 0$.

Тоді задача (UMP) матиме вигляд

$$\begin{aligned}
&k\, x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \to \max, \quad x \in \mathbb{R}^2_+, \\
&p_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Оскільки оптимальний вибір $(x_1(p, \mathrm{w}),\ x_2(p, \mathrm{w}))$ є строго додатним, тоді згідно з (1.4.4) маємо

$$\begin{aligned}
k\alpha\, x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - \lambda p_1 &= 0, \\
k(1-\alpha)\, x_1^\alpha x_2^{-\alpha} - \lambda p_2 &= 0,
\end{aligned}$$

для деякого $\lambda \geqslant 0$. Звідси

$$p_1 x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} p_2 x_2$$

або, врахувавши бюджетне обмеження,

$$p_1 x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} (\mathrm{w} - p_1 x_1).$$

Отже, попит на товари x_1 і x_2 описується функціями

$$x_1 = \frac{\alpha \, \mathrm{w}}{p_1},$$
$$x_2 = \frac{(1-\alpha)\, \mathrm{w}}{p_2}.$$

Тепер можна записати непряму функцію корисності

$$v(p, \mathrm{w}) = u(x(p, \mathrm{w})) = \left[\, k \, \alpha^{\alpha} \, (1-\alpha)^{\alpha-1} \, \right] \, {p_1}^{-\alpha} \, {p_2}^{\alpha-1} \, \mathrm{w}.$$

▲

4.3 Зміна цін і доходу: випадок двох товарів

При заданих цінах (p_1, p_2) і доході w оптимум $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ споживача визначається умовою $MRS_{1\,2}(x^*) = \dfrac{p_1}{p_2}$. Як буде вести себе споживач при зміні ціни і доходу?

На рис. 4.3.7 (вгорі) показано зміну оптимуму споживача при зміні ціни на товар x_1 і не змінній структурі переваги та

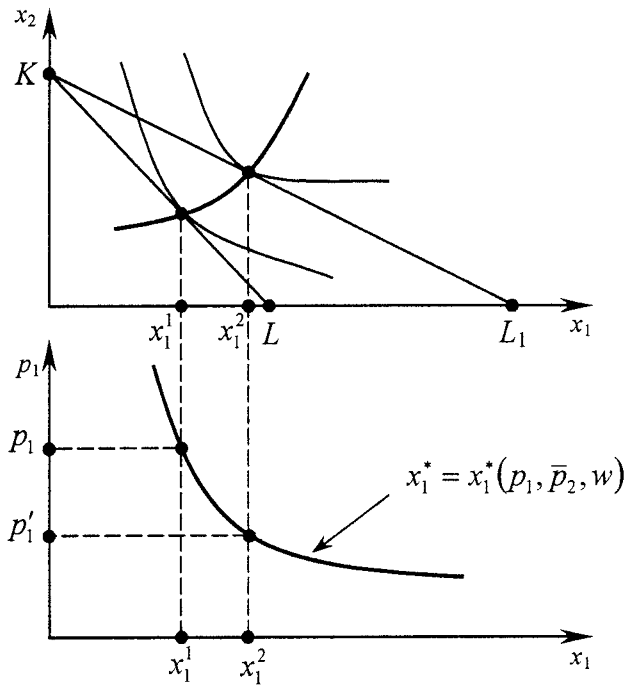


Рис. 4.3.7. Крива ціни-споживання і звичайна функція попиту

незмінному доході $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}$ і ціни $p_2 = \bar{p}_2$ на товар x_2. При спаданні ціни p_1 до $\acute{p}_1$, бюджетна пряма KL (з нахилом $-\dfrac{p_1}{p_2}$) обертається навколо точки K проти годинникової стрілки і займає положення KL_1 (з нахилом $-\dfrac{\acute{p}_1}{p_2}$). Тепер споживач може купити більше товару x_1, якщо він використає весь свій дохід, і, зокрема, йому доступні всі криві байдужості, які більш віддалені від початку координат. Оптимум споживача зміщується з точки A_1 в точку A_2. З'єднавши всі подібні точки, одержимо криву AA, яка визначає графік функції $x_2^* = x_2^*(x_1^*, \bar{p}_2, \bar{\mathrm{w}})$, яку називають *кривою ціни-споживання.* Вона зображає множину всіх оптимальних комбінацій товарів x_1 і x_2 при зміні ціни на товар x_1. На основі кривої ціни-споживання можна отримати криву індивідуального попиту $x_1^* = x_1^*(p_1, \bar{p}_2, \bar{\mathrm{w}})$, яка називається *звичайною функцією попиту* (нижня частина рис. 4.3.7). Вона характеризує величину попиту на товар x_1 як функцію його ціни. Проте аксіоми відношення переваги не виключають можливості зростання попиту на товар при зростанні ціни. Проілюструємо це графічно (див. рис. 4.3.8).

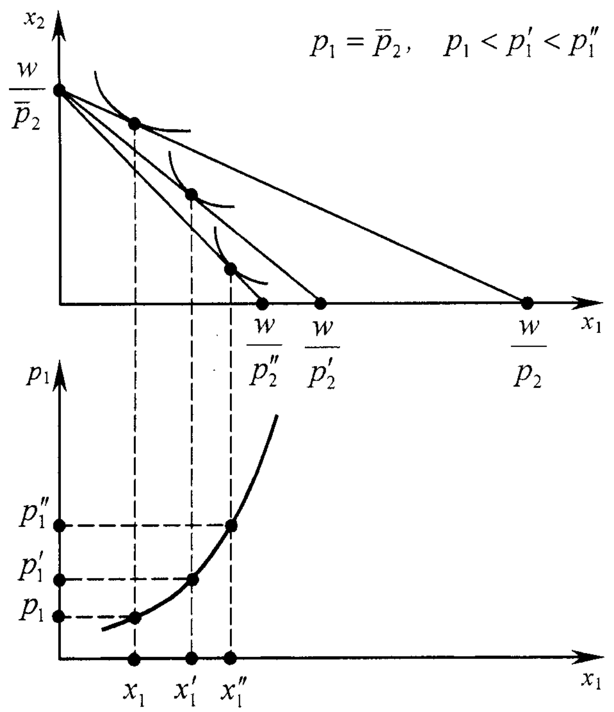


Рис. 4.3.8. Функція попиту на товар x_1 (товар Гіфена)

Розглянемо зміну оптимуму споживача при зміні його доходу (ціни $p_1 = \bar{p}_1$, $p_2 = \bar{p}_2$ і перевага залишаються незмінними). З ростом доходу бюджетна пряма KL зміщується в положення K_1L_1 і споживач переходить на криву байдужості з вищим рівнем корисності u_2 (рис. 4.3.9). Очевидно, що на-

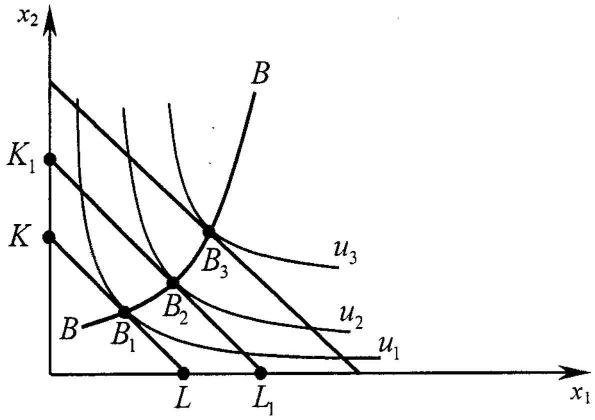


Рис. 4.3.9. Крива дохід-споживання для нормальних товарів

бір B_2 містить більшу кількість товару x_1 і x_2 ніж набір B_1. З'єднавши всі подібні точки, одержимо криву BB, яка визначає графік функції $x_2^* = x_2^*(x_1^*, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$, яку називають *кривою дохід-споживання.* Вона зображає множину всіх оптимальних наборів або комбінацій товарів при зміні доходу споживача і фіксованих цінах. На рис. 4.3.9 крива дохід-споживання має додатний нахил, тобто, з ростом доходу попит на обидва товари зростає. Такі товари називають *цінними* (*якісними товарами*). На рис. 4.3.10 крива дохід-споживання має від'ємний нахил. З ростом доходу споживання товару x_2 зростає, а товару x_1 спадає. Товар, споживання якого з ростом доходу зменшується, називається *малоцінним* (*товаром низької якості*). Крива дохід-споживання дає змогу побудувати індивідуальну *криву Енгеля,* яка характеризує зв'язок між

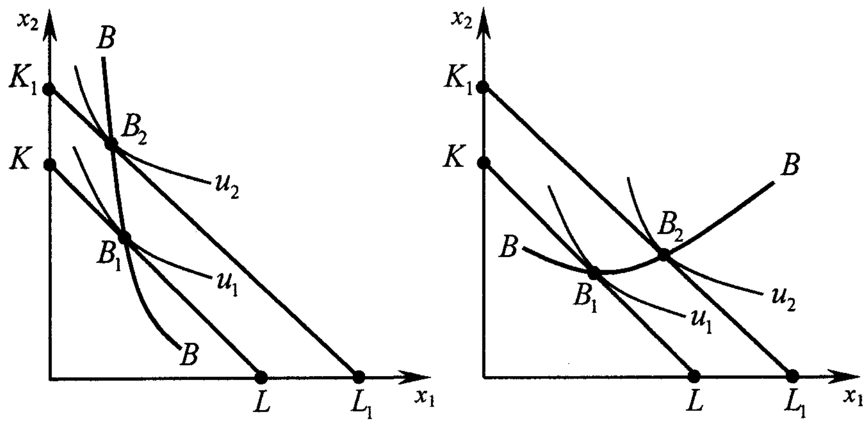


Рис. 4.3.10. Крива дохід-споживання : x_1 - малоцінний товар, x_2 - цінний товар (a); x_1 - цінний товар, x_2 - малоцінний товар ($б$)

величиною споживання товару і доходом споживача при незмінних цінах і перевазі. Графік функції $x_1^* = x_1^*(\mathrm{w}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$ і $x_2^* = x_1^*(\mathrm{w}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$ називають кривою Енгеля відповідно товару x_1 і x_2. Для цінних товарів крива Енгеля має додатний нахил. На практиці ми частіше цікавимось видатками на агреговані групи товарів - продуктові, промислові, послуги і т.д. Тоді крива Енгеля модифікується в криву видатків Енгеля, яка характеризує залежність видатків на ту чи іншу групу товарів від рівня доходу споживача.

Нарешті, можна розглянути випадок залежності споживання одного товару від ціни іншого товару, наприклад, залежність споживання товару x_2 від ціни на товар x_1, коли дохід споживача $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}$ і ціна $p_2 = \bar{p}_2$ фіксовані. Отримаємо функцію $x_2^* = x_2^*(p_1, \bar{p}_2, \bar{\mathrm{w}})$, яка називається *перехресною функцією попиту.* На рис. 4.3.11 зображено підвищення попиту на товар x_2, коли ціна на товар x_1 зростає.

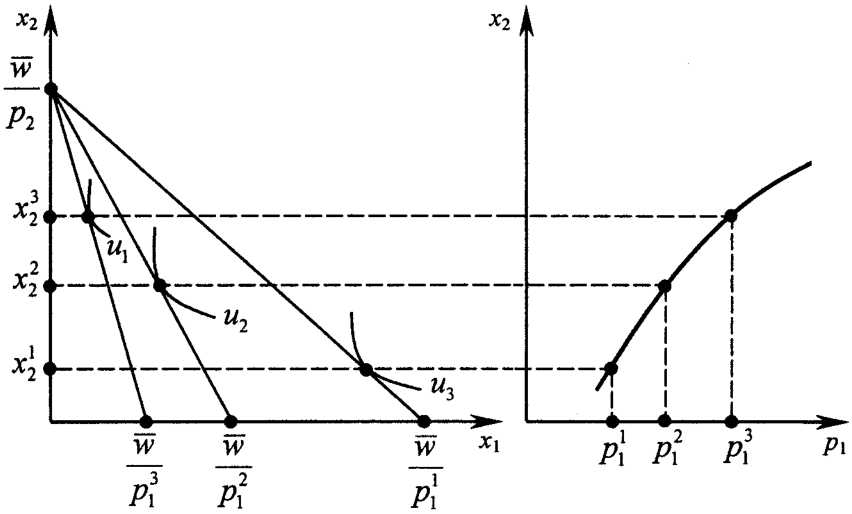


Рис. 4.3.11.

Тоді можна сказати, що x_2 є валовим заміщенням x_1, коли ціна на товар x_1 зростає. Наприклад, якщо ціна на маргарин не змінюється, то частина споживачів замінює масло маргарином. Отже, споживання маргарину збільшується за умови зростання ціни на масло. Якщо споживання товару x_2 зменшується при зростанні ціни p_1, то кажемо, що x_2 валово доповнює x_1. Тоді споживач купує менше товару x_1 і товару x_2. Наприклад, якщо ціна на каву зростає, то частина споживачів зменшує купівлю вершків і цукру настільки, наскільки менше купує кави, тобто вершки і цукор доповнюють її споживання. На рис. 4.3.12 зображено поведінку x_2 як функції від p_1, коли x_2 валово доповнює x_1.

Приклад 4.3.1. Нехай споживач робить свій вибір, користу-

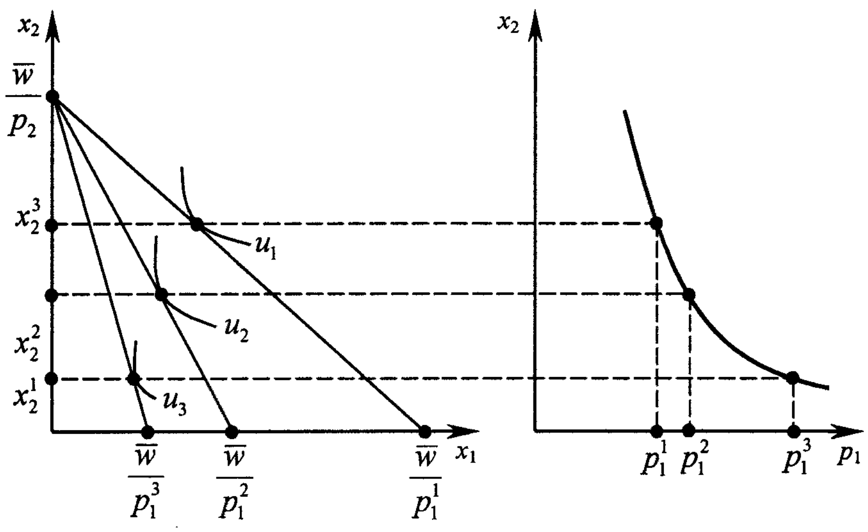


Рис. 4.3.12.

ючись функцією корисності

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1 + x_2.$$

Тоді задача (UMP) має вигляд

$$u(x_1, x_2) \to \max, \qquad p_1\, x_1 + p_2\, x_2 = \mathrm{w}, \quad x \in \mathbb{R}^2_+.$$

Припустимо, що обидва товари купуються. Тоді згідно з (4.1.4) оптимальний вибір споживача в задачі знайдемо з системи

$$\begin{aligned} &x_2 + 1 - \lambda\, p_1 = 0 \\ &x_1 + 1 - \lambda\, p_2 = 0 \\ &p_1\, x_1 + p_2\, x_2 - \mathrm{w} = 0. \end{aligned}$$

Звідси $\lambda = \dfrac{x_2^* + 1}{p_1}$, $\lambda = \dfrac{x_1^* + 1}{p_2}$, і $\dfrac{x_2^* + 1}{p_1} = \dfrac{x_1^* + 1}{p_2}$, або

$$x_2^* = \frac{p_1}{p_2}\,(x_1^* + 1) - 1. \tag{4.3.1}$$

Рівняння (4.3.1) при фіксованих цінах описує криву дохід-споживання. Враховуючи бюджетне обмеження, отримаємо

$$p_1\,x_1 + p_2\left[\frac{p_1}{p_2}\,(x_1^* + 1) - 1\right] - \mathrm{w} = 0$$

або

$$x_1^* = \frac{\mathrm{w} - p_1 + p_2}{2\,p_1}. \tag{4.3.2}$$

Тоді згідно з (4.3.1)

$$x_2^* = \frac{\mathrm{w} - p_2 + p_1}{2\,p_2}. \tag{4.3.3}$$

Рівняння (4.3.2), (4.3.3) описують функції попиту на товари x_1 і x_2.

Якщо зафіксувати ціни $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, то отримаємо криві Енгеля

$$x_1^* = \frac{\mathrm{w} - \bar{p}_1 + \bar{p}_2}{2\,\bar{p}_1}, \qquad x_2^* = \frac{\mathrm{w} - \bar{p}_2 + \bar{p}_1}{2\,\bar{p}_2};$$

звичайні функції попиту на товар x_i: $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}$, $p_j = \bar{p}_j$, $j \neq i$

$$x_1^* = \frac{\bar{\mathrm{w}} - p_1 + \bar{p}_2}{2\,p_1}, \qquad x_2^* = \frac{\bar{\mathrm{w}} - p_2 + \bar{p}_1}{2\,p_2};$$

перехресні функції попиту на товар x_j: $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}$, $p_j = \bar{p}_j$

$$x_1^* = \frac{\bar{\mathrm{w}} - \bar{p}_1 + p_2}{2\,\bar{p}_1}, \qquad x_2^* = \frac{\bar{\mathrm{w}} - \bar{p}_2 + p_1}{2\,\bar{p}_2}.$$

▲

4.4 Ефект заміщення й ефект доходу. Рівняння Слуцького

Зміна ціни будь-якого товару впливає на обсяг попиту через ефект заміщення й ефект доходу. Оскільки зміна ціни цього товару збільшує (при зниженні ціни) або зменшує (при підвищенні ціни) реальний дохід споживача, або купівельну спроможність, то виникає *ефект доходу. Ефект заміщення* виникає в результаті відносної зміни цін. Ефект заміщення сприяє росту споживання товару, який став відносно дешевшим. Ефект доходу може стимулювати збільшення і зменшення споживання товару або бути нейтральним.

Є два підходи до визначення реального доходу, які позв'язані з іменами англійського економіста Дж. Хікса й українського математика і економіста Є.Є.Слуцького. За Хіксом, різні рівні доходу (в грошових одиницях), які забезпечують той самий рівень корисності, тобто дають змогу досягнути тієї самої кривої байдужості, зображають однаковий рівень реального доходу. За Слуцьким, лише цей рівень доходу, який є достатнім для купівлі того самого набору товарів, забезпечує і незмінний рівень реального доходу. Підхід Хікса більшою мірою відповідає основним положенням порядкової теорії корисності, тоді як підхід Слуцького дає кількісне розв'язання задачі на основі статистичних матеріалів.

Ефект заміщення й ефект доходу за Хіксом

Розкладення загального ефекту від зміни ціни на ефект доходу й ефект заміщення за Хіксом зображено на рис. 4.4.13

Бюджетна пряма KL відповідає доходу w і має нахил, який дорівнює $-\dfrac{p_1}{p_2}$. Точка дотику цієї бюджетної прямої і кривої

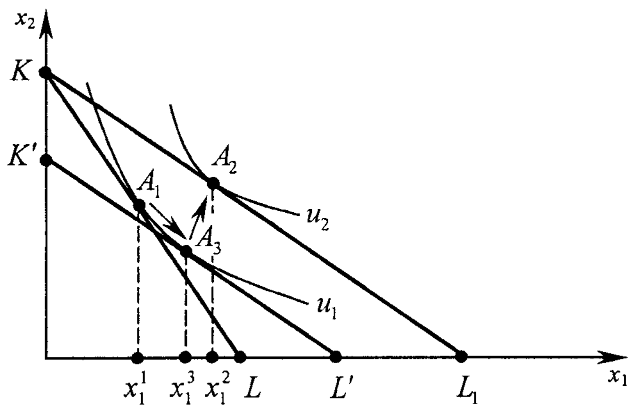


Рис. 4.4.13. Ефект заміщення й ефект доходу за Хіксом. Ціна на товар x_1 знижується

байдужості u_1 визначає оптимальний вибір $A_1 = (x_1^1, x_2^1)$ для споживача. Нехай ціна на товар x_1 зменшилась до $\acute{p}_1$, тоді при незмінному доході бюджетна пряма займе положення KL_1 і має нахил, який дорівнює $-\dfrac{\acute{p}_1}{p_2}$. Вона в точці $A_2 = (x_1^2, x_2^2)$ дотикається до кривої байдужості з вищим рівнем корисності u_2. Отже, загальний результат від зменшення ціни на товар x_1 виражається у збільшенні його споживання з x_1^1 до x_1^2.

Тепер визначимо, яким повинен бути рівень доходу споживача, щоб при відповідній зміні співвідношення цін забезпечити йому попередній рівень корисності. Для цього проводимо пряму $\acute{K}\acute{L}$ з нахилом, який дорівнює $-\dfrac{\acute{p}_1}{p_2}$, яка дотикається кривої байдужості u_1 в точці $A_3 = (x_1^3, x_2^3)$.

Зауважимо, що при переході від початкового оптимуму A_1 до оптимуму A_3 реальний дохід споживача не змінився, споживач залишається на попередній кривій байдужості u_1. Тоді зсув від A_1 до A_3 характеризує ефект заміщення товару x_2 стосовно товару x_1, який став дешевшим, і дорівнює $x_1^3 - x_1^1$. Отож, ефект доходу дорівнює $x_1^2 - x_1^3$. Зауважимо також, що в результаті дії ефекту доходу споживання обох товарів у точці A_2 більше, ніж в точці A_3. Аналогічне розкладення загального ефекту можна зробити тоді, коли ціна на товар x_1 зросла. Загальний ефект від зростання ціни на товар x_1 зводиться до

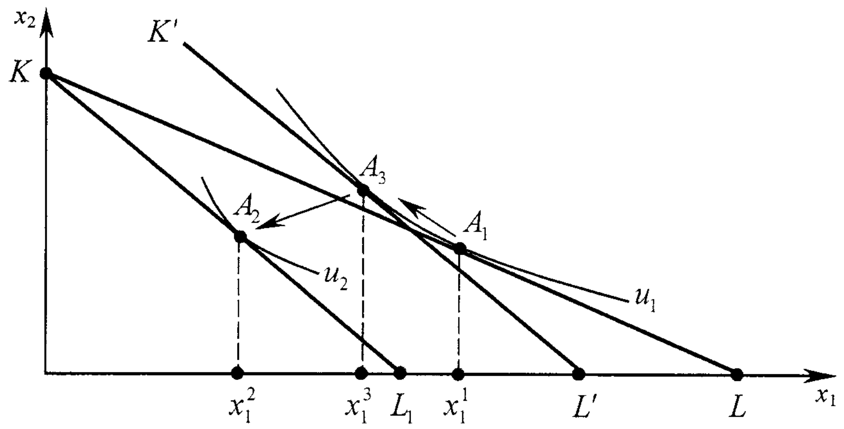
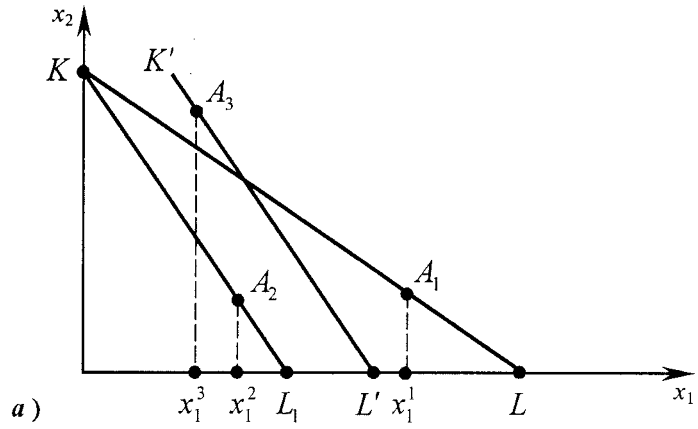


Рис. 4.4.14. Ефект заміщення й ефект доходу за Хіксом. Ціна на товар x_1 зросла

зниження споживання з x_1^1 до x_1^2. Ефект заміщення дорівнює $x_1^3 - x_1^1$, а ефект доходу $x_1^2 - x_1^3$. Зауважимо, що в обох випадках ефект заміщення характеризується рухом уздовж тієї самої кривої байдужості, а ефект доходу переходом із однієї кривої на іншу.

Ефект заміщення завжди від'ємний. Зниження ціни одного товару спонукає споживача збільшити його споживання та зменшити споживання іншого товару, а зростання ціни товару спонукає споживача до заміщення цього товару товарами, які



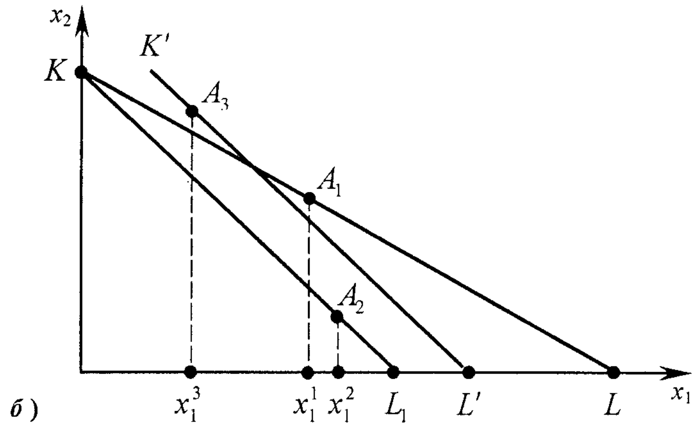


Рис. 4.4.15. Ефект заміщення й ефект доходу за Хіксом. Ціна на товар x_1 зросла: малоцінний товар (a); товар Гіфена ($б$)

стали дещо дешевшими.

Ефект доходу може бути від'ємним (див. рис. 4.4.13, 4.4.14) (випадок цінних товарів), додатним (у випадку малоцінних товарів, коли крива дохід-споживання має від'ємний нахил) або нейтральним (якщо крива дохід-споживання вертикальна). В наших прикладах ефект доходу посилює дію ефекту заміщення, збільшуючи споживання товару x_1, зі зниженням його ціни, і зменшує споживання з підвищенням ціни. Для малоцінних товарів ефект доходу від'ємний і чим більша купівельна спроможність доходу для споживача, тим менше він матиме бажання купувати такий товар. Однак для більшості малоцінних товарів від'ємний ефект заміщення перекриває ефект доходу зі знаком мінус і тоді загальний ефект від зміни ціни буде від'ємним. Тому криві попиту на такі товари, як у випадку цінних товарів, мають від'ємний нахил.

Якщо додатний ефект доходу зі знаком мінус перекриває від'ємний ефект заміщення, тоді закон попиту (закон компенсованого попиту) порушується - величина попиту змінюється в тому ж напрямі, що й ціна. На рис. 4.4.15, *б* $x_1^3 - x_1^2 > x_1^1 - x_1^3$. Такі товари називаються *товарами Гіфена.*

Ефект заміщення й ефект доходу за Слуцьким

Підхід Слуцького до розкладання загального ефекту від зміни ціни на ефект доходу й ефект заміщення відрізняється від підходу Хікса трактуванням реального доходу. Реалізація ефекту доходу досягається визначенням такого його рівня, який би забезпечив споживачеві можливість придбати після зміни ціни той самий набір товарів, що й до зміни.

Нехай KL - бюджетна пряма при доході w і цінах $p_1,\ p_2$ (нахил дорівнює $-\dfrac{p_1}{p_2}$); KL_1 - бюджетна пряма при тому самому доході w і нових цінах $\acute{p}_1,\ p_2$ ($\acute{p}_1 > p_1$, нахил дорівнює

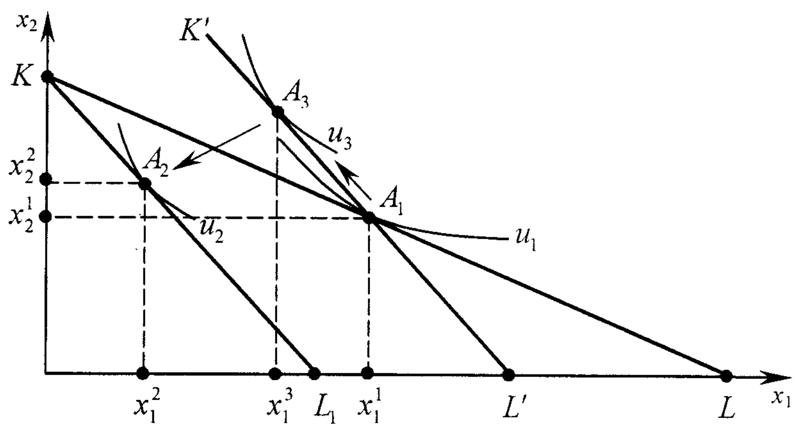


Рис. 4.4.16. Ефект заміщення й ефект доходу за Слуцьким. Ціна на товар x_1 зросла

$-\frac{\acute{p}_1}{p_2}$). Рух бюджетної прямої KL до положення KL_1 (обертання навколо точки K проти годинникової стрілки) можна розбити на два : перший - це обертання бюджетної прямої KL навколо початкового оптимального набору A_1 до величини нахилу $-\frac{\acute{p}_1}{p_2}$ (бюджетна пряма $\acute{K}\acute{L}$), а потім - паралельний зсув повернутої бюджетної прямої до нового оптимального набору A_2. Очевидно, що бюджетна пряма $\acute{K}\acute{L}$ буде дотикатися до кривої байдужості u_3 вищого, ніж u_2 рівня корисності. Це означає, що споживач (у випадку повної компенсації доходу) може досягти вищого рівня корисності, ніж у підході Хікса. Отже, загальний ефект $x_1^2 - x_1^1$ від зростання ціни на товар x_1 розкладається на ефект заміщення $x_1^3 - x_1^1$ і ефект доходу $x_1^2 - x_1^3$.

Порівнюючи ці два підходи, бачимо, що метод Хікса припускає знання споживчих переваг, кривих байдужості, тоді як метод Слуцького цього не потребує, він грунтується на спостерігаючих і реєструючих фактах поведінки споживача на ринку.

Узагальнення

На одному рисунку розглянемо два підходи: Хікса і Слуцького.

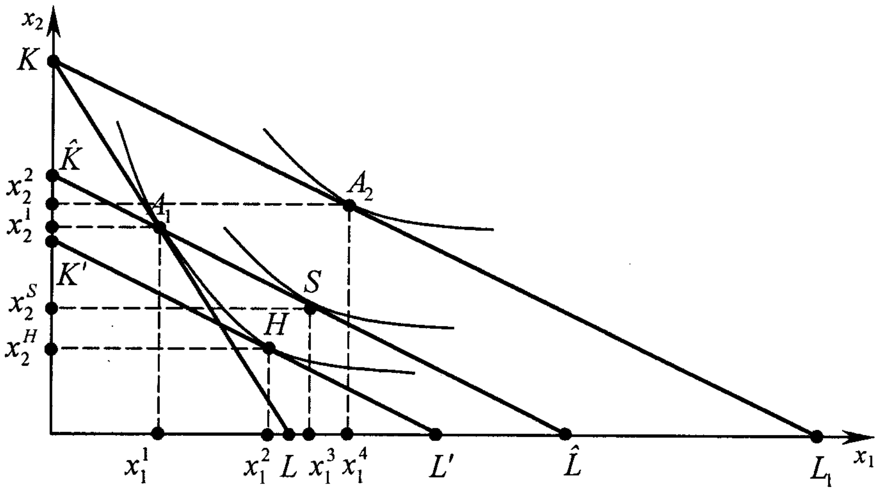


Рис. 4.4.17. Ефект заміщення й ефект доходу за Слуцьким і Хіксом

Нехай

$$KL = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \,:\, p_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathrm{w}\};$$
$$KL_1 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \,:\, \acute{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathrm{w}\}, \ \ \acute{p}_1 < p_1;$$

$A_1 = (\,x_1(p_1, p_2, \mathrm{w}), x_2(p_1, p_2, \mathrm{w})\,)$ і $A_2 = (\,x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}), x_2(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w})\,)$ - оптимальні набори до і після зниження ціни на товар x_1;

$$\acute{K}\acute{L} = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ \acute{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathrm{w}_{Hicks} \};$$
$$\hat{K}\hat{L} = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \ : \ \acute{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathrm{w}_{Slutsky} \}$$

бюджетні прямі, які відповідають компенсації доходу, відповідно за Хіксом і за Слуцьким, тобто відповідають вимозі незмінності реального доходу за Хіксом і за Слуцьким.

Тепер можемо записати розкладання загального ефекту від зміни ціни p_1 за Хіксом і Слуцьким у вигляді

$$x_1^4 - x_1^1 = (x_1^4 - x_1^2) + (x_1^2 - x_1^1) \qquad \text{(за Хіксом)}, \tag{4.4.1}$$
$$x_1^4 - x_1^1 = (x_1^4 - x_1^3) + (x_1^3 - x_1^1) \qquad \text{(за Слуцьким)}. \tag{4.4.2}$$

Ліві частини (4.4.1) і (4.4.2) характеризують загальний результат зміни ціни p_1 у вимірі зміни величини попиту на товар x_1, і в обох випадках вони однакові. Праві частини зображають суми ефектів доходу та заміщення. Очевидно, що різниця в зображенні загального результату на ефект доходу й ефект заміщення становить $x_1^3 - x_1^2$. У (4.4.1) ця величина входить до ефекту доходу, а в (4.4.2) - ефект заміщення.

Оскільки у випадку підходу за Слуцьким $\mathrm{w}_{Slutsky} = \acute{p}_1 x_1^1 + p_2 x_2$, то маємо компенсацію доходу за Слуцьким

$$\triangle \mathrm{w}_{Slutsky} = \mathrm{w}_S - \mathrm{w} = (\acute{p}_1 - p_1)\, x_1(p_1, p_2, \mathrm{w}) = \triangle p_1\, x_1^1.$$

Зауважимо, що зміна доходу та зміна ціни мають той самий знак.

Отже,

$$\triangle x_1^s = x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}_S) - x_1(p_1, p_2, \mathrm{w}), \tag{4.4.3}$$

є зміною попиту у випадку ефекту заміщення, який іноді називають *компенсованим попитом.* Зокрема, справджується закон попиту

$$\triangle x_1^s \, \triangle p_1 \leqslant 0.$$

Ефект доходу $\triangle x_1^n$ є зміною попиту на товар x_1, коли дохід змінюється від w_S до w, залишаючи ціну $\acute{p}_1$ фіксованою

$$\triangle x_1^n = x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}) - x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}_S). \tag{4.4.4}$$

Однак краще визначити величину $\triangle x_1^m$, яка має знак протилежний до ефекту доходу

$$\triangle x_1^m = -\triangle x_1^n = x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}_S) - x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}).$$

Тоді (4.4.2) можна переписати у вигляді

$$\triangle x_1 = \triangle x_1^s - \triangle x_1^m. \tag{4.4.5}$$

Аналогічно можна визначити компенсацію доходу за Хіксом

$$\triangle \mathrm{w}_{Hicks} = (\acute{p}_1 x_1^2 + p_2 x_2^2)\Big|_{u(x)=\bar{u}} - \mathrm{w}.$$

Зокрема, компенсований попит має вигляд

$$\triangle x_1^s = x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w} + \triangle \mathrm{w}_H) - x_1(p_1, p_2, \mathrm{w})$$

і справджується закон попиту $\triangle x_1^s \triangle p_1 \leqslant 0$. Визначимо величину

$$\triangle x_1^m = x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w} + \triangle \mathrm{w}_H) - x_1(\acute{p}_1, p_2, \mathrm{w}).$$

Тоді (4.4.1) можна переписати у вигляді

$$\triangle x_1 = \triangle x_1^s\Big|_{u(x)=\bar{u}} - \triangle x_1^m\Big|_{u(x)=\bar{u}}. \tag{4.4.6}$$

Оскільки $\triangle p_1 = \dfrac{\triangle \mathrm{w}_S}{x_1^1}$, то рівняння (4.4.5) і (4.4.6) можна записати у вигляді

$$\frac{\triangle x_1}{\triangle p_1} = \frac{\triangle x_1^s}{\triangle p_1}\Big|_{u(x)=\bar{u}} - \frac{\triangle x_1^m}{\triangle \mathrm{w}_H}\frac{\triangle \mathrm{w}_H}{\triangle p_1}\Big|_{u(x)=\bar{u}} \qquad \text{(за Хіксом)},$$

$$\frac{\triangle x_1}{\triangle p_1} = \frac{\triangle x_1^s}{\triangle p_1} - \frac{\triangle x_1^m}{\triangle \mathrm{w}_S} x_1(p_1, p_2, \mathrm{w}) \qquad \text{(за Слуцьким)}.$$

Якщо в останніх рівняннях спрямувати $\triangle\, p_1$ до нуля (тоді $\triangle \mathrm{w}_S \to 0$ і $\triangle \mathrm{w}_H \to 0$), то отримаємо рівняння (4.4.1) і (4.4.2) в диференціальній формі

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, \mathrm{w})}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{H.comp} - \left.\frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}}\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial p_1}\right|_{u(x)=\bar{u}} \tag{4.4.7}$$

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, \mathrm{w})}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{S.comp} - \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}}\, x_1. \tag{4.4.8}$$

Ліві частини рівнянь (4.4.7) і (4.4.8) однакові і зображають загальний результат зміни ціни p_1 при незмінному рівні доходу w і ціни p_2. Праві частини зображають ефекти заміщення і доходу. Оскільки ціна і компенсований попит змінюється в протилежних напрямах, то зі зростанням ціни p_1 ефект заміщення $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{H.comp}$ (за Хіксом) і ефект заміщення $\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{S.comp}$ (за Слуцьким) завжди від'ємний.

Знак перед другим доданком правої частини (ефект доходу) залежить від знака множника $\frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}}$. Якщо товар x_1 цінний, то $\frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}} > 0$ і ефект доходу *від'ємний* (зниження ціни збільшує реальний дохід і попит на цінний товар *зростає*). Якщо товар x_1 малоцінний, то $\frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}} < 0$ й ефект доходу є *додатним* (зниження ціни збільшує реальний дохід і попит на малоцінний товар *спадає*). В цьому випадку ефекти заміщення і доходу мають різні напрями. Якщо x_1 - товар Гіфена, то додатний ефект доходу перекриває від'ємний ефект заміщення так, що загальний результат зміни ціни p_1 є додатним, $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0$ (збільшення ціни p_1) (зростання ціни призводить до зростання попиту на товар).

Зміна ціни товару впливає на зміну попиту не тільки самого товару, й інших товарів. Використовуючи зазначені міркування, можемо розкласти загальний ефект від зміни ціни на товар x_1, на ефект заміщення й ефект доходу і зміну об'єму попиту на товар x_2. Для цього зробимо модифікацію рівняння Слуцького (4.4.8)

$$\frac{\partial x_2(p_1, p_2, \mathrm{w})}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{S.comp} - \frac{\partial x_2}{\partial \mathrm{w}} x_1. \tag{4.4.9}$$

Ліва частина рівняння (4.4.9) описує вплив зміни ціни p_1 на величину попиту на товар x_2. Права частина зображає суму ефектів заміщення та доходу. У випадку двох товарів ефект заміщення є додатним (див. рис. (4.4.17)). При незмінній корисності зниження ціни p_1 призводить до зменшення попиту на товар x_2 (x_2^S, $x_2^H < x_2^1$), що є наслідком спадання граничної норми заміщення $MRS_{1\,2}$. Отже, загальний ефект $\dfrac{\partial x_2(p_1, p_2, \mathrm{w})}{\partial p_1}$ може бути додатним або від'ємним залежно від величин двох ефектів. На рис. 4.4.17 $\dfrac{\partial x_2(p_1, p_2, \mathrm{w})}{\partial p_1} < 0$, оскільки від'ємний ефект доходу перекриває додатний ефект заміщення, тому зі зниженням ціни p_1 до $\acute{p}_1$ попит на товар x_2 зростає від x_2^1 до x_2^2.

Рівняння Слуцького в коефіцієнтах еластичності

Повернемося до рівння Слуцького (4.4.8) за допомогою якого ми досліджували вплив ціни товару x_1 на об'єм попиту на цей товар. Запишемо це рівняння через коефіцієнти еластичності.

Домножимо рівняння (4.4.8) на $p_1/x_1(p_1, p_2, \mathrm{w})$, отримаємо

$$\frac{p_1}{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{p_1}{x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{S.comp} - p_1\frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}}.$$

Ліва частина рівняння є коефіцієнтом еластичності попиту на товар x_1 за ціною цього товару, тобто $\varepsilon_{11}(p_1, p_2, \mathrm{w})$. Перший доданок правої частини характеризує еластичність попиту на товар x_1 за умови незмінного реального доходу і позначимо цю елстичність через $\bar{\varepsilon}_1$. Другий доданок правої частини можна записати так:

$$\frac{p_1 x_1}{\mathrm{w}} \frac{\mathrm{w}}{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \mathrm{w}} = k_1 \varepsilon_{1\mathrm{w}},$$

де k_1 - частка видатків на товар x_1 загальних видатках споживача, $\varepsilon_{1\mathrm{w}}$ - еластичність попиту на товар x_1 за доходом.

Отже, рівняння Слуцького (4.4.8) можна записати в коефіцієнтах еластичності

$$\varepsilon_{11} = \bar{\varepsilon}_1 - k_1 \varepsilon_{1\mathrm{w}}. \tag{4.4.10}$$

З рівняння (4.4.10) видно, що коефіцієнт еластичності попиту товару x_1 за ціною p_1 може бути розкладеним на дві компоненти, які характеризують ефекти доходу та заміщення, і відносна величина першого з них залежить від видатків на товар x_1 у загальних видатках споживача. З цього рівняння також видно, що для взаємозамінних товарів ($\bar{\varepsilon}_1 = 0$) еластичність попиту за ціною пропорційна еластичності попиту за доходом.

4.5 Застосування виявленої переваги

У параграфі 1.3 ми сформулювали принцип виявленої переваги, слабку і сильну аксіоми. Розглянемо тепер їх застосування. Нехай $L = 2$ і відношення переваги споживача неперервне та монотонне.

Приклад 4.5.1. Припустимо, що споживач має змогу вибрати податок, який збирає уряд:

(i) акцизний (визначений на деякі товари);

(ii) загальний (визначений на всі товари незалежно від вибору споживача).

Нехай маємо два види товару і три різні бюджетні прямі: початкову – до збирання податків, бюджетну пряму після акцизного збору і бюджетну пряму після збирання загального податку. Припустимо, що вибір споживача (x_1^1, x_2^1) – перед сплатою податків, (x_1^2, x_2^2) – після акцизного збору і (x_1^3, x_2^3) – після загального податку. Нехай t – ставка акцизного збору, T – ставка загального податку.

Тоді справджуються співвідношення

$$p_1x_1^1+p_2x_2^1=\mathrm{w}, \quad (p_1+t)x_1^2+p_2x_2^2=\mathrm{w}, \quad p_1x_1^3+p_2x_2^3=\mathrm{w}-T\,.$$

Звідси

$$p_1x_1^2+p_2x_2^2=\mathrm{w}-tx_1^2\,.$$

Оскільки tx_1^2 - непрямий податок, сплачений при акцизному зборі, то для збереження річної суми податків повинна виконуватись рівність $T=tx_1^2$. Отже, точка (x_1^3, x_2^3) лежить на бюджетній прямій

$$p_1x_1+p_2x_2=\mathrm{w}-tx_1^2\,. \tag{4.5.1}$$

Точка (x_1^2, x_2^2) теж лежить на бюджетній прямій (4.5.1). Водночас точка (x_1^2, x_2^2) лежить на бюджетній прямій

$$(p_1+t)x_1+p_2x_2=\mathrm{w}. \tag{4.5.2}$$

Оскільки прямі (4.5.1) і (4.5.2) мають різні кутові коефіцієнти, то точка (x_1^2, x_2^2) лежить на перетині бюджетних прямих (4.5.1) і (4.5.2).

Згідно з WA точки (x_1^2, x_2^2) і (x_1^3, x_2^3) зображені на рис. 4.5.18. Тобто, (x_1^3, x_2^3) виявлено переважає (x_1^2, x_2^2), бо (x_1^2, x_2^2) не може виявлено переважати (x_1^3, x_2^3), оскільки при акцизному зборі набір (x_1^3, x_2^3) недосяжний для споживача.

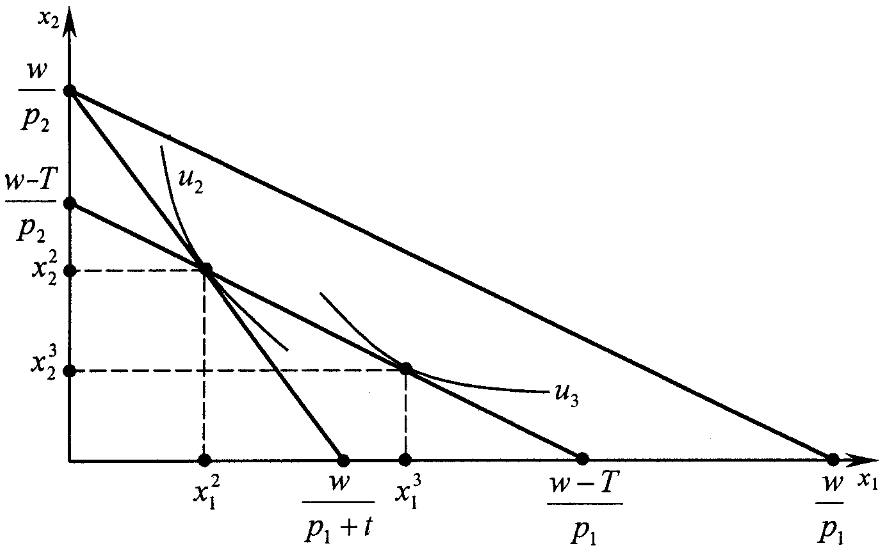


Рис. 4.5.18.

Зауважимо, що точка (x_1^2, x_2^2) є точкою дотику кривої байдужості u_2: $u(x_1, x_2) = u(x_1^2, x_2^2)$ до прямої (4.5.1). Іншими словами, споживач надає перевагу загальному податку. ▲

Приклад 4.5.2. Розглянемо два варіанти надання урядом дотацій. Припустимо, що споживач отримує ту саму дотацію в обох випадках:

(i) дотація для купівлі певного товару (у розмірі s на одиницю товару);

(ii) загальна дотація S.

Побудуємо три бюджетні прямі: вихідну – $p_1x_1 + p_2x_2 = \mathrm{w}$; після дотації на перший товар – $(p_1 - s)x_1 + p_2x_2 = \mathrm{w}$; після загальної дотації – $p_1x_1 + p_2x_2 = \mathrm{w} + S$.

Нехай вибір споживача до дотацій є (x_1^1, x_2^1), після дотації на перший товар – (x_1^2, x_2^2), після загальної дотації – (x_1^3, x_2^3).

Тоді $(p_1 - s)x_1^2 + p_2x_2^2 = \mathrm{w}$, звідси $p_1x_1^2 + p_2x_2^2 = \mathrm{w} + sx_1^2$.

Пипустимо, що $sx_1^2 = S$, тоді рівняння бюджетної прямої після загальної дотації матиме вигляд

$$p_1x_1 + p_2x_2 = \mathrm{w} + sx_1^2. \tag{4.5.3}$$

Зауважимо, що вибір споживача (x_1^2, x_2^2) після дотації на перший товар є точкою на бюджетній прямій (4.5.3) після загальної дотації і є досяжною для споживача, коли вибір (x_1^3, x_2^3) на підставі WA виявлено переважає (x_1^2, x_2^2). Тут u_2: $u(x_1, x_2) = u(x_1^2, x_2^2)$; u_3: $u(x_1, x_2) = u(x_1^3, x_2^3)$. Отже, споживач надає перевагу перевагу загальній дотації.

▲

У попередніх моделях дохід споживача визначено теоретично. У реальному житті люди отримують доходи, продаючи власну працю, предмети, які вони виробили, активи, які

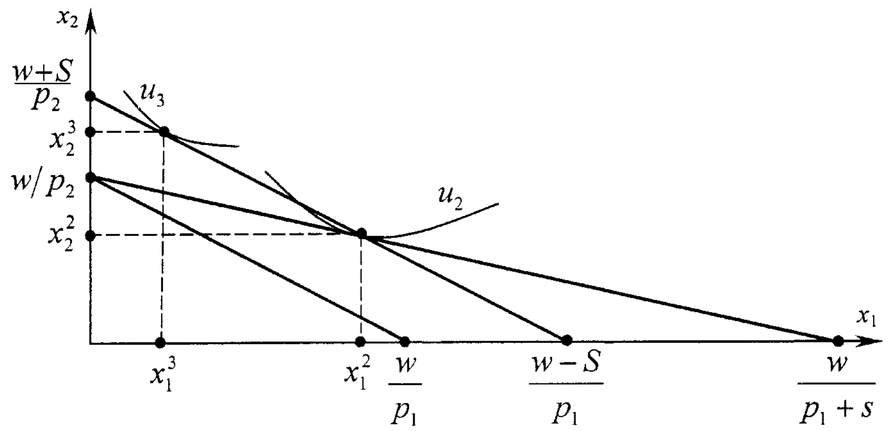


Рис. 4.5.19.

накопичили. Ми розглянемо модифікацію попередньої моделі, враховуючи описану реальність. Як і раніше, обмежимося двома видами товару. Припустимо, що споживач розпочинає свою діяльність з початковим запасом у вигляді двох товарів (a_1, a_2). Наприклад, фермер, який виходить на ринок з кількістю моркви (a_1) і картоплі (a_2). Фермер вивчає ринкові ціни та вирішує, скільки цього товару продати чи купити.

Зазначимо різницю між двома видами попиту: *валовим* і *чистим*. Валовий попит – це кількість товару, яку споживач принесе додому з ринку. Чистий попит – це різниця між валовим попитом і початковими запасами споживача або кількість товару, проданого чи купленого на ринку. Якщо (x_1, x_2) – валовий попит, то $(x_1 - a_1, x_2 - a_2)$ – чистий попит. Зауважимо, що чистий попит на товар буває і від'ємним. Якщо чистий попит на перший товар від'ємний, то це означає, що споживач хоче використати цього товару менше, ніж він має, тобто хоче запропонувати перший товар на ринок.

Розглянемо спочатку вигляд бюджетного обмеження. У цьому випадку вартість набору товарів, який споживач принесе додому, дорівнюватиме вартості набору товарів, з яким він перебував на ринку

$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1a_1 + p_2a_2 \tag{4.5.4}$$

або

$$(x_1 - a_1)p_1 + (x_2 - a_2)p_2 = 0.$$

Якщо $x_1 - a_1 > 0$, то назвемо споживача *чистим покупцем* першого товару.

Якщо $x_1 - a_1 < 0$, то називатимемо споживача *чистим продавцем* першого товару.

Якщо ціни фіксовані, то дохід споживача сталий і нахил бюджетної лінії визначається відношенням цін $-p_1/p_2$. Крім того, бюджетна лінія, очевидно, проходить через точку початкових запасів (a_1, a_2) (див рис. 4.5.20).

Тут (x_1^*, x_2^*) – оптимальний вибір споживача. У цьому випадку $x_1^* > a_1$ і $x_2^* < a_2$, тобто споживач є чистим покупцем першого товару і чистим продавцем другого.

Розглянемо як змінюється споживання товарів при зміні початкових запасів і незмінних цінах. Нехай початкові запаси зміняться від (a_1, a_2) до (a_1^1, a_2^1) так, що

$$p_1a_1 + p_2a_2 > p_1a_1^1 + p_2a_2^1.$$

Тоді дохід споживача зменшиться і бюджетна пряма зсунеться паралельно до вихідної у напрямі початку координат. У цьому випадку попит на кожний товар зміниться. Наприклад, якщо перший товар малоцінний, то попит на нього зросте.

Розглянемо випадок зі зміною цін. Тоді зміниться і дохід споживача. Якщо ціна першого товару зменшиться, то бюджетна пряма стане похилішою. Оскільки початкові запаси завжди лежать на бюджетній лінії, то вона повернеться навколо точки початкових запасів, як зображено на рис. 4.5.21.

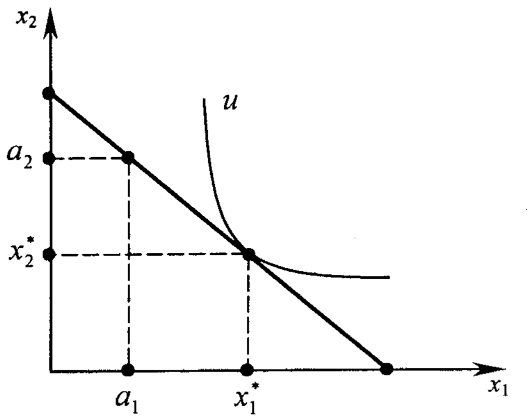


Рис. 4.5.20.

Тут $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ – початковий оптимальний набір товарів, (x_1^*, x_2^*) – оптимальний набір товарів після зміни ціни p_1. У цьому випадку споживач був продавцем першого товару і залишився ним після зміни ціни. Що можна сказати про добробут споживача? У наведеному прикладі споживач опинився на нижчій кривій байдужості (зменшилась корисність). Чи завжди так буде? Відповідь отримаємо із застосування принципу виявленої переваги. Якщо ціна на перший товар зменшилася і споживач залишився продавцем, то оптимальний набір після зміни ціни для нього досяжний. Отже, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ виявлено переважає (x_1^*, x_2^*) і добробут споживача погіршився. Якщо зі зменшенням ціни на перший товар споживач з продавця перетворився у покупця, то нічого сказати не можна.

Якщо споживач залишається чистим покупцем товару, ціна якого зростає, то його добробут погіршується. Якщо зростання ціни спричиняє перехід споживача у продавці, то добробут може погіршитися або поліпшитися. Цей висновок випливає з простого застосування принципу виявленої переваги.

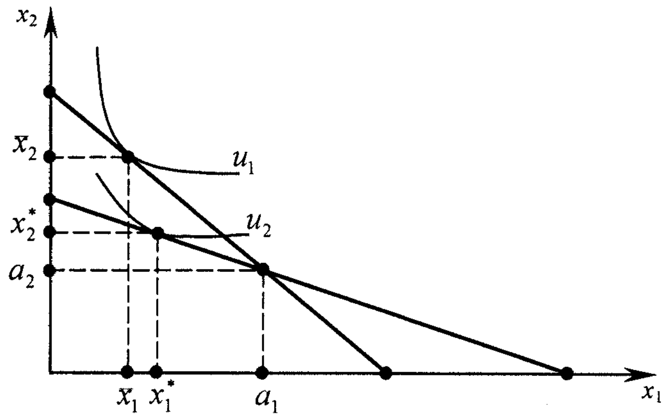


Рис. 4.5.21.

Припустимо (див. рис. 4.5.22), що споживач є чистим покупцем першого товару і ціна на нього зменшилася, тоді споживач залишиться чистим покупцем першого товару. Тепер припустимо протилежне – споживач став продавцем. Тоді його новий оптимальний набір (x_1^*, x_2^*) лежатиме на перетині нової бюджетної прямої з вихідним бюджетним обмеженням. Отже, набір (x_1^*, x_2^*) буде досяжним для споживача при початковій бюджетній прямій і він знехтує його, оскільки оптимальним є вибір $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Проте при новій бюджетній прямій набір $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ досяжний для споживача і гірший ніж (x_1^*, x_2^*). Тому, з одного боку, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ виявлено переважає (x_1^*, x_2^*), з іншого, навпаки, що неможливо. Відповідно чистий продавець товару зі зростанням ціни на нього залишиться продавцем.

У випадку фіксованого доходу однієї з цін ми отримали криву ціни-споживання і звичайну криву попиту. Аналогічні криві можна побудувати і за умови наявності початкових запасів. Розглянемо, наприклад, рис. **??**, який ілюструє кри-

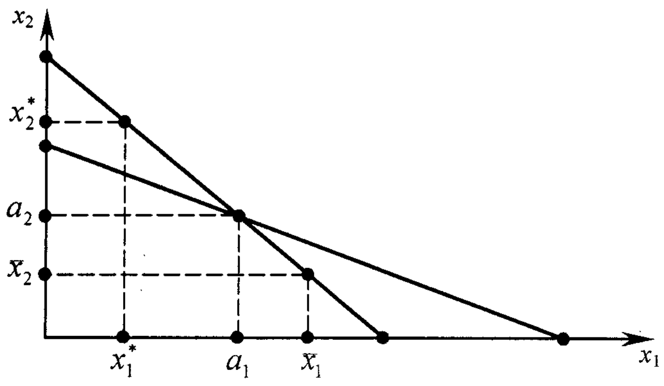


Рис. 4.5.22.

ву ціни-споживання і звичайну криву попиту. Крива ціни-споживання завжди проходить через точку початкових запасів, оскільки у деяких випадках оптимальним вибором споживача буде припинення торгівлі. Отже, споживач вирішує купувати перший товар за деякими цінами чи продавати за іншими. Тому крива ціни-споживання l_1 пройде ліворуч і праворуч від точки (a_1, a_2). Звичайна крива попиту l_2, зображена на рис. **??**, є кривою валового попиту.

Вона зазначає загальну кількість спожитого першого товару. Визначимо звичайну криву чистого попиту як графік функції

$$d_1(p_1, p_2) = \begin{cases} x_1(p_1, p_2) - a_1, & \text{якщо чистий попит додатний,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку,} \end{cases}$$

і звичайну криву чистої пропозиції

$$s_1(p_1, p_2) = \begin{cases} a_1 - x_1(p_1, p_2), & \text{якщо чистий попит від'ємний,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Цей приклад зображено на рис. **??**, де l_1 – крива чистого попиту, l_2 – крива чистої пропозиції, l – крива валового попиту.

Застосування виявленої переваги є зручним, однак воно не дає відповіді на запитання: як змінюється попит на товар за зміною ціни? У попередніх параграфах описано рівняння Слуцького, яке розкладає зміну попиту у випадку зміни ціни на ефект заміни та ефект доходу. Ефект доходу виникає у зв'язку зі зміною купівельної спроможності у випадку зміни ціни. Однак є два шляхи зміни купівельної спроможності споживача. По-перше, коли ціна на товар зменшується, то можна купити той набір товарів, що й раніше, і мати залишок грошей. Назвемо це *звичайним ефектом доходу.* Проте другий ефект новий. Якщо ціна на товар змінюється, то змінюється і вартість початкових запасів. Отже, змінюється дохід. Наприклад, якщо ви чистий продавець товару, то зниження ціни зменшить ваш дохід. Одержимо попередній ефект плюс вплив вартості початкових запасів. Назвемо це *ефектом доходу початкових запасів.*

Отже, рівняння Слуцького виглядає так: загальна зміна попиту дорівнює сумі ефекту заміни, звичайного ефекту доходу й ефекту доходу початкових запасів. Два перших показники аналогічні до попереднього випадку. Тому

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - x_1 \frac{\Delta x_1^i}{\Delta \mathrm{w}} + EIE,$$

де EIE – ефект доходу початкових запасів. Коли ціна початкових запасів змінюється, то дохід теж змінюється і ця зміна спричиняє зміну попиту.

Нехай ціна першого товару змінилася від p_1 до p_1' і нехай w'' позначає новий дохід за ціною p_1', пов'язаний з вартістю початкових запасів. Припустимо, що ціна товару другого залишається фіксованою. За означенням w'' маємо

$$\mathrm{w}'' - \mathrm{w} = a_1 \Delta p_1.$$

Запишемо очевидну рівність

$$\frac{x_1(p_1', \mathrm{w}'') - x_1(p_1, \mathrm{w})}{\Delta p_1}$$

$$= \frac{x_1(p_1', \mathrm{w}') - x_1(p_1, \mathrm{w})}{\Delta p_1} \quad \text{(ефект заміни)}$$

$$- \frac{x_1(p_1', \mathrm{w}') - x_1(p_1', \mathrm{w})}{\Delta p_1} \quad \text{(звичайний ефект доходу)}$$

$$+ \frac{x_1(p_1', \mathrm{w}'') - x_1(p_1', \mathrm{w})}{\Delta p_1} \quad \text{(ефект доходу початкових запасів).}$$

За означенням звичайного ефекту доходу

$$\Delta p_1 = \frac{\mathrm{w}' - \mathrm{w}}{x_1}$$

і за означенням ефекту доходу початкових запасів

$$\Delta p_1 = \frac{\mathrm{w}'' - \mathrm{w}}{a_1}.$$

Тоді рівняння Слуцького набуває вигляду

$$\frac{x_1(p_1', \mathrm{w}'') - x_1(p_1, \mathrm{w})}{\Delta p_1} = \frac{x_1(p_1', \mathrm{w}') - x_1(p_1, \mathrm{w})}{\Delta p_1} -$$

$$- x_1 \frac{x_1(p_1', \mathrm{w}') - x_1(p_1', \mathrm{w})}{\mathrm{w}' - \mathrm{w}} + a_1 \frac{x_1(p_1', \mathrm{w}'') - x_1(p_1', \mathrm{w})}{\mathrm{w}'' - \mathrm{w}}$$

або

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - x_1 \frac{\Delta x_1^i}{\Delta \mathrm{w}} + a_1 \frac{\Delta x_1^a}{\Delta \mathrm{w}'}. \tag{4.5.5}$$

Розглянемо незначну зміну ціни, яка зумовляє таку саму зміну доходу. Якщо $\Delta\mathrm{w} = \mathrm{w}' - \mathrm{w} \approx \mathrm{w}'' - \mathrm{w} = \Delta\mathrm{w}'$, то рівняння Слуцького (4.5.5) виглядатиме так:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} + (a_1 - x_1) \frac{\Delta x_1^i}{\Delta \mathrm{w}}. \tag{4.5.6}$$

Виконаємо граничний перехід у цій рівності, коли $\Delta p_1 \to 0$. Нехай $x_1(p_1, \mathrm{w}(p_1))$ – функція попиту на перший товар при фіксованій ціні на другий, де $\mathrm{w}(p_1) = a_1 p_1 + a_2 p_2$. Тоді запишемо

$$\frac{dx_1(p_1, \mathrm{w}(p_1))}{dp_1} = \frac{\partial x_1(p_1, \mathrm{w})}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p_1, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} \frac{d\mathrm{w}(p_1)}{dp_1}.$$

Оскільки $\dfrac{d\mathrm{w}}{dp_1} = a_1$,

$$\frac{\partial x_1(p_1, \mathrm{w})}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^s(p_1, \mathrm{w})}{\partial p_1} - x_1 \frac{\partial x_1(p_1, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}},$$

то

$$\frac{dx_1(p_1, \mathrm{w}(p_1))}{dp_1} = \frac{\partial x_1(p_1)}{\partial p_1} + (a_1 - x_1) \frac{\partial x_1(p_1, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} \tag{4.5.7}$$

і є шуканим рівнянням Слуцького.

Рівняння (4.5.6) використовують для аналізу попиту. Ми знаємо, що $\dfrac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} < 0$. Припустимо, що товар цінний, тобто $\dfrac{\Delta x_1^i}{\Delta p_1} > 0$. Тоді знак лівої частини (7.7) залежить від знака та величини різниці $a_1 - x_1$. Якщо споживач є чистим покупцем, то зі зростанням ціни на перший товар попит на нього спадає. Якщо ж споживач чистий продавець нормального товару, то знак $\dfrac{\Delta x_1}{\Delta p_1}$ залежить від величини $a_1 - x_1$.

Припустимо, що споживач продає яблука та апельсини, які виростив сам. Ми говорили, що внаслідок зростання ціни на яблука споживач збільшить їх споживання (яблука для нього є товаром Гіфена). Використовуючи рівняння Слуцького, легко в цьому переконатися. Нехай x_1 – функція попиту споживача на яблука, а p_1 – їхня ціна. Оскільки $\dfrac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} < 0$, $a_1 - x_1 > 0$

і яблука для споживача цінний товар, то внаслідок зростання ціни він споживає більше яблук завдяки ефекту доходу.

Застосуємо ідею з початковими запасами для аналізу пропозиції праці. Припустимо, що споживач має деякий дохід M незалежно від того працює він чи ні. Назвемо цей дохід нетрудовим (наприклад, дохід від акцій). Припустимо, що $M > 0$. Позначимо через x величину споживання і p – ціну споживання. Нехай w – величина заробітної плати і L – кількість запропонованої праці. Тоді бюджетна пряма матиме вигляд

$$px = M + wL. \tag{4.5.8}$$

Спробуємо порівняти (4.5.8) з прикладами попередніх бюджетних обмежень. Подамо (4.5.8) у вигляді

$$px - wL = M \tag{4.5.9}$$

і припустимо, що існує максимальна величина кількості праці – 24 год на добу, 7 днів на тиждень чи інші обмеження. Позначимо через $\overline{L}$ кількість робочого часу і додамо до обох частин рівності (4.5.9) значення $w\overline{L}$

$$px + w(\overline{L} - L) = M + w\overline{L}. \tag{4.5.10}$$

Визначимо $\overline{x} = \dfrac{M}{p}$ як дохід, який споживач отримує не працюючи зовсім. Отже, $\overline{x}$ початковий запас споживача. Запишемо рівняння (4.5.10) у вигляді

$$px + w(\overline{L} - L) = p\overline{x} + w\overline{L}. \tag{4.5.11}$$

Отримаємо рівняння подібне до (4.5.4). Показник $\overline{L} - L$ можна трактувати як дозвілля, тобто час без праці. Позначимо $\mathfrak{l} = \overline{L} - L$. Тоді загальна кількість часу на дозвілля $\bar{\mathfrak{l}} = \overline{L}$ і бюджетна пряма (4.5.11) матиме вигляд

$$px + w\mathfrak{l} = p\overline{x} + w\bar{\mathfrak{l}}. \tag{4.5.12}$$

Зауважимо, що у рівнянні (4.5.12) w – не лише міра праці, а й міра дозвілля. Права частина (4.5.12) іноді називається повним або неявним доходом споживача. Бюджетна пряма (4.5.12) також проходить через точку початкових запасів $(\bar{\mathfrak{l}}, \overline{x})$ і має нахил $-w/p$, який зазначає норму, за якою ринок обмінює один товар на інший. Оптимальний вибір споживача відбудеться там, де $MRS = w/p$ (w/p – реальна заробітна плата). Реальна заробітна плата – це кількість товарів, яку споживач може купити, якщо зменшить своє дозвілля на одну годину.

4.6 Задача мінімізації видатків

Нехай $u(\cdot)$ *неперервна функція корисності, яка зображає локально ненасичуване відношення переваги* $\succsim$, що є визначеним на множині споживчих наборів $\mathbb{R}^L_+$. Нехай *задано вектор цін* $p \gg 0$ *і число* $u > u(0)$.

Розглянемо **задачу мінімізації видатків (EMP - expenditure minimization problem)**

$$p \cdot x \to \min, \qquad x \in \{\, x \in \mathbb{R}^L_+ \, : \, u(x) \geqslant u \,\}. \qquad \text{(EMP)}$$

Позаяк задача (UMP) визначає максимальний рівень корисності при заданому доході w, то задача (EMP) визначає мінімальний рівень доходу, який потрібно для досягнення рівня корисності u. Задача (EMP) є "двоїстою" задачею до задачі (UMP).

Задача (EMP) зображена на рис. 4.6.23. Оптимальний споживчий набір x^* має найменшу вартість і дає змогу споживачеві досягнути рівня корисності u. Геометрично множину оптимальних наборів отримуємо шляхом паралельного зсуву

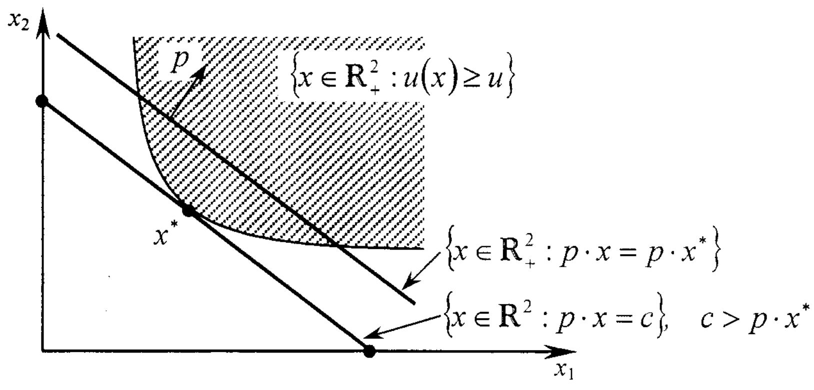


Рис. 4.6.23. Задача мінімізації видатків

гіперплощини $\{ x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x = c \}$ в напрямі вектора $-p$ доти, доки ця площина має хоч одну спільну точку з множиною $\{ x \in \mathbb{R}^L_+ : u(x) \geqslant u \}$.[1]

Теорема 4.6.1. *Нехай $u(\cdot)$ неперервна функція корисності для поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і відношення переваги $\succsim$ є локально ненасичуваним. Нехай $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ заданий вектор цін. Тоді маємо:*

(i) *якщо x^* є розв'язком задачі* (UMP) *при рівні доходу* w*, тоді x^* є розв'язком задачі* (EMP) *з рівнем корисності $u = u(x^*)$. Зокрема, мінімальний рівень видатків в задачі* (EMP) *становить саме* w;

[1] Якщо $u(\cdot)$ квазіввігнута, то задача (EMP) є задачею мінімізації лінійної функції на опуклій множині. Це призводить до вивчення опорних функцій множини $\{ x \in \mathbb{R}^L_+ : u(x) \geqslant u \}$.

(ii) *якщо* x^* *розв'язок задачі* (EMP) *з рівнем корисності* $u > u(0)$, *тоді* x^* *є розв'язком задачі* (UMP) *при рівні доходу* $\mathrm{w} = p \cdot x^*$. *Зокрема, максимальний рівень корисності в задачі* (UMP) *становить саме* u.

Доведення. (i) Припустимо, що x^* не є розв'язком задачі (EMP) з рівнем корисності $u = u(x^*)$. Тоді існує споживчий набір $\acute{x}$ такий, що $u(\acute{x}) \geqslant u(x^*)$ і $p \cdot \acute{x} < p \cdot x^* \leqslant \mathrm{w}$. З умови локальної ненасичуваності відношення переваги можемо знайти споживчий набір $\hat{x}$ досить близький до $\acute{x}$ такий, що $u(\hat{x}) > u(\acute{x})$ і $p \cdot \hat{x} < \mathrm{w}$. Це означає, що $\hat{x} \in B_{p,\mathrm{w}}$ і $u(\hat{x}) > u(x^*)$. Одержана нерівність суперечить оптимальності x^* в задачі (UMP). Тому споживчий набір x^* повинен бути оптимальним у задачі (EMP) з рівнем корисності $u = u(x^*)$, мінімальний рівень витрат становить $p \cdot x^*$.

Позаяк x^* розв'язок задачі (UMP) при рівні доходу w, то справджується умова Вальраса $p \cdot x^* = \mathrm{w}$.

(ii) Оскільки $u > u(0)$, то $x^* \neq 0$. Отже, $p \cdot x^* > 0$. Припустимо, що x^* не є розв'язком задачі (UMP) з рівнем доходу $\mathrm{w} = p \cdot x^*$. Тоді існує споживчий набір $\acute{x}$ такий, що $u(\acute{x}) > u(x^*)$ і $p \cdot \acute{x} \leqslant p \cdot x^*$. Розглянемо набір $x^\alpha = \alpha \acute{x}$, де $\alpha \in (0, 1)$. Згідно з неперервністю функції $u(\cdot)$ (при α досить близькому до 1) матимемо $u(x^\alpha) > u(x^*)$ і $p \cdot x^\alpha < p \cdot x^*$. Це суперечить оптимальності набору x^* в задачі (EMP). Отже, x^* мусить бути оптимальним споживчим набором задачі (UMP) для рівня доходу $\mathrm{w} = p \cdot x^*$ і максимальний рівень корисності є $u(x^*)$.

Припустимо, що $u(x^*) > u$. Розглянемо набір $x^\alpha = \alpha x^*$, де $\alpha \in (0,1)$. Тоді згідно з неперервністю функції $u(\cdot)$ (при α досить близькому до 1), $u(x^\alpha) \geqslant u$ і $p \cdot x^\alpha < p \cdot x^*$, що суперечить оптимальності x^* в задачі (EMP) з рівнем корисності u. $\square$

Так само як у задачі (UMP), коли $p \gg 0$ розв'язок задачі (EMP) існує при досить загальних припущеннях. Зокрема, допустима множина $\{x \in \mathbb{R}^L_+ \; : \; u(x) \geqslant u\}$ повина бути непорожньою, а це справджується, якщо для деякого $x \in \mathbb{R}^L_+$, $u(x) \geqslant u$; наприклад, остання нерівність справджується для кожного $u > u(0)$, якщо $u(\cdot)$ необмежена зверху.

4.7 Функція видатків

Нехай $p \gg 0$, $u \in \mathrm{U} = \{ u \in u(\mathbb{R}^L_+) : u > u(0) \}$.

Означення 4.7.1. Відображення, яке кожній парі (p,u) ставить у відповідність число $p \cdot x^*$, де x^* будь-який розв'язок задачі (EMP), називається ***функцією видатків*** (expenditure function). Позначимо функцію видатків через $e(p,u)$: $e(p,u) = \min\{ p \cdot x \, : \, u(x) \geqslant u, \; x \in \mathbb{R}^L_+ \}$.

Теорема 4.7.1. *Нехай $u(\cdot)$ неперервна функція корисності для поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і $\succsim$ локально ненасичуване відношення переваги. Тоді функція видатків $e(p,u)$ володіє властивостями:*

(i) *однорідна степеня один за змінною p: $e(\alpha p, u) = \alpha e(p,u)$ для всіх $(p,u) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathrm{U}$ і $\alpha > 0$;*

(ii) *строго зростає за змінною u і є неспадною за змінною p_l для кожного l;*

(iii) *ввігнута за змінною p;*

(iv) *неперервна за змінною p і u.*

Доведення. (i) Множина допустимих споживчих наборів задачі (EMP) залишається незмінною при зміні ціни. Тоді для будь-якого $\alpha > 0$ множина оптимальних споживчих наборів задачі $(\alpha p) \cdot x \to \min$, $x \in \{\, x \in \mathbb{R}^L_+ \,:\, u(x) \geqslant u \,\}$ та сама, що й у задачі (EMP). Отже, для будь-якого оптимального набору x^*

$$e(\alpha p, u) \,=\, (\alpha\, p) \cdot x^* \,=\, \alpha\,(p \cdot x^*) \,=\, \alpha\, e(p, u).$$

(ii) Припустимо, що $e(p, u)$ не зростає строго за змінною u і нехай $\acute{x}$ і $\hat{x}$ оптимальні споживчі набори задачі (EMP) для рівнів корисності, відповідно, $\acute{u}$ і $\hat{u}$, де $\hat{u} > \acute{u}$ і $p \cdot \acute{x} \geqslant p \cdot \hat{x} > 0$. Розглянемо набір $x^\alpha = \alpha \hat{x}$, де $\alpha \in (0, 1)$. Згідно з неперервністю функції $u(\cdot)$ існує таке число α (достатньо близьке до 1), що $u(x^\alpha) > \acute{u}$ і $p \cdot \acute{x} > p \cdot x^\alpha$. Проте це суперечить оптимальності $\acute{x}$ в задачі (EMP) з рівнем корисності $\acute{u}$.

Покажемо , що функція $e(p, u)$ є неспадною за змінною p_j для всіх j. Припустимо, що вектори цін $\hat{p}$ і $\acute{p}$ такі, що $\hat{p}_j \geqslant \acute{p}_j$ і $\hat{p}_k = \acute{p}_k$ для всіх $k \neq j$. Нехай $\hat{x}$ оптимальний набір задачі (EMP) для ціни $\hat{p}$. Тоді

$$e(\hat{p}, u) \,=\, \hat{p} \cdot \hat{x} \,\geqslant\, \acute{p} \cdot \hat{x} \,\geqslant\, e(\acute{p}, u),$$

де остання нерівність випливає з означення функції $e(\acute{p}, u)$.

(iii) Зафіксуємо рівень корисності $\bar{u}$ і розглянемо $p^\alpha = \alpha p + (1-\alpha)\acute{p}$ для $\alpha \in [0,1]$. Припустимо, що x^α оптимальний набір у задачі (EMP) для ціни p^α. Оскільки $u(x^\alpha) \geqslant \bar{u}$ і за означенням функції видатків: $p \cdot x^\alpha \geqslant e(p, \bar{u})$ і $\acute{p} \cdot x^\alpha \geqslant e(\acute{p}, \bar{u})$, то

$$\begin{aligned} e(p^\alpha, \bar{u}) &= p^\alpha \cdot x^\alpha = \alpha p \cdot x^\alpha + (1-\alpha)\acute{p} \cdot x^\alpha \\ &\geqslant \alpha e(p, \bar{u}) + (1-\alpha) e(\acute{p}, \bar{u}), \end{aligned}$$

тобто функція видатків є ввігнутою.

(iv) Властивість неперервності функції видатків $e(p, u)$ за змінною p і u випливає з теореми про максимум (див. математ. додаток). □

Теорема 1.4.4 дає змогу зробити важливий висновок щодо зв'язку між функцією видатків $e(\cdot)$ і непрямою функцією корисності $v(\cdot)$. Зокрема, для довільних $p \gg 0$, $\mathrm{w} > 0$ і $u \in \mathrm{U}$ маємо

$$e(\, p,\, v(p, \mathrm{w})\,) \equiv \mathrm{w} \qquad \text{і} \qquad v(\, p,\, e(p, u)\,) \equiv u. \tag{4.7.1}$$

Умова (4.7.1) засвідчує, що у випадку фіксованого вектора цін $\bar{p}$, функції $e(\,\bar{p}, \cdot)$ і $v(\,\bar{p}, \cdot)$ взаємно обернені. Крім того, теорему 1.4.5 можна одержати з теореми 1.4.3 і навпаки.

Оскільки функція $v(\cdot)$ неперервна за змінною w, то функція $e(\cdot)$ неперервна за змінною u. Крім того, функція $e(\cdot)$ ввігнута за змінною p. Тому ця функція неперервна і за змінною p.

4.8 Попит Хікса

Нехай $(p, u) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathrm{U}$.

Означення 4.8.1. Відображення, яке кожній парі (p, u) ставить у відповідність множину розв'язків задачі (EMP) $h(p, u) = \{ x \in \mathbb{R}^L_+,\ u(x) \geqslant u : p \cdot x = e(p, u) \}$ називається *попитом Хікса.* Якщо для кожної пари (p,u) множина $h(p,u)$ складається з однієї точки, то назвемо це відображення *функцією попиту Хікса* (або компенсаційною функцією попиту).

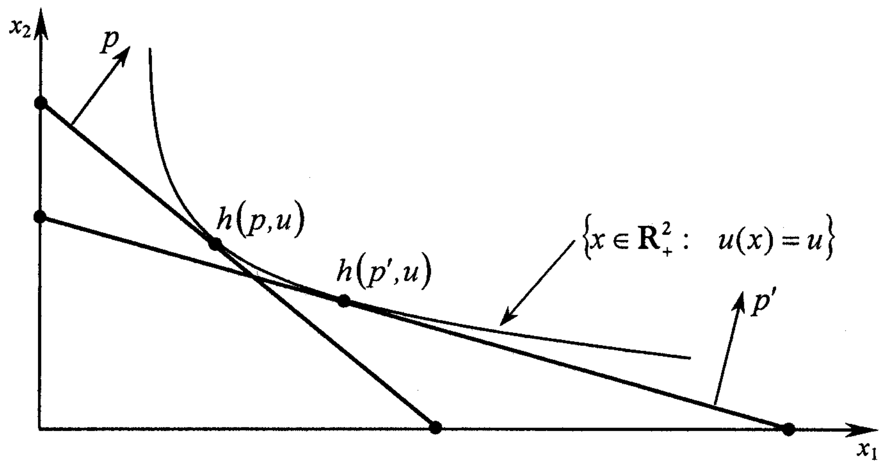


Рис. 4.8.24. Функція попиту Хікса

Теорема 4.8.1. *Нехай $u(\cdot)$ неперервна функція корисності для поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і $\succsim$ локально ненасичуване відношення переваги. Тоді попит Хікса $h(p, u)$ володіє властивостями:*

(i) *однорідний степеня нуль за змінною p: $h(\alpha p, u) = h(p, u)$ для всіх $(p, u) \in \mathbb{R}^L_{++} \times \mathrm{U}$ і $\alpha > 0$;*

(ii) *немає надлишку корисності: для всіх* $x \in h(p,u)$, $u(x) = u$;

(iii) *якщо* $\succsim$ *опукле* ($u(\cdot)$*- квазіввігнута функція*), *то множина* $h(p,u)$ *є опуклою. Зокрема, якщо* $\succsim$ *строго опукле* ($u(\cdot)$ *є строго квазіввігнута*), *тоді для всіх точок* (p,u) *множина* $h(p,u)$ *містить лише одну точку;*

(iv) *напівнеперервний зверху в кожній точці* (p,u). *Зокрема, функція попиту Хікса неперервна.*

Доведення. (i) Доведення проводимо аналогічно до доведення відповідної властивості функції видатків (п.(i) теорема 1.4.5).

(ii) Припустимо, що існує оптимальний набір $x \in h(p,u)$ такий, що $u(x) > u$. Розглянемо набір $x^\alpha = \alpha x$, де $\alpha \in (0,1)$. Згідно з неперервністю функції $u(\cdot)$ існує таке число α, близьке до 1, що $u(x^\alpha) \geqslant u$ і $p \cdot x^\alpha = \alpha p \cdot x < p \cdot x$. Однак це суперечить оптимальності набору x у задачі (EMP) з рівнем корисності u.

(iii) Доведення проводимо аналогічно до доведення відповідної властивості попиту Вальраса (п.(iii) теорема 1.4.2). $\square$

Розглянемо задачу максимізації корисності

$$v(p, \mathrm{w}^*) = \max\{u(x) : \, p \cdot x^* \leqslant \mathrm{w}^*, \; x \in \mathbb{R}^L_+\}.$$

Нехай x^* розв'язок цієї задачі і нехай $u^* = u(x^*)$. Розглянемо задачу мінімізації видатків

$$e(p, u^*) = \min\{p \cdot x : \, u(x) \geqslant u^*, \; x \in \mathbb{R}^L_+\}.$$

Рис. 4.8.25. Максимальна корисність і мінімальні видатки

З теореми 1.4.4 випливає *важлива тотожність між попитом Хікса і Вальраса*:

$h(p, u) \equiv x(p, e(p, u))$ - значення попиту Хікса при рівні корисності uтаке саме, як і значення попиту Вальраса при рівні доходу $e(p, u)$;

(4.8.1)

$x(p, \mathrm{w}) \equiv h(p, v(p, \mathrm{w}))$ - значення попиту Вальраса при рівні доходу w таке саме, як і значення попиту Хікса при рівні корисності $v(p, u)$.

(4.8.2)

Попит Хікса (який ще називають компенсаційним попитом) $h(p, u)$ відображає вплив на величину попиту ефекту заміщення, тобто, коли при зміні ціни одночасно змінюється рівень доходу у споживача так, що рівень корисності залишається незмінним. Для ціни p і рівня корисності u вартість оптимального набору $h(p,u)$ в задачі (EMP) дорівнює $e(p,u) = p \cdot h(p,u)$. Тоді для вектора цін p і рівня доходу $\mathrm{w} = e(p,u)$ значення попиту Вальраса і попиту Хікса співпадає $x(p,\mathrm{w}) = h(p,u)$ і $u(x(p,\mathrm{w})) = u$. Нехай система цін p змінилася і нова система цін є $\acute{p}$. Тоді вартість оптимального набору $h(\acute{p},u)$ в задачі (EMP), без зміни рівня корисності, дорівнює $e(\acute{p},u) = \acute{p} \cdot h(\acute{p},u)$. Для того щоб значення попиту Вальраса і попиту Хікса співпали при нових цінах $\acute{p}$, потрібно компенсувати дохід w на величину $\triangle \mathrm{w}_{Hicks} = e(\acute{p},u) - \mathrm{w}$, яка називається *компенсацією доходу за Хіксом.*

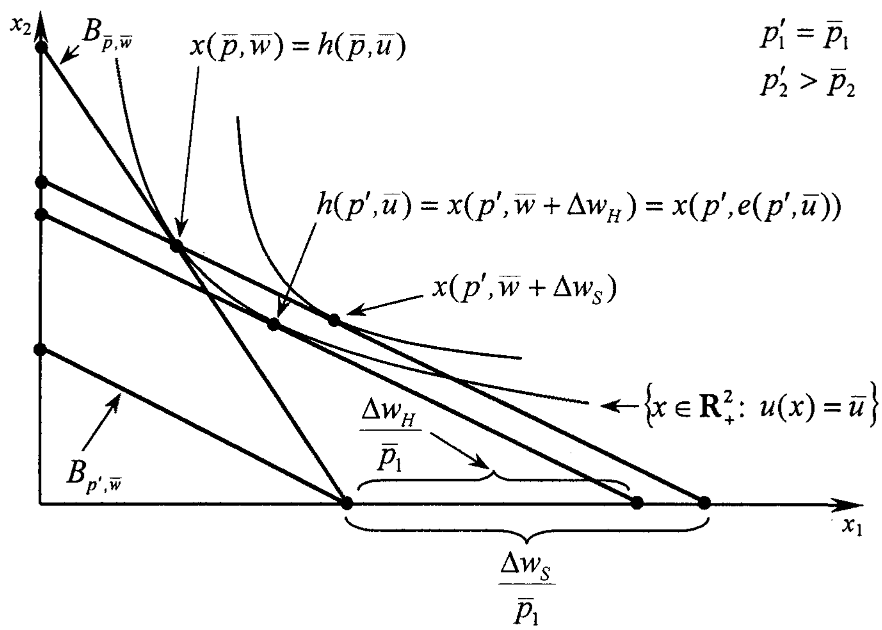


Рис. 4.8.26. Компенсація доходу за Хіксом і Слуцьким

Нехай для функції корисності $u(\cdot)$ і для початкової ситуації $(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$ оптимальним набором є $\bar{x} = x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, і $\bar{u} = u(\bar{x})$. Припустимо, що ціна $\bar{p}$ змінилася і нова ціна $\acute{p}$. Тоді компенсація доходу за Слуцьким: $\triangle \mathrm{w}_S = \acute{p} \cdot x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}) - \bar{\mathrm{w}}$, а за Хіксом : $\triangle \mathrm{w}_H = e(\acute{p}, \bar{u}) - \bar{\mathrm{w}} = \acute{p} \cdot x(\acute{p}, \bar{\mathrm{w}}) - \bar{\mathrm{w}}$ і $\triangle \mathrm{w}_H \leqslant \triangle \mathrm{w}_S$.

Важливою властивістю попиту Хікса є те, що він справджує (*компенсаційний*) *закон попиту:* попит і ціна змінюється в протилежних напрямах, якщо зміна ціни супроводжується компенсацією доходу за Хіксом. Доведення теореми проведемо для випадку функції попиту Хікса.

Теорема 4.8.2. *Нехай $u(\cdot)$ неперервна функція корисності для поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і $\succsim$ локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги. Тоді функція попиту Хікса $h(p, u)$ справджує (компенсаційний) закон попиту: для всіх p і $\acute{p}$,*

$$(\acute{p} - p) \cdot [h(\acute{p}, u) - h(p, u)] \leqslant 0. \tag{4.8.3}$$

Доведення. Для кожного $p \gg 0$ споживчий набір $h(p, u)$ є оптимальним в задачі (EMP) і має найменшу вартість серед всіх допустимих споживчих наборів при ціні p і рівні корисності u. Отже, маємо

$$\acute{p} \cdot h(\acute{p}, u) \leqslant \acute{p} \cdot h(p, u)$$

і

$$-p \cdot h(\acute{p}, u) \leqslant -p \cdot h(p, u).$$

Додавши обидві нерівності, одержимо нерівність (4.8.3). □

Нехай $u(\cdot)$ – *неперервно диференційовна функція* . Тоді необхідні умови оптимальності першого порядку – умови Куна-Такера для задачі (EMP) матимуть вигляд: якщо $x^* \in h(p, u)$, то існує множник Лагранжа $\lambda \geqslant 0$ такий, що для всіх $j = 1, ..., L$[1]

$$\lambda \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j} \leqslant p_j, \quad \text{виконується рівність, якщо } \; x_j^* > 0. \quad (4.8.4)$$

У матричному вигляді умови (4.8.4) матимуть вигляд

$$\lambda \nabla u(x^*) \leqslant \; p\,, \qquad (4.8.5)$$

$$x^* \cdot [\; p \, - \, \lambda \nabla u(x^*) \;] \, = \, 0 \qquad (4.8.6)$$

для деякого $\lambda \geqslant 0$.

Зокрема, якщо оптимальний споживчий набір є внутрішнім для споживчої множини (тобто, якщо $x^* \gg 0$ - закуповують всі види товарів), тоді умови оптимальності мають вигляд

$$\lambda \nabla u(x^*) \, = \, p \quad (\, \lambda \, \mathrm{MU}(\, x^*) \, = \, p \,)\,. \qquad (4.8.7)$$

Приклад 4.8.1. Нехай споживач вибирає за допомогою функції корисності Коба-Дугласа $u(x_1, x_2) \, = \, k\, x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ при деякому $\alpha \in (0, 1)$ і $k > 0$.

[1] Задачу (EMP) можна записати у вигляді

$$x \cdot p \to \min, \;\; x \in \mathbb{R}^L$$
$$h(x) = u \, - \, u(x) \leqslant 0, \qquad h_j(x) = -x_j \leqslant 0, \;\; j = 1, ..., L.$$

Для цієї задачі умови Куна-Таккера мають вигляд

$$p_j \, - \, \lambda \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} \, - \, \mu_i = 0, \;\; i = 1, ..., L,$$
$$\lambda\,(u \, - \, u(x^*)) = 0, \qquad \mu_i\,(-x_i^*) = 0, \;\; i = 1, ..., L,$$
$$\text{де } \; x^* \in \{x \in \mathbb{R}^L \, : \, u(x) \geqslant u, \; x \geqslant 0\}, \;\; \lambda \geqslant 0, \;\; \mu_i \geqslant 0, \, i = 1, ..., L.$$

Тоді задача (EMP) матиме вигляд

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \to \min, \qquad x \in \mathbb{R}^2_+, \quad k\, x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \geqslant u.$$

З необхідних умов оптимальноситі (4.8.7) маємо

$$\begin{aligned} \lambda\, k\, \alpha\, x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha} - p_1 &= 0, \\ \lambda\, k\, (1-\alpha)\, x_1^{\alpha} x_2^{-\alpha} - p_2 &= 0 \end{aligned}$$

для деякого $\lambda \geqslant 0$. З останьої системи рівнянь випливає, що

$$x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1}\, x_2,$$

або врахувавши відсутність надлишку корисності

$$k \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{p_2}{p_1} \right)^{\alpha} x_2 = u.$$

Отже, функція попиту Хікса на товар x_1 і x_2 має вигляд

$$h_1(p,u) = \frac{1}{k} \left[\frac{\alpha p_2}{(1-\alpha) p_1} \right]^{1-\alpha} u,$$

$$h_2(p,u) = \frac{1}{k} \left[\frac{(1-\alpha) p_1}{\alpha p_2} \right]^{\alpha} u.$$

Тоді функція видатків виглядатиме так:

$$\begin{aligned} e(p,u) &= p_1\, h_1(p,u) + p_2\, h_2(p,u) \\ &= \frac{1}{k} \left[\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} \right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha}\, u. \end{aligned}$$

▲

Розділ 5

Взаємозв'язок між попитом, видатками та непрямою корисністю

Ми простежимо взаємозв'язок: між функцією попиту Хікса і функцією видатків, між функціями попиту Хікса і Вальраса, між функцією попиту Вальраса та непрямою функцією корисності.

Нехай $u(\cdot)$ *неперервна функція корисності для поля переваг* $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$*,* $\succsim$ *- локально ненасичуване, строго опукле відношення переваги і* $p \gg 0$.

5.1 Опорні функції і теорема двоїстості

Дуже часто доводиться розглядати екстремальну задачу на знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції $p \cdot x$ на опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^L$, тобто задачу вигляду

$$p \cdot x \to \min(\max), \qquad x \in V.$$

Досить успішний підхід до розв'язання цієї задачі полягає у вивченні поведінки розв'язку при зміні p. Це й призводить до розгляду функцій, які виражають залежність нижньої (верхньої) грані від p, тобто до вивчення опорних функцій $\mu_V(\cdot)$ від V.[1]

Означення 5.1.1. Опорну функцію непорожньої замкнутої множини V визначимо так:

$$\text{для всіх } p \in \mathbb{R}^L, \qquad \mu_V(p) \;=\; \inf\{\, p \cdot x \,:\, x \in V \,\}.$$

Опорна функція описує всі замкнуті підпростори, які містять множину V. Справді,

$$V \subset \{\, x \in \mathbb{R}^L \,:\, p \cdot x \geqslant \beta \,\}$$

тоді і лише тоді, коли

$$\beta \leqslant \mu_V(p).$$

Замкнуту опуклу множину V можна визначити як множину розв'язків системи нерівностей, які породжені опорною функцією

$$V \;=\; \{\; x \in \mathbb{R}^L \,:\, p \cdot x \geqslant \mu_V(p) \;\text{ для всіх } p \in \mathbb{R}^L \;\},$$

[1] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.,1973.

тобто опукла замкнута множина повністю визначається своєю опорною функцією.

Зокрема, якщо V не є опукла множина, то

$$\mathrm{conv}V = \{\ x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geqslant \mu_V(p)\ \text{ для всіх } p \in \mathbb{R}^L\ \}$$

опукла оболонка цієї множини.

Легко бачити, що опорна функція однорідна першого степеня. Цікавішою властивістю є ввігнутість опорної функції. Насправді, нехай $p^\alpha = \alpha p^1 + (1-\alpha)p^2$, де $\alpha \in [0,1]$, припустимо, що інфімум досягається в точці $z \in V$, тобто $\mu_V(p^\alpha) = p^\alpha \cdot z$. Тоді маємо

$$\mu_V(p^\alpha) = \alpha p^1 \cdot z + (1-\alpha)p^2 \cdot z \geqslant \alpha\mu_V(p^1) + (1-\alpha)\mu_V(p^2).$$

Звідси випливає, що опорна функція ввігнута.

Основним результатом для опорних функцій є теорема двоїстості.

Теорема 5.1.1 (Теорема двоїстості). *Нехай V непорожня замкнута множина і $\mu_V(\cdot)$ її опорна функція. Тоді існує єдиний елемент $\bar{x} \in V$ такий, що $\mu_V(\bar{p}) = \bar{p} \cdot \bar{x}$, якщо і тільки якщо, $\mu_V(\cdot)$ є диференційовна в точці $\bar{p}$. Зокрема, в цьому випадку*

$$\nabla\mu_V(\bar{p}) = \bar{x}.$$

5.2 Функція попиту Хікса і функція видатків

Нехай функція попиту Хікса $h(p,u)$ визначена, тоді функцію видатків знаходимо за формулою $e(p,u) = p \cdot h(p,u)$.

Теорема 5.2.1. *Нехай $u(\cdot)$ неперервна функція корисності поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і $\succsim$ локально ненасичуване та строго опукле відношення переваги. Тоді для всіх p і u*

$$h(p,u) \,=\, \nabla_p\, e(p,u). \tag{5.2.1}$$

Доведення. Наведемо два доведення теореми.

1. Оскільки функція видатків $e(p,u)$ опорна функція множини $V \,=\, \{\, x \in \mathbb{R}^L_+ \,:\, u(x) \geqslant u \}$ і $h(p,u)$ єдиний оптимізаційний вектор такий, що $e(p,u) \,=\, p \cdot h(p,u)$, тоді за теоремою двоїстості маємо $h(p,u) \,=\, \nabla_p\, e(p,u)$.

2. Припустимо, що $h(p,u) \gg 0$ і функція попиту Хікса диференційовна для всіх (p,u). Оскільки $e(p,u) \,=\, p \cdot h(p,u)$, то отримаємо

$$\nabla_p\, e(p,u) \,=\, h(p,u) \,+\, [\, p \cdot \mathrm{D}_p\, h(p,u)\,]^{\tau}. \tag{5.2.2}$$

Загальний ефект функції видатків від зміни ціни розкладається на два ефекти: безпосередній ефект на видатки, одержаний зміною ціни при фіксованому попиті, і непрямий ефект на видатки, зумовлений зміною попиту.

Враховуючи умову оптимальності Куна-Такера для задачі (EMP): $\lambda \nabla\, u(h(p,u)) \,=\, p$, маємо

$$\nabla_p\, e(p,u) \,=\, h(p,u) \,+\, \lambda\, [\, \nabla\, u(h(p,u)) \cdot \mathrm{D}_p\, h(p,u)\,]^{\tau}.$$

Оскільки функція попиту Хікса $h(p,u)$ задовольняє умову відсутності надлишку корисності $u(h(p,u)) \,=\, u$ для всіх p, то $\nabla\, u(h(p,u)) \cdot \mathrm{D}_p\, h(p,u) \,=\, 0$, і одержимо $\nabla_p\, e(p,u) \,=\, h(p,u)$.

□

Теорема 5.2.2. *Нехай $u(\cdot)$ неперервна функція корисності для поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і $\succsim$ локально ненасичуване та строго опукле відношення переваги. Припустимо також, що функція попиту Хікса $h(p,u)$ є неперервно диференційовною для всіх (p,u), тоді:*

(i) $\mathrm{D}_p\, h(p,u) \,=\, \mathrm{D}^2_p\, e(p,u)$;

(ii) $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ *є від'ємно напіввизначена матриця;*

(iii) $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ *- симетрична матриця;*

(iv) $\mathrm{D}_p\, h(p,u)\, p \,=\, 0$.

Доведення. Властивість (i) отримуємо з теореми 1.5.2 безпосереднім диференціюванням. Властивості (ii) і (iii) випливають із властивості (i) з врахуванням того, що функція видатків $e(p,u)$ двічі неперервно диференційовна і ввігнута за змінною p. Оскільки функція попиту Хікса $h(p,u)$ однорідна степеня нуль за змінною p, то властивість (iv) отримуємо з теореми Ейлера. □

Від'ємна напіввизначеність матриці $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ є диференціальним аналогом компенсаційного закону попиту. Справді, в диференціальній формі (4.8.3) має вигляд $\mathrm{d}p \cdot \mathrm{d}h \leqslant 0$. Оскільки $\mathrm{d}h \,=\, \mathrm{D}_p\, h(p,u)\,\mathrm{d}p$, то $\mathrm{d}p \cdot \mathrm{D}_p\, h(p,u)\,\mathrm{d}p \leqslant 0$ для всіх $\mathrm{d}p$, тобто $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ є від'ємно напіввизначена.

З від'ємної напіввизначеності матриці $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ випливає, що всі часткові значення ефектів заміщення недодатні: $\dfrac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_j} \leqslant 0$ для всіх $j = 1, ..., L$. Це означає, що компенсоване зростання ціни на товар завжди призводить до незростання попиту на цей товар.

Симетричність матриці $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ означає, що для будь-яких двох товарів j та i виконується рівність $\dfrac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} = \dfrac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j}$, тобто функції компенсаційного попиту такі, що ефект заміщення товару j на товар i дорівнює ефекту заміщення товару i на товар j.

Із властивості (iv) теореми 1.5.3 випливає, що

$$\sum_{i=1}^{L} p_i \frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} = 0 \qquad \text{для всіх } j = 1, ..., L.$$

Оскільки всі ціни додатні, то для того щоб ця умова виконувалась, необхідно, щоб хоча б один елемент кожного рядка матриці $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ мав знак відмінний від інших. Але ж елемент $\dfrac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_j} \leqslant 0$. Тому щонайменше хоч один елемент кожного рядка матриці $\mathrm{D}_p\, h(p,u)$ є невід'ємним, тобто для всіх $j = 1, ..., L$ існує $i \neq j$ таке, що

$$\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} \geqslant 0. \tag{5.2.3}$$

На підставі симетрії величин ефекту заміщення, Хікс зробив такі визначення взаємозамінюваності та взаємодоповнюваності.

Два товари j та i називаються *взаємозамінними* для пари ціна-рівень корисності (p,u), якщо справджується (5.2.3), тобто компенсоване зростання ціни товару j призводить до не зменшення попиту на товар i.

Отже, кожному товару відповідає хоч би один товар, який утворює з ним взаємозамінювану пару. Зокрема для випадку двох товарів вони обов'язково повинні бути взаємозамінними.

У випадку, коли $\dfrac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} \leqslant 0$, то кажуть, що товари j

та i утворюють *взаємодоповнювану* пару для пари ціна-рівень корисності (p, u).

Для попиту Вальраса вводиться поняття валового заміщення та валового доповнення:

товар j називається *валовим заміщенням* товару i для пари ціна-дохід (p, w), якщо $\dfrac{\partial x_j(p, \mathrm{w})}{\partial p_i} \geqslant 0$, і називається *валовим доповненням* товару i для пари ціна-дохід (p, w), якщо $\dfrac{\partial x_j(p, \mathrm{w})}{\partial p_i} < 0$. Тут слово "валово" призвано відобразити врахування всіх ефектів, зокрема ефекту доходу, навідмінно від чистого ефекту заміщення в границях поверхні байдужості.

Зауважимо, що поняття взаємозамінності та взаємодоповнюваності, а також валової замінності та доповнювальності визначається для заданого індивідуального споживача і для заданої пари ціна-рівень корисності (p, u) і доходо-цінової конфігурації (p, w). Проте можна ввести аналоги цих чотирьох понять і для функцій сукупного попиту - в термінах знаків сум величин індивідуальних ефектів заміщення і суми величин загальних ефектів.

5.3 Рівняння Слуцького

Незважаючи на те, що функція попиту Хікса не безпосередньо спостережувана (вона має як аргумент лише рівень корисності споживача), ми покажемо, що $\mathrm{D}_p h(p, u)$ можна обчислити через функцію попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$.

Теорема 5.3.1 (Рівняння Слуцького). *Нехай* $u(\cdot)$ *неперервна функція корисності для поля переваг* $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ *і* $\succsim$ *локально ненасичуване та строго опукле відношення переваги. Припустимо також, що функція попиту Хікса* $h(p, u)$ *непе-*

рервно диференційовна для всіх (p, u). *Тоді для всіх* (p, w) *і* $u = v(p, \mathrm{w})$ *матимемо*

$$\frac{\partial h_j(p,u)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(p,\mathrm{w})}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(p,\mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} x_i(p,\mathrm{w}) \qquad \text{для всіх } j \text{ та } i, \tag{5.3.1}$$

або в матричному вигляді

$$\mathrm{D}_p\, h(p,u) = \mathrm{D}_p\, x(p,\mathrm{w}) + \mathrm{D}_{\mathrm{w}}\, x(p,\mathrm{w})\, x(p,\mathrm{w})^\tau. \tag{5.3.2}$$

Доведення. Нехай для пари ціна-дохід $(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$ споживач досягає рівня корисності $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$ і $\bar{\mathrm{w}} = e(\bar{p}, \bar{u})$. Оскільки за умовою (4.8.1) для всіх (p, u), $h_j(p,u) = x_j(p, e(p,u))$, тоді, диференціюючи цю рівність за змінною p_i в точці $(\bar{p}, \bar{u})$, одержимо

$$\frac{\partial h_j(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial \mathrm{w}} \frac{\partial e(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_i},$$

або з врахуваням рівності (5.2.1), отримаємо

$$\frac{\partial h_j(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u}))}{\partial \mathrm{w}} h_i(\bar{p},\bar{u}).$$

Оскільки $\bar{\mathrm{w}} = e(\bar{p}, \bar{u})$ і $h_i(\bar{p},\bar{u}) = x_i(\bar{p}, e(\bar{p},\bar{u})) = x_i(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$, то матимемо

$$\frac{\partial h_j(\bar{p},\bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial x_j(\bar{p},\bar{\mathrm{w}})}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j(\bar{p},\bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}} x_i(\bar{p},\bar{\mathrm{w}}).$$

□

На рис. 5.3.1 зображено графіки функцій попиту Хікса і Вальраса для товару j як функції від ціни p_j, коли ціна на

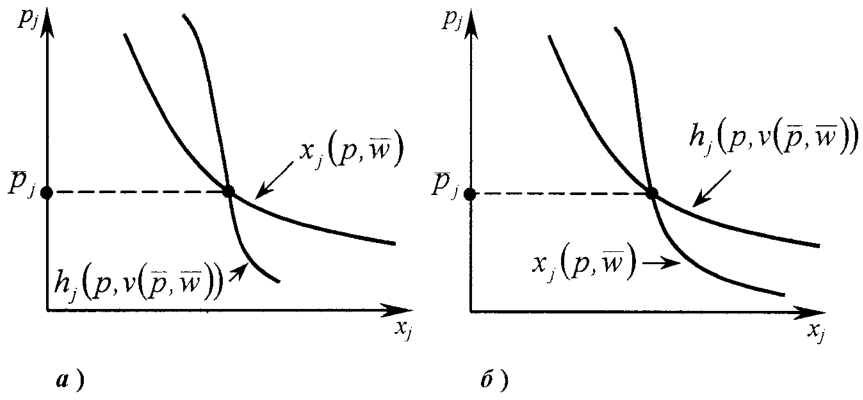


Рис. 5.3.1. Функції попиту Хікса і Вальраса для товару j: товар цінний (a); товар малоцінний ($б$)

інші товари фіксована $\bar{p}_{-j}$ ($\bar{p}_{-j}$ - вектор цін без ціни p_j, тоді $p = (p_j, \bar{p}_{-j})$). Рівняння Слуцького описує взаємозалежність між нахилом двох функцій для ціни $\bar{p}_j$. На рис. 5.3.1, a нахил кривої попиту Вальраса в точці $\bar{p}_j$ є від'ємним і меншим за нахил кривої попиту Хікса. Рівняння Слуцького описує відповідну ситуацію для цінного товару j при $(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$. Коли ціна p_j зростає до значення $\bar{p}_j$, то повинен зростати дохід споживача так, щоб зберегти рівень корисності. Зокрема, якщо товар j цінний, то попит зменшиться у разі відсутності компенсації. На рис. 5.3.1, $б$ нахил кривої попиту Вальраса в точці $\bar{p}_j$ від'ємний і більший за нахил кривої попиту Хікса.

З теореми 1.5.4. випливає, що матриця $\mathrm{D}_p h(p, u)$ збігається з матрицею заміщення Слуцького

$$S(p, \mathrm{w}) = \left(s_{ji}(p, \mathrm{w})\right)_{j,i=1}^{L},$$

де $s_{ji}(p, \mathrm{w}) = \partial x_j(p, \mathrm{w})/\partial p_i + [\partial x_j(p, \mathrm{w})/\partial \mathrm{w}]\, x_i(p, \mathrm{w})$.

Зокрема, матриця Слуцького безпосередньо обчислюється через функцію попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$, одержана як розв'язок задачі максимізації корисності, оскільки $S(p, \mathrm{w}) = \mathrm{D}_p h(p, u)$, то володіє властивостями: від'ємно напіввизначена, симетрична і задовольняє умову $S(p, \mathrm{w})\, p = 0$.

Приклад 5.3.1. Запишемо рівняння Слуцького для випадку функції корисності Коба-Дугласа. В розглянутих нижче прикладах знайдено

$$
\begin{aligned}
&v(p_1, p_2, \mathrm{w}) = m p_1^{-\alpha} p_2^{\alpha-1} \mathrm{w}\\
&e(p_1, p_2, u) = \frac{1}{m} p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u, \quad m = k\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}\\
&x_1(p_1, p_2, \mathrm{w}) = \frac{\alpha \mathrm{w}}{p_1}\\
&h_1(p_1, p_2, u) = \frac{\alpha}{m} p_1^{\alpha-1} p_2^{1-\alpha} u.
\end{aligned}
$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1(p, \mathrm{w})}{\partial p_1} = -\frac{\alpha \mathrm{w}}{p_1^2}\\
&\frac{\partial x_1(p, \mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} = \frac{\alpha}{p_1}\\
&\frac{\partial h_1(p, u)}{\partial p_1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{m} p_1^{\alpha-2} p_2^{1-\alpha} u\\
&\frac{\partial h_1(p, v(p, \mathrm{w}))}{\partial p_1} = \alpha(\alpha-1)\mathrm{w} p_1^{-2}.
\end{aligned}
$$

Отже, рівняння Слуцького має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_1(p, v(p,\mathrm{w}))}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(p,\mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}}\, x_1(p,\mathrm{w}) \\ &= \alpha(\alpha-1)\mathrm{w}p_1^{-2} - \frac{\alpha}{p_1}\,\frac{\alpha\mathrm{w}}{p_1} \\ &= \frac{[\alpha(\alpha-1)-\alpha^2]\mathrm{w}}{p_1^2} \\ &= \frac{-\alpha\mathrm{w}}{p_1^2} = \frac{\partial x_1(p,\mathrm{w})}{\partial p_1}.\end{aligned}$$

▲

5.4 Тотожність Роя

Ми вже одержали деякі тотожності (4.7.1),(4.8.1) і (4.8.2). Використаємо їх для отримання нової важливої тотожності.

Теорема 5.4.1 (Тотожність Роя). *Нехай $u(\cdot)$ – неперервна функція корисності для поля переваг $(\mathbb{R}^L_+, \succsim)$ і $\succsim$ – локально ненасичуване та строго опукле відношення переваги. Припустимо також, що непряма функція корисності $v(p,\mathrm{w})$ є неперервно диференційовною в точці $(\bar p, \bar{\mathrm{w}})$. Тоді*

$$x_i(\bar p, \bar{\mathrm{w}}) \;=\; -\frac{\partial v(\bar p, \bar{\mathrm{w}})/\partial p_i}{\partial v(\bar p, \bar{\mathrm{w}})/\partial \mathrm{w}} \qquad \textit{для всіх} \quad i = 1, ..., L,$$

або у векторному вигляді

$$x(\bar p, \bar{\mathrm{w}}) \;=\; -\frac{1}{\nabla_{\mathrm{w}} v(\bar p, \bar{\mathrm{w}})}\, \nabla_p v(\bar p, \bar{\mathrm{w}}).$$

Доведення. Наведемо два доведення теореми.

1. Нехай $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})$. Оскільки тотожність $v(p, e(p, \bar{u})) = \bar{u}$ правильна для всіх цін p, то диференціюючи її за змінною p і приймаючи $p = \bar{p}$, отримаємо

$$\nabla_p v(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})) + \frac{\partial v(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial \mathrm{w}} \nabla_p \, e(\bar{p}, \bar{u}) = 0,$$

або врахувавши рівність $\nabla_p \, e(\bar{p}, \bar{u}) = h(\bar{p}, \bar{u})$, маємо

$$\nabla_p v(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})) + \frac{\partial v(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))}{\partial \mathrm{w}} h(\bar{p}, \bar{u}) = 0.$$

Оскільки $\bar{\mathrm{w}} = e(\bar{p}, \bar{u})$ і $h(\bar{p}, \bar{u}) = x(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u}))$, то одержимо результат

$$\nabla_p v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}) + \frac{\partial v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}} x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}) = 0.$$

2. Нехай $x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}) \gg 0$ і функція попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ диференційовна. За означенням непрямої функції корисності

$$v(p, \mathrm{w}) = u(x(p, \mathrm{w})). \tag{5.4.1}$$

Продиференціюємо останню рівність за змінною p_j і приймаємо $p = \bar{p}$, $\mathrm{w} = \bar{\mathrm{w}}$, тоді одержимо

$$\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}))}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial p_j}. \tag{5.4.2}$$

Оскільки функція попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$ задовольняє необхідні умови оптимальності Куна-Такера $\nabla u(x(p, \mathrm{w})) = \lambda \, p$, то

$$\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial p_j} = \lambda \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_k(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial p_j}. \tag{5.4.3}$$

Функція попиту $x(p, \mathrm{w})$ задовольняє також умову Вальраса $p \cdot x(p, \mathrm{w}) = \mathrm{w}$. Продиференціювавши цю рівність за змінною p_j, отримаємо

$$x_j(p, \mathrm{w}) + \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_k(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial p_j} = 0. \tag{5.4.4}$$

Підставивши (5.4.4) в (5.4.3), матимемо

$$\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial p_j} = -\lambda\, x_j(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}). \tag{5.4.5}$$

Продиференціювавши (5.4.1) за змінною w, одержимо

$$\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}} = \sum_{k=1}^{L} \frac{\partial u(x(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}}))}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}} = \lambda \sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_k(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}}. \tag{5.4.6}$$

З умови Вальраса випливає, що

$$\sum_{k=1}^{L} p_k \frac{\partial x_k(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}} = 1. \tag{5.4.7}$$

Підставляючи (5.4.7) в (5.4.6), одержимо

$$\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{\mathrm{w}})}{\partial \mathrm{w}} = \lambda. \tag{5.4.8}$$

Умови (5.4.5) і (5.4.8) визначають тотожність Роя. □

5.5 Диференційовний попит

У п. 4.1 ми розглянули оптимальну поведінку споживача при виборі споживчого набору за умови незмінних цін p і незмінного доходу w. Ми бачили, якщо функція корисності $u(\cdot)$ зображає неперервне, строго опукле і локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$, яке визначене на споживчій множині $\mathbb{R}^L_+$, тоді функція попиту $x(p, \mathrm{w})$ є неперервною.

Припустимо, що функція корисності $u(\cdot)$ строго квазіввігнута, двічі неперервно диференційовна і $\nabla u(x) \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}^L_+$.

Припустимо, що споживач закуповує всі види товарів, тоді умови оптимальності першого порядку для задачі (UMP) визначають єдиний споживчий набір $x(p, \mathrm{w}) \gg 0$ з відповідним множником Лагранжа $\lambda = \lambda(p, \mathrm{w})$. Ці $L + 1$ функції можна розглядати як розв'язок системи $L + 1$ рівнянь

$$\begin{aligned} f(x, \lambda, p, \mathrm{w}) &= \nabla u(x) - \lambda p = 0 \\ g(x, \lambda, p, \mathrm{w}) &= p \cdot x - \mathrm{w} = 0. \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

З теореми про неявну функцію випливає таке: якщо матриця Якобі системи (5.5.1)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{D}^2 u(x) & -p \\ p^\tau & 0 \end{pmatrix}$$

має визначник відмінний від нуля, тоді існує єдиний розв'язок $x(p, \mathrm{w})$, $\lambda(p, \mathrm{w})$ цієї системи, який має неперервні частинні похідні. Оскільки $\nabla u(x) = \lambda p$ і $\lambda > 0$, то Якобіан системи відмінний від нуля тоді і лише тоді, коли обведений Гесіан функції $u(x)$ в точці x відмінний від нуля

$$\begin{vmatrix} \lambda \mathrm{D}^2 u(x) & -\nabla u(x) \\ (\nabla u(x))^\tau & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оскільки функція корисності $u(\cdot)$ строго квазівівгнута, то її обвідна матриця Гесе невироджена.

Отже, функція попиту $x(p, \mathrm{w})$ диференційовна тоді і лише тоді, коли обвідний Гесіан функції $u(\cdot)$ ненульовий в точці $x(p, \mathrm{w})$. Звідки маємо, якщо $x(p, \mathrm{w})$ диференційовна в точці (p, w), то матриця заміщення Слуцького $S(p, \mathrm{w})$ має максимально можливий ранг, тобто $\operatorname{rank} S(p, \mathrm{w}) = L - 1$.

Розділ 6

Грошова міра

6.1 Грошова міра функції корисності

Незважаючи на те, що непряма функція корисності безпосередньо не зв'язана з відношенням переваги, її можна використати для виміру зміни доходу в грошових одиницях.

Нехай споживач робить свій вибір, використовуючи функцію корисності $u(\cdot)$, яка зображає строго опукле, локально ненасичуване відношення переваги $\succsim$. Розглянемо деякий вектор цін p і визначимо деякий набір товарів x. Виникає таке запитання: скільки грошей потрібно мати споживачеві, щоб купити набір товарів, принаймі, такий хороший як набір x?

Щоб відповісти на це це запитання, розглянемо задачу мінімізації видатків

$$p \cdot z \to \min, \qquad z \in \{\, z \in \mathbb{R}^L_+ : \; u(z) \geqslant u(x) \,\}. \tag{6.1.1}$$

Нехай $z = h(p, u(x))$ розв'язок задачі (6.1.1), тоді $e(p, u(x)) = p \cdot h(p, u(x))$.

Самуельсон ввів грошову міру функції корисності - money

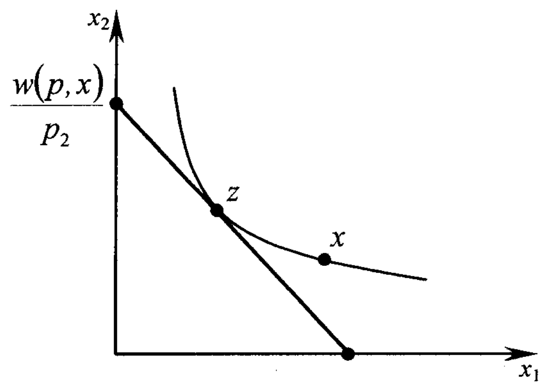


Рис. 6.1.1. Грошова міра функції корисності

metric utility function (її також називають функція мінімального доходу або пряма компенсаційна функція)[1]

$$\mathrm{w}(p, x) \equiv e(p, u(x)).$$

Легко бачити, що для фіксованого x, $u(x)$ є фіксоване, тоді функція $\mathrm{w}(p, x)$ за змінною p поводить себе як функція видатків: монотонно неспадна, однорідна першого степеня, ввігнута і так далі. Очевидно, коли вектор цін p фіксований, то $\mathrm{w}(p, x)$ насправді функція корисності. Доведення просте, при фіксованому векторі цін функція видатків зростає за рівнем корисності: якщо ви бажаєте збільшити рівень корисності, то ви повинні більше витратити грошей. Справді, функція видатків (для локально ненасичуваного відношення переваги) неперервна строго зростаюча функція за змінною u. Отже, для фіксованого вектора p функція $\mathrm{w}(p, x)$ насправді моно-

[1] Samuelson P. Complement: An essay on the 40th anniversary of the Hicks-Allen revolution in demand theory// Jornal of Economic Literature, 1974, 64(4). P.1255-1289.

тонна трансформація функції корисності і тому поводить себе як функція корисності.

Аналогічно можна визначити грошову міру непрямої функції корисності. Нехай споживач для вектора цін q і рівня доходу w одержав рівень корисності $u = v(q, \mathrm{w})$ (розв'язавши задачу $u(x) \to \max,\ x \in B_{q,\mathrm{w}}$).

Виникає така задача: який дохід повинен мати споживач, щоб при цінах p купити набір товарів з рівнем корисності не меншим за $v(q, \mathrm{w})$?

Розглянемо задачу мінімізації видатків

$$p \cdot z \to \min, \qquad z \in \{\, z \in \mathbb{R}^L_+ :\ u(z) \geqslant v(q, \mathrm{w}) \,\}. \tag{6.1.2}$$

Нехай $z = h(p, v(q, \mathrm{w}))$ розв'язок задачі (6.1.2), тоді $e(p, v(q, \mathrm{w})) = p \cdot h(p, v(q, \mathrm{w}))$. Отже, грошову міру непрямої функції корисності - money metric indirect utility function (непряма компенсаційна функція) визначаємо так:

$$\mu(p, q, \mathrm{w}) \equiv e(p, v(q, \mathrm{w})).$$

Якщо система ціна-дохід (q, w) фіксована, то функція $\mu(p, q, \mathrm{w})$ як функція від p володіє всіма властивостями функції видатків. Коли зафіксувати вектор цін p, то $\mu(p, q, \mathrm{w})$ - монотона трансформація непрямої функції корисності.

Одержані властивості прямої і непрямої компенсаційної функції є корисними при розгляді теорії інтегровності й економіки добробуту.

Приклад 6.1.1. Нехай споживач робить свій вибір, використовуючи функцію корисності Коба-Дугласа $u(x_1, x_2) = k\, x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$ при деякому $\alpha \in (0, 1)$ і $k > 0$.

У прикладах 4.2.1 і 5.5.1 було знайдено непряму функцію корисності та функцію видатків

$$v(p_1, p_2, \mathrm{w}) = \left[\, k\, \alpha^{\alpha}\, (1-\alpha)^{1-\alpha} \,\right] {p_1}^{-\alpha}\, {p_2}^{\alpha-1}\, \mathrm{w}, \tag{6.1.3}$$

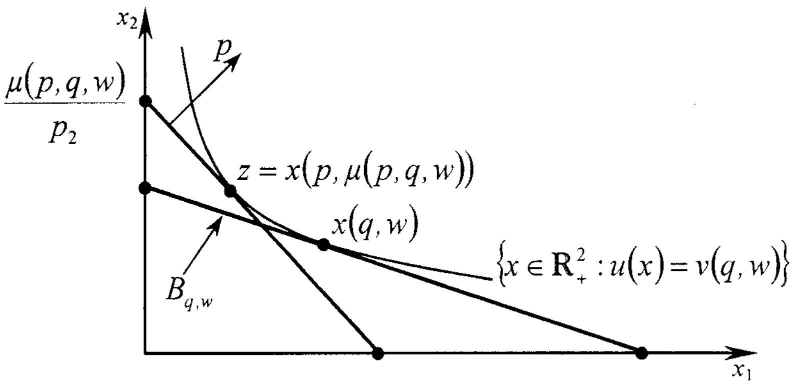


Рис. 6.1.2. Грошова міра непрямої функції корисності

$$e(p_1, p_2, u) = \frac{1}{k} \left[\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{\alpha-1} \right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u. \tag{6.1.4}$$

Прийнявши $\mathrm{w} = e(p_1, p_2, u)$ і $u = v(p_1, p_2, \mathrm{w})$, отримаємо

$$v(p_1, p_2, e(p_1, p_2, u)) = u, \qquad e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, \mathrm{w})) = \mathrm{w}.$$

Грошова міра функції корисності та непрямої функції корисності має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(p,x) &= \frac{1}{k} \left[\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} \right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} u(x_1, x_2) \\ &= \left[\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} \right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \mu(p,q,\mathrm{w}) &= \frac{1}{k} \left[\alpha^{-\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha} \right] p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} v(q_1, q_2, \mathrm{w}) \\ &= p_1^{\alpha} p_2^{1-\alpha} {q_1}^{-\alpha} {q_2}^{\alpha-1} \mathrm{w}. \end{aligned}$$

▲

Приклад 6.1.2. Нехай споживач робить свій вибір, використовуючи функцію корисності CES: $u(x_1, x_2) = (x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho}$.

Розглянемо задачу мінімізації видатків

$$\begin{aligned} p_1x_1 + p_2x_2 \to \min,\ x \in \mathbb{R}^2_+, \\ \text{за умови, що} \quad (\,x_1^\rho + x_2^\rho\,) \geqslant u^\rho. \end{aligned}$$

Умови оптимальності першого порядку та умова відсутності надлишку корисності мають вигляд

$$\begin{aligned} p_1 - \lambda\,\rho\,x_1^{\rho-1} &= 0 \\ p_2 - \lambda\,\rho\,x_2^{\rho-1} &= 0 \\ x_1^\rho + x_2^\rho &= u^\rho. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо x_1^ρ і x_1^ρ

$$x_1^\rho = p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}}\,(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}, \qquad x_2^\rho = p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\,(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}} \tag{6.1.5}$$

і підставляємо в умову відсутності надлишку корисності

$$(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right] = u^\rho.$$

Розв'язавши це рівняння стосовно $(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}$ і підставивши його в систему (6.1.5), знаходимо функції попиту Хікса на обидва товари

$$\begin{aligned} h_1(p_1, p_2, u) =& p_1^{\frac{1}{\rho-1}}\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}} u \\ h_2(p_1, p_2, u) =& p_2^{\frac{1}{\rho-1}}\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}} u. \end{aligned}$$

Отже, функція видатків має вигляд

$$\begin{aligned} e(p_1,p_2,u) &= p_1h_1(p_1,p_2,u) + p_2h_2(p_1,p_2,u) \\ &= u\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{-\frac{1}{\rho}} \\ &= u\left[p_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_2^{\frac{\rho}{\rho-1}}\right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \\ &= u\,[\,p_1^r + p_2^r\,]^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

де $r = \rho/\rho - 1$.

Приймаючи $\mathrm{w} = e(p_1,p_2,u)$ і $u = v(p_1,p_2,\mathrm{w})$, знаходимо непряму функцію корисності

$$v(p_1,p_2,\mathrm{w}) = [\,p_1^r + p_2^r\,]^{-\frac{1}{r}}\,\mathrm{w}.$$

Функції попиту знаходимо з рівності Роя

$$\begin{aligned} x_1(p,\mathrm{w}) &= \frac{-\partial v(p,\mathrm{w})/\partial p_1}{\partial v(p,\mathrm{w})/\partial \mathrm{w}} = \frac{p_1^{r-1}\,\mathrm{w}}{p_1^r + p_2^r} \\ x_2(p,\mathrm{w}) &= \frac{-\partial v(p,\mathrm{w})/\partial p_2}{\partial v(p,\mathrm{w})/\partial \mathrm{w}} = \frac{p_2^{r-1}\,\mathrm{w}}{p_1^r + p_2^r}. \end{aligned}$$

Грошова міра функції корисності та непрямої функції корисності має вигляд

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(p,x) &= (\,p_1^r + p_2^r\,)^{1/r}\,(x_1^\rho + x_2^\rho)^{1/\rho} \\ \mu(p,q,\mathrm{w}) &= (\,p_1^r + p_2^r\,)^{1/r}\,(\,q_1^r + q_2^r\,)^{-1/r}\,\mathrm{w}. \end{aligned}$$

▲

6.2 Задача інтегровності

Задача максимізації корисності накладає деякі обмеження на поведінку споживача. Зокрема відомо, що матриця заміщення Слуцького

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_p\, h(p,u) &= \left(\frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j}\right)_{i,j=1}^{L} \\ &= \left(\frac{\partial x_i(p,\mathrm{w})}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,\mathrm{w})}{\partial \mathrm{w}} x_j(p,\mathrm{w})\right)_{i,j=1}^{L} = S(p,\mathrm{w}) \end{aligned}$$

повинна бути симетричною та від'ємно напіввизначеною.

Припустимо, що ми маємо систему функцій попиту $\{\, x_i(p,\mathrm{w})\,\}_{i,j}^{L}$, для яких матриця заміщення Слуцького симетрична і від'ємно напіввизначена. Виникає задача: знайти функцію корисності, яка визначає ці функції попиту. Таку задачу називають **задачею інтегровності**.

Відомо, що є декілька рівносильних шляхів описати споживчий вибір: за допомогою функції корисності або непрямої функції корисності, або функції видатків і т.д. Непряма функція корисності і функція видатків найзручніші для розв'язання задачі інтегровності.

Наприклад, із рівності Роя

$$x_i(p,\mathrm{w}) = -\frac{\partial v(p,\mathrm{w})/\partial p_i}{\partial v(p,\mathrm{w})/\partial \mathrm{w}}, \qquad i = 1, ..., L \tag{6.2.1}$$

визначаємо функції попиту, якщо відома непряма функція корисності. Проте задача інтегровності має протилежний зміст: задано функції попиту та співвідношення (6.2.1), треба знайти функцію $v(p,\mathrm{w})$.

Система (6.2.1) є системою рівнянь у частинних похідних першого порядку. Задача інтегровності полягає в знаходженні множини розв'язків цих рівнянь. Якщо непряму функцію корисності $v(p, \mathrm{w})$ знайдено, то функцію корисності $u(x)$ визначаємо як розв'язок двоїстої задачі

$$u(x) = \min_{p:\, p\cdot x=1} v(p)$$

.

Цю задачу простіше сформулювати в термінах функції видатків, ніж у термінах непрямої функції корисності.

Припустимо, що задано множину функцій попиту $\{\, x_i(p, \mathrm{w})\,\}_{i,j}^{L}$. Нехай $x^0 = x(p^0, \mathrm{w})$ - деякий споживчий набір для системи ціна-дохід (p^0, w) і u^0 довільно визначений рівень корисності. Потрібно знайти кількість грошей при заданому вектору цін p, яку повинен мати споживач, щоб купити набір товарів з корисністю, принаймі не меншою за u^0, тобто знайти $e(p, u^0)$. Як тільки ми знайшли функцію видатків, сумісну з функціями попиту, то можемо неявно визначити непряму функцію корисності або функцію корисності.

Якщо функція видатків існує, то вона повина задовольняти систему диференціальних рівнянь у частинних похідних

$$\frac{\partial e(p, u^0)}{\partial p_i} = h_i(p, u^0) = x_i(p, e(p, u^0)), \qquad i = 1, ..., L, \quad (6.2.2)$$

і початкову умову

$$e(p^0, u^0) = p^0 \cdot x(p^0, \mathrm{w}) = \mathrm{w}. \quad (6.2.3)$$

Оскільки матриця заміщення Слуцького для заданої множини функцій попиту симетрична, то для системи (6.2.2) справджуються умови інтегровності.[1]

Отже, обмеження на функції попиту (матриця Слуцького симетрична) є умовами інтегровності і дають змогу знайти

[1] Система диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку

$$\frac{\partial f(p)}{\partial p_i} = g_i(p), \qquad i = 1, ..., L,$$

сумісну з ними функцію видатків, щоб описати поведінку вибору.

Зокрема, функція видатків має бути ввігнута за змінною p. Оскільки матриця Гесе функції видатків $e(p, u^0)$ співпадає з матрицею заміщення Слуцького, тоді, якщо матриця заміщення від'ємно напіввизначена, то розв'язок системи (6.2.2) є ввігнутою функцією.

Отож, якщо множина функцій попиту $\{\, x_i(p, \mathrm{w}) \,\}_{i,j}^{L}$ така, що матриця заміщення симетрична і від'ємно напіввизначена, то розв'язок системи рівнянь (6.2.2) визначає функцію видатків сумісну з цими функціями попиту.

Нехай для деякого вектора цін q і рівня доходу w вибрано споживчий набір з рівнем корисності $u^0 = v(q, \mathrm{w})$. Тоді для визначення функції видатків одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial e(p, v(q, \mathrm{w}))}{\partial p_i} = x_i(p, e(p, v(q, \mathrm{w}))), \qquad i = 1, ..., L,$$

і початкова умова

$$e(q, v(q, \mathrm{w})) = \mathrm{w}.$$

Оскільки $\mu(p, q, \mathrm{w}) \equiv e(p, v(q, \mathrm{w}))$, то маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu(p, q, \mathrm{w}))}{\partial p_i} &= x_i(p, \mu(p, q, \mathrm{w})), \qquad i = 1, ..., L, \\ \mu(q, q, \mathrm{w}) &= \mathrm{w}. \end{aligned}$$

має (локальний) розв'язок, якщо і тільки якщо,

$$\frac{\partial g_j(p)}{\partial p_i} = \frac{\partial g_i(p)}{\partial p_j} \quad \text{для всіх } i \text{ та } j.$$

Функція $\mu(p, q, \mathrm{w})$, як розв'язок задачі інтегровності, визначає непряму функцію корисності (монотонну трансформацію непрямої функції корисності).

Приклад 6.2.1. Нехай задано систему функцій попиту

$$x_1(p_1, p_2, \mathrm{w}) = \frac{\alpha \mathrm{w}}{p_1}$$
$$x_2(p_1, p_2, \mathrm{w}) = \frac{\beta \mathrm{w}}{p_2},$$

де $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і $\alpha + \beta \leqslant 1$.

Перевіримо чи є матриця Слуцького симетричною і від'ємно напіввизначеною

$$s_{11} = \frac{(\alpha^2 - \alpha)\mathrm{w}}{p_1^2}, \qquad s_{22} = \frac{(\beta^2 - \beta)\mathrm{w}}{p_2^2},$$
$$s_{12} = \frac{\alpha\beta \mathrm{w}}{p_1 p_2}, \qquad s_{21} = \frac{\alpha\beta \mathrm{w}}{p_2 p_1}, \qquad s_{12} = s_{21},$$
$$\triangle_1 = \frac{(\alpha^2 - \alpha)\mathrm{w}}{p_1^2} < 0, \qquad \triangle_2 = \frac{\alpha\beta \mathrm{w}^2}{p_2^2 p_1^2}(1 - \alpha - \beta) \geqslant 0,$$
$$\triangle_3 = \frac{(\beta^2 - \beta)\mathrm{w}^2}{p_2^2} < 0.$$

Отже, матриця Слуцького

$$S(p, \mathrm{w}) = \begin{pmatrix} \dfrac{(\alpha^2 - \alpha)\mathrm{w}}{p_1^2} & \dfrac{\alpha\beta \mathrm{w}}{p_1 p_2} \\ \\ \dfrac{\alpha\beta \mathrm{w}}{p_2 p_1} & \dfrac{(\beta^2 - \beta)\mathrm{w}}{p_2^2} \end{pmatrix}$$

симетрична і від'ємно напіввизначена.

Система рівнянь для визначення грошової міри непрямої функції корисності має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mu(p,q,\mathrm{w})}{\partial p_1} &= \frac{\alpha\,\mu(p,q,\mathrm{w})}{p_1}\\
\frac{\partial\mu(p,q,\mathrm{w})}{\partial p_2} &= \frac{\beta\,\mu(p,q,\mathrm{w})}{p_2}\\
\mu(q,q,\mathrm{w}) &= \mathrm{w}.
\end{aligned}$$

Із першого рівняння системи одержуємо

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial p_1} = \frac{\alpha}{p_1} \quad\text{або}\quad \ln\mu \,=\, \alpha\ln p_1 \,+\, \ln c_1(p_2),\\
&\qquad\mu(p,q,\mathrm{w}) \,=\, c_1(p_2)\,p_1^{\alpha},
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

де $c_1(p_2)$ деяка константа інтегрування, яка залежить від змінної p_2. Продиференціювавши рівняння (6.2.4) за змінною p_2 і підставивши його в друге рівняння системи, матимемо

$$c_1'(p_2) \,=\, \frac{\beta}{p_2}\,c_1(p_2) \quad\text{або}\quad c_1(p_2) \,=\, c_2\,p_2^{\beta},$$

і знаходимо

$$\mu(p,q,\mathrm{w}) \,=\, c_2 p_1^{\alpha} p_2^{\beta},$$

де c_2 константа інтегрування, яку знаходимо з початкової умови

$$\mu(q,q,\mathrm{w}) \,=\, c_1 q_1^{\alpha} q_2^{\beta} \,=\, \mathrm{w}, \;\text{ або }\; c_2 \,=\, q_1^{-\alpha}\,q_2^{-\beta}\mathrm{w}.$$

Отож, грошова міра непрямої функції корисності має вигляд

$$\mu(p,q,\mathrm{w}) \,=\, p_1^{\alpha}\,p_2^{\beta}\,q_1^{-\alpha}q_2^{-\beta}\mathrm{w}.$$

Звідки непряму функцію корисності запишемо у вигляді

$$v(q_1, q_2, \mathrm{w}) \;=\; q_1^{-\alpha}\, q_2^{-\beta}\mathrm{w}.$$

▲

Приклад 6.2.2. Розглянемо випадок двох товарів. Нехай ціна другого товару нормована $p_2 = 1$, а ціна першого товару - p і функція попиту на цей товар $x(p, \mathrm{w})$. Тоді маємо лише одне рівняння інтегровності з початковою умовою

$$\frac{\mathrm{d}\mu(p, q, \mathrm{w})}{\mathrm{dp}} \;=\; x(p, \mu(p, q, \mathrm{w}))$$

$$\mu(q, q, \mathrm{w}) \;=\; \mathrm{w}.$$

Нехай, наприклад, функція попиту на перший товар має вигляд

$$x(p, \mathrm{w}) \;=\; cp^a\mathrm{w}^b, \qquad a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1,\ c > 0.$$

Тоді рівняння інтегровності матиме вигляд

$$\frac{\mathrm{d}\mu(p, q, \mathrm{w})}{\mathrm{d}p} \;=\; cp^a\mu^b.$$

Перегрупувавши, маємо

$$\mu^{-b}\frac{\mathrm{d}\mu(p, q, \mathrm{w})}{\mathrm{d}p} \;=\; cp^a.$$

Проінтегруемо останнє рівняння

$$\int_p^q \mu^{-b}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \;=\; c\int_p^q t^a\mathrm{d}t$$

$$\left.\frac{\mu^{1-b}}{1-b}\right]_p^q \;=\; \frac{q^{a+1} \,-\, p^{a+1}}{a+1}\,c.$$

Звідки знаходимо розв'язок рівняння

$$\frac{\mathrm{w}^{1-b} - \mu(p,q,\mathrm{w})^{1-b}}{1-b} = \frac{q^{a+1} - p^{a+1}}{a+1}\,c,$$

або

$$\mu(p,q,\mathrm{w}) = \left[\mathrm{w}^{1-b} + \frac{b-1}{1+a}\,c\,(q^{a+1} - p^{a+1})\right]^{\frac{1}{1-b}}.$$

▲

6.3 Двоїстість у споживанні

Спостерігаючи за функціями попиту, ми виявили, що можна відновити непряму функцію корисності через розв'язок задачі інтегровності. Тепер з'язуємо як можна знайти функцію корисності.

Відповідь отримуємо з двоїстого зв'язку між прямою і непрямою функцією корисності. Найзручніше зручно описати обчислення в термінах нормованої непрямої функції корисності, коли маємо ціну поділену на дохід так, що видатки дорівнюють одиниці. Отже, нормовану непряму функцію корисності визначимо так:

$$\begin{aligned} v(p) &= \max_x\, u(x) \\ \text{за умови}\quad p\cdot x &= 1. \end{aligned}$$

Навпаки, якщо непряма функція корисності визначена, то визначимо (пряму) функцію корисності як розв'язок двоїстої задачі

$$\begin{aligned} u(x) &= \min_p\, v(p) \\ \text{за умови}\quad p\cdot x &= 1. \end{aligned}$$

Доведення просте. Нехай x - оптимальний споживчий набір для вектора ціни p. Тоді визначимо $v(p) = u(x)$. Нехай $\acute{p}$ ще один вектор цін такий, що задовольняє бюджетне обмеження $\acute{p} \cdot x = 1$. Оскільки x є завжди допустимим споживчим набором для вектора цін $\acute{p}$ (але він необов'язково є оптимальним набором для вектора цін $\acute{p}$), то $v(\acute{p}) \geqslant u(x) = v(p)$.

Отож, мінімум непрямої функції корисності за всіма p, що задовольняють бюджетне обмеження $p \cdot x = 1$, визначає функцію корисності від x.

Приклад 6.3.1. У прикладі 6.2.1 було знайдено непряму функцію корисності $v(p) = p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta}$. Тоді пряму функцію корисності знаходимо як розв'язок задачі

$$u(x) = \min_p p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta}$$
$$\text{за умови} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1.$$

Запишемо функцію Лагранжа цієї задачі

$$L(p, \lambda) = p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta} + \lambda (p_1 x_1 + p_2 x_2 - 1).$$

Тоді умови оптимальності матимуть вигляд

$$\begin{aligned} -\alpha p_1^{-\alpha-1} p_2^{-\beta} + \lambda x_1 &= 0 \\ -\beta p_1^{-\alpha} p_2^{-\beta-1} + \lambda x_2 &= 0 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо

$$p_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{1}{x_1}, \qquad p_2 = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{1}{x_2}.$$

Отож, пряма функція корисності має вигляд

$$u(x) = v(p(x)) = \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}} x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = k x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

Таким чином, функції попиту прикладу 6.2.1 визначають функцію корисності Коба-Дугласа. ▲

Розділ 7

Споживчий надлишок

Нехай $x(p)$ функція попиту на деякий товар. *Надлишок споживача* (consumer's surplus - CS) при зміні цін від p^0 до p^1 дорівнює площі фігури обмеженої функцією $x(p)$ і лініями $p = p^0$, $p = p^1$, тобто

$$CS = \int_{p^0}^{p^1} x(p)\,\mathrm{d}p.$$

Іноді цей надлишок називають *маршаліанським споживчим надлишком* (*Marshallian consumer surplus*). Це поняття використовують для оцінки в грошовому виразі зміни добробуту споживача, яка зумовлена змінами цін, грошового доходу, податків і т.д.

Маршаліанський споживчий надлишок має один суттєвий недолік. У ситуації, коли одночасно змінюються доходи споживачів і ціна одного з товарів або коли одночасно змінюється декілька цін, то величина маршаліанського споживчого надлишку втрачає свою "визначеність", вона стає залежною від послідовності розрахунків. Тому для оцінки зміни добробуту споживачів використовують й інші, які за змістом близькі до маршаліанського споживчого надлишку, поняття, які не мають цього недоліку.

Розглянемо випадок двох товарів $L = 2$. Нехай відношення переваги квазілінійне стосовно другого товару, тоді функція корисності, яка зображає це відношення переваги, має вигляд

$$U(x_1, x_2) = x_2 + u(x_1),$$

де x_2 можна трактувати як видатки споживача на товар 2. Припустимо, що функція корисності $u(\cdot)$ строго ввігнута і диференційовна. Розглянемо задачу максимізації корисності

$$x_2 + u(x_1) \to \max, \quad p_1 x_1 + x_2 = \mathrm{w}, \ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$$

Цю задачу можна переписати в такому вигляді

$$u(x_1) + \mathrm{w} - p_1 x_1 \to \max, \quad x_1 \in \mathbb{R}_+.$$

Умова оптимальності першого порядку має вигляд

$$u'(x_1) = p_1,$$

тобто в оптимумі гранична корисність першого товару повина дорівнювати ціні цього товару.

Звідси випливає, що функція попиту на перший товар залежить лише від ціни цього товару, тобто $x_1 = x_1(p_1)$. Функцію попиту на товар 2 визначають з бюджетного обмеження, $x_2 = \mathrm{w} - p_1 x_1(p_1)$. Тепер непряма функція корисності має вигляд

$$V(p_1, \mathrm{w}) = \mathrm{w} - p_1 x_1(p_1) + u(x_1(p_1)) = v(p_1) + \mathrm{w},$$

де $v(p_1) = u(x_1(p_1)) - p_1 x_1(p_1)$.

Цей підхід не показує потенційної проблеми. Аналізуючи, стає зрозумілим, що попит на товар 1 не може бути незалежним від доходу для всіх рівнів цін та доходу. Якщо дохід досить малий, то попит на товар 1 повинен визначатися доходом. Припустимо, що задача максимізації корисності враховує невід'ємність x_2

$$x_2 + u(x_1) \to \max, \quad p_1 x_1 + x_2 = \mathrm{w}, \ \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Тоді одержуємо два види розв'язків залежно від того, або $x_2 > 0$, або $x_2 = 0$. Якщо $x_2 > 0$, то маємо вище отриманий вигляд попиту на товар 1, який залежить лише від ціни на цей товар. Якщо ж $x_2 = 0$, то непряма функція корисності набуває вигляду $v(p_1, \mathrm{w}) = u(\mathrm{w}/p_1)$.

Припустимо, що ціна p_1 фіксована і зростання доходу споживача розпочинається при $\mathrm{w} = 0$ на незначну величину. Тоді приріст корисності становитиме $u'(\mathrm{w}/p_1)/p_1$. Якщо ця величина більша за 1, то споживачеві варто потратити один додатковий долар доходу на купівлю товару x_1 ніж на купівлю товару x_2. Ми продовжуємо витрачати гроші на купівлю товару x_1 доти, доки гранична корисність наступного долара потраченого на цей товар не дорівнюватиме 1; це буде тоді, коли гранична корисність від споживання дорівнюватиме ціні. Далі весь додатковий дохід буде витрачатися на товар x_2.

У випадку квазілінійної корисності задача інтегровності видається дуже простою. Обернена функція попиту визначається як $p_1(x_1) = u'(x_1)$, з цього випливає, що корисність, яка зв'язана з певним рівнем споживання товару x_1, може бути визначена через обернену функцію попиту

$$u(x_1) - u(0) = \int\limits_0^{x_1} u'(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{x_1} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Загальна корисність від споживання товару x_1 враховуватиме корисність від споживання цього товару плюс корисність від споживання товару x_2

$$\begin{aligned} V(p_1, \mathrm{w}) &= u(x_1(p_1)) + \mathrm{w} - p_1 x_1(p_1) \\ &= \int\limits_0^{x_1} p(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{w} - p_1 x_1(p_1). \end{aligned}$$

Якщо ми знехтуємо числом w, то вираз у правій частині цієї рівності є площею під кривою попиту на товар x_1. Цей вираз можна одержати по-іншому. За рівністю Роя $x_1(p_1) = -v'(p_1)$. Тоді

$$v(p_1) + \mathrm{w} = \int\limits_{p_1}^{\infty} x_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{w}.$$

Оскільки для квазілінійного відношення переваги стосовно товару x_2 функція попиту на товар $x_1(p_1)$ не залежить від доходу, то рівняння інтегровності має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mu(t, q, \mathrm{w})}{\mathrm{d}t} &= x_1(t) \\ \mu(q, q, \mathrm{w}) &= \mathrm{w}. \end{aligned}$$

Звідки випливає, що грошова міра непрямої функції корисності така:

$$\mu(p, q, \mathrm{w}) = \int\limits_q^p x_1(t)\mathrm{d}\,t + \mathrm{w}.$$

Вираз праворуч є споживчим надлишком пов'язаним із зміною ціни від q до p плюс дохід, тобто

$$\mu(p, q, \mathrm{w}) = CS(q, p, \mathrm{w}) + \mathrm{w}.$$

Роглянемо два поняття для оцінки зміни добробуту споживачів на прикладі квазілінійного відношення переваги.

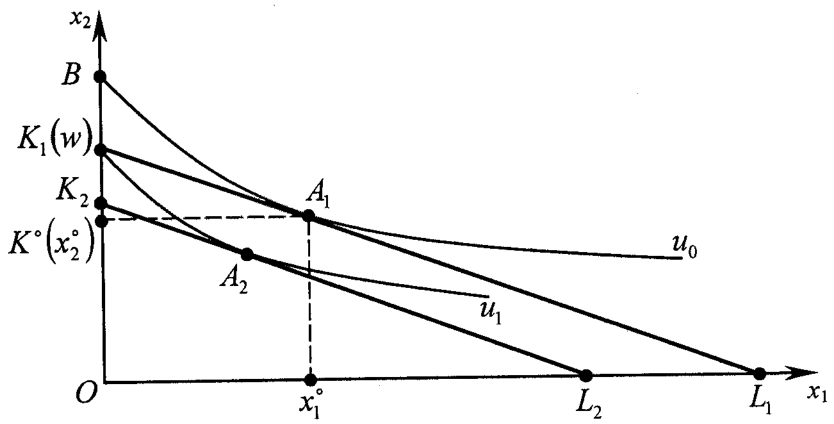


Рис. 7.0.1. Компенсуюча й еквівалентна варіація доходу

Бюджетна лінія $p_1x_1 + x_2 = $ w займає положення K_1L_1 (рис. 7.0.2). Довжина відрізка OK_1 дорівнює доходу споживача w, а нахил бюджетної лінії дорівнює $-p_1$. Припустимо, що споживач має змогу закупити будь-яку кількість товару x_1 за ціною p_1. Тоді він вибирає споживчий набір, який відповідає точці A_1 (рис. 7.0.2). Цей набір містить x_1^0 одиниць товару x_1 ($u'(x_1^0) = p_1$). Сума видатків на товар x_2 дорівнює OK^0. Сума видатків на x_1^0 одиниць товару x_1 дорівнює K^0K_1.

Припустимо тепер, що споживач не має змоги купити товар x_1. Тоді він перебуває в точці K_1. Яку додаткову суму доходу йому потрібно надати, щоб його добробут не змінився порівняно з початковим станом? Оскільки точка B перебуває на тій самій кривій байдужості, що і A, то необхідна додаткова сума компенсації доходу дорівнює K_1B. Ця величина називається *компенсуючою варіацією доходу* (*compensating variation - CV*).

Знову припустимо, що споживач перебуває в точці A_1. Яку максимальну суму доходу він готовий віддати для того, щоб його не позбавили змоги купити товар x_1? Проведемо допоміжну бюджетну лінію K_2L_2 з нахилом, який дорівнює, $-p_1$, яка дотикається до кривої байдужості u_1, що виходить із точки K_1. Споживач не погодиться віддати частину доходу, що перевищує K_2K_1, інакше крива байдужості u_1 буде для нього недосяжною. Будь-яка втрата доходу, що є менша за K_2K_1, дає змогу споживачеві збільшити свій добробут порівняно зі станом K_1. Отже, максимальна сума доходу, яку споживач готовий віддати для того, щоб його не позбавили змоги купити товар x_1, дорівнює K_2K_1 . Ця величина називається *еквівалентною варіацією доходу* (*equivalent variation -EV*).

Варто зауважити, що при визначенні CV за основу приймемо початкову криву байдужості u_0, а при визначенні EV - приймаємо наступну криву байдужості u_1.

Розглянемо поняття еквівалентної та компенсуючої варіації доходу для загального випадку. Припустимо, що відношення переваги $\succsim$ є неперервним і локально ненасичуваним. Припустимо також, що функція видатків $e(\cdot)$ і непряма функція корисності $v(\cdot)$ диференційовні. Нехай споживач має фіксований рівень доходу $\mathrm{w} > 0$ і задано початковий вектор цін p^0. Ми хочемо оцінити зміну добробуту споживача від зміни системи цін p^0 до нової системи цін p^1.

Припустимо, що споживач надає перевагу вибору за допомогою відношення переваги $\succsim$. Наприклад, знаючи $\succsim$, споживач може побудувати функцію попиту Вальраса $x(p, \mathrm{w})$. Якщо $v(p, \mathrm{w})$ непряма функція корисності, яку одержали для $\succsim$, то споживач втратить від зміни цін тоді і лише тоді, коли

$$v(p^1, \mathrm{w}) - v(p^0, \mathrm{w}) < 0.$$

Незважаючи на те, що кожну непряму функцію корисності для $\succsim$ можна використати для того, щоб зробити таке порівняння, один клас непрямих функцій корисності цікавий тому, що дає змогу визначити міру зміни добробуту в грошивих одиницях. Таким класом функцій є грошова міра непрямих функцій корисності. Якщо споживач бажає досягти рівня корисності $v(p, \mathrm{w})$ при системі цін $\bar{p} \gg 0$, то рівень доходу споживача, який забезпечує йому цей рівень корисності, визначається функцією видатків $e(\cdot)$ і дорівнює $\mu(\bar{p}, p, \mathrm{w}) \equiv e(\bar{p}, v(p, \mathrm{w}))$. Функція видатків, як функція від (p, w), монотонна трансформація непрямої функції корисності і її можна розглядати як непряму функцію корисності для $\succsim$ і

$$\begin{aligned}&\mu(\bar{p}, p^1, \mathrm{w}) - \mu(\bar{p}, p^0, \mathrm{w})\\&= e(\bar{p}, v(p^1, \mathrm{w})) - e(\bar{p}, v(p^0, \mathrm{w}))\end{aligned}$$

передбачає рівень зміни добробуту в грошових одиницях. Грошова міра непрямої функції корисності визначена для кожного вектора цін $\bar{p} \gg 0$. Розглянемо два вибори вектора цін $\bar{p}$: початковий вектор цін p^0 і новий вектор цін p^1. Ці два вектори цін породжують дві міри зміни добробуту: еквівалентну варіацію доходу EV і компенсуючу варіацію доходу CV. Нехай $u^0 = v(p^0, \mathrm{w})$, $u^1 = v(p^1, \mathrm{w})$, тоді $e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1) = \mathrm{w}$ і визначаємо

$$\begin{aligned}EV(p^0, p^1, \mathrm{w}) &= \mu(p^0, p^1, \mathrm{w}) - \mu(p^0, p^0, \mathrm{w})\\&= \mu(p^0, p^1, \mathrm{w}) - \mathrm{w}\end{aligned} \tag{7.0.1}$$

і

$$\begin{aligned}CV(p^0, p^1, \mathrm{w}) &= \mu(p^1, p^1, \mathrm{w}) - \mu(p^1, p^0, \mathrm{w})\\&= \mathrm{w} - \mu(p^1, p^0, \mathrm{w}).\end{aligned} \tag{7.0.2}$$

Еквівалентна варіація доходу EV визначає кількість грошей, на яку має змінитися дохід споживача, щоб він при початковій системі цін p^0 міг забезпечити рівень корисності u^1. Величина EV буде від'ємною, якщо зміна цін призводить до погіршення становища споживача.

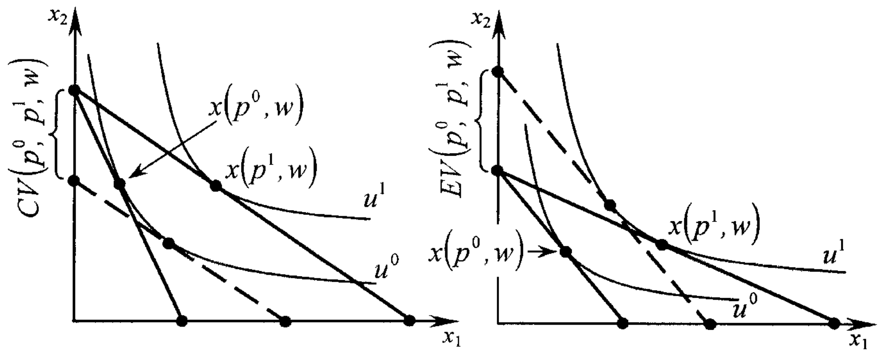


Рис. 7.0.2. Компенсуюча й еквівалентна варіація доходу

Компенсуюча варіація доходу CV визначає величину, на яку має змінитися дохід споживача, щоб при новій системі цін p^1 він міг забезпечити початковий рівень корисності u^0. Величина CV буде від'ємною, якщо би плануючий агент заплатив споживачеві додатний рівень компенсації за погіршення його становища.

Оскільки EV і CV відповідають мірам змін у грошових одиницях непрямої функції корисності, то споживач буде в кращому становищі при системі цін p^1 тоді і лише тоді, коли ці міри додатні.

Еквівалентну і компенсуючу варіацію доходу можна зобразити через функцію попиту Хікса. Для простоти припустимо, що змінюється ціна лише першого товару, тобто $p_1^0 \neq p_1^1$ і $p_l^0 = p_l^1 = \bar{p}_l$ для $l = 2, ..., L$. Оскільки $\mathrm{w} = e(p^0, u^0) = e(p^1, u^1)$ і $h_1(p, u) = \partial e(p, u)/\partial p_1$, то маємо

$$EV(p^0, p^1, \mathrm{w}) = \mu(p^0, p^1, \mathrm{w}) - \mathrm{w} =$$
$$= e(p^0, u^1) - e(p^1, u^1) =$$

$$= \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1)\,\mathrm{d}p_1,$$

де $\bar{p}_{-1} = (\bar{p}_2, ..., \bar{p}_L)$.

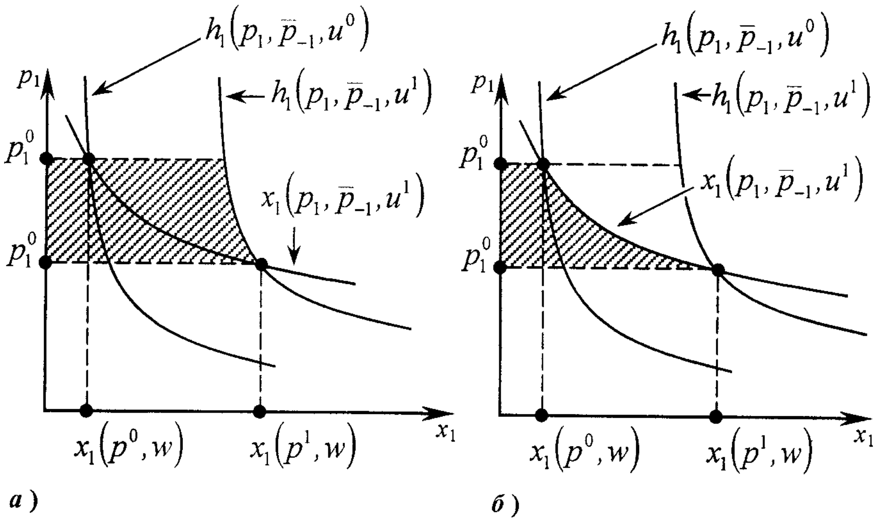


Рис. 7.0.3. Еквівалентна варіація (a); компенсуюча варіація ($б$)

Отже, міра зміни добробуту споживача, яку називаємо еквівалентною варіацією, характеризується площею фігури, яка обмежена лініями $p_1 = p_1^0$, $p_1 = p_1^1$ і функцією попиту Хікса на перший товар для рівня корисності u^1. EV дорівнює площі цієї фігури, якщо $p_1^0 > p_1^1$ і дорівнює від'ємній величині, $p_1^0 < p_1^1$ (рис. 7.0.3,a).

Аналогічно компенсуючу варіацію доходу можна записати у вигляді

$$CV(p^0, p^1, \mathrm{w}) = \int\limits_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0)\,\mathrm{d}p_1.$$

У цьому випадку використовуємо початковий рівень корисності u^0 (рис. 7.0.3,*б*).

На рис. 7.0.3 зображено ситуацію , коли перший товар цінний. Припустимо, що карта байдужості така, що товар x_1 завжди цінний, незалежно від доходу споживача і ціни товару x_1. Як видно з рис. 7.0.3 $EV(p^0, p^1, \mathrm{w}) > CV(p^0, p^1, \mathrm{w})$. Можна пересвідчитись, що ця нерівність правильна тоді, коли $p_1^1 > p_1^0$. Це співвідношення між EV і CV матиме протилежний знак, якщо товар x_1 малоцінний. За відсутністю ефекту доходу, наприклад, коли відношення переваги є квазілінійним для деякого товару $l \neq 1$, значення CV і EV є однакові, тому що

$$h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^0) = x_1(p_1, \bar{p}_{-1}, \mathrm{w}) = h_1(p_1, \bar{p}_{-1}, u^1).$$

Це також видно з розглянутого вище прикладу, коли відношення переваги квазілінійне стосовно другого товару. Справді,

$$\begin{aligned} EV(p^0, p^1, \mathrm{w}) &= \mu(p^0, p^1, \mathrm{w}) - \mu(p^0, p^0, \mathrm{w}) \\ &= CS(p^1, p^0, \mathrm{w}) + \mathrm{w} - \mathrm{w} \\ &= CS(p^1, p^0, \mathrm{w}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CV(p^0, p^1, \mathrm{w}) &= \mu(p^1, p^1, \mathrm{w}) - \mu(p^1, p^0, \mathrm{w}) \\ &= \mathrm{w} - CS(p^0, p^1, \mathrm{w}) - \mathrm{w} = -CS(p^0, p^1, \mathrm{w}) \\ &= CS(p^1, p^0, \mathrm{w}). \end{aligned}$$

Отже, у випадку, коли немає ефекту доходу, значення еквівалентної та компенсуючої варіації однокове і дорівнює маршаліанському споживчому надлишку.

Розділ 8

Математичний додаток

Розглянемо поняття, які є важливими для різних розділів математичної економіки.

8.1 Відношення передпорядку

Нехай X – довільна множина в $\mathbb{R}^L$.[1] Нагадаймо, що *бінарним відношенням* на множині X називається довільна підмножина $P \subset X \times X$. Часто замість $(x, y) \in P$ пишуть xPy. Прикладом відношень, які визначені на $\mathbb{R}^L$, є $=, >, \geqslant$.

Множина $\triangle_X = \{(x, x) : x \in X\}$ називається *діагоналлю*. Відношення P на X називається *рефлексивним*, якщо $\triangle_X \subset P$, тобто для всіх $x \in X$ правильне xPx.

Композицією відношень P і S на множині X називають відношення

$$P \circ S = \{(x, y) \in X \times X : \text{ існує } z \in X \text{ таке, що } (x, z) \in P,\ (z, y) \in S\}.$$

[1] Визначення структури простору $\mathbb{R}^L$ подаємо в наступному параграфі.

Оберненим до відношення P на множині X називають відношення
$$P^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in P\}.$$

Відношення P на множині X називають:

(i) *симетричним*, якщо $P^{-1} = P$, тобто , якщо з xPy випливає yPx;

(ii) *антисиметричним*, якщо $P \cap P^{-1} \subset \triangle_X$, тобто, якщо з xPy і yPx випливає, що $x = y$ для довільних $x, y \in X$;

(iii) *транзитивним*, якщо $P \circ P = P$, тобто, якщо для всіх $x, y, z \in X$ із xPy і yPz випливає xPz;

(iv) *повним*, якщо $P \cup P^{-1} = X$, тобто для довільних $x, y \in X$ правильне або xPy або yPx, або обидва ці відношення.

Відношенням еквівалентності називають відношення, що є одночасно рефлексивним, симетричним і транзитивним, наприклад $=$. Відношення еквівалентності P використовують для побудови *класів еквівалентності*, тобто множин вигляду $\{x \in X : xPy\}$, де $y \in X$ - деякі задані елементи X. Відношення називається *відношенням передпорядку*, якщо воно є одночасно рефлексивним і транзитивним. Відношення називається *відношенням порядку*, якщо воно є одночасно рефлексивним, транзитивним і антисиметричним, наприклад, відношення $\geqslant$. Для позначення відношення порядку (передпорядку) вживають переважно символ $\succsim$. Відношення називається *відношенням строгого порядку*, якщо воно є одночасно транзитивним і антисиметричним, наприклад, відношення $>$. Для позначення відношення строгого порядку вживають переважно символ $\succ$. Відношення передпорядку на X породжує відношення еквівалентності $\sim$ на X: $x \sim y$, якщо і тільки якщо $x \succsim y$ і $y \succsim x$, і відношення строгого порядку $\succ$ на X: $x \succ y$, якщо $x \succsim y$, але не $x \sim y$.

Нехай на X задано відношення передпорядку $\succsim$ і підмножина Y множини X. Елемент $x \in Y$ називається *максимальним елементом* в Y, якщо $x \succsim y$ для кожного $y \in Y$.

Означення 8.1.1. Рефлексивне і повне відношення $\succsim$ на множині X називається ациклічним, якщо для кожної скінченної підмножини $Y \subset X$ існує максимальний елемент в Y.

Теорія споживання вивчає проблему раціонального вибору споживача при заданих цінах і відомому доході. Вибір споживачем деякого набору товарів частково залежить від його смаків. Вони характеризуються відношенням передпорядку. В теорії споживання відношення передпорядку $\succsim$, яке є повним, називають *відношенням переваги* .

Відношення f, яке визначене на $X \times Y$, називається *функцією*, якщо для кожного $x \in X$ існує єдина точка $y \in Y$ така, що xfy, тобто, якщо $(x, y) \in f$ і $(x, y') \in f$, то $y = y'$. Отже,

$$y = f(x) \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (x, y) \in f.$$

Множина X називається *областю визначення* функції $f(\cdot)$, а множина Y - *областю значень* функції. Образом функції називається множина точок області значень, яку можна отримати, використавши задану функцію

$$\{y \in Y : y = f(x) \quad \text{для деякого} \quad x \in X\}.$$

Функція називається "відображенням на", якщо її образ співпадає з областю значень. Функція називається *взаємооднозначною,* якщо дві різні точки ніколи не відображаються нею в ту саму точку

$$f(x) = f(x') \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad x = x'.$$

Якщо функція $f(\cdot)$ є взаємооднозначним "відображенням на", то існує *обернена функція* $f^{-1}(y)$. Це означає.

$$\text{Якщо} \quad f^{-1}(y) = x, \quad \text{то} \quad y = f(x).$$

8.2 Компактні множини і неперервні функції

Позначатимемо через $\mathbb{R}^L$ – L- вимірний евклідовий простір, елементами якого є вектор–стовпці з L дійсними координатами

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix}.$$

Простір $\mathbb{R}^L$ наділений двома структурами: лінійною та топологічною. Лінійна структура в $\mathbb{R}^L$ постулюється шляхом введення операцій над векторами. Нехай $x, y \in \mathbb{R}^L$ і $\alpha \in \mathbb{R}$, тоді сума $x + y$ двох векторів, добуток αx вектора на дійсне число та скалярний добуток визначається так:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_L + y_L \end{pmatrix}, \qquad \alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_L \end{pmatrix}; \qquad x \cdot y = \sum_{i=1}^{L} x_i y_i.$$

Топологічна структура в $\mathbb{R}^L$ вводиться на основі поняття збіжності в термінах відстані між точками x і y

$$\rho(x, y) = \| x - y \| = \left[\sum_{i=1}^{L} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Збіжність послідовності $\{x^n\}$ точок з $\mathbb{R}^L$ до точки x записуємо

$$x^n \to x \, (n \to \infty)$$

і визначаємо умовою

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x^n, x) = 0,$$

тобто для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться число N таке, якщо $n > N$, то $\rho(x^n, x) < \varepsilon$. Точка x називається границею послідовності $\{x^n\}$, що записується так:

$$x = \lim_{n\to\infty} x^n.$$

Вектор-рядок, який одержано транспонуванням вектора-стовпця x, позначимо через $x^\tau = (x_1, \ldots, x_L)$. Там, де не може виникнути непорозуміння, вектор-стовпець або вектор-рядок із $\mathbb{R}^L$ будемо називати вектором або точкою, а знак транспонування опускатимемо.

Умову, що точка z належить множині X, а точка y не належить X, записуємо

$$z \in X, \qquad y \notin X.$$

Означення 8.2.1. Нехай $X \subset \mathbb{R}^L$. Множина X називається обмеженою, якщо існує число $r \in \mathbb{R}$ таке, що $\| x \| \leqslant r$ для всіх $x \in X$.

Означення 8.2.2. Точка x називається внутрішньою точкою множини X, якщо існує ε- окіл x: $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^L : \|x - y\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ такий, що $V_\varepsilon(x) \subset X$.

Множину всіх внутрішніх точок X – позначимо $\mathrm{int}X$. Множина X називається відкритою, якщо вона співпадає з множиною своїх внутрішніх точок, тобто $X = \mathrm{int}X$. Множина X називається замкнутою, якщо доповнення $\overline{X} = \mathbb{R}^L \backslash X = \{z \in \mathbb{R}^L : z \notin X\}$ – відкрита множина.

Означення 8.2.3. Точка a називається граничною точкою множини X, якщо будь-який ε - окіл a містить точки з X та $\overline{X}$.

Множина X замкнута тоді і лише тоді, коли вона містить всі свої граничні точки.

Подамо два еквівалентні означення компактності множини.

Означення 8.2.4. Множина X називається компактною, якщо вона обмежена і замкнута в $\mathbb{R}^L$.

Означення 8.2.5. Сім'я $\{G_k : k \in \Lambda\}$ підмножин множини X володіє властивістю скінченого перетину, якщо будь-яке скінчене число цих підмножин має спільну точку.

Означення 8.2.6. Множина X називається компактною, якщо для кожної сім'ї її замкнутих підмножин, які володіють властивістю скінченного перетину, знайдеться точка з X, яка належить кожному елементові цієї сім'ї.

Означення 8.2.7. Множина X називається зв'язною, якщо її не можна зобразити у вигляді об'єднання двох неперетинних непорожніх замкнутих в X підмножин.

Теорема 8.2.1. *Нехай $X \subset \mathbb{R}^L$ компактна множина. Тоді кожна послідовність $\{x^n\}$ ($x^n \in X$ для всіх n) має збіжну підпослідовність, тобто існує підпослідовність $\{x^{n(m)}\}$ послідовності $\{x^n\}$ така, що $\lim\limits_{m\to\infty} x^{n(m)} = x$ і $x \in X$.*

Означення 8.2.8. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається неперервною на X, якщо для кожної точки $x \in X$ і кожної послідовності $x^n \to x$ ($x^n \in X$ для всіх n) виконується $f(x^n) \to f(x)$. Функція $f : X \to \mathbb{R}^m$ називається неперервною, якщо кожна координата $f_i(\cdot)$ неперервна функція.

Теорема 8.2.2. *Неперервна функція $f(\cdot)$ на компактній множині X досягає свого максимального значення, тобто існує $x \in X$ таке, що $f(x') \leqslant f(x)$ для всіх $x' \in X$.*

Для функції однієї змінної похідна функції $f(\cdot)$ в точці x визначається як границя

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

за умови, що вона існує. Операція обчислення похідної функції називається *диференціюванням*. У випадку функції векторного аргументу розглядаємо $f(x)$ як функцію тільки однієї компоненти вектора x, наприклад x_l, вважаючи значення інших компонент фіксованими. Тоді визначимо

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_l + h, \ldots, x_L) - f(x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_L)}{h}$$

(якщо вона існує) як частинну похідну функції $f(x)$ стосовно змінної x_l в точці x і позначимо через $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_l} \equiv f_{x_l}(x)$. Її обчислюють, припускаючи кожну компоненту вектора x, яка відмінна від x_l, фіксованою і диференціюють за змінною x_l. Функція $f(x_1, \ldots, x_L)$ називається диференційовною в точці x^0, якщо всі частинні похідні f_{x_i}, $i = 1, \ldots, L$ визначені в околі точки x^0 і неперервні в точці x^0. Функція називається диференційовною, якщо вона диференційовна в усіх точках області визначення. У цьому випадку вектор частинних похідних

функції
$$\nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_L}(x))$$
називається *градієнтом.* Кожна частинна похідна є функцією аргументу x. Якщо кожна частинна похідна є неперервною функцією, то говорять, що функція неперервно диференційовна або належить класу C^1. Нехай $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^N$ вектор-значна диференційовна функція, тоді для кожного $x \in \mathbb{R}^L$ через $\mathrm{D}f(x)$ позначимо $N \times L$ матрицю з елементами $\partial f_n(x)/\partial x_l$. Зокрема, якщо $N = 1$, то $\mathrm{D}f(x)$ є $1 \times L$ матриця і $\nabla f(x) = \mathrm{D}f(x)$. Нарешті, якщо $f : \mathbb{R}^{L+K} \to \mathbb{R}^N$ функція аргументів $x \in \mathbb{R}^L$ і $y \in \mathbb{R}^K$, то $\mathrm{D}_x f(x,y)$ - $N \times L$ матриця з елементами $\partial f_n(x,y)/\partial x_l$. Нехай $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ функція класу C^1 та існує відповідна границя, то можна продиференціювати f_{x_l} за змінної x_l або за будь-якою іншою компонентою вектора x. Тоді отримаємо частинну похідну другого порядку
$$f_{jl}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_l}\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_l}.$$

Якщо всі частинні похідні другого порядку неперевні функції, то говорять, що функція двічі неперервно диференційовна або належить класу C^2 і матриця похідних другого порядку
$$\mathrm{D}^2 f(x) = \mathrm{D}[\nabla f(x)]$$
називається *матрицею Гесе.* Повним диференціалом функції $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ називається величина
$$\mathrm{d}f(x) = f_{x_1}(x)\mathrm{d}x_1 + \ldots + f_{x_L}(x)\mathrm{d}x_L = \nabla f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$
Другим повним диференціалом функції $f(\cdot)$ є квадратична форма
$$\mathrm{d}^2 f(x) = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{D}^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

Наведемо деякі формули диференціювання.

1. Нехай $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ і $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ диференційовні функції. Тоді композиція функцій $f(g(\cdot))$ також диференційовна і

$$\mathrm{D}_x f(g(x)) = \mathrm{D}f(g(x))\mathrm{D}g(x).$$

2. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є добутком двох функцій $f(x) = g(x)h(x)$ від n змінних ($g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), тоді

$$\mathrm{D}f(x) = h(x)\mathrm{D}g(x) + g(x)\mathrm{D}h(x).$$

3. Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ має вигляд $f(x) = g(x)h(x)$, де $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, тоді

$$\mathrm{D}f(x) = h(x) \cdot \mathrm{D}g(x) + g(x) \cdot \mathrm{D}h(x).$$

Зауважимо, що $h(x) \cdot \mathrm{D}g(x) = [h(x)]^{\tau}\mathrm{D}g(x)$ є $1 \times n$ матриця.

Означення 8.2.9. Множина вигляду $\{x \in \mathbb{R}^L : f(x) = c\}$ називається поверхнею ($L = 2$, лінією) рівня функції $f(\cdot)$.

Важливість диференціала $\mathrm{d}f(x)$ полягає в тому, що він є лінійною функцією $\mathrm{d}x$ і наближенням для різниці $f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$, тому вектор $\mathrm{d}x$, для якого $\mathrm{d}f(x) = 0$, зображає напрям дотичної до поверхні рівня. Нехай $\mathrm{d}f(x) = 0$, тоді

$$\mathrm{d}f(x) = \nabla f(x) \cdot \mathrm{d}x = 0,$$

тобто вектор градієнта ортогональний до кожного напряму, який дотичний до поверхні рівня. Геометрично, вектор градієнта є нормаллю до поверхні рівня в точці x.

8.3 Теорема про неявну функцію

Розглянемо вектор функцію $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$. Диференціал кожної компоненти $f_i(\cdot)$ дорівнює

$$\mathrm{d}f_i(x) = \sum_j \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j = \nabla f_i(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Матриця $F = (\partial f_i/\partial x_j)$ (рядками якої є компоненти градієнта ∇f_i) називається *матрицею Якобі* відображення f. Визначник $J = \det F$ називається *якобіаном* відображення.

Отже, можна записати вектор-диференціал

$$\mathrm{d}f = F\mathrm{d}x.$$

Якщо $J \neq 0$, то останнє рівняння можна розв'язати стосовно $\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}x = F^{-1}\mathrm{d}f.$$

За цієї умови відображення $\mathrm{d}f \to \mathrm{d}x$ однозначне. Це означає, що кожна точка з околу f переходить в єдину точку в околі x, тобто отримуємо відомий результат: *відмінність від нуля якобіна є необхідною і достатньою умовою існування однозначного оберненого відображення* $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$.

В економічній теорії досить часто зустрічається така задача. Розглядаються L співвідношень від $L+N$ змінних. Із них N змінних припускається заданими. Задача полягає у виборі решти L змінних. Такий розв'язок зазвичай визначає рівновагу системи.

Розглянемо систему з L рівнянь, які залежать від L змінних $x = (x_1, \ldots, x_L)$ і N параметрів $y = (y_1, \ldots, y_N)$

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_L, y_1, \ldots, y_N) = 0 \\ \vdots \\ f_L(x_1, \ldots, x_L, y_1, \ldots, y_N) = 0, \end{gathered} \tag{8.3.1}$$

де $x \in X \subsetneqq \mathbb{R}^L,\ y \in Y \subsetneqq \mathbb{R}^N$.

Нехай $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_L) \in X$ і $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_N) \in Y$ задовольняють систему рівнянь (8.3.1), тобто $f_l(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ для всіх l. Відкритим околом точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^L$ називатимемо множину

$$V_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^L : \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\},$$

де ε - додатне число. Позначимо через $W_\varepsilon(\bar{y})$ відкритий окіл точки $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$.

Означення 8.3.1. Будемо говорити, що система рівнянь (8.3.1) визначає в $V_\varepsilon(\bar{x}) \times W_\varepsilon(\bar{y})$ змінні $x_1, \ldots, x_L$ як неявні функції змінних $y_1, \ldots, y_N$, якщо для кожного $y \in W_\varepsilon(\bar{y})$ знайдеться єдиний $x \in V_\varepsilon(\bar{x})$, тобто визначені функції $x_l = \eta_l(y)$, $l = 1, \ldots, L$ такі, що

$$f_l(\eta_1(y), \ldots, \eta_L(y), y) = 0 \text{ для всіх } y \in W_\varepsilon(\bar{y}) \text{ і для кожного } l,$$

і

$$\eta_l(\bar{y}) = \bar{x}_l \quad \text{для кожного } l.$$

Теорема 8.3.1 (Теорема про неявну функцію). *Нехай справджуються такі умови:*

(i) *функції $f_l(x, y)$, $l = 1, \ldots, L$ – неперервно диференційовні в деякому околі точки $(\bar{x}, \bar{y})$;*

(ii) $f_l(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ *для всіх* l*;*

(iii) *матриця Якобі системи (8.3.1) невироджена в точці $(\bar{x}, \bar{y})$, тобто*

$$det\, \mathrm{D}_x f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_L(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_L(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_L} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді існують околи $V_\varepsilon(\bar{x})$ *і* $W_\varepsilon(\bar{y})$ *такі, що в* $V_\varepsilon(\bar{x}) \times W_\varepsilon(\bar{y})$ *система рівнянь* (8.3.1) *визначає неперервно диференційовні функції* $x_l = \eta_l(y),\ l = 1, \ldots, L$. *Зокрема*

$$\mathrm{D}_y \eta(\bar{y}) = -[\mathrm{D}_x f(\bar{x}, \bar{y})]^{-1} \mathrm{D}_y f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Теорема не дає конструктивної побудови явного розв'язку, але дає змогу знайти частинні похідні від $\eta(\cdot)$.

8.4 Опуклі множини та теореми відокремлення

Означення 8.4.1. Множина $X \subset \mathbb{R}^L$ називається опуклою, якщо $x^\alpha = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in X$ для всіх $x^1, x^2 \in X$, $\alpha \in [0,1]$. З геометричного погляду множина X опукла, якщо вона разом з будь-якими двома своїми точками x^1 і x^2 містить відрізок, який їх з'єднує, тобто множину вигляду

$$[x^2, x^1] = \{x \in \mathbb{R}^L : x = x^2 + \alpha(x^1 - x^2), 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}.$$

Означення 8.4.2. Множина X називається строго опуклою, якщо $x^\alpha = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in \mathrm{int}X$ для всіх $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, $\alpha \in (0,1)$.

Прикладами опуклих множин в просторі $\mathbb{R}^L$ є самий простір, будь-який його лінійний підпростір, наприклад $\mathbb{R}^L_+ = \{x \in \mathbb{R}^L : x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}^L_{++} = \{x \in \mathbb{R}^L : x_i > 0$ для всіх $i =$

$1, \dots, L\}$, одноточкова множина, куля, відрізок, а також такі множини:

$$l_{x^0 h} = \{x \in \mathbb{R}^L : x = x^0 + \alpha h, \ \alpha \geqslant 0\}$$

– промінь, який виходить із точки x^0 в напрямі вектора h;

$$p \in \mathbb{R}^L, \, p \neq 0, \, \beta \in \mathbb{R}, \quad H_{p,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x = \beta\}$$

– гіперплощина з нормаллю p;

$$H^+_{p,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \geqslant \beta\}, \quad H^-_{p,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^L : p \cdot x \leqslant \beta\}$$

– півпростори, які породжені гіперплощиною $H_{p,\beta}$;

$$S^{L-1} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_{l=1}^{L} x_l = 1\}$$

– $L-1$ -вимірний симплекс.

Легко бачити, що всі перелічені множини, крім кулі, є частковими випадками опуклої множини вигляду

$$X = \{x \in \mathbb{R}^L : Ax \leqslant b\} = \{x \in \mathbb{R}^L : a_i \cdot x \leqslant b, \ i = 1, \dots, N\}, \tag{8.4.1}$$

де A – деяка матриця розміру $N \times L$ з рядками $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^L$, $b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$. Множини вигляду (8.4.1) прийнято називати *поліедрами*. Отже, поліедр – це множина розв'язків деякої системи скінченного числа лінійних нерівностей, або, це ж саме, перетин скінченного числа півпросторів.

Нижче наведемо дві найпростіші операції над опуклими множинами, результатом яких є також опуклі множини.

Теорема 8.4.1. *Нехай I – будь-яка, скінченна або нескінченна, множина індексів, X_i $(i \in I)$ – опуклі множини. Тоді їх перетин $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ опукла множина.*

Доведення. Нехай $x^1, x^2 \in X$, $\alpha \in [0,1]$. За означенням перетину для кожного $i \in I$ маємо $x^1, x^2 \in X_i$ і оскільки X_i опукла, то $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in X_i$. Отож, $x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i = X$, тобто X опукла множина. $\square$

Досить просто доводиться наступна теорема.

Теорема 8.4.2. *Нехай $X_1, \ldots, X_m$ – опуклі множини, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – довільні числа. Тоді множина*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = \left\{ x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i, \quad x^i \in X_i,\ i = 1, \ldots, m \right\},$$

яка називається лінійною комбінацією множин $X_1, \ldots, X_m$, опукла.

Зокрема, сума і різниця опуклих множин X_1 і X_2, тобто множини

$$X_1 \pm X_2 = \{x : x = x^1 \pm x^2,\ \ x^1 \in X_1,\ x^2 \in X_2\}$$

опуклі.

Серед численних властивостей опуклих множин звернемо увагу на властивість зв'язності. Правильна така теорема.

Теорема 8.4.3. *Опукла множина зв'язна.*

Необхідно зазначити, що опуклість є більш специфічною структурною властивістю множини, ніж зв'язність, тому топологічні властивості опуклих множин прості. Зупинимося на простих структурах замикання, внутрішності та границі опуклої множини.

Теорема 8.4.4. *Нехай X опукла множина, тоді її замикання $\bar{X}$ і внутрішність $\mathrm{int} X$ – опукла множина.*

Наслідок 8.4.5. *На кожному промені, який виходить із довільної внутрішньої точки опуклої множини, є саме більше одна гранична точка.*

Теорема 8.4.6. *Будь-які два опуклі компакти в* $\mathbb{R}^L$ *гомеоморфні, тобто між ними можна встановити взаємно однозначне і взаємно обернене відображення.*

Важливим підкласом опуклих множин є опуклі конуси.

Означення 8.4.3. Множина $X \subset \mathbb{R}^L$ називається:

(i) конусом, якщо $\lambda x \in X$ для всіх $x \in X$, $\lambda \geqslant 0$, тобто, якщо X разом з будь-якою своєю точкою x містить промінь, який проходить через неї з початком в нулі;

(ii) опуклим конусом, якщо $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 \in X$ для всіх x^1, $x^2 \in X$, $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$, тобто, якщо X одночасно є опуклою множиною і конусом.

Означення 8.4.4. Нехай $x^1, \ldots, x^m$ - точки з $\mathbb{R}^L$. Їхня лінійна комбінація $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ називається:

(i) опуклою, якщо $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$;

(ii) невід'ємною, якщо $\lambda_i \geqslant 0$.

Теорема 8.4.7. *Множина X опукла (опуклий конус) тоді і лише тоді, коли вона містить всі опуклі (невід'ємні) комбінації будь-якої скінченної кількості своїх точок.*

Наслідок 8.4.8. *Множина X опуклий конус тоді і лише тоді, коли вона замкнута стосовно додавання своїх елементів і множення елемента на невід'ємне число, тобто*

(i) $x^1 + x^2 \in X$ *для всіх* $x^1, x^2 \in X$;

(ii) $\lambda x \in X$ *для всіх* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Означення 8.4.5. Нехай X - довільна множина в $\mathbb{R}^L$. Перетин всіх опуклих множин (конусів) із $\mathbb{R}^L$, які містять множину X, називається її опуклою (конічною) оболонкою і позначається через $\mathrm{conv}X$ ($\mathrm{cone}X$).

Для довільної множини $X \subset \mathbb{R}^L$ її опукла оболонка $\mathrm{conv}X$ непорожня опукла множина. Іншими словами, $\mathrm{conv}X$ є найменша (за включенням) опукла множина, яка містить X. Легко бачити, що множина X опукла тоді і лише тоді, коли $\mathrm{conv}X = X$.

Аналогічне зауваження можна висловити про відповідність понять опуклого конуса і конічної оболонки.

Зазначимо зв'язок оболонок заданої множини з відповідними комбінаціями її точок.

Теорема 8.4.9. *Опукла (конічна) оболонка довільної множини X збігається з множиною усяких можливих опуклих (невід'ємних) комбінацій точок із X.*

Ця теорема стверджує, що довільна точка з $\mathrm{conv}X$ зображається у вигляді опуклої комбінації деяких точок із X, число яких скінчене, але загалом кажучи як завгодно велике. Одним з найважливіших результатів скінченновимірного опуклого аналізу є теорема Каратеодори, яка стверджує, що це число завжди можна обмежити величиною $L+1$. Отже, будь-яку точку з $\mathrm{conv}X$ можна зобразити у вигляді опуклої комбінації не більше, ніж $L+1$ точок із X. Щодо конічної оболонки cone$X$, то довільну її точку можна зобразити у вигляді невід'ємної комбінації не більше ніж, L точок із X.

В опуклому аналізі корисним є такі два поняття.

Означення 8.4.6. Опукла (конічна) оболонка множини, яка складається з скінченного числа точок, називається опуклим багатогранником (багатогранним конусом), натягнутим на ці точки.

Отже, з врахуванням теореми 8.4.9 опуклий багатогранник має вигляд

$$X = \operatorname{conv}\{x^1, \dots, x^m\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^L : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\right\},$$

а багатогранний конус – вигляд

$$X = \operatorname{cone}\{x^1, \dots, x^m\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^L : x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \ \ i = 1, \dots, m\right\}.$$

Опуклий багатогранник – компакт, а багатогранний конус замкнута множина.

Означення 8.4.7. Множини X_1 і X_2 із $\mathbb{R}^L$ називаються:

(i) відокремлюваними, якщо існує ненульовий вектор $p \in \mathbb{R}^L$ і число w такі, що

$$p \cdot x^1 \geqslant \mathrm{w} \geqslant p \cdot x^2 \quad \text{для всіх} \quad x^1 \in X_1,\ x^2 \in X_2;$$

(ii) сильно відокремлюваними, якщо існують $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{R}$ такі, що

$$\inf_{X_1} p \cdot x^1 > \mathrm{w} > \sup_{X_2} p \cdot x^2.$$

Оскільки ненульовий вектор p і число w визначають гіперплощину $H_{p,\mathrm{w}}$, яка породжує півпростори $H^+_{p,\mathrm{w}}$, $H^-_{p,\mathrm{w}}$, то властивість відокремлюваності множин X_1 і X_2 означає, що їх можна помістити в різні півпростори, які породжені деякою гіперплощиною $H_{p,\mathrm{w}}$, тобто $X_1 \subset H^+_{p,\mathrm{w}}$, $X_2 \subset H^-_{p,\mathrm{w}}$. Говорять, що гіперплощина $H_{p,\mathrm{w}}$ відокремлює X_1 і X_2. Сильна відокремлюваність означає, що множини перебувають як на додатній відстані від гіперплощини, що їх відокремлює, так і одна від одної.

Теорема 8.4.10. *Опуклі множини X_1 і X_2 сильно відокремлювані тоді і лише тоді, коли відстань між ними додатна.*

Наслідок 8.4.11. *Нехай X_1 і X_2 – замкнуті, опуклі множини в $\mathbb{R}^L$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ і хоча б одна з них обмежена. Тоді вони сильно відокремлювані.*

Наслідок 8.4.12. *Нехай X – замкнута опукла множина в $\mathbb{R}^L$ і $z \notin X$. Тоді X і z сильно відокремлювані, тобто існує вектор $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ і число $\mathrm{w} \in \mathbb{R}$ такі, що $p \cdot z > \mathrm{w}$ і $p \cdot x < \mathrm{w}$ для всіх $x \in X$.*

Теорема 8.4.13. *Нехай X_1 і X_2 опуклі множини в $\mathbb{R}^L$ і $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Тоді існують $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ і число $\mathrm{w} \in \mathbb{R}$ такі, що $p \cdot x^1 \geqslant \mathrm{w} \geqslant p \cdot x^2$ для всіх $x^1 \in X_1$, $x^2 \in X_2$.*

Означення 8.4.8. Гіперплощина $H_{p,\mathrm{w}}$ називається опорною до множини $X \subset \mathbb{R}^L$ в точці $a \in \partial X$, якщо a лежить в $H_{p,\mathrm{w}}$, а X - в одному з півпросторів, які породжені $H_{p,\mathrm{w}}$, наприклад, в $H^+_{p,\mathrm{w}}$, тобто $p \cdot x \geqslant \mathrm{w} = p \cdot a$ для всіх $x \in X$.

Теорема 8.4.14. *Нехай X опукла множина в $\mathbb{R}^L$ і $a \notin \operatorname{int} X$. Тоді існує вектор $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$ такий, що $p \cdot a \geqslant p \cdot x$ для всіх $x \in X$.*

В теорії опуклих множин важливе місце займає поняття екстремальної точки.

Означення 8.4.9. Точка x опуклої множини X називається екстремальною (кутовою), якщо її не можна зобразити у вигляді $x = \alpha x^1 + (1-\alpha)x^2$, де $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, $\alpha \in (0,1)$.

Сукупність екстремальних точок позначимо через $E(X)$. Теорема 8.4.15 показує, що опуклий компакт можна відновити за його екстремальними точками.

Теорема 8.4.15. *Нехай X – опуклий компакт в $\mathbb{R}^L$. Тоді $X = \operatorname{conv} E(X)$, тобто кожну точку $x \in X$ можна зобразити у вигляді опуклої комбінації не більше, ніж $L+1$ екстремальної точки множини X.*

Теорема 8.4.16 є важливою в теорії лінійного програмування.

Теорема 8.4.16. *Нехай X – опукла, обмежена або зверху або знизу (або обмежена) множина в $\mathbb{R}^L$. Тоді кожна її опорна гіперплощина містить її екстремальну точку.*

8.5 Ввігнуті функції

Припустимо надалі, що X – опукла множина в $\mathbb{R}^L$.

Означення 8.5.1. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається ввігнутою на X, якщо справджується нерівність

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geqslant \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2) \tag{8.5.1}$$

для всіх $x^1, x^2 \in X$, $\alpha \in [0,1]$.

Якщо при всіх $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, $\alpha \in (0,1)$ нерівність (8.5.1) справджується строго, то $f(\cdot)$ називається строго ввігнутою на X.

Функція $f(\cdot)$ називається (строго) опуклою на X, якщо $-f(\cdot)$ (строго) ввігнута на X.

Геометрично ввігнутість функції $f(\cdot)$ означає, що будь-яка точка довільної хорди графіка $f(\cdot)$ перебуває не вище відповідної точки самого графіка. Для опуклої функції взаємне розташування хорди і графіка є зворотним. Звідки маємо, що функції $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ опуклі на $\mathbb{R}$; $f(x) = \ln x$ – ввігнута на $\operatorname{int} \mathbb{R}_+$. Функція $f(x) = -\|x\|$ – ввігнута, $f(x) = -\|x\|^2$ – строго ввігнута на $\mathbb{R}^L$. Функцію вигляду

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

де $a \in \mathbb{R}^L$, $b \in \mathbb{R}$ називають лінійною. Очевидно, що для лінійної функції нерівність (8.5.1) справджується як рівність. Отож, вона одночасно ввігнута й опукла на $\mathbb{R}^L$.

Зазначимо, що нерівність (8.5.1), яка визначає ввігнутість функції, можна поширити на довільну кількість точок.

Теорема 8.5.1 (Нерівність Йєнсена). *Нехай $f(\cdot)$ – ввігнута функція на опуклій множині X. Тоді*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x^i)$$

для всіх $m = 1, 2, \ldots,\ x^i \in X,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$

Із нерівності Йєнсена можна одержати багато відомих нерівностей. Обмежимося таким прикладом.

Приклад 8.5.1. Функція $f(x) = -\ln x$ опукла на $\operatorname{int}\mathbb{R}_+$. Отож, для довільних $m = 1, 2, \ldots,\ x_i > 0,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,$ $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ маємо

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) \leqslant -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \ln x_i = -\ln\left(\prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}\right).$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \geqslant \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}. \qquad (8.5.2)$$

Зокрема, при $\alpha_i = 1/m$ $(i = 1, \ldots, m)$ отримуємо класичну нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i \geqslant \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} x_i}.$$

▲

Зазначими декілька найпростіших операцій над ввігнутими функціями, результатом яких є також ввігнута функція.

Теорема 8.5.2. *Нехай* $f_1, \ldots, f_m$ *– ввігнуті функції на опуклі множині* $X \subset \mathbb{R}^L$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *– невід'ємні числа. Тоді функція* $f(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ *ввігнута на* X.

Теорема 8.5.3. *Нехай* X *– опукла множина,* Y *– довільна множина,* $\varphi(x, y)$ *– функція на* $X \times Y$*, ввігнута за* x *на* X *при кожному* $y \in Y$ *і обмежена знизу за* y *на* Y *при кожному* $x \in X$*. Тоді функція* $f(x) = \inf_Y \varphi(x, y)$ *ввігнута на* X.

Доведення. Для довільних $x^1, x^2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ маємо

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \inf_Y \varphi(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, y) \\ &\geqslant \inf_Y (\lambda\varphi(x^1, y) + (1-\lambda)\varphi(x^2, y)) \\ &\geqslant \inf_Y (\lambda\varphi(x^1, y)) + \inf_Y ((1-\lambda)\varphi(x^2, y)) \\ &= \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2). \end{aligned}$$

□

Зокрема, функція $f(x) = \min_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ ввігнута на X, якщо функції $f_1, \ldots, f_m$ ввігнуті на X.

Теорема 8.5.4. *Нехай* $g_1, \ldots, g_m$ *– ввігнуті функції на опуклі множині* $X \subset \mathbb{R}^L$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ *– утворена із них вектор функція,* $\varphi(\cdot)$ *– монотонно неспадна ввігнута функція на опуклій множині* $V \subset \mathbb{R}^m$ *і* $g(X) \subset V$*. Тоді функція* $f(x) = \varphi(g(x))$ *ввігнута на* X.[1]

[1] Умова монотонного неспадання функції означає, що $\varphi(v^1) \geqslant \varphi(v^2)$, якщо $v^1 \leqslant v^2$, $v^1, v^2 \in V$.

Доведення. Для довільних $x^1, x^2 \in X$, $\lambda \in [0,1]$ маємо

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \varphi(g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)) \\ &\geqslant \varphi(\lambda g(x^1) + (1-\lambda)g(x^2)) \\ &\geqslant \lambda\varphi(g(x^1)) + (1-\lambda)\varphi(g(x^2)) \\ &= \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2), \end{aligned}$$

де перша нерівність випливає з ввігнутості g і монотонного неспадання φ, друга – з ввігнутості φ. □

Для розв'язання задач на макро та мікроекономічному рівні часто використовується виробнича функція вигляду $q = f(K,L) = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$, де $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 0,1,2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ – параметри виробничої функції, K – капітал, L – кількість працівників. Виробнича функція тільки що наведеного вигляду називається функцією Коба–Дугласа (від імен двох американських економістів, які запропонували її в 1929 р.) Цю функцію активно використовують для розв'язання різних теоретичних і прикладних задач, тому що вона структурно проста. Як ілюстрація значення параметрів α_1, α_2 макроекономічної виробничої функції Коба–Дугласа для економіки США для базового часового проміжку 1909-1949 рр., розраховані Солоу, є такі: $\alpha_1 = 0,35$, $\alpha_2 = 0,65$.

Нехай задано числа $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$. Покажемо, що функція Коба-Дугласа

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}$$

ввігнута на $\mathbb{R}_+^L$.

Розглянемо множину $Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^L : \prod_{i=1}^{m} y_i^{\alpha_i} = 1 \right\}$ і функцію $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i y_i$. Для довільних $x > 0$ і $y \in Y$ з нерівності (8.5.2) отримаємо

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} (x_i y_i)^{\alpha_i} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i y_i = \varphi(x,y).$$

Крім того, для заданого $x > 0$ і $\bar{y} = f(x)(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_L}) \in Y$ маємо $f(x) = \varphi(x, \bar{y})$. Отже, $f(x) = \min_{Y} \varphi(x,y)$ для всіх $x \in X$. Тоді за теоремою 8.5.3 функція $f(\cdot)$ ввігнута на $\operatorname{int} \mathbb{R}^L_+$. Оскільки $f(\cdot)$ неперервна на $\mathbb{R}^L_+$, то нерівність, яка визначає ввігнутість функції, зберігається для всіх точок із $\mathbb{R}^L_+$.

Функція $f(\cdot)$, яка визначена на опуклій множині X простору $\mathbb{R}^L$, буде ввігнутою тоді і лише тоді, коли множина $\{(x,\beta) : x \in X,\ f(x) \geqslant \beta\}$ опукла в $\mathbb{R}^{L+1}$.

Якщо $f(\cdot)$ ввігнута функція на опуклій множині X, тоді множини вигляду

$$X_\beta = \{x \in X : f(x) \geqslant \beta\}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

очевидно опуклі. Ці множини прийнято називати множинами Лебега функції $f(\cdot)$. Зворотне твердження, тобто, якщо для кожного $\beta \in \mathbb{R}$ множина X_β опукла, то функція $f(\cdot)$ ввігнута, неправильне, наприклад, $f(x) = x^3$.

Означення 8.5.2. Функція $f(\cdot)$ визначена на опуклій множині $X \subset \mathbb{R}^L$ називається (строго) квазіввігнутою, якщо всі її множини Лебега (строго) опуклі.

Нехай $f(\cdot)$ квазіввігнута функція на X і $x^1, x^2 \in X$, $\alpha \in [0,1]$. Припустимо, що $f(x^1) \geqslant f(x^2) = \beta$. Тоді $\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2 \in$

X_β, тобто

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geqslant \beta = f(x^2) = \min\{f(x^1), f(x^2)\}. \quad (8.5.3)$$

Навпаки, нехай справджується нерівність (8.5.3). Для довільного $\beta \in \mathbb{R}$ маємо або $X_\beta = \varnothing$, або $X_\beta = X$, або $X_\beta \subset X$. Для перших двох випадків множина X_β опукла. Доведемо опуклість, коли $X_\beta \subset X$

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geqslant \min\{f(x^1), f(x^2)\} = \beta$$

для всіх $x^1, x^2 \in X_\beta$ і $\alpha \in [0,1]$, тобто X_β – опукла.

Отже, квазіввігнутість функції рівносильна виконанню нерівності

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geqslant \min\{f(x^1), f(x^2)\} \quad (8.5.4)$$

для всіх $x^1, x^2 \in X$ і $\alpha \in [0,1]$.

Функція $f(\cdot)$ називається *строго квазіввігнутою*, якщо нерівність (8.5.4) справджується строго для всіх $x^1 \neq x^2$ і $\alpha \in (0,1)$. Функція $f(\cdot)$ – (*строго*) *квазіопукла*, якщо $-f(\cdot)$ (*строго*) *квазіввігнута*. Наприклад, будь-яка монотонно неспадна функція однієї змінної є квазіввігнутою.

Означення 8.5.3. Проекцією точки $a \in \mathbb{R}^L$ на множину $X \subset \mathbb{R}^L$ називається точка $\beta_X(a) \in X$ така, що $\|\beta_X(a) - a\| \leqslant \|x - a\|$ для всіх $x \in X$, тобто точка, яка найближча до a серед точок із X.

Теорема 8.5.5. *Нехай X – непорожна, опукла, замкнута множина і $a \notin X$.*

1. *Тоді існує єдина проекція точки a на множину X.*

2. *Точка* $\beta_X(a) \in X$ *є проекцією точки* a *на множину* X *тоді і лише тоді, коли*

$$(x-\beta_X(a))\cdot(\beta_X(a)-a) \geqslant 0 \quad \text{для всіх } x \in X.$$

Зокрема $(\beta_X(a)-a)\cdot(x-a) \geqslant \|\beta_X(a)-a\|^2$ *для всіх* $x \in X$.

Визначимо функцію відстані $\gamma : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2}\min_{x\in X}\|z-x\|^2.$$

Якщо множина X опукла, тоді для кожного z існує єдина точка $\beta(z) \in X$ така, що $\gamma(z) = \dfrac{1}{2}\min_{x\in X}\|z-\beta(z)\|^2$.

Означення 8.5.4. Функція $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ задовольняє умову Ліпшиця в точці $x \in U$, якщо існує $\varepsilon > 0$ і $k > 0$ такі, що $\|f(z)-f(y)\| \leqslant k\|z-y\|$, коли $z, y \in B_\varepsilon(x) = \{z \in U : \|z-x\| < \varepsilon\}$. Функція $f(\cdot)$ задовольняє умову Ліпшиця, якщо вона задовольняє умову Ліпшиця в кожній точці множини U. Число k називається константою Ліпшиця.

Нехай X опукла замкнута множина, тоді множина вигляду $X^* = \{p \in \mathbb{R}^L : p\cdot X < s \text{ для деякого } s \in \mathbb{R}\}$ називається нормальним конусом. Множина X^* опукла. Визначимо функцію $\pi : X^* \to \mathbb{R}$

$$\pi(p) = \sup_{x\in X} p\cdot X,$$

яка називається функцією прибутку. Між функціями $\pi(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ і $\gamma(\cdot)$ виконується такий взаємозв'язок.

Теорема 8.5.6. [1]

(i) *Функція проекції* $\beta(\cdot)$ *задовольняє умову Ліпшиця з константою* $k = 1$, *тобто* $\|\beta(x) - \beta(y)\| \leqslant \|x - y\|$ *для всіх* $x, y \in \mathbb{R}^L$. *Функція відстані* $\gamma : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}_+$ *є неперервно диференційовною і опуклою. Крім того,* $\nabla\gamma(x) = x - \beta(x)$ *в кожній точці* $x \in \mathbb{R}^L$.

(ii) *Нехай* $\gamma(\cdot)$ *– двічі диференційовна функція, тоді матриці* $\mathrm{D}^2\gamma(x)$ *і* $\mathrm{D}\beta(x) = \mathrm{I} - \mathrm{D}^2\gamma(x)$ *є додатно напіввизначені. Зокрема,* $\mathrm{D}\beta(x)v = 0$ *і* $\mathrm{D}^2\gamma(x)v = v$ *для* $v = x - \beta(x)$.

(iii) $\pi(x - \beta(x)) = (x - \beta(x)) \cdot \beta(x)$ *для всіх* x.

(iv) *Якщо* $p \cdot x = \pi(p)$ *і* $x \in X$, *то* $x = \beta(p + x)$.

Теорема 8.5.7. *Нехай* X *опукла множина і* $\operatorname{int} X \neq \varnothing$. *Тоді ввігнута функція* $f(\cdot)$ *в усіх внутрішніх точках множини* X *неперервна. Зокрема, функція, ввігнута на всьому просторі* $\mathbb{R}^L$, *неперервна в усіх точках.*

Диференціальні критерії і характеристика ввігнутості функції

Наведемо характеристичну властивість і критерій (квазі)ввігнутості гладких функцій та критерій оптимальності гладких (квазі)ввігнутих функцій.

Нехай X – опукла множина в $\mathbb{R}^L$.

[1] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.– М.:Мир,1973.

Теорема 8.5.8 (Характеристична властивість). *Функція $f \in C^1(X)$ ввігнута на X тоді і лише тоді, коли*

$$f(x+z) \leqslant f(x) + \nabla f(x) \cdot z \tag{8.5.5}$$

для всіх $x \in X$, $z \in \mathbb{R}^L$ таких, що $x+z \in X$. Функція $f(\cdot)$ строго ввігнута на X, якщо нерівність (8.5.5) справджується строго для всіх $x \in X$, $z \neq 0$.

Доведення. Нехай функція $f(\cdot)$ ввігнута і $x \in X$, $z \in \mathbb{R}^L$, $x + z \in X$. Приймемо $x' = x+z$ і $x^\alpha = x + \alpha(x'-x)$, $\alpha \in (0,1]$. Тоді маємо

$$f(x^\alpha) \geqslant \alpha f(x') + (1-\alpha) f(x)$$

або

$$f(x+z) \leqslant f(x) + \frac{f(x+\alpha z) - f(x)}{\alpha}.$$

Застосувавши до правої частини нерівності формулу про скінчені прирости,[2] одержимо

$$f(x+z) \leqslant f(x) + \nabla f(x+\alpha\theta z)\cdot z, \quad \theta \in [0,1].$$

Спрямувавши $\alpha \to 0$, отримаємо нерівність (8.5.5).

Навпаки, нехай справджується нерівність (8.5.5). Тоді для довільних $x', x \in X$ маємо

$$f(x') \leqslant f(x) + \nabla f(x) \cdot (x'-x). \tag{8.5.6}$$

[2] Нехай $f \in C^1(X)$, $x, x+h \in X$, $h \neq 0$. Тоді $f(x+h) - f(x) = \nabla f(x+\theta h)\cdot h$, де $\theta \in [0,1]$.

Приймемо $x^\alpha = x + \alpha(x' - x)$, $\alpha \in [0, 1]$. Із (8.5.6) одержимо

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant f(x^a) + \nabla f(x^\alpha)\cdot(x - x^\alpha) \\ f(x') &\leqslant f(x^a) + \nabla f(x^\alpha)\cdot(x' - x^\alpha). \end{aligned}$$

Помноживши першу нерівність на $1 - \alpha$, другу – α і додавши, одержимо

$$\begin{aligned} \alpha f(x') + (1-\alpha)f(x) \leqslant f(x^\alpha) &+ \nabla f(x^\alpha)\cdot(\alpha x' + (1-\alpha)x - x^\alpha) \\ &= f(x^\alpha), \end{aligned}$$

що є рівносильним нерівності (8.5.1). □

Нагадаємо, що графік лінійної функції $\gamma(z) = f(x) + \nabla f(x)\cdot z$ називається дотичною гіперплощиною до графіка функції $f(\cdot)$ в точці $(x, f(x))$. Отже, співвідношення (8.5.5) означає, що графік функції $f(\cdot)$ лежить не вище дотичної гіперплощини до нього в точці $(x, f(x))$.

Опираючись на характеристичну властивість, можна одержати критерій ввігнутості в термінах перших похідних.

Теорема 8.5.9. *Нехай $f \in C^1(X)$. Функція $f(\cdot)$ ввігнута множині X тоді і лише тоді, коли*

$$(f'(x') - f(x))\cdot(x' - x) \leqslant 0 \quad \textit{для всіх } x', x \in X.$$

Для функції $f(\cdot)$ числового аргументу $(L = 1)$ остання нерівність означає, що похідна $f'(\cdot)$ монотонно не зростає на X.

Зазначимо тепер критерій ввігнутості в термінах других похідних.

Означення 8.5.5. $L \times L$ матриця H називається від'ємно напіввизначеною, якщо

$$z \cdot Hz \leqslant 0$$

для всіх $z \in \mathbb{R}^L$. Якщо нерівність справджується строго для всіх $z \neq 0$, то матриця H називається від'ємно визначеною.

Матриця H додатно напіввизначена (додатно визначена) тоді і лише тоді, коли $-H$ від'ємно напіввизначена (від'ємно визначена). Позначимо через

$$\Delta_{i_1 \ldots i_k} = \begin{vmatrix} h_{i_1 i_1} & \ldots & h_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i_k i_1} & \ldots & h_{i_k i_k} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_k = \begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k1} & \ldots & h_{kk} \end{vmatrix}$$

головні мінори матриці H.

Теорема 8.5.10. *Нехай H – $L \times L$ матриця.*

1. *Матриця H від'ємно визначена тоді і лише тоді, коли симетрична матриця $H + H^\tau$ від'ємно визначена.*
2. *Нехай H симетрична матриця. Матриця H від'ємно визначена тоді і лише тоді, коли $(-1)^k \Delta_k > 0$ для всіх $k = 1, \ldots, L$.*
3. *Нехай H симетрична матриця. Матриця H від'ємно напіввизначена тоді і лише тоді, коли $(-1)^k \Delta_{i_1 \ldots i_k} \geqslant 0$ для всіх $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant L, \quad k = 1, \ldots, L$.*

Теорема 8.5.11. *Нехай $f \in C^2(X)$ і $\operatorname{int} X \neq \varnothing$. Функція $f(\cdot)$ ввігнута на опуклій множині X тоді і лише тоді, коли* *матриця Гесе* $\mathrm{D}^2 f(x)$ *від'ємно напіввизначена для кожного* $x \in X$. *Якщо матриця* $\mathrm{D}^2 f(x)$ *від'ємно визначена на* X, *то функція* $f(\cdot)$ *строго ввігнута.*

Зворотне твердження до другої частини теореми неправильне. Наприклад, функція $f(x) = -x^4$ строго ввігнута для $x \in \mathbb{R}$, але $\mathrm{d}^2 f(0)/\mathrm{d}x^2 = 0$.

Приклад 8.5.2. Нехай $f(x_1, x_2)$ двічі неперервно диференційовна на опуклій множині X. За теоремою 8.5.11 функція $f(\cdot)$ строго ввігнута, якщо матриця Гесе

$$\mathrm{D}^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{12}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

від'ємно визначена для всіх $(x_1, x_2) \in X$. За теоремою 8.5.10 матриця Гесе $\mathrm{D}^2 f(x_1, x_2)$ від'ємно визначена тоді і лише тоді, коли

$$\Delta_1 = |f_{11}(x_1, x_2)| < 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{11}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f(x_1, x_2) \end{vmatrix} > 0.$$

Нехай $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \quad x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^2_+$. Тоді

$$\Delta_1 = \alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} < 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} & \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & \beta(\beta - 1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \end{vmatrix} > 0$$

в $\operatorname{int} \mathbb{R}^2_+$ тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha \in (0, 1), \quad \beta \in (0, 1), \quad \alpha + \beta < 1.$$

За теоремою 8.5.11 функція $f(\cdot)$ ввігнута, якщо матриця Гесе $\mathrm{D}^2 f(x_1, x_2)$ від'ємно напіввизначена для всіх $(x_1, x_2) \in X$. За теоремою 8.5.10 матриця Гесе $\mathrm{D}^2 f(x_1, x_2)$ від'ємно напіввизначена тоді і лише тоді, коли

$$\Delta_{11} = |f_{11}(x_1, x_2)| \leqslant 0, \quad \Delta_{22} = |f_{22}(x_1, x_2)| \leqslant 0,$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} f_{11}(x_1, x_2) & f_{11}(x_1, x_2) \\ f_{21}(x_1, x_2) & f(x_1, x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Для функції $f(x) = x_1^\alpha x_2^\beta$ це означає

$$\Delta_{11} = \alpha(\alpha - 1)\, x_1^{\alpha-2} x_2^\beta \leqslant 0, \qquad \Delta_{22} = \beta(\beta - 1)\, x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \leqslant 0,$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha - 1)\, x_1^{\alpha-2} x_2^\beta & \alpha\beta\, x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta\, x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} & \beta(\beta - 1)\, x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

тобто, коли $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$, $\beta + \alpha \leqslant 1$. ▲

Розглянемо відповідні теореми для квазіввігнутих функцій.

Теорема 8.5.12. *Нехай $f \in C^1(X)$. Функція $f(\cdot)$ квазіввігнута тоді і лише тоді, коли*

$$\nabla f(x) \cdot (x' - x) \geqslant 0 \qquad (8.5.7)$$

для всіх $x', x \in X$ таких, що $f(x') \geqslant f(x)$. Якщо нерівність (8.5.7) справджується строго для всіх $x', x \in X$, $x' \neq x$ таких, що $f(x') \geqslant f(x)$, то функція $f(\cdot)$ строго квазіввігнута. Навпаки, якщо функція $f(\cdot)$ строго квазіввігнута і $\nabla f(x) \neq 0$

для всіх $x \in X$*, тоді* $\nabla f(x) \cdot (x' - x) > 0$ *для* $x' \neq x$ *таких, що* $f(x') \geqslant f(x)$.

Нерівність (8.5.7) означає, що для кожної квазіввігнутої функції $f(\cdot)$ і для всіх пар точок x' і x таких, що $f(x') \geqslant f(x)$, кут між векторами $\nabla f(x)$ і $(x' - x)$ не тупий, а у випадку строго квазіввігнутої функції цей кут гострий.

Теорема 8.5.13. *Нехай* $f \in C^2(X)$*. Функція* $f(\cdot)$ *квазіввігнута тоді і лише тоді, коли для всіх* $x \in X$ *матриця* $\mathrm{D}^2 f(x)$ *від'ємно напіввизначена на підпросторі* $\{z \in \mathbb{R}^L : \nabla f(x) \cdot z = 0\}$*, тобто*

$$z \cdot \mathrm{D}^2 f(x) z \leqslant 0 \quad \textit{для} \quad z \cdot \nabla f(x) = 0$$

для кожного $x \in X$*. Якщо матриця Гессе* $\mathrm{D}^2 f(x)$ *від'ємно визначена на підпросторі* $\{z \in \mathbb{R}^L : \nabla f(x) \cdot z = 0\}$ *для всіх* $x \in X$*, то функція* $f(\cdot)$ *строго квазіввігнута.*

Теорема 8.5.14. *Нехай* H *–* $L \times L$ *симетрична матриця, а* B *–* $L \times N$ *матриця,* $N \leqslant L$ *і* $\operatorname{rank} B = N$.

1. *Матриця* H *від'ємно визначена на підпросторі* $\{z \in \mathbb{R}^L : Bz = 0\}$ *(тобто* $z \cdot Hz < 0$ *для кожного* $z \in \mathbb{R}^L$ *такого, що* $Bz = 0$ *і* $z \neq 0$*) тоді і лише тоді, коли*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} \triangle_k & B_k \\ (B_k)^\tau & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \textit{для всіх} \quad k = N+1, \ldots, L,$$

де B_k *-* $k \times N$ *підматриця* B *складена лише з перших* $k \leqslant L$ *рядків.*

2. *Матриця H від'ємно напіввизначена на підпросторі $\{z \in \mathbb{R}^L : Bz = 0\}$ тоді і лише тоді, коли*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} \Delta_{i_1 \dots i_k} & B_k^\pi \\ (B_k^\pi)^\tau & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad \text{для всіх} \quad k = N+1, \dots, L,$$

де

Приклад 8.5.3. Нехай $f \in C^2(X)$, X опукла множина в $\mathbb{R}^2$ і $\nabla f(x) \neq 0$ для всіх x. З теореми 8.5.13 і 8.5.14 випливає, що функція $f(\cdot)$ є строго квазіввігнутою тоді і лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x_1,x_2) & f_{12}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) \\ f_{21}(x_1,x_2) & f_{22}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) \\ f_1(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in X. \tag{8.5.8}$$

Для функції $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1 + x_2$ визначник (8.5.8) дорівнює $2(x_1+1)(x_2+1)$. Отже, ця функція є строго квазіввігнутою на множині $\mathbb{R}^2_+$. Аналогічно, функція $f(x_1, x_2)$ квазіввігнута на опуклій множині X тоді і лише тоді, коли

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x_1,x_2) & f_{12}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) \\ f_{21}(x_1,x_2) & f_{22}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) \\ f_1(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_{22}(x_1,x_2) & f_{21}(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) \\ f_{12}(x_1,x_2) & f_{11}(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) & f_1(x_1,x_2) & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

для всіх $x \in X$. Для функції $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ ці визначники дорівнюють $2x_1 x_2$. Отож, ця функція квазівввігнута на $\mathbb{R}^2_+$. ▲

Теорема 8.5.15. *Нехай H є $L \times L$ матриця і для деякого $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ маємо, що $Hp = 0$ і $H^\tau p = 0$. Позначимо через $T_p = \{z \in \mathbb{R}^L : p \cdot z = 0\}$ і $\hat{H}$ – $(L-1) \times (L-1)$ матрицю отриману з матриці H викресленням одного рядка і відповідного стовпця.*

1. *Якщо* $\operatorname{rank} H = L - 1$, *то* $\operatorname{rank} \hat{H} = L - 1$.
2. *Якщо $z \cdot Hz < 0$ для всіх $z \in T_p$, $z \neq 0$, тоді $z \cdot Hz < 0$ для всіх $z \in \mathbb{R}^L$ не пропорційних вектору p.*
3. *Матриця H від'ємно визначена на T_p тоді і лише тоді, коли $\hat{H}$ від'ємно визначена.*

8.6 Однорідні функції. Формула Ейлера

Означення 8.6.1. Функція $f : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ називається однорідною степеня n, $n \in \mathbb{Z}$, якщо для всіх $t > 0$ справджується рівність

$$f(tx_1, \ldots, tx_L) = t^n f(x_1, \ldots, x_L). \tag{8.6.1}$$

Наприклад, функція $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$ однорідна степеня нуль, а $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$ – однорідна степеня один.

Якщо $f(\cdot)$ однорідна степеня нуль, то, прийнявши $t = \dfrac{1}{x_L}$ для області $x_L > 0$, маємо, що

$$f(tx_1, \ldots, tx_L) = f(x_1/x_L, \ldots, x_{L-1}/x_L, 1).$$

Нехай функція $f(\cdot)$ диференційовна й однорідна степеня n, тоді, продиференціювавши рівність (8.6.1) за змінною x_j, отримаємо

$$\frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_L)}{\partial x_j} = t^{n-1} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_L)}{\partial x_j},$$

тобто частинна похідна $\dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_L)}{\partial x_j}$ є однорідною функцією степеня $n-1$.

Для однорідної функції $f(\cdot)$ будь-якого степеня, якщо $f(x) = f(x')$, то $f(tx) = f(tx')$ для всіх $t > 0$ і нахил поверхні рівня в точці x і tx однаковий.

Теорема 8.6.1 (Формула Ейлера). *Нехай $f \in C^1(\mathbb{R}^L_+)$ і однорідна степеня n, тоді справджується рівність*

$$\sum_{j=1}^{L} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_L)}{\partial x_j} x_j = n f(x_1, \ldots, x_L)$$

або у векторному вигляді

$$\nabla f(x) \cdot x = n f(x).$$

Доведення. Продиференціюємо рівність (8.6.1) за t, одержимо

$$\sum_{j=1}^{L} \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_L)}{\partial x_j} x_j - n t^{n-1} f(x_1, \ldots, x_L) = 0.$$

Прийнявши в останній рівності $t = 1$, отримаємо формулу Ейлера. □

Зокрема, для функції $f \in C^2(\mathbb{R}^L_+)$ однорідної степеня n має місце рівність

$$n(n-1)f(x) = x \cdot \mathrm{D}^2 f(x)x.$$

Нехай $f(\cdot)$ – однорідна степеня n, а $\varphi(\cdot)$ монотонно зростаюча функція, тоді функція $\varphi(f(x))$ називається *гомотетичною.*

8.7 Формулювання задач оптимізації

Нехай задано множину $X_0 \subset \mathbb{R}^L$, функцію $f : X_0 \to \mathbb{R}$ і деяку підмножину X множини X_0. *Задача оптимізації або екстремальна задача* формулюється так: знайти точки максимуму або мінімуму функції $f(\cdot)$ на множині X. Точки максимуму і мінімуму функції називають точками екстремуму. Математичну формалізацію цієї задачі записують у вигляді

$$f(x) \longrightarrow \max\,(\min), \quad x \in X. \tag{8.7.1}$$

При цьому $f(\cdot)$ називають цільовою функцією, X – множиною допустимих точок або просто обмеженням, будь-яку точку $x \in X$ – допустимою точкою задачі (8.7.1).

Зазначимо, що саме поняття точки максимуму (мінімуму), тобто розв'язку задачі (8.7.1), неоднозначне і потребує уточнення.

Означення 8.7.1. Точка $x^* \in X$ називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(\cdot)$ на множині X, або локальним розв'язком задачі (8.7.1), якщо існує число $\varepsilon > 0$ таке, що

$$f(x^*) \geqslant f(x) \quad (f(x^*) \leqslant f(x)) \quad \text{для всіх} \quad x \in X \cap V_\varepsilon(x^*), \tag{8.7.2}$$

де $V_\varepsilon(x^*) = \{y \in \mathbb{R}^L : \|x - x^*\| \leqslant \varepsilon\}$.

Означення 8.7.2. Точка $x^* \in X$ називається точкою глобального або абсолютного максимуму (мінімуму) функції $f(\cdot)$ на множині X, або розв'язком задачі (8.7.1), якщо

$$f(x^*) \geqslant f(x) \quad (f(x^*) \leqslant f(x)) \quad \text{для всіх} \quad x \in X. \tag{8.7.3}$$

Якщо нерівність (8.7.2) або (8.7.3) справджується строго при $x \neq x^*$, то точка x^* називається *точкою строго максимуму (мінімуму)* функції $f(\cdot)$ в локальному або в глобальному розумінні.

Надалі запис

$$f(x^*) = \max_{x \in X} f(x) \qquad (f(x^*) = \min_{x \in X} f(x))$$

буде означати, що допустима точка x^* задачі є точкою глобального максимуму (мінімуму) на множині X.

Очевидно, що задача мінімізації функції $f(\cdot)$ на множині X еквівалентна задачі

$$-f(x) \longrightarrow \max, \quad x \in X.$$

в тому розумінні, що множини глобальних і локальних, строгих і нестрогих розв'язків цих задач відповідно збігаються. Це дає змогу переносити результати, отримані для задачі максимізації, на задачі мінімізації і навпаки. Надалі розглядатимемо задачу максимізації.

При вивчені екстремальних задач передусім виникає запитання про існування розв'язку. Якщо можна припустити, що розв'язок існує, то які умови він повинен задовольняти. Нарешті, як знайти розв'язок задачі? Часткову відповідь на перше запитання дає теорема 8.2.2. Іноді корисною є інша форма цієї теореми.

Теорема 8.7.1. *Нехай X – замкнута множина в $\mathbb{R}^L$, $f(\cdot)$ – неперервна функція на X і для деякого $x^0 \in X$ множина*

$N(x^0) = \{x \in X : f(x) \geqslant f(x^0)\}$ *обмежена. Тоді існує точка глобального максимуму функції* $f(\cdot)$ *на* X.

Доведення. Із замкнутості множини X і неперервності функції $f(\cdot)$ випливає, що множина $N(x^0)$ компактна. Тоді за теоремою 8.2.2 точка максимуму функції $f(\cdot)$ на $N(x^0)$ існує, а з визначення множини $N(x^0)$ ця точка буде точкою максимуму $f(\cdot)$ на X. □

Розглянемо задачу максимізації, яка залежить від параметра a

$$f(x,a) \to \max, \qquad x \in X(a). \tag{8.7.4}$$

Теорема 8.7.2. *Нехай допустима множина* $X(a)$ *непорожна і компактна в* $\mathbb{R}^L$, $f(\cdot)$ *–неперервна функція. Тоді існує розв'язок задачі* (8.7.4).

Теорема 8.7.3. *Нехай допустима множина* $X(a)$ *опукла в* $\mathbb{R}^L$, $f(\cdot)$ *– строго ввігнута функція. Якщо розв'язок задачі* (8.7.4) *існує, то він єдиний.*

Нехай $x(a)$ множина розв'язків задачі (8.7.4). Тоді відображення $a \to x(a)$, яке кожному значенню параметра a ставить у відповідність множину розв'язків задачі (8.7.4) загалом багатозначне. Позначимо через $f_a = f(x)$ для $x \in x(a)$.

У зв'язку з узагальненням поняття відображення треба сформулювати відповідні означення неперервності для багатозначних відображень, які могли б для випадку однозначних відображень перейти в звичайне означення неперервності.

Нехай $X \subset \mathbb{R}^L$, $Y \subset \mathbb{R}^N$ і для кожного $x \in X$ значення $F(x)$ непорожна множина в Y, $F(x) \subset Y$.

Означення 8.7.3. Нехай Y замкнута множина в $\mathbb{R}^N$, то відображення $F : X \to Y$ називається напівнеперервним зверху, якщо $\mathrm{Graph}F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$ замкнута множина і значення на компактній множині обмежене, тобто, якщо для кожної компактної множини $B \subset X$ множина $F(B) = \{y \in Y : y \in F(x)$ для деякого $x \in B\}$ обмежена.

Якщо множина Y компактна, то напівнеперервність зверху відображення F еквівалентна замкнутості $\mathrm{Graph}\, F$.

Зокрема, якщо відображення є однозначним, то це означення переходить у звичайне означення неперервності.

Означення 8.7.4. Відображення $F : X \to Y$ називається напівнеперервним знизу в точці $x \in X$, якщо для кожної послідовності $x^m \to x \in X$ ($x^m \in X$ для всіх m) і для кожного $y \in F(x)$ знайдеться послідовність елементів $y^m \in F(x^m)$, яка збігається до y. Відображення F називається напівнеперервним знизу, якщо ця властивість правильна для кожної точки $x \in X$.

Багатозначне відображення F неперервне, якщо воно одночасно напівнеперервне зверху і напівнеперервне знизу.

Теорема 8.7.4 (Теорема про максимум). *Нехай $f(\cdot)$ неперервна функція і для кожного a множина $X(a)$ непорожна і компактна, багатозначне відображення $a \to X(a)$ неперервне. Тоді:*

(i) *функція $a \to f_a$ неперервна;*

(ii) *відображення $a \to x(a)$ напівнеперервне зверху.*

8.8 Задача безумовної оптимізації

Означення 8.8.1. Задача (8.7.1) називається задачею безумовної оптимізації, якщо $X = \mathbb{R}^L$, тобто

$$f(x) \to \max, \quad x \in \mathbb{R}^L. \tag{8.8.1}$$

Перший загальний принцип отримання необхідних умов в екстремальних задачах без обмежень знайшов Ферма. Ідея Ферма полягає в тому, що розв'язок гладкої задачі $f(x) \to \max$ треба шукати серед стаціонарних точок функції $f(\cdot)$, тобто серед розв'язків рівняння $\nabla f(x) = 0$. Цей результат називають теоремою Ферма.

Нагадаємо необхідні та достатні умови оптимальності розв'язку задачі (8.8.1).

Теорема 8.8.1. *Нехай функція $f(\cdot)$ диференційовна в точці $x^* \in \mathbb{R}^L$. Якщо x^* – локальний розв'язок задачі (8.8.1), то*

$$\nabla f(x^*) = 0. \tag{8.8.2}$$

Точка x^*, яка задовольняє умову (8.8.2), називається *стаціонарною точкою* задачі (8.8.1) або функції $f(\cdot)$. Відомо, що не кожна стаціонарна точка задачі (8.8.1) є її розв'язком. Для виявлення "сторонніх" стаціонарних точок можна використати необхідну умову оптимальності другого порядку.

Теорема 8.8.2. *Нехай функція $f(\cdot)$ двічі диференційовна в точці $x^* \in \mathbb{R}^L$. Якщо x^* – локальний розв'язок задачі (8.8.1), то матриця $\mathrm{D}^2 f(x^*)$ від'ємно напіввизначена, тобто*

$$z \cdot \mathrm{D}^2 f(x^*) z \leqslant 0 \quad \textit{для всіх} \ z \in \mathbb{R}^L.$$

Достатня умова локальної оптимальності містить характерне посилення вимог до матриці $\mathrm{D}^2 f(x^*)$.

Теорема 8.8.3. *Нехай функція* $f(\cdot)$ *двічі диференційовна в точці* $x^* \in \mathbb{R}^L$. *Припустимо, що* $\nabla f(x^*) = 0$, *а матриця* $\mathrm{D}^2 f(x^*)$ *від'ємно визначена, тобто*

$$z \cdot \mathrm{D}^2 f(x^*) z < 0 \quad \textit{для всіх } z \in \mathbb{R}^L,\ z \neq 0.$$

Тоді x^* *– строгий локальний розв'язок задачі* (8.8.1).

Приклад 8.8.1. Розглянемо задачу

$$f(x) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3 \to \max, \quad , x \in \mathbb{R}^2.$$

Умова (8.8.2) має вигляд

$$\nabla f(x) = (3x_2 - 3x_1^2,\, 3x_1 - 3x_2^2) = 0.$$

Стаціонарними точками задачі є $x^1 = (0,0)$ і $x^2 = (1,1)$. При цьому

$$\mathrm{D}^2 f(x) = \begin{pmatrix} -6x_1 & 3 \\ 3 & -6x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

За теоремою 8.5.10 матриця $\mathrm{D}^2 f(x^1)$ не є від'ємно напіввизначена, а матриця $\mathrm{D}^2 f(x^2)$ – від'ємно визначена. Отже, згідно з теоремою 8.8.2 точка x^1 не є розв'язком задачі, а за теоремою 8.8.3 точка x^2 є строгим розв'язком задачі. ▲

8.9 Задача умовної оптимізації

Означення 8.9.1. Задача (8.7.1) називається задачею умовної оптимізації, якщо $X \subset X_0 \subseteq \mathbb{R}^L$ і $X \neq X_0$.

При строгому формулюванні задачі повинен бути точно описаний клас допустимих елементів, для яких визначена цільова функція. Обмеження в екстремальних задачах намагаються записати у вигляді рівнянь і нерівностей. Такі обмеження називають функціональними. Крім функціональних обмежень, трапляються обмеження типу включення: $x \in A \subset X_0$, не функціонального характеру. В результаті екстремальна задача набуває такої форми:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \max, \\ h_j(x) &\leqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, k, \\ g_i(x) &= b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x &\in A. \end{aligned} \tag{8.9.1}$$

Для цієї задачі зберігають силу твердження теорем 8.8.1 – 8.8.3, якщо її локальний розв'язок x^* є внутрішньою точкою допустимої множини

$$X = \{x \in X_0 : h_j(x) \leqslant c_j,\ j = 1, \ldots, k; \\ g_i(x) = b_i,\ i = 1, \ldots, m;\ x \in A\}.$$

Однак для більшості задач умовної оптимізації максимум досягається на границі множини X.

Геометрична інтерпретація задач умовної оптимізації побудована на понятті лінії (або поверхні) рівня функції $f(\cdot)$, тобто множин вигляду

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^L : f(x) = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Для геометричної інтерпретації задачі треба зобразити її допустиму множину X і декілька характерних ліній рівня цільової функції $f(\cdot)$. Якщо функція $f(\cdot)$ диференційовна в точці x, тоді градієнт $\nabla f(x)$ ортогональний в точці x до лінії рівня, яка проходить через цю точку, і спрямований, якщо $\nabla f(x) \neq 0$, в сторону зростання функції. В геометричному плані пошук розв'язку задачі зводиться до знаходження максимального числа α^* серед чисел таких, що лінія рівня E_α має непорожній перетин із X. Будь-яка точка $x^* \in E_{\alpha^*} \cap X$ є розв'язком задачі, а число $\alpha^* = f(x^*)$ – максимальним значенням цільової функції $f(\cdot)$ на X.

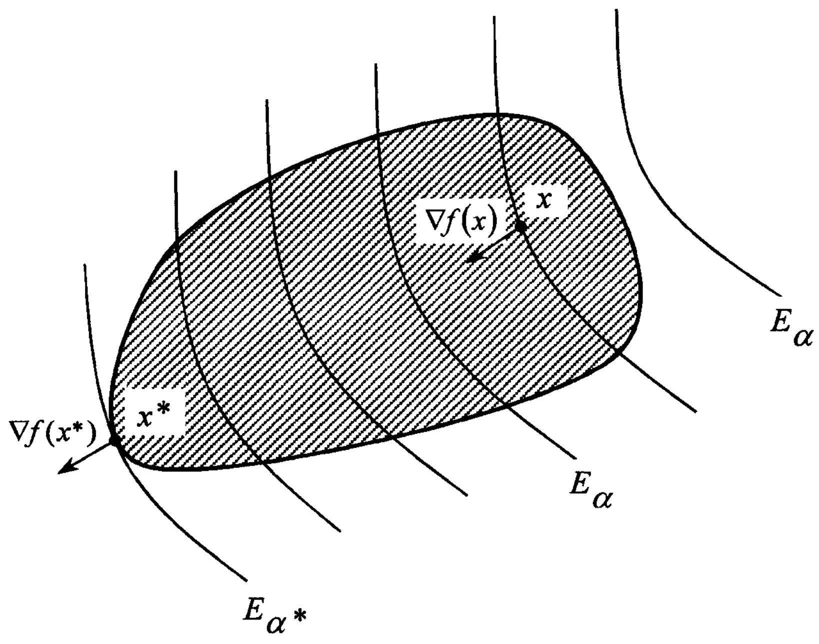


Рис. 8.9.1. Геометрична інтерпретація задач оптимізації

Приклад 8.9.1. Нехай задано задачу

$$-x_2 \to \max, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$
$$g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \quad g_2(x) = -x_1 + x_2^2 \leqslant 0,$$
$$g_3(x) = -x_1 - x_2 \leqslant 0.$$

З геометричної інтерпретації задачі видно, що розв'язком задачі є "нижня" точка перетину кола $g_1(x) = 1$ і прямої $g_3(x) = 0$, тобто точка $x^* = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. ▲

Для задач з обмеженнями загальний принцип отримання необхідних умов екстремуму запропонував Лагранж. Розглянемо функцію

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda, \mu) = \lambda_0 f(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j (c_j - h_j(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x)),$$

$$\text{де} \qquad x \in A, \quad \lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m,$$
$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathbb{R}^k_+.$$

Числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_k$ називаються *множниками Лагранжа.* Функція Лагранжа будується з врахуванням тільки функціональних обмежень, тобто тих обмежень, які записують у вигляді рівнянь і нерівностей. *Принцип Лагранжа* полягає в такому:

Нехай точка x^* є локальним розв'язком задачі (8.9.1). Тоді знайдуться такі множники Лагранжа λ_0, λ_i, $i = 1, \ldots, m$ і $\mu_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, k$, які одночасно недорівнюють нулю, що x^* задовольняє необхідну умову локального максимуму в задачі

$$\mathcal{L}(x, \cdot) \to \max, \quad x \in A,$$

і при цьому

$$\mu_j(c_j - h_j(x^*)) = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \qquad (8.9.2)$$

Іншими словами, необхідні умови максимуму у вихідній задачі збігаються з необхідними умовами максимуму функції Лагранжа на множині $x \in A$, яка складається з обмежень, що не входять у функцію Лагранжа. Співвідношення (8.9.2) називаються *умовами доповнюючої нежорсткості*. Вони означають, що відмінні від нуля множники Лагранжа потрібно приписувати лише тим обмеженням типу нерівності, які суттєві в цій точці, тобто там, де $h_j(x^*) = c_j$.

8.10 Класична задача на умовний екстремум

У класичній задачі на умовний екстремум допустима множина визначається системою скінченного числа рівнянь

$$f(x) \to \max, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^L : g_i(x) = b_i, \; i = 1, \ldots, m\}. \qquad (8.10.1)$$

Припустимо, що кількість змінних більша за число обмежень $L > m$.

Іноді з рівнянь, які визначають обмеження, вдається виразити які– небудь m змінних x_i через решту змінних. Тоді, підставивши замість відповідних змінних x_i їх вираз через решту $L - m$ змінних в функцію $f(\cdot)$, отримаємо функцію $F(\cdot)$ від $L - m$ змінних.

Задача про знаходження точок максимуму функції $f(\cdot)$ при наявності обмежень зводиться до задачі знаходження безумовного максимуму функції $F(\cdot)$, яка залежить від $L - m$ змінних.

Приклад 8.10.1. Знайти розв'язок задачі

$$f(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \to \max, \quad x \in \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = x_1 + x_2 = 1\}.$$

З рівняння, яке визначає обмеження, знаходимо $x_2 = 1 - x_1$. Підставимо цей вираз для x_2 в функцію $f(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2$, отримаємо, що $F(x_1) = 1 - x_1^2 - (1 - x_1)^2 = 2x_1 - 2x_1^2$. Функція $F(x_1)$ має максимум при $x_1 = 1/2$. Точка $x^* = (1/2, 1/2)$ є розв'язком задачі, зокрема $f^* = f(x^*) = 1/2$. ▲

Такий метод знаходження умовного максимуму (екстремуму) називають *прямим методом* і він рідко буває ефективним, оскільки виникають труднощі розв'язання рівнянь обмежень стосовно якої-небудь групи змінних.

Найефективніший метод розв'язання задачі (8.10.1) – *принцип Лагранжа.* Функція Лагранжа задачі (8.10.1) має вигляд

$$\mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x)), \quad x \in \mathbb{R}^L,$$
$$\lambda_0 \in \mathbb{R}, \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m,$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – *множники Лагранжа.*

Частинні похідні функції Лагранжа за координатами вектора x мають вигляд

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_j} = \lambda_0 \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, L.$$

Тоді градієнт запишемо так:

$$\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x). \qquad (8.10.2)$$

Теорема 8.10.1 дає необхідні умови локальної оптимальності в задачі (8.10.1).

Теорема 8.10.1. *Нехай функції $f(\cdot), g_1(\cdot), \ldots, g_m(\cdot)$ неперервно диференційовні в деякому околі точки $x^* \in \mathbb{R}^L$. Якщо точка x^* – локальний розв'язок задачі (8.10.1), тоді існують множники Лагранжа $\lambda_0^* \in \mathbb{R}$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, які недорівнюють нулю, одночасно і такі, що*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0. \tag{8.10.3}$$

Якщо при цьому градієнти $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ лінійно незалежні (умова регулярності), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Умова (8.10.3) з врахуванням (8.10.2) означає, що градієнти $\nabla f(x^*)$, $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ лінійно залежні. Будь-яка точка $x^* \in \mathbb{R}^L$, яка задовольняє при деяких λ_0^* і λ^*, $(\lambda_0^*, \lambda^*) \neq 0$ умову (8.10.3), а також умови допустимості

$$g_i(x^*) = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{8.10.4}$$

називається *стаціонарною точкою* задачі (8.10.1). Для регулярної задачі завжди можна вважати $\lambda_0^* = 1$. Надалі ми розглядатимемо лише регулярні задачі. Отже, стаціонарні точки регулярної задачі визначаються системою $L + m$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ b_i - g_i(x^*) &= 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{8.10.5}$$

Перші L із отриманих рівнянь показують, що градієнт цільової функції повинен дорівнювати вектору множників Лагранжа помноженому на матрицю Якобі для функцій обмежень

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = \lambda \cdot \mathrm{D}g(x^*).$$

Припустимо, що ранг цієї матриці Якобі $\mathrm{D}g(x^*)$ дорівнює m (умова допустимості обмежень).

Отже, умови (8.10.5) показують, що точка x^* лежить на допустимій множині X і що напрям найшвидшого росту в x^* (вектор градієнта цільової функції) зображає собою лінійну комбінацію нормалей до кривих обмежень, де як зважений коефіцієнт взято множники Лагранжа λ^*. Якщо x^* справджує деякі достатні умови, які зазначимо нижче, то значення змінних x^* дають локальний розв'язок задачі (8.10.1). Це видно, якщо врахувати, що x^* задовольняє обмеження і максимізує функцію Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda^*)$ на $\mathbb{R}^L$, яка в точці (x^*, λ^*) просто збігається зі значенням цільової функції

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = f(x^*).$$

Необхідна умова оптимальності другого порядку полягає в тому, щоб матриця Гесе, яка складена з других похідних функції Лагранжа за координатами вектора x, була від'ємно напіввизначена в точці локального максимуму (x^*, λ^*) за тієї умови, що $\mathrm{D}g(x^*)\mathrm{d}x = 0$.

Позначимо через

$$\mathrm{D}_x^2 \mathcal{L}(x, \lambda) = \mathrm{D}^2 f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{D}^2 g_i(x)$$

матрицю Гесе функції Лагранжа. Отож, правильні такі теореми.

Теорема 8.10.2. *Нехай функції $f(\cdot), g_1(\cdot), \ldots, g_m(\cdot)$ – двічі диференційовні в точці $x^* \in \mathbb{R}^L$ і неперервно диференційовні в* *деякому її околі, крім того градієнти* $\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$ *лінійно незалежні. Якщо* x^* *– локальний розв'язок задачі* (8.10.1), *то матриця* $\mathrm{D}_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ *від'ємно напіввизначена для всіх* λ^*, *які задовольняють* (8.10.3), *на підпросторі* $\{z \in \mathbb{R}^L : \mathrm{D}g(x^*)z = 0\}$.

Якщо при зазначених умовах матриця Гесе від'ємно визначена, то умова оптимальності першого порядку (8.10.3) є достатньою для існування локального максимуму.

Теорема 8.10.3. *Нехай функції* $f(\cdot), g_1(\cdot), \ldots, g_m(\cdot)$ *– двічі диференційовні в точці* $x^* \in \mathbb{R}^L$, *яка задовольняє* (8.10.4). *Нехай при деякому* λ^* *справджується умова* (8.10.3) *і матриця Гесе* $\mathrm{D}_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ *від'ємно визначена на підпросторі* $\{z \in \mathbb{R}^L : \mathrm{D}g(x^*)z = 0\}$ *для* $z \neq 0$. *Тоді* x^* *– локальний розв'язок задачі.*

Умова, що матриця Гесе $\mathrm{D}_x^2\mathcal{L}(x^*, \lambda^*)$ від'ємно визначена на підпросторі $\{z \in \mathbb{R}^L : \mathrm{D}g(x^*)z = 0\}$, $z \neq 0$, може бути зображена у формі $L - m$ умов (див. теорему 8.5.14), які накладаються на знаки деяких головних мінорів матриці розміру

$(L+m)\times(L+m)$

$$\begin{pmatrix} D_x^2\mathcal{L}(x^*,\lambda^*) & (Dg(x^*))^\tau \\ Dg(x^*) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_L} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_L\partial x_1} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_L\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_L^2} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_L} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_L} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_L} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \tag{8.10.6}$$

отриманої з матриці Гессе, тобто матриці, яка обвідна матрицями Якобі для функцій обмежень. Умови локального максимуму в такій формі полягають в тому, що останні $L-m$ головні мінори цієї обвідної матриці Гессе мають знаки, які чергуються і при цьому знак першого з них збігається зі знаком $(-1)^{m+1}$.

Приклад 8.10.2. Знайти локальні розв'язки задачі

$$f(x) = -\frac{1}{2}\,ax_1^2 - \frac{1}{2}\,bx_2^2 \to \max,\quad x\in\{x\in\mathbb{R}^2 : g(x) = x_1^3 + x_2^3 = 1\},$$

де $a>0,\ b>0$ – задані числа. ▲

Запишемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = -\frac{1}{2}\,ax_1^2 - \frac{1}{2}\,bx_2^2 + \lambda(1 - x_1^3 + x_2^3),\quad x\in\mathbb{R}^2,\ \lambda\in\mathbb{R}_+.$$

Тоді система рівнянь для визначення стаціонарних точок має вигляд

$$ax_1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \quad bx_2 + 3\lambda x_2^2 = 0, \quad x_1^3 + x_2^3 = 1.$$

Ця система має такі розв'язки:

$$1)\ x^{*1} = (0, 1), \quad \lambda^{*1} = -\frac{b}{3};$$

$$2)\ x^{*2} = (1, 0), \quad \lambda^{*2} = -\frac{a}{3};$$

$$3)\ x^{*3} = \Big(\,\frac{a}{\sqrt{a^3+b^3}}, \frac{b}{\sqrt{a^3+b^3}}\,\Big), \quad \lambda^{*3} = -\frac{\sqrt{a^3+b^3}}{3}.$$

Далі маємо

$$\mathrm{D}_x^2\mathcal{L}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -a-6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & -b-6\lambda x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}g(x) = (\,3x_1^2,\, 3x_2^2\,).$$

Отож, матриця (8.10.6) має вигляд

$$\begin{pmatrix} -a-6\lambda x_1 & 0 & 3x_1^2 \\ 0 & -b-6\lambda x_2 & 3x_2^2 \\ 3x_1^2 & 3x_2^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для зазначених розв'язків відповідні головні мінори набувають вигляду

$$\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & b & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 9a > 0, \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & -b & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9b > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 3a^2/(a^2+b^2)^{2/3} \\ 0 & b & 3b^2/(a^2+b^2)^{2/3} \\ 3a^2/(a^2+b^2)^{2/3} & 3b^2/(a^2+b^2)^{2/3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -9ab/\sqrt{a^2+b^2} < 0.$$

Отже, точки x^{*1} і x^{*2} - строгі локальні розв'язки задачі, а для точки x^{*3} не справджується необхідна умова оптимальності другого порядку.

8.11 Задача математичного програмування

Важливий клас задач умовної оптимізації становлять задачі математичного програмування. Так прийнято називати задачу (8.9.1), якщо допустима множина X має вигляд

$$X = \{x \in X_0 : \, h_i(x) \leqslant c_i, \; i = 1, \dots k; \; g_j(x) = b_j, \; j = 1, \dots m\},$$

тобто визначається системою скінченного числа нерівностей і рівнянь, які розглядаються загалом на деякій множині $X_0 \subset \mathbb{R}^L$. Очевидно, класична задача умовної оптимізації є частковим випадком задачі математичного програмування, коли $X_0 = \mathbb{R}^L$ і $k = 0$.

Зазвичай як X_0 беруть множину "простої" структури, наприклад, координатний паралелепіпед

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^L : \, a_i \leqslant x_i \leqslant d_i, \quad i = 1, \dots, L\},$$

зокрема тут не виключається, що $a_i = -\infty$ або $d_i = +\infty$ для тих або інших i. Особливо часто використовують $X_0 = \mathbb{R}^L_+$ (коли $a_i = 0$, $d_i = +\infty$ для всіх i) або $X_0 = \mathbb{R}^L$. Сформулюємо необхідні умови оптимальності для задачі математичного програмування

$$f(x) \to \max, \quad x \in X, \tag{8.11.1}$$

де

$$X = \{x \in X_0 : \, h_i(x) \leqslant c_i, \; i = 1, \dots k; \; g_j(x) = b_j, \; j = 1, \dots m\}.$$

Припустимо, що $L \geqslant k+m$. Нагадаємо, що *умовою регулярності* називається будь-яка додаткова умова про задачу (8.11.1), при якій в теоремі, яка визначає необхідні умови оптимальності, перед цільовою функцією у виразі функції Лагранжа множник
$\lambda_0 = 1$. Загалом *умовою регулярності* в задачі (8.11.1) при $x^* \in \mathrm{int} X_0$ є лінійна незалежність градієнтів $\{\nabla g_j(x^*) : j = 1, \ldots, m\} \cup \{\nabla h_i(x^*) : h_i(x^*) = c_i\}$. На жаль, умови регулярності подібного типу важко перевіряються, оскільки вони формулюються в термінах самої точки максимуму x^*, яку потрібно знайти. Зручніші умови регулярності отримують у рамках задачі з опуклими обмеженнями-нерівностями і лінійними обмеженнями–рівностями.

Теорема 8.11.1. *Нехай в задачі (8.11.1) множина X_0 опукла, функції $f(\cdot)$, $h_1(\cdot)$,…,$h_k(\cdot)$ диференційовні в точці x^*, функції $h_1(\cdot), \ldots, h_k(\cdot)$ опуклі на X_0, функції $g_1(\cdot), \ldots, g_m(\cdot)$ лінійні. Припустимо, що виконується хоч одна з таких умов:*

(i) *обмеження–рівності немає ($m = 0$)*[1] *й існує точка $\bar{x} \in X_0$ така, що $h_j(\bar{x}) < c_j$ для всіх i;*

(ii) *множина X_0 – поліедр*[2]*, функції $h_1(\cdot), \ldots, h_k(\cdot)$ лінійні.*

Тоді задача (8.11.1) регулярна.

---

[1] Йдеться про задачу

$$f(x) \to \max, \quad x \in X_0, \quad h_j(x) \leqslant c_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

[2] Див. (8.4.1)

Із задачею (8.11.1) пов'яжемо множину

$$\Lambda = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{m+k} : \mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, k\}.$$

Запишемо функцію Лагранжа задачі (8.11.1)

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j (c_j - h_j(x)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x)),$$
$$x \in X_0, \ (\lambda, \mu) \in \Lambda.$$

Теорема 8.11.2 (Умови Куна-Таккера). *Нехай в задачі (8.11.1) множина X_0 опукла, функції $f(\cdot)$, $h_1(\cdot), \dots, h_k(\cdot)$ диференційовні в точці $x^* \in X$, функції $g_1(\cdot), \dots, g_m(\cdot)$ неперервно диференційовні в деякому околі x^*. Припустимо, що справджується одна з умов регулярності. Якщо x^* – локальний розв'язок задачі (8.11.1), то існують множники Лагранжа $(\lambda^*, \mu^*) \in \Lambda$ такі, що*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \cdot (x - x^*) \leqslant 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in X_0, \tag{8.11.2}$$

$$\mu_i^*(b_i - h_i(x^*)) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \tag{8.11.3}$$

Конкретизуємо умову (8.11.2) для часткових випадків.

Лема 8.11.1. **1**. *Якщо $x^* \in \operatorname{int} X_0$, то (8.11.2) еквівалентна умові*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad \text{тобто} \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_j} = 0, \ \ j = 1, \dots, L. \tag{8.11.4}$$

2. *Якщо X_0 має вигляд*

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^L : a_i \leqslant x_i \leqslant d_i, \quad i = 1, \dots, L\},$$

де $-\infty \leqslant a_i < d_i \leqslant +\infty, \quad i = 1, \ldots, L,$ *то* (8.11.2) *еквівалентна умові*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_j} \begin{cases} = 0, & \textit{якщо} \quad a_j < x_j^* < d_j, \\ \leqslant 0, & \textit{якщо} \quad x_j^* = a_j \neq -\infty, \\ \geqslant 0, & \textit{якщо} \quad x_j^* = d_j \neq +\infty. \end{cases}$$

3. *Якщо* X_0 *має вигляд*

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^L : x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N\},$$

де $0 \leqslant N \leqslant L,$ *то* (8.11.2) *еквівалентна сукупності умов*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_j} \leqslant 0, \qquad x_j^* \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, N,$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_j} = 0 \qquad j = N+1, \ldots, L.$$

Зокрема, якщо $X_0 = \mathbb{R}^L_+$, *то* (8.11.2) *еквівалентна сукупності умов*

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leqslant 0, \qquad x^* \cdot \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0. \qquad (8.11.5)$$

Повернемося до класичної задачі умовної оптимізації. Розв'язок системи рівнянь (8.10.5), яка зображає умови оптимальності першого порядку, містить, крім вектора локального оптимуму x^*, ще і вектор множників Лагранжа λ^*. Якщо матриця Якобі для функцій обмежень невироджена, то існує єдиний вектор λ^*, який відповідає локальному розв'язку x^*. Знання значень множників Лагранжа важливі, з їх допомогою можна отримати цінну інформацію про задачу. Множники Лагранжа, які відповідають розв'язку задачі, вимірюють чутливість оптимального значення цільової функції $f^*(b) = f(x^*)$, де $x^* \in x(b) = \{x^* \in X : f(x^*) = \max\limits_X f(x)\}$, до зміни констант обмеження

$$\lambda^* = \nabla f^*(b), \quad \text{тобто} \quad \lambda_i^* = \frac{\partial f^*(b)}{\partial b_i}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{8.11.6}$$

Для доведення співвідношення (8.11.6) розглянемо умови оптимальності першого порядку (8.10.5) як систему $L+m$ рівнянь з $L+m$ невідомими (x,λ) і m параметрами $b=(b_1,\ldots,b_m)^\tau$, якщо вважати b змінними величинами

$$\begin{aligned} \psi^1(x,\lambda,b) &= \nabla f(x) - \lambda \cdot \mathrm{D}g(x) = 0, \\ \psi^2(x,\lambda,b) &= b - g(x) = 0. \end{aligned} \tag{8.11.7}$$

Матриця Якобі цієї системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} \mathrm{D}_x^2 \mathcal{L}(x,\lambda) & -(\mathrm{D}g(x))^\tau \\ -\mathrm{D}g(x) & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці Якобі дорівнює m, якщо справджуються достатні умови, які накладаються на обвідну матрицю Гессе (8.10.6). За теоремою про неявну функцію з системи (8.11.7) можна знайти змінні x і множники Лагранжа λ як функції від констант обмеження b

$$x^* = x(b), \qquad \lambda^* = \lambda(b).$$

Розглянемо тепер функцію Лагранжа як функцію від констант обмеження b

$$\mathcal{L}(x(b),\lambda(b)) = f(x(b)) + \lambda(b) \cdot (b - g(x(b)).$$

Продиференціювавши цю функцію за змінною b, отримаємо

$$\begin{aligned} \nabla_b \mathcal{L}(x(b),\lambda(b)) &= \nabla f(x(b)) \cdot \mathrm{D}x(b) - \lambda(b) \cdot \mathrm{D}g(x(b))\, \mathrm{D}x(b) \\ &+ (b - g(x(b))^\tau\, (\nabla\lambda(b))^\tau + \lambda(b) \\ &= (\nabla f(x(b)) - \lambda(b) \cdot \mathrm{D}g(x(b)))\, \mathrm{D}x(b) \\ &+ (b - g(x(b))^\tau\, (\nabla\lambda(b))^\tau + \lambda(b). \end{aligned}$$

Перші два доданки в точці (x^*, λ^*) дорівнюють нулю з-за умов оптимальності (8.10.5). Отож,

$$\nabla_b \mathcal{L}(x(b), \lambda(b)) = \lambda(b).$$

Оскільки значення функції Лагранжа в точці (x^*, λ^*) збігається з оптимальним значенням цільової функції

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) = f(x^*) = f^*(b),$$

то

$$\nabla_b \mathcal{L}(x(b), \lambda(b)) = \nabla f^*(b) = \lambda(b).$$

Крім того, що принцип Лагранжа дає розв'язок класичної задачі максимізації, він дає змогу також проаналізувати наскільки оптимальне значення цільової функції чутливе до зміни констант обмеження. Наприклад, якщо деякий множник Лагранжа дорівнює нулю, то малі зміни відповідної константи обмеження не мають ніякого впливу на оптимальне значення цільової функції. Особливо важлива інтерпретація множників Лагранжа в задачах раціональної економічної діяльності. В економічних задачах теорії споживання та теорії фірми, в першій – максимізується функція корисності при бюджетному обмеженні, де константою обмеження є рівень доходу споживача, в другій – мінімізуються витрати виробництва для заданого рівня продукції, константою обмеження є рівень випуску, то множник Лагранжа в задачі споживання є граничною корисністю грошей, а в задачі для фірми – граничні витрати.

Розглянемо задачу (8.11.1). Як і для класичної задачі множники Лагранжа можна інтерпретувати як характеристики зміни оптимального значення цільової функції при зміні констант обмеження

$$\mu^* = \nabla_c f^*(c, b), \quad \lambda^* = \nabla_b f^*(c, b).$$

Для доведення треба показати, що x^*, μ^* і λ^* можна зобразити у вигляді функцій від констант обмеження $c = (c_1, \dots, c_k)^\tau$ і b, а потім продиференціювати функцію Лагранжа за цими константами. В задачах економіки найчастіше множина $X_0 = \mathbb{R}^L_+$. Припустимо, що співвідношення і змінні пронумеровані так, що в точці оптимуму перші k_1 із них виконуються як рівності, а решту $k - k_1$ як нерівності ($0 \leqslant k_1 \leqslant k$) і перші L_1 змінних додатні, а решта $L - L_1$ дорівнюють нулю ($0 \leqslant L_1 \leqslant L$). Вектори запишемо так:

$$h(x) = \begin{pmatrix} h^1(x) \\ h^2(x) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mu = (\mu^1, \mu^2),$$

де $h^1(\cdot)$, c^1 і μ^1 складаються з перших k^1 елементів векторів $h(\cdot)$, c і μ відповідно, x^1 – із перших L_1 координат вектора x. Тоді умови оптимальності Куна-Таккера можна записати так:

$$\begin{aligned} \nabla_{x^1}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) =& \nabla_{x^1} f(x^*) - \mu^1 \cdot \nabla_{x^1} h^1(x^*) \\ & - \lambda^* \cdot \nabla_{x^1} g(x^*) = 0, \\ & x^{*2} = 0, \\ & h^1(x^*) - c^1 = 0, \\ & \mu^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.11.8}$$

Очевидно, що

$$\mu_i^* = \frac{\partial f^*(c, b)}{\partial c_i} = 0, \quad i = k_1 + 1, \dots, k.$$

Останні $k - k_1$ обмежень справджуються як нерівності, тому малі зміни відповідних констант обмеження не можуть змінити оптимального значення цільової функції. Щодо перших k_1 множників Лагранжа μ_i^* і m множників λ_j^*, то задача приведена до форми класичної задачі умовного екстремуму

$$f(x^1, 0) \to \max, \quad x^1 \in \operatorname{int} \mathbb{R}^{L_1}$$

$$h^1(x^1, 0) = c^1, \qquad g(x^1, 0) = b,$$

то можна показати, що x^{*1}, μ^{*1} і λ^* можна зобразити як функції від c^1 і b, а потім продиференціювати функцію Лагранжа за c^1 і b. В результаті матимемо, що

$$\mu_i^* = \frac{\partial f^*(c, b)}{\partial c_i} \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, k_1, \quad \lambda_j^* = \frac{\partial f^*(c, b)}{\partial b_j}, \ j = 1, \ldots, m.$$

Повернемося до властивостей ввігнутих функцій. Ввігнуті функції на опуклій множині не можуть мати локальних максимумів. Правильна така теорема.

Теорема 8.11.3. *Нехай функція $f(\cdot)$ ввігнута на опуклій множині X, тоді всяка точка локального максимуму $f(\cdot)$ є одночасно точкою її глобального максимуму на X, зокрема множина*

$$X^* = \{x^* \in X : f^* = f(x^*) = \max_X f(x)\}$$

опукла. Якщо $f(\cdot)$ строго ввігнута на X, то X^* містить не більше однієї точки.

З характеристичної властивості ввігнутих функцій отримуємо теорему, яка називається критерієм оптимальності для ввігнутих функцій. Вона дає необхідні і достатні умови максимуму гладких ввігнутих функцій на опуклій множині.

Теорема 8.11.4. *Нехай X – опукла множина, функція $f \in C^1(X)$ і нехай X^* – множина точок максимуму $f(\cdot)$ на X.*

Тоді якщо $x^* \in X^*$, *то*

$$\nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) \leqslant 0 \quad \text{для всіх} \quad x \in X, \tag{8.11.9}$$

а для випадку $x^* \in \operatorname{int} X$ *нерівність* (8.11.9) *перетворюється в рівність* $\nabla f(x^*) = 0$. *Якщо, крім того, функція* $f(\cdot)$ *ввігнута на* X, *то умова* (8.11.9) *є достатньою для того, щоб* $x^* \in X^*$.

Теорема 8.11.5. *Нехай в задачі* (8.11.1) *множина* X_0 *опукла, функції* $f(\cdot)$, $h_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, k$, *диференційовні в точці* $x^* \in X$, *обмеження–рівності немає* ($m = 0$). *Припустимо, що функції* $h_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, k$, *квазіопуклі, а функція* $f(\cdot)$ *квазіввігнута і* $\nabla f(x^*) \neq 0$. *Якщо при деякому* μ^* *задовольняються умови* (8.11.2) (1.7.17), *то* x^* *– глобальний розв'язок задачі* (8.11.1). *Якщо функція* $f(\cdot)$ *строго квазіввігнута, то розв'язок задачі* (8.11.1) *єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існує точка $x' \in X$ така, що $f(x') > f(x^*)$. Позначимо через $z = x' - x^*$. Тоді згідно з теоремою 8.5.7 $\nabla f(x^*) \cdot z > 0$. Якщо $\mu_j^* > 0$, то з умов оптимальності Куна-Таккера випливає, що $h_j(x^*) = c_j$. Оскільки функція $h_j(\cdot)$ квазіопукла і $h(x_j) \leqslant c_j = h_j(x^*)$, то $\nabla h_j(x^*) \cdot z \leqslant 0$. Отже, маємо, що $\nabla f(x^*) \cdot z > 0$ і $-\sum\limits_j \mu_j^* \nabla h_j(x^*) \cdot z \geqslant 0$. Що суперечить умові Куна-Таккера

$$(\nabla f(x^*) - \sum_j \mu_j^* \nabla h_j(x^*)) \cdot z \leqslant 0.$$

Нехай функція $f(\cdot)$ строго квазіввігнута. Якщо x' і $x^* \neq x'$ два глобальних розв'язки задачі (8.11.1), тоді точка $x^\alpha = \alpha x' + (1-\alpha)x^* \in X$ для всіх $\alpha \in (0,1)$ і $f(x^\alpha) > \min\{f(x'),\ f(x^*)\} = f(x^*)$. Що суперечить тому, що x^* розв'язок задачі (8.11.1).

$\square$

Список літератури

[1] Аллен Р. Математическая экономия. - М.: ИЛ, 1963.

[2] Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. - М.: Изд.МГУ, 1980.

[3] Баумоль У. Экономическая теория и исследование операций. - М.: Наука, 1965.

[4] Замков О., Черемных Ю., Толстопятенко А. Математические методы в экономике. - М.: Изд.МГУ, 1999.

[5] Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике. - М.: Наука, 1979.

[6] Интриллигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогрес, 1975.

[7] Карлин С. Математические методи в теории игр, програмировании и экономике. - М.: Прогрес, 1964.

[8] Колемаев В.А. Математическая экономика. - М.: ЮНИТИ, 1998.

[9] Ланкастер К. Математическая экономика. - М.: Сов. Радио, 1972.

[10] Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. - М.: Наука, 1985.

[11] Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. - М.: Мир, 1972.

[12] Обен Ж.-П. Нелинейний анализ и его экономичекие приложения. - М.: Мир, 1988.

[13] Піндайк Р., Рубінфелд Д. Мікроекономіка. - К.: Основи, 1996.

[14] Пономаренко І.О., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. - К.: Інформатика, 1995.

[15] Сухарев А., Тимохов А., Федоров В. Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986.

[16] Экланд И. Элементы математической экономики. - М.: Мир, 1983.

[17] Arrow K., Intriligator M., eds. Handbook of Mathematical Economics. - Amsterdam, North-Holland, vol.1, 1981; vol.2, 1982; vol.3, 1983.

[18] Hildenbrand W., Sonnenschein H., eds. Handbook of Mathematical Economics. - Amsterdam, North-Holland, vol.4, 1991.

[19] Kreps D. A Course in Microeconomic Theory. - Princeton University Press, 1990.

[20] Mas-Colell A. The theory of general economic equlibrium: A differentiable approach. - New York: Cambridge University Press, 1989.

[21] Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. - New York: Oxford University Press, 1995.

[22] Simon C., Blume L. Mathematics for Economists. - New York: Norton, 1993.

[23] Varian H. Microeconomic Analysis. - New York, London, W.W.Norton & Company, 1992.

[24] Varian H. Intermediate microeconomics. - New York, London, W.W.Norton & Company, 1996.