Основи математичної економіки

Основи математичної економіки

Теорія фірми

В.А.Козицький
С.П.Лавренюк
М.О.Оліскевич

Навчальний посібник

Львівський національний університет
імені Івана Франка
2005

УДК 517; 519.6

Козицький В.А., Лавренюк С.П., Оліскевич М.О. Основи математичної економіки. Теорія фірми: Навч. посібник.– Львів: Видавництво «Піраміда». 2005.– 323с.

У навчальному посібнику викладено основні ідеї та поняття теорії фірми. На підставі поняття виробнича функція і технологічна множина побудовано математичні моделі виробництва, проведено аналіз зміни рівня випуску продукції залежно від зміни цін на продукцію та фактори виробництва. Крім того, розглянуто структуру ринків і поведінка фірми на цих ринках.

Для студентів, аспірантів і наукових працівників.

Рецензенти:

Зарічний М.М., д-р. фіз.-мат. наук, проф. (Львівський національний університет імені Івана Франка);

Башнянин Г.І., д-р. екон. наук, проф.(Львівська комерційна академія);

Островерх П.І., канд. екон. наук, проф. (Львівський національний університет імені Івана Франка).

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка. Протокол №28/12 від 29.12.2004

Навчальне видання

Валерій Андрійович Козицький
Сергій Павлович Лавренюк
Маріанна Олександрівна Оліскевич

Основи математичної економіки.
Теорія фірми

Навчальний посібник

Редактор Н.Й.Плиса

Підп. до друку Формат 60Н84/16.
Папір друк. Друк офс. Умовн. друк. арк. Тираж

Львівський національний університет імені Івана Франка
79000 Львів, вул.Університетська, 1

Зміст

Вступ

Наступним основним поняттям мікроекономічної теорії є фірма, яка визначається як деяка організація, що займається перетворенням економічних факторів таких, наприклад, як праця і капітал, для виготовлення продукції та послуг, які вона продає споживачам або іншим фірмам. Теорія фірми вивчає насамперед співвідношення між кількістю вхідних ресурсів і обсягом випуску. Поведінка кожної фірми визначається задачею визначення обсягу продукції та розрахунку необхідних для її випуску чинників виробництва з врахуванням технології та цін на фактори виробництва.

Аналогічно, як в теорії споживання відіграє роль функція корисності, так в класичному підході вивчення виробництва ґрунтується на понятті виробничої функції, котра описує чисто технічну залежність між вхідними факторами виробництва і кількістю виробленої продукції. Сучасний підхід в теорії виробництва ґрунтується на формалізації поняття технологічної множини. В структурі технологічної множини відображаються важливі особливості виробничої технології. Отож, вивчення виробничої технології з економічного погляду зводиться до вивчення структурних характеристик відповідної технологічної множини.

Список основних позначень

Математика

$\square$	кінець доведення теореми
$\blacktriangle$	кінець прикладу
$a \Longrightarrow b$	імплікація з посиланням a та висновком b
$a \Longleftrightarrow b$	еквівалентність висловлень a та b
$a \in X$	a є елемент множини X
$A \cup B$	об'єднання множин A і B
$A \cap B$	перетин множин A і B
$A \subset B$	множина A міститься в множині B
$\emptyset$	порожня множина
$\{a \in X : *\}$	підмножина в X елементи якої задовольняють умову $*$
$f : A \to B$	відображення f множини A в множину B
$a \to f(a)$	відображення f яке точці a ставить у відповідність множину $f(a)$
$f(X)$	образ множини X при відображені f
$f \circ g$	композиція функцій f і g
∂X	межа множини X
$\operatorname{int} X$	внутрішність множини X
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел
$\max, \min$	максимум, мінімум
$\sum\limits_{i \in I}, \sum\limits_{i=1}^{L}$	символ сумування за індексом $i \in I$ або від 1 до L
$\mathbb{R}^L$	L — вимірний Евклідовий простір
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_L \end{pmatrix}$	вектор із $\mathbb{R}^L$
y_i	і-та координата вектора y

$x \geqslant y$	$x_i \geqslant y_i$ для всіх $i = 1, \ldots, L$
$x > y$	$x \geqslant y$ і $x \neq y$
$x \gg y$	$x_i > y_i$ для всіх $i = 1, \ldots, L$
$\mathbb{R}^L_+$	невід'ємний ортант в $\mathbb{R}^L$; тобто $\{x \in \mathbb{R}^L : x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}^L_{++}$	строго додатний ортант в $\mathbb{R}^L$; тобто $\{x \in \mathbb{R}^L : x \gg 0\}$
x^τ	вектор транспонований до x
$x \cdot y$	скалярний добуток векторів x і y
Av	добуток матриць A і v
$v \cdot Av$	квадратична форма породжена матрицею A
$\|x\|$	норма вектора x
$\nabla f(x)$	градієнт функції $f : X \to \mathbb{R}$ в точці x
C^r, $r \geqslant 0$	простір r раз неперервно диференційовних функцій
$\mathrm{D}f(x)$	похідна функції $f : X \to \mathbb{R}^L$ в точці x
$\mathrm{D}_y f(y, z)$ $(\mathrm{D}_z f(y, z))$	частинна похідна за зміною y (за z) відображення $y \to f(y, z)$ $(z \to f(y, z))$
$\mathrm{D}^2 f$	друга похідна функції f

Економіка

l	номер продукту
j	номер фірми
$\mathbb{R}^L$	простір продуктів
$\mathbb{R}^L_+$	простір факторів виробництва
p	вектор цін
Y	технологічна множина
w	вектор цін на фактори виробництва
$F(\cdot)$	функція перетворення
$f(\cdot)$	виробнича функція
$V(q)$	множина вхідних потреб виробництва
$Q(q)$	ізокванта
$\pi(p)$	функція прибутку
$y(p)$	пропозиція фірми
$\mathrm{MP}(z)$	вектор граничних продуктів
MRT_{lk}	гранична норма перетворення продукту l на продукт k
MRTS_{lk}	гранична норма технічного заміщення чинника l на чинник k

$c(w, q)$	функція витрат
$z(w, q)$	попит на фактори виробництва
$z^*(w, p)$	функція попиту на фактори виробництва
$q^*(w, p)$	функція пропозиції випуску
$C(q)$	функція витрат
$AC(q)(MC(q))$	функція середніх (граничних) витрат
$R(q)$	дохід
$AR(q)(MR(q))$	середній (граничний) дохід

Розділ 1

Технологічні множини

Важливих елементом економіки є виробництво. Під виробництвом розумітимемо перетворення деякої кількості продуктів — виробничих факторів (які називають також вхідними факторами виробництва) в деяку кількість вироблених продуктів — випусків (вихідної продукції) відповідно до заданої технології. З економічного погляду цікавим є вивчення кількісних співвідношень між факторами виробництва і випусками, які зумовлені цією технологією. Випуск продукції завжди забезпечується за рахунок виробничого споживання деяких вихідних продуктів. Для економістів найважливішим є взаємозв'язок між кількостями продуктів, які випускаються, і кількостями продуктів, які витрачаються у вигляді ресурсів.

1.1 Технологічні множини. Приклади

Нехай в економіці розглядається L продуктів.

У математичній економіці кожний конкретний спосіб функціонування виробництва прийнято зображати або парою (z, q), яка складається з вектора факторів виробництва z і вектора випуску q, і називається *виробничим* (*технологічним*) *проце-*

сом, або *виробничим вектором* $y = (y_1, ..., y_L) \in \mathbb{R}^L$, в якого частина координат додатна, що відповідають випуску, частина координат від'ємна, що відповідають вхідним факторам виробництва, а деякі координати можуть дорівнювати нулю — решта продуктам.

Приклад 1.1.1. Нехай $L = 5$. Для виробничого вектора $y = (-6, 3, -4, 7, 0)$ означає, що виробляється 3 і 7 одиниць, відповідно, продукту 2 і 4 і використовують 6 та 4 одиниці, відповідно, продукту 1 та 3. Продукт 5 участі у виробництві не бере. ▲

При заданій виробничій технології може реалізуватися багато різних виробничих процесів. Тому з економічного погляду виробнича технологія цілком описується перерахуванням всіх виробничих процесів, які вона дозволяє. У зв'язку з цим вводять поняття *технологічної* (*виробничої*) *множини*, яку визначають як множину всіх виробничих процесів, які можна реалізувати при заданій технології. Вивчення виробничої технології зводиться до вивчення структурних властивостей відповідної технологічної множини.

Якщо задано виробничий процес (z, q), то може бути так, що деякі продукти беруть участь у вигляді факторів виробництва та у вигляді випуску. Найцікавішим є випадок, коли кожний продукт бере участь і у вигляді факторів виробництва, і у вигляді випуску. В цьому випадку вектори z і q мають однакову розмірність, їхні відповідні компонети відповідають тим самим продуктам. Нехай $z = (z_1, ..., z_L)$, $q = (q_1, ..., q_L)$, тоді $q_j - z_j$ — чистий випуск продукту j в цьому процесі. Тоді $q - z$ — вектор чистих випусків. У випадку, коли технологічна множина описується виробничими процесами вигляду (z, q), то кажуть, що технологічна множина описується в термінах запасів; якщо в термінах векторів чистого випуску — термінах потоків.

Приклад 1.1.2. У 30–х роках В.Леонтьєв вивчав структуру національної економіки Росії в дезагрегованому вигляді. Виробничі процеси в економіці він розбивав до рівня L галузей виробництва і вивчав перетік товарів та послуг між цими галузями.

Основні припущення для аналізу такі:

1) в економічній системі виробляють, продають, інвестують і споживають L видів товарів і послуг;

2) кожна галузь виробляє тільки один вид продукту і різні галузі виробляють різні види продуктів, тобто L галузей і L продуктів перебувають у взаємно однозначній відповідності;

3) якщо для виробництва однієї одиниці продукту j -ї галузі потрібно витратити $a_{ij} \geqslant 0$ одиниць i -го продукту, то для випуску x_j одиниць j -го продукту треба витратити $a_{ij}x_j$ одиниць продукту виду i.

Нехай x_i – валовий випуск (інтенсивність роботи) галузі з номером i, тоді вектор інтенсивностей $x = (x_1, \ldots, x_L)$ називають *вектором валового випуску.*

Матриця $A = (a_{ij})$ називається *технологічною матрицею* (матрицею прямих витрат) і містить інформацію про структуру міжгалузевих зв'язків, про існуючу в цій економіко-виробничій системі технологію виробництва.

Частку валового випуску, витрачену на виробничі потреби економіки, описує вектор виробничих витрат Ax, який дорівнює $(\sum\limits_j a_{1j}x_j, \ldots, \sum\limits_j a_{Lj}x_j)$. Тоді $x - Ax$ — вектор чистих випусків. Цей вектор чистих випусків прирівнюємо до вектора кінцевого попиту c і отримуємо систему

$$x - A\,x = c, \qquad x \geqslant 0. \tag{1.1.1}$$

Систему (1.1.1), де параметри A, x, c мають вищевикладену економічну інтерпретацію, називають моделлю Леонтьєва.

Нехай a^j є j–ий стовпець матриці A. Тоді технологічна множина в термінах запасів для галузі з номером j має вигляд

$$Y_j = \left\{ (\, x_j\, a^j, x_j\,) : \; x_j \geqslant 0 \right\},$$

а технологічна множина національної економіки (в цілому) в термінах потоків набуває вигляду

$$Y = \{\, x - Ax : \; x \geqslant 0 \,\}$$

і зображає багатогранний опуклий конус.

Нехай $x_i(t)$ — валовий випуск i-ї галузі в період часу t, $c_i(t)$ — кінцевий випуск i-ї галузі в період часу t. Тоді динамічна модель Леонтьєва має вигляд

$$x(t) = Ax(t+1) + c(t+1).$$

Повернемося до статичної моделі Леонтьєва (1.1.1).

Означення 1.1.1. Нехай $A = (a_{ij}) \geqslant 0$ - квадратна матриця розміру $L \times L$. Матриця A називається розкладною, якщо існує власна підмножина $\mathcal{I} \subset \{1, \ldots, L\} = \mathcal{N}$, $\mathcal{I} \neq \emptyset$, $\mathcal{I} \neq \mathcal{N}$ така, що $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq\in \mathcal{I}$ та $j \in \mathcal{I}$.

Якщо технологічна матриця розкладна, то існує підсистема галузей $\mathcal{I}$, яка незалежить від решти галузей, тобто не використовує їх продукцію.

Квадратна матриця $A \geqslant 0$ називається *нерозкладною*, якщо вона не є розкладною або нульовою матрицею першого порядку.

Якщо матриця $A \geqslant 0$ нерозкладна, то число Фробеніуса $\lambda_A > 0$ і будь-який вектор Фробеніуса $x_A \gg 0$, де $A\,x_A = \lambda_A x_A$.

Якщо технологічна матриця A така, що забезпечується кожний невід'ємний вектор кінцевого попиту c, то модель Леонтьєва *продуктивна.*

Виявляється, що продуктивність моделі Леонтьєва повністю визначається величиною числа Фробеніуса λ_A технологічної матриці A.

Теорема 1.1.1. *Нехай матриця $A \geqslant 0$ нерозкладна. Модель Леонтьєва продуктивна тоді і лише тоді, коли $\lambda_A < 1$. Зокрема*

$$x = (I - A)^{-1}\, c = c + Ac + A(Ac) + \cdots . \qquad (1.1.2)$$

Ряд (1.1.2) називається *повними витратами* на виробництво кінцевого попиту c, а матрицю $(I - A)^{-1}$ називають *матрицею повних витрат.*

▲

Приклад 1.1.3. У середині 30–х років фон Нейман зробив аналіз накопичення капіталу в багатосекторіальній моделі економіки. Побудована ним модель мала не лише вплив на теорію економічного росту і накопичення капіталу, але і в значній мірі стимулювала сучасний розвиток математичної економіки. В моделі фон Неймана виробничий процес означає перетворення обсягів запасів деяких продуктів, які були наявні на початку періоду, в деякі інші (а можливо і ті ж самі) обсяги запасів до кінця цього періоду. Різниця між цими обсягами відповідає інвестиціям (накопиченню). Розглянемо основні припущення, які лежать в основі моделі.

1. Наявним є m видів продуктів, які позначимо індесами $i = 1, \dots, m$.

2. У виробничому секторі економіки є n базисних лінійних виробничих процесів зі сталими технологічними коефіцієнтами; ці процеси позначимо індексами $j = 1, \dots, n$. При цьому j–ий базисний процес при функціонуванні з одиничною інтенсивністю перетворює набір (запас) $a^j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$, який містить a_{ij} одиниць i –го продукту, в інший набір $b^j = (b_{1j}, \dots, b_{mj})$ (а може і в цей самий). Для кожного процесу j може бути відмінним від нуля більше ніж одна з величин b_{ij}, так що можливе спільне виробництво декілька продуктів в одному процесі.

Введемо до розгляду матриці $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$. Вектори a^j та b^j визначають базисний виробничий процес (a^j, b^j) і є стовбчиками матриць A та B відповідно. Матрицю A називають матрицею витрат, а B – матрицею випуску.

Технологія моделі в термінах запасів має вигляд

$$Y = \{(Ax, Bx) : x \geqslant 0\}, \tag{1.1.3}$$

де $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ — вектор інтенсивностей.

Нехай різні технологічні процеси використовуються на рівнях, заданих вектором інтенсивностей x. Тоді чистий випуск системи визначається вектором $c = (B - A)x$, де $B - A$ — технологічна матриця. Аналіз виробничих процесів зводиться до вивчення властивостей технологічної множини $Y = \{(B - A)x : x \in \mathbb{R}^n_+\}$ векторів випуску і множини векторів інтенсивностей виробничих процесів x при заданих припущеннях про технологічні матриці та інших обмеженнях, які можуть зустрітися в типових економічних системах.

Технологічна множина випуску Y є відображенням при допомозі лінійного перетворення $y = (B - A)x$ всього додатного ортанта. З лінійної природи перетворення випливає дві властивості множини Y:

а) Y — *замкнута опукла множина.* Додатний ортант $\mathbb{R}^n_+$ замкнута опукла множина. Ця властивість зберігається при лінійному перетворені.

б) Y — *випуклий багатогранний конус.* ▲

Проілюструємо поняття технологічної множини на деяких прикладах.

Приклад 1.1.4. 1. Нехай є два продукти. Виробнича множина, яка зображена на рис. 1.1.1, показує, що фірма виробляє продукт 2 із продукту 1. Зауважимо, що точки множини Y, які мають задану координату $y_1 < 0$, утворюють відрізок прямої від точки $(y_1, 0)$ до точки $(y_1, y_2^{\max})$. Це означає, що з однієї і тієї ж кількості $z_1 = -y_1$ продукту 1 можна виробити різну кількість продукту 2 від нуля до $y_2^{\max}$. Очевидно, що спосіб виробництва, який зображений точкою $(y_1, y_2^{\max})$, використовує максимум технічних можливостей, а спосіб виробництва, зображений точкою $(y_1, 0)$, відповідає чистому знищенню продукту 1.

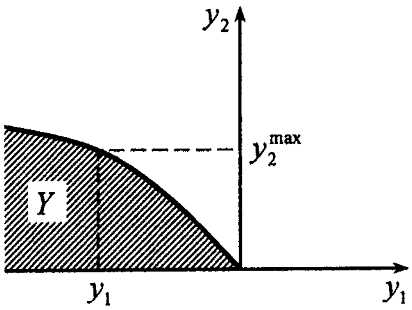


Рис. 1.1.1. Виробнича множина Y для випадку двох продуктів

2. Для виробничої множини, яка зображена на рис. 1.1.2,a, деякі допустимі виробничі процеси можуть бути зображені точками, в яких обидві координати від'ємні. Це означає, що ці два продукти можуть відігравати роль факторів виробництва, не приводячи до відповідного випуску. Отже, йдеться про одночасне знищення обох продуктів. У такому випадку говорять, що фірма може вільно витрачати продукти 1 і 2.

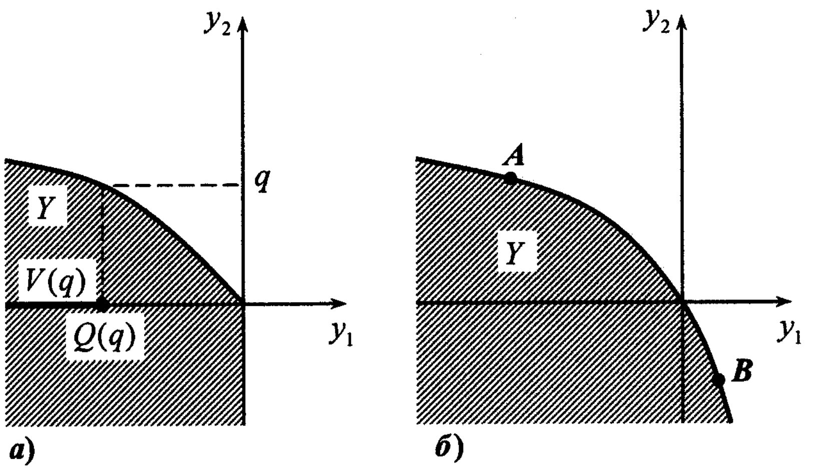


Рис. 1.1.2. Виробнича множина Y для випадку двох продуктів

Вона може знищувати деякі кількості цих продуктів у замкнутому циклі. Якщо виробнича множина має вигляд 1.1.2,*б*, то це означає, що функціонування виробництва оборотне: фірма може виробити продукт 2 із продукту 1 (точка A) або продукт 1 із продукту 2 (точка B). ▲

Приклад 1.1.5. Розглянемо приклад трьох продуктів. Нехай завод виробляє продукт 3, використовуючи для цього продукти 1 і 2 у фіксованій пропорції k. Тоді виробничий процес описується рівнянням[1]

$$y_3 = -my_1 = -mky_2.$$

[1] Припускаємо, що параметр m заданий.

Зауважимо, що вхідні фактори y_1 і y_2 — від'ємні, а випуск y_3 — додатний. Якщо, $-y_1 > -ky_2$, то є надлишок продукту 1 в кількості $-y_1 + ky_2$. Цей надлишок не використовують у процесі виробництва і найкращий вихід для заводу — позбутися його. Те саме відбувається, якщо $-ky_2 > -y_1$, тоді є надлишок продукту 2 в кількості $-y_2 + (1/k)\, y_1$. Якщо припустити, що завод вільно може усувати надлишок, то технологічну множину можна описати системою нерівностей

$$
\begin{aligned}
y_3 + my_1 \leqslant 0, &\quad \text{якщо} \quad y_3 \geqslant 0,\ y_1 - ky_2 \geqslant 0,\\
y_3 + mky_2 \leqslant 0, &\quad \text{якщо} \quad y_3 \geqslant 0,\ ky_2 - y_1 \geqslant 0,\\
y_1 \leqslant 0, \quad y_2 \leqslant 0, &\quad \text{якщо} \quad y_3 \leqslant 0.
\end{aligned}
$$

▲

З наведених прикладів випливають деякі більш загальніші властивості технологічних множин. Можна зробити загальне припущення, що технологічні множини замкнуті в просторі $\mathbb{R}^L$. Це припущення дає змогу обійти математичні трудності і не має майже ніякого економічного змісту. В розглянутих прикладах технологічні множини містять початок координат, що з економічного погляду відповідає наявності процесу бездіяльності, зокрема закриттю підприємства.

Інколи зручно технологічну множину описувати за допомогою функції $F(\cdot)$, яку називають *функцією перетворення* (*transformation function*). Функція перетворення $F(\cdot)$ володіє властивістю, що $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : F(y) \leqslant 0\}$ і $F(y) = 0$ якщо і тільки якщо, виробничий процес належить границі множини Y, $y \in \partial Y$.

Нехай функція $F(\cdot)$ неперервно диференційовна і виробничий вектор $\bar{y}$ задовольняє умову $F(\bar{y}) = 0$, тоді для будь-яких товарів l і k відношення[1]

$$\mathrm{MRT}_{lk}(\bar{y}) \;=\; \frac{\partial F(\bar{y})/\partial y_l}{\partial F(\bar{y})/\partial y_k}$$

називають *граничною нормою перетворення* (MRT) *товару l на товар k для виробничого процесу $\bar{y}$.*

Гранична норма перетворення – це міра, яка засвідчує, наскільки одиниць збільшиться чистий випуск продукту k, якщо чистий випуск продукту l зменшити на одну одиницю.

Дійсно, для $F(\bar{y}) = 0$ маємо

$$\frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_k}\,\mathrm{d}y_k + \frac{\partial F(\bar{y})}{\partial y_l}\,\mathrm{d}y_l = 0$$

і нахил дотичної в точці $\bar{y}$, яка належить границі технологічної множини, дорівнює $-\mathrm{MRT}_{lk}(\bar{y})$ (див. рис.2).

Нехай фірма виробляє лише один вид продукту, наприклад, продукт L і використовує при цьому $L-1$ продуктів. Тоді технологічну множину можна визначити так:

$$Y \;=\; \{\, y \in \mathbb{R}^L \,:\, y = (-z, q),\; z \in \mathbb{R}_+^{L-1},\; q \in \mathbb{R}_+ \,\},$$

де $(-z, q)$ означає, що для чистого випуску q одиниць продукту L використовують вектор чинників виробництва z. Для цього випадку можна ввести означення *множини вхідних потреб виробництва* (*input requirement sets*)(див.рис.2)

$$V(q) \;=\; \{\, z \in \mathbb{R}_+^{L-1} \,:\, (-z, q) \in Y \,\}.$$

Множина вхідних потреб виробництва визначає обсяги вхідних факторів виробництва, при яких відповідні виробничі процеси забезпечують випуск принаймні q одиниць продукту.

[1] Припускаємо, що $\partial F(\bar{y})/\partial y_k \neq 0$.

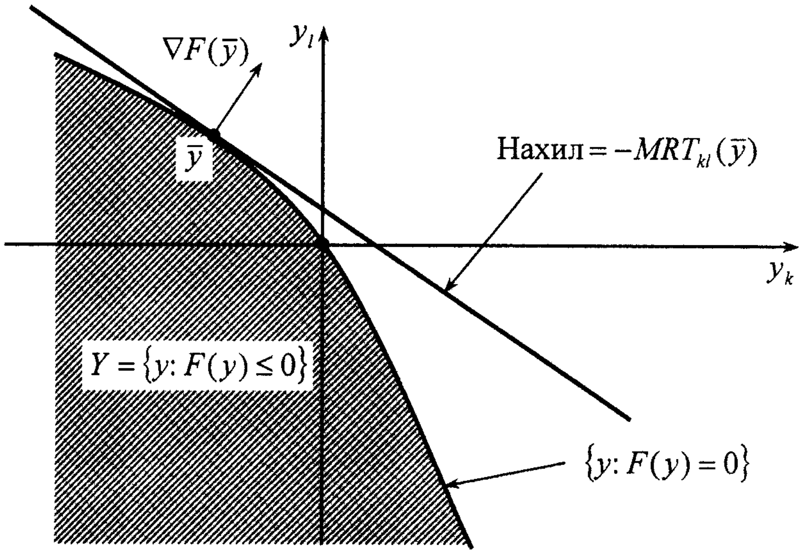


Рис. 1.1.3.

Для випадку, коли випускають лише один продукт, можна також визначити поняття *ізокванти*

$$Q(q) \;=\; \{\, z \in \mathbb{R}_+^{L-1} \,:\, z \in V(q) \text{ і } z \notin V(\acute{q}),\; \acute{q} > q \,\}.$$

Ізокванта визначає множину мінімально потрібних комбінацій виробничих ресурсів, при яких відповідні виробничі процеси забезпечують саме q одиниць продукту. Чим далі від початку координат перебуває ізокванта, тим більший рівень випуску вона зображає.

Припустимо, що для виробництва деякого продукту фірма використовує два види факторів виробництва: працю і капітал. Тоді виробничий процес матиме вигляд $y = (-l, -k, q)$, де q — рівень випуску продукції, k — кількість капіталу, l —

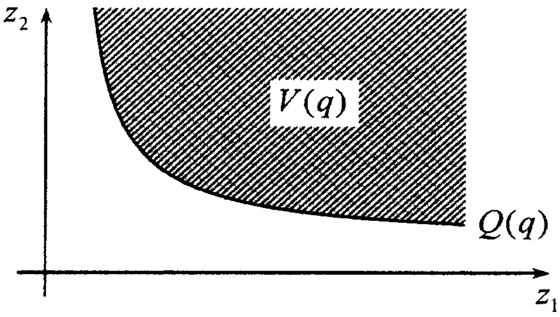


Рис. 1.1.4.

кількість праці. Нехай обсяг капіталу фіксований $k = \bar{k}$, тоді

$$Y(\bar{k}) = \{\, y \in Y : y = (-l, -\bar{k}, q) \,\}$$

технологічна множина для короткострокового періоду.

Технологію виробництва одного виду продукту можна також описати за допомогою *виробничої функції* $f(z)$, яка визначає максимальний рівень випуску q для вектора факторів виробництва $z \geqslant 0$.

Означення 1.1.2. Відображення $f : \mathbb{R}_+^{L-1} \to \mathbb{R}_+$ називається виробничою функцією, яка визначає технологію Y, якщо для кожного $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ величина $f(z)$ є оптимальним значенням цільової функції задачі

$$q \to \max_q, \quad (-z, q) \in Y.$$

Отже,

$$f(z) = \max\{\, q \in \mathbb{R}_+ : z \in V(q) \,\}.$$

Тоді технологічну множину можна визначити так:

$$Y = \{ (-z, q) \in \mathbb{R}^L : q - f(z) \leqslant 0,\ z \in \mathbb{R}_+^{L-1},\ q \in \mathbb{R}_+ \}.$$

Зауважимо, якщо для кожного $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ множина $Y(z) = \{q \in \mathbb{R}_+ : (-z, q) \in Y\}$ замкнута і обмежена зверху, то Y визначається виробничою функцією.

Легко бачити, що ізокванта – це лінія рівня виробничої функції.

Приклад 1.1.6. 1. Нехай $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ параметри. Технологію Коба-Дугласа визначимо так:

$$\begin{aligned}
Y &= \{ (-z_1, -z_2, q) \in \mathbb{R}^3 : q - z_1^\alpha z_2^\beta \leqslant 0 \}, \\
V(q) &= \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2 : q \leqslant z_1^\alpha z_2^\beta \}, \\
Q(q) &= \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2 : q = z_1^\alpha z_2^\beta \}, \\
Y(\bar{z}_2) &= \{ (-z_1, -z_2, q) \in \mathbb{R}^3 : q - z_1^\alpha z_2^\beta \leqslant 0,\ z_2 = \bar{z}_2 \}, \\
F(y) &= q - z_1^\alpha z_2^\beta, \quad y = (-z_1, -z_2, q), \\
f(z) &= z_1^\alpha z_2^\beta, \quad z = (z_1, z_2).
\end{aligned}$$

2. *Нехай $a > 0$ і $b > 0$ параметри. Технологію Леонтьєва визначимо так:*

$$\begin{aligned}
Y &= \{ (-z_1, -z_2, q) \in \mathbb{R}^3 : q - \min(az_1, bz_2) \leqslant 0 \}, \\
V(q) &= \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2 : q \leqslant \min(az_1, bz_2) \}, \\
Q(q) &= \{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+^2 : q = \min(az_1, bz_2) \}, \\
Y(\bar{z}_2) &= \{ (-z_1, -z_2, q) \in \mathbb{R}^3 : q - \min(az_1, bz_2) \leqslant 0,\ z_2 = \bar{z}_2 \}, \\
F(y) &= q - \min(az_1, bz_2), \quad y = (-z_1, -z_2, q), \\
f(z) &= \min(az_1, bz_2), \quad z = (z_1, z_2).
\end{aligned}$$

▲

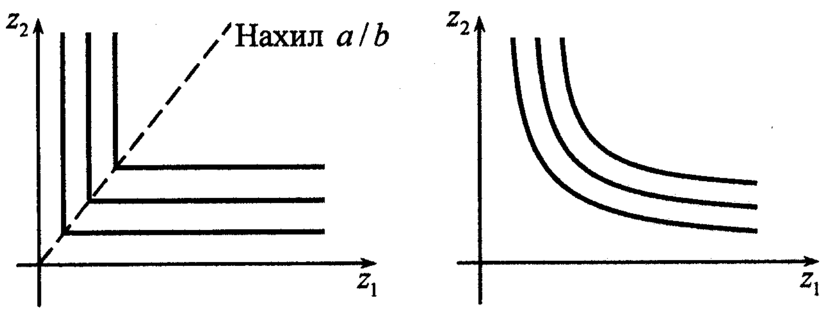


Рис. 1.1.5. Технологія Леонтьєва і Коба-Дугласа

1.2 Структурні властивості технологічних множин

У термінах структурних властивостей технологічних множин можна відобразити деякі фундаментальні закони виробництва. Розглянемо ці властивості.

1. *Технологічна множина Y непорожня.* Прийнято говорити, що фірма, колись має намір налагодити виробництво, інакше немає потреби вивчати питання поведінки фірми.

2. *Замкнутість технологічної множини Y.* Для більшості економічних ситуацій природно припустити: якщо деякий виробничий вектор можна з будь-якою степінню точності наблизити технологічно можливим процесом, тоді і сам процес також технологічно можливий; у математичних символах

$y^n \to y$ і $y^n \in Y$, тоді $y \in Y$. Ця властивість говорить, що технологічна множина містить свою границю.

3. *Відсутність "рогу достатку" – неможливо виробити щось з нічого.* У термінах технологічної множини цю властивість формулюють так:

(i) Технологічна множина у варіанті з запасами: якщо $(z, q) \in Y$ і $z = 0$, то $q = 0$.

(ii) Технологічна множина у варіанті з потоками: якщо $y \in Y$ і $y \geqslant 0$, то $y = 0$. Геометрично це означає $Y \cap \mathbb{R}_+^L \subset \{0\}$.

Якщо знайдеться виробничий процес y такий, що $y \geqslant 0$, тоді це означає, що для цього виробничого процесу отримують в додатних кількостях деякий продукт без будь-яких витрат факторів виробництва. Ця властивість виключає цю можливість, тобто для виробництва продукції в додатних кількостях необхідні чинники виробництва в ненульових обсягах.

Іноді цю властивість для технології, яка описується виробничою функцією $f(\cdot)$, вживають у підсиленому варіанті, коли вважають, що простір вхідних факторів виробництва $\mathbb{R}_+^{L-1}$ не надлишковий і туди входять лише ці види факторів виробництва, які потрібні для випуску цієї продукції. Тоді для векторів вхідних факторів виробництва z, які належать до границі $\partial\mathbb{R}_+^{L-1}$ простору $\mathbb{R}_+^{L-1}$, $\partial\mathbb{R}_+^{L-1} = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$: існує хоча б одна компонента z_j, що $z_j = 0\}$, справджується рівність $f(z) = 0$. Ця властивість засвідчує, що не витрачаючи комплексно потрібних для випуску продукції виробничих ресурсів $j = 1, ..., L-1$, неможливо забезпечити її додатний випуск.

4. *Необоротність виробничих процесів.* Якщо деякий виробничий процес технологічно можливий, то зворотний процес, в якому виробляють саме ті продукти, які витрачають у цьому процесі і споживають саме ті продукти, які виробляють в даному процесі, повинен бути технологічно неможливим. Відповідні умови для технологічної множини формулюють так.

(i) Необоротність у варіанті з запасами: виробничий процес (z, q) необоротний, якщо $(z, q) \in Y$, але $(q, z) \notin Y$.

(ii) Необоротність у варіанті з потоками: виробничий процес y необоротний, якщо $y \in Y$, $y \neq 0$, але $-y \notin Y$. Геометрично це можна записати так: $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$.

Важливою причиною необоротності є наявність таких факторів виробництва, без яких виробництво неможливе, наприклад, таким фактором є праця.

5. $0 \in Y$. Нульовий виробничий процес відповідає бездіяльності. Природно, що бездіяльність можлива для будь-якої технології.

6. *Вільне розміщення (усунення) в* Y. [1]

(i) У варіанті з запасами: якщо $(z, q) \in Y$, $u \geqslant z$, $q \geqslant v$, то $(u, v) \in Y$.

(ii) У варіанті з потоками: якщо $y \in Y$, $y \geqslant \acute{y}$, то $\acute{y} \in Y$. Коротко, то $Y - \mathbb{R}_+^L \subset Y$.

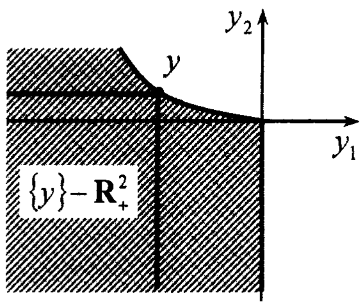


Рис. 1.2.6. Технологія з властивістю вільного розміщення

Процес вільного розміщення відповідає процесу вилучення з системи деякої кількості продуктів. Для технологічної

[1] У книзі К.Ланкастер Математическая економика.М.,1972. С. 118 – цю властивість називають *наявність збиткового виробництва.*

множини у варіанті з запасами такий виробничий процес можна уявляти собі так: реалізація процесу (u, v) розпадається на три етапи – вільне розміщення надлишку вхідного фактора $u - z$, перетворення вектора чинників z у вектор випуску q у виробничому процесі (z, q) і вільне розміщення надлишку випуску $q - v$. Аналогічну інтерпретацію можна дати і для варіанту з потоками.

Пропозиція $Y - \mathbb{R}_+^L \subset Y$ означає, що технологія дає змогу знищити будь-яку кількість продуктів. Це припущення дуже сильне, оскільки воно допомагає одразу вилучити небажані продукти. Фактично ми повертаємось до ситуації, коли всі продукти бажані. В цьому розумінні, припущення про вільне розміщення продуктів відповідає припущенню монотонності відношення переваги в теорії споживання. Ці припущення дають змогу обмежитись розглядом додатної системи цін. Від'ємні ціни не мають змісту, вони відображають компенсацію за наявність небажаних товарів. Якщо немає небажаних товарів або їх даром можна знищити, тоді немає основи для компенсації. Саме цього погляду ми будемо дотримуватися, коли приймемо припущення $Y - \mathbb{R}_+^L \subset Y$ і $p \gg 0$.

Властивість вільного усунення для технологічної множини Y у випадку множини вхідних потреб $V(q)$ називають *властивістю монотонності* і формулюють так: якщо $z \in V(q)$ і $z' \geqslant z$, то $z' \in V(q)$.

Якщо технологічна множина визначається виробничою функцією $f(\cdot)$, то із властивості вільного усунення випливає, що $f(\cdot)$ монотонно неспадна функція. Іншими словами, в $\mathbb{R}_+^{L-1}$ існує підмножина Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}_+^{L-1}$, яка називається *економічною* (*або технічно ефективною*) *областю*, в якій збільшення будь-якого виду факторів виробництва не спричиняє зменшення випуску продукції.

Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ неперервно диференційовна. Тоді економічну область можна описати за допомогою перших частинних похідних виробничої функції, які називаються *граничними продуктами факторів виробництва*

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z_j} = \mathrm{MP}_j(z) \geqslant 0, \quad j = 1, ..., L-1.$$

На мові граничних продуктів властивість монотонності означає, що в економічній області Ω

$$\mathrm{MP}(z) = (\mathrm{MP}_1(z), ..., \mathrm{MP}_{L-1}(z)) \geqslant 0,$$

і, отже, $\Omega = \{ z \in \mathbb{R}_+^{L-1} : \mathrm{MP}(z) \geqslant 0 \}$.

7. *Адитивність технології.* Нехай виробничі процеси y і $\acute{y}$ допустимі для технології Y, тоді виробничий процес $\bar{y} = y + \acute{y}$ також допустимий для цієї технології. В термінах функції перетворення ця властивість має такий вигляд: якщо $F(y) \leqslant 0$, $F(\acute{y}) \leqslant 0$, то $F(y+\acute{y}) = F(\bar{y}) \leqslant 0$. Коротко, то $Y + Y \subset Y$. Ця властивість цілком природна. З її виконання, наприклад, випливає, що $ky \in Y$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Економічна інтерпретація умови адитивності така: завжди можна реалізувати виробничий процес $\bar{y}$, реалізуючи незалежно один від одного процеси y і $\acute{y}$.

8. *Незростаюча віддача від масштабу.* Виробнича технологія Y виявляє незростаючу віддачу від масштабу, якщо для будь-якого виробничого процесу $y \in Y$ і будь-якого числа $\alpha \in [0, 1]$ маємо $\alpha y \in Y$. Ця властивість допускає скорочення всякого виробництва і виконання його в менших масштабах, зберігаючи пропорції між ресурсами і виробленою продукцією. В буквальному розумінні ця властивість рідко коли справджується. Для всякого виробництва існує поріг, нижче якого воно не може бути реалізованим за тих самих умов. Проте ця властивість більшою або меншою мірою може виявитися і для більшості індустріальних виробництв, але цією властивістю нехтують.

Якщо технологія визначається виробничою функцією, то властивість незростаючої віддачі від масштабу можна записати у вигляді $f(\alpha z) \leqslant \alpha f(z)$ для всіх $\alpha > 1$.

Зауважимо, що з цієї властивості випливає властивість наявності процесу бездіяльності $f(0) \geqslant 0$.

Зазначимо, якщо технологічна множина Y замкнута, володіє властивістю незростаючої віддачі від масштабу і відсутності "рогу достатку", то для будь-якого чинника виробництва $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ множина $Y(z)$ — замкнута й обмежена зверху. Зокрема, якщо для будь-якого чинника виробництва $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ множина $Y(z)$ замкнута і обмежена зверху, то технологія визначається виробничою функцією.

9. *Неспадаюча віддача від масштабу.* Виробнича технологія Y виявляє неспадаючу віддачу від масштабу, якщо для будь-якого виробничого процесу $y \in Y$ і будь-якого числа $\alpha \geqslant 1$ маємо $\alpha y \in Y$.

Якщо технологія визначається виробничою функцією, то властивість неспадаючої віддачі від масштабу можна записати у вигляді $f(\alpha z) \geqslant \alpha f(z)$ для всіх $\alpha > 1$.

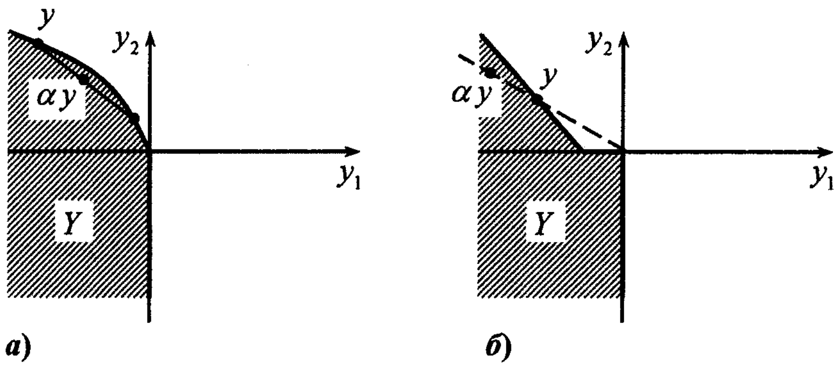


Рис. 1.2.7. *а*) Незростаюча віддача, *б*) неспадаюча віддача.

10. *Стала віддача від масштабу.* Виробнича технологія Y виявляє сталу віддачу від масштабу, якщо для будь-якого виробничого процесу $y \in Y$ і будь-якого числа $\alpha \geqslant 0$ маємо $\alpha y \in Y$. Геометрично це означає, що Y конус.

У випадку множини $V(q)$ ця властивість набуває вигляду: якщо $z \in V(q)$, то $\alpha z \in V(\alpha q)$ для всіх $\alpha > 0$.

Якщо технологія визначається виробничою функцією, то властивість сталої віддачі від масштабу можна записати у вигляді $f(\alpha z) = \alpha f(z)$ для всіх $\alpha \geqslant 0$, тобто виробнича функція $f(\cdot)$ однорідна степеня одиниця.

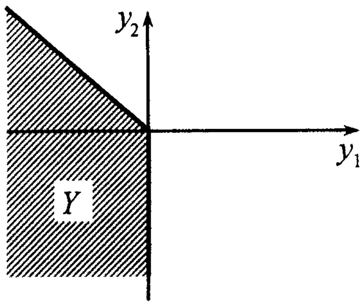


Рис. 1.2.8. Стала віддача.

Легко бачити, що виконання цієї властивості призводить до виконання властивостей 8 і 9. Навпаки, якщо справджується властивість адитивності та незростаючої віддачі від масштабу, тоді справджується властивість сталої віддачі від масштабу. Нехай k – ціла частина α. Ми можемо, багатократно використовуючи властивість адитивності, довести, що процеси $2y, 3y, ..., ky$ допустимі для технології. Оскільки технологія допускає незростаючу віддачу $(\alpha - k)y \in Y$, то в силу адитивності $\alpha y = (\alpha - k)y + ky \in Y$.

11. *Опуклість технології.* Це основне припущення в мікроекономіці. Ця властивість означає, що технологічна множина Y опукла множина, тобто, якщо $y^1, y^2 \in Y$ і $\alpha \in [0, 1]$, то $\alpha y^1 = (1-\alpha)y^2 \in Y$. Опукла комбінація двох виробничих процесів y^1 і y^2 з вагами α і $1-\alpha, \alpha \in [0,1]$ описує одночасне і незалежне функціонування цих процесів з інтенсивностями α та $1-\alpha$. Прийнявши, наприклад, $\alpha = \dfrac{1}{2}$, одержуємо третій технологічно можливий спосіб функціонування виробництва. Якщо взяти половину факторів виробництва процесів y^1 і y^2, тоді для відшкодування втрат треба взяти ті самі частки випусків цих процесів. Все відбувається так, як би фірма могла поділитися на дві дочірні фірми, кожна з яких подібна до вихідної, проте одна з них функціонує згідно з процесом $\dfrac{y^1}{2}$, а інша – згідно з процесом $\dfrac{y^2}{2}$.

Якщо виробничий процес y скомбінувати з процесом $y = 0$ (за умови, що $0 \in Y$), то одержимо виробничий процес αy, який належить множині Y для всіх $\alpha \in [0, 1]$, тобто множина Y володіє властивістю незростаючої віддачі від масштабу.

Легко бачити, якщо *технологічна множина Y опукла і визначається виробничою функцією $f(\cdot)$, то функція $f(\cdot)$ ввігнута і відповідна множина вхідних потреб виробництва $V(q)$ опукла.* Зокрема, *$V(q)$ опукла множина тоді і лише тоді, коли виробнича функція $f(\cdot)$, яка визначає технологію, квазівві́гнута.*

Іноді цю властивість посилюють, припускаючи, що існує *особлива область* $\mathcal{D} \subset \Omega$, яка опукла, і на якій виробнича функція $f(\cdot)$ строго ввігнута. Якщо припустити, шо виробнича функція $f(\cdot)$ двічі неперервно диференційовна, тоді матриця Гесе виробничої функції

$$\mathrm{H}(z) = \left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right)_{i,j=1}^{L-1} \qquad (1.2.1)$$

від'ємно визначена для всіх z з особливої області $\mathcal{D}$.

У цій області множина $V(q)$ опукла для кожного $q \geqslant 0$ і справджується закон спадної віддачі

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_j^2} = \frac{\partial}{\partial z_j}(\mathrm{MP}_j(z)) < 0, \quad j = 1, ..., L-1$$

— з огляду на те, як вхідний фактор виробництва одного виду додається до визначених обсягів інших факторів виробництва, досягається особлива область, в якій граничний продукт відповідного чинника виробництва зменшується.

Отже, якщо технологія визначається виробничою функцією, то природно припустити, що виробнича функція задовольняє дві аксіоми: перша — існує економічна область, де функція монотонно неспадна, друга — існує особлива область, яка є опуклою підмножиною економічної області, де функція ввігнута. Згідно з наведеними аксіомами, існує опукла область чинників виробництва, яка визначається так:

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1} : \mathrm{MP}(z) \geqslant 0,\ H(z) - \text{від'ємно визначена}\}.$$

Наведемо деякі взаємозв'язки між структурними властивостями технологічної множини.

Теорема 1.2.1.

1. *Нехай технологічна множина Y замкнута, опукла і $-\mathbb{R}_+^L \subset Y$, тоді технологічна множина володіє властивістю вільного розміщення.*
2. *Технологічна множина Y володіє властивістю адитивності і незростаючої віддачі від масштабу тоді і лише тоді, коли Y — опуклий конус.*
3. *Технологічна множина Y опукла і $0 \in Y$, тоді Y володіє властивістю незростаючої віддачі від масштабу й*

існує опукла технологічна множина $Y' \subset \mathbb{R}^{L+1}$ *з властивістю сталої віддачі така, що*

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^L : (y, -1) \in Y'\}.$$

Доведення. Доведення залишаємо як вправу. □

Важливість властивості опуклості технологічної множини проілюструємо на прикладі двох товарів.

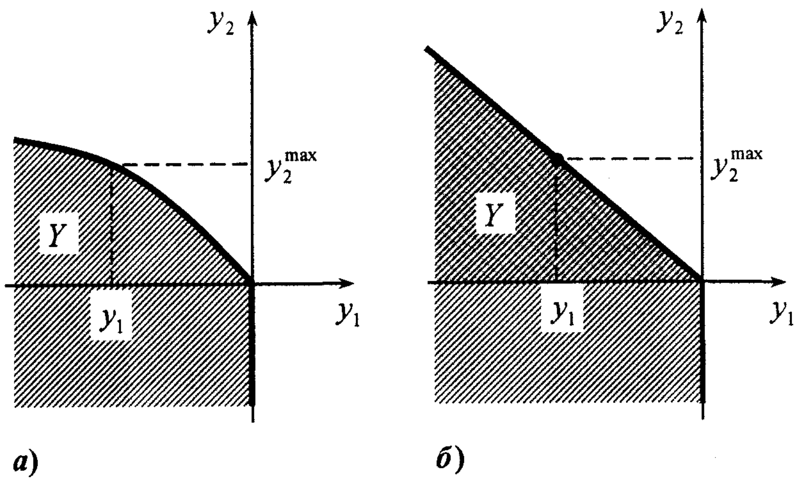


Рис. 1.2.9. $L = 2$. Два приклади опуклих технологічних множин

На рис. 1.2.9,*а*,*б* технологічні множини опуклі. З цього випливає, що відношення $\dfrac{y_2^{\max}}{-y_1}$ спадає при $-y_1 \to +\infty$ (для випадку *б* це відношення стале). Оскільки відношення кількості виробленої продукції до кількості витрачених факторів виробництва є максимально можливою продуктивністю, яка використовує фактор виробництва $-y_1$, то з ростом обсягу чинника виробництва продуктивність спадає (або залишається сталою). Тобто, продуктивність буде обмеженою

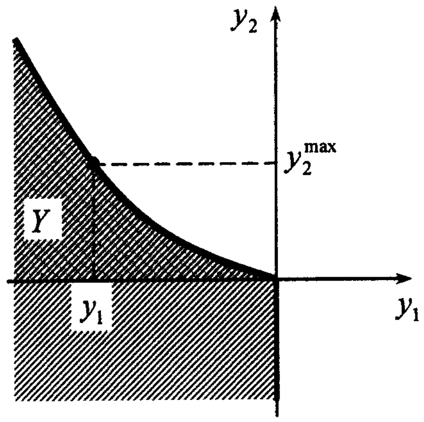


Рис. 1.2.10. $L = 2$. Приклад не опуклої технологічної множини

На рис. 1.2.10 технологічна множина не опукла і продуктивність $\dfrac{y_2^{\max}}{-y_1}$ зростає до нескінченості з ростом обсягів факторів виробництва. Галузі промисловості, наприклад, автомобільна, металургійна, де сконцетровано великий обсяг капіталу, мають виробничі множини саме такого типу. Тому зростаюча продуктивність прихильна великим виробникам у збиток малим, оскільки витрати на одиницю випуску менші для перших, ніж для других.

Розділ 2

Максимізація прибутку фірми

Нагадаємо, що ми розглядаємо економіку з L продуктами. Припустимо, що технологія виробництва фірми визначається виробничою множиною Y, яка володіє властивостями: *непорожня, замкнута і* $Y - \mathbb{R}^L_+ \subset Y$.

2.1 Задача максимізації прибутку (PMP)

Нехай $p = (p_1, ..., p_L) \gg 0$ фіксована система цін на продукти (p_i — ціна за одиницю продукту i). Це ті ціни, за якими виробник купує вхідні фактори виробництва і продає вихідні фактори (товари, які виробляє). Нехай $y \in Y$, тоді дохід (виторг) фірми від продажу вихідних факторів виробничого процесу y дорівнює

$$R = \sum_{y_i > 0} p_i y_i,$$

а витрати виробництва

$$C = \sum_{y_i < 0} p_i(-y_i).$$

Прибутком фірми є різниця цих величин: (виторг) – (витрати), або

$$\Pi(y) = p \cdot y = R - C = \sum_{i=1}^{L} p_i y_i,$$

тобто те, що залишається власникам фірми після відшкодування витрат виробництва.

Отож, прибуток фірми — лінійна функція (коефіцієнти $p_1, ..., p_L$ фіксовані), яка визначена на виробничих векторах $y \in Y$. Наприклад, якщо всі ціни збільшити у два рази, а виробничий процес y залишити без зміни, то прибуток збільшиться у два рази. Слово "прибуток" не повинно вводити в оману: цілком може трапитися, що величина $p \cdot y$ буде від'ємна і в цьому випадку краще говорити про збитки.

Цікавим є порівняння прибутку $p \cdot y$ для різних виробничих процесів y заданої технології Y. Це призводить до знаходження такого виробничого процесу, який би забезпечив найбільший прибуток. Такий процес називають найкращим (оптимальним) виробничим процесом технології, хоча він може бути не єдиним, проте саме його вибиратиме виробник. Максимізація прибутку найпростіший принцип, який визначає поведінку фірми.

Отже, неокласична теорія фірми стверджує, що для заданої системи цін $p = (p_1, ..., p_l)$ вибирається саме такий виробничий процес (або такі виробничі процеси) технологічної множини Y для яких величина $p \cdot y$ є максимальною.

Задача максимізації прибутку (profit maximization problem) (PMP)

$$p \cdot y \to \max, \qquad y \in Y. \tag{PMP}$$

Якщо виробнича множина визначається функцією перетворення $F(\cdot)$, тоді еквівалентне формулювання задачі (PMP) має вигляд

$$p \cdot y \to \max, \quad y \in \mathbb{R}^L, \quad F(y) \leqslant 0. \tag{2.1.1}$$

Для технології Y визначимо *функцію прибутку* $\pi(\cdot)$ — функцію, яка кожному вектору цін p ставить у відповідність число $\pi(p) = \max\{\, p \cdot y \,:\, y \in Y \,\}$ (оптимальне значення цільової функції задачі (PMP)). Відповідно, множину розв'язків задачі (PMP) позначимо через $y(p) = \{\, y \in Y \,:\, p \cdot y = \pi(p) \,\}$, а відображення, яке кожному вектору цін p ставить у відповідність множину $y(p)$, назвемо *пропозицією фірми.*

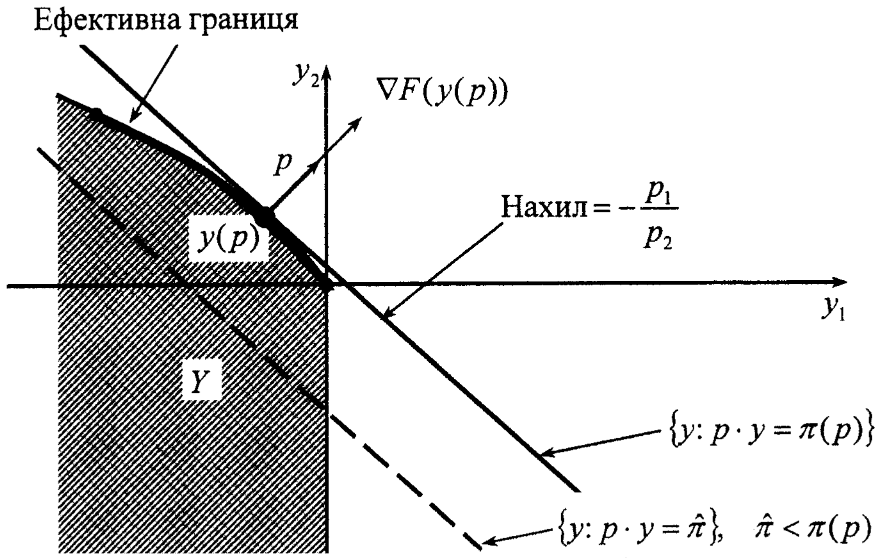


Рис. 2.1.1. $L = 2$.

Зауважимо, що множина $y(p)$ не залежить від масштабу цін, тобто, якщо всі ціни збільшити у два рази, то це рівносильно множенню на два обох частин рівності в означенні множини $y(p)$. Загалом виконується

$$y(\alpha p) = y(p) \text{ для всіх } \alpha > 0.$$

Отже, ми побудували відображення $p \to y(p)$. Тобто для заданої системи цін p застосування принципу максимізації прибутку дає змогу визначити множину виробничих векторів $y \in y(p)$, серед яких треба вибирати.

Загалом $y(p)$ швидше є множина, ніж одним вектором. Крім того, не завжди існують допустимі виробничі процеси, які максимізують прибуток. Ці різні ситуації розглянемо для випадку двох продуктів.

Нехай фірма виробляє продукт 2 з продукту 1; якщо величина чинника дорівнює $y_1 \leqslant 0$, то рівень випуску буде дорівнювати саме більше $y_2 = f(y_1)$. Функція $f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$ описує функціонування фірми з повною продуктивністю. Звичайно, для заданої кількості факторів виробництва y_1 фірма може випустити продукції менше ніж $f(y_1)$, але більше випустити є технічно не можливим. Якщо надати змогу фірмі вільно розміщати ресурси, то її виробнича множина буде складатися з точок площини $\mathbb{R}^2$, які знаходяться під графіком функції $f(\cdot)$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 \leqslant f(y_1), \ \ y_1 \leqslant 0\}.$$

Розглянемо технологію виробництва, яка описується виробничою множиною $Y = \{(y_1, y_2) : \ y_2 \leqslant -ay_1, \, y_1 \leqslant 0, \ a > 0\}$ (кількість продукту 2, яку фірма може виробити, пропорційна наявному обсягу продукту 1: продуктивність стала і дорівнює a). Легко бачити, що множина Y замкнута і володіє властивістю вільного розміщення.

Нехай задано систему цін $p = (p_1, p_2)$. Розглянемо задачу максимізації прибутку

$$p_1 y_1 + p_2 y_2 \to \max, \ \ y \in Y, \tag{2.1.2}$$

яка геометрично означає: серед сім'ї паралельних прямих $p_1 y_1 + p_2 y_2 = \hat{\pi}$ — ізопрофіт,[1] які перетинають множину Y, потрібно знайти таку пряму, для якої $\hat{\pi}$ має найбільше значення.

Оскільки $p_2 > 0$, тоді для заданої кількості фактора виробництва y_1 потрібно вибрати максимально можливе значення y_2, яке дорівнює $-ay_1$. Тепер задачу (2.1.2) можна переписати у вигляді

$$(p_1 - ap_2)y_1 \to \max, \quad y_1 \leqslant 0.$$

Тут можливі три випадки, які зобразимо на рис. 2.1.2.

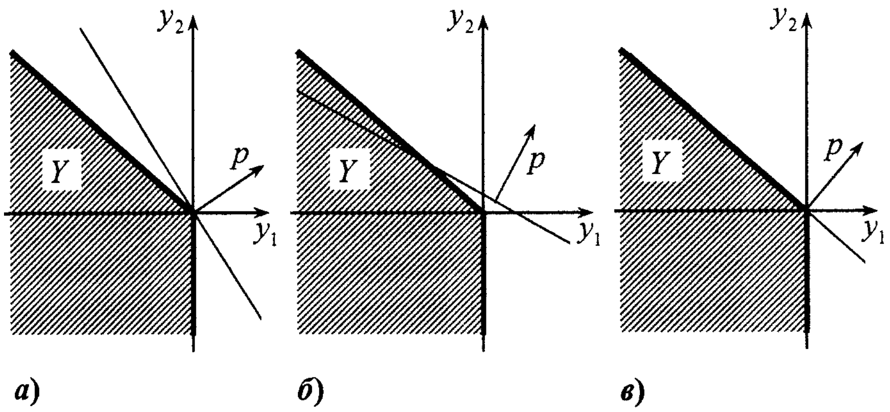


Рис. 2.1.2. $L = 2$. Три випадки можливого розташування вектора цін p стосовно технологічної множини Y

(i) $p_1 - ap_2 > 0$. "Прибуток" $\hat{\pi}$ тоді є від'ємним, тобто фірма функціонує зі збитками і найкращий для неї вихід — нічого не виробляти $y_1 = 0$.

[1] Поверхні рівня цільової функції задачі (PMP) *називаються ізопрофітами*. Зокрема, множина пропозиції фірми належить ізопрофіті.

(ii) $p_1 - ap_2 < 0$. Величина $\hat{\pi} = (p_1 - ap_2)y_1 > 0$ і зображає прибуток. Цей прибуток пропорційний кількості вхідного фактора виробництва y_1: чим більший випуск, тим більший прибуток. Отже, можливий прибуток є необмеженим $\pi(p) = +\infty$ і максимізуючого вектора $y \in Y$ немає, $y(p) = \emptyset$.

(iii) $p_1 - ap_2 = 0$. У цьому випадку для будь-якої кількості фактора виробництва y_1 прибуток $\hat{\pi} = 0$. Тому фірма незацікавлена надавати перевагу одному фактору виробництва перед іншим: зупинити виробничу діяльність $y_1 = 0$ та збільшити виробництво ($-y_1$ дуже велике), вони однаково вигідні для неї.

Отож, відповідну множину пропозиції фірми можна записати у вигляді

$$y(p) = \begin{cases} \{0\}, & \text{якщо } p_1 - ap_2 > 0,\ \pi(p) = 0 \\ \emptyset, & \text{якщо } p_1 - ap_2 < 0,\ \pi(p) = +\infty \\ \{(y_1, -ay_1) : \, y_1 \leqslant 0\}, & \text{якщо } p_1 - ap_2 = 0,\ \pi(p) = 0. \end{cases}$$

Як відомо, відношення p_1/p_2 — це відносна ціна продукту 1. Рівність відносної ціни продуктивності $p_1/p_2 = a$ відокремлює область рентабельності $p_1/p_1 < a$ (продукт 1 вигідний) і область $p_1/p_1 > a$ (продукт 1 дуже дорогий). Зауважимо, що у випадку $p_1/p_2 = a$ максимізація прибутку дає змогу усунути всі неефективні виробничі процеси, тобто такі, що $y_2 < -ay_1$.

Якщо виробнича множина Y володіє властивістю неспадаючої віддачі від масштабу, то $\pi(p) \leqslant 0$ або $\pi(p) = +\infty$.

Зазначимо також, якщо технологічна множина містить виробничий процес $y = 0$, то $\pi(p) \geqslant p \cdot 0 = 0$, тобто максимальний прибуток фірми завжди невід'ємний. Однак, прибуток $\pi(p)$ не завжди додатний; наявність або відсутність додатного прибутку визначається структурою технологічної множини. Типовим прикладом безприбутковості є випадок, коли технологічна множина — конус. Справді, якщо Y — конус, тоді прибуток фірми повинен дорівнювати нулю, оскільки в протилежному випадку при $\pi(p) = p \cdot y > 0$ маємо, що $\alpha y \in Y$, $\alpha > 0$ і $p \cdot (\alpha y) = \alpha(p \cdot y) \to \infty$ при $\alpha \to \infty$, що суперечить існуванню скінченного максимуму прибутку, який дорівнює $\pi(p)$. Подібна ситуація виникає тоді, коли конусом є сукупна технологічна множина $Y = \sum\limits_{j=1}^{J} Y_j$, де Y_j — технологічна множина фірми j. Оскільки вектор $y = \sum\limits_{j=1}^{J} y_j \in Y$ максимізує прибуток на Y тоді і лише тоді, коли $y_j \in y(p)$ для всіх j, то ні одна фірма не може мати додатний прибуток, тобто $\pi_j(p) = 0$ для кожного j.

2.2 Умови існування розв'язку задачі (PMP)

Суттєва відмінність задачі (PMP) від задачі раціонального вибору споживача полягає в тому, що її допустима множина розв'язків Y здебільшого необмежена. Для технологій з неспадаючою віддачею від масштабу існування технологічних процесів з додатним прибутком означає існування допустимих процесів, які дають як завгодно великий прибуток.

Отож, існування розв'язку задачі (PMP) можна гарантувати лише при додаткових припущеннях стосовно вибору цін p і структури технологічної множини Y.

Теорема 2.2.1. *Нехай для технологічної множини Y існує компактна підмножина Y' така, що*

$$Y' \subseteq Y \quad і \quad Y \subseteq Y' - \mathbb{R}^L_+. \tag{2.2.1}$$

Тоді розв'язок задачі (PMP) *існує для довільного вектор цін $p \in \mathbb{R}^L_+$.*

Доведення. Доведемо, що задача (PMP) для технології Y в деякому розумінні еквівалентна задачі (PMP) для технології Y'. Нехай $y \in Y$ і $y \notin Y'$. Тоді за умовою (2.2.1) існує вектор $y' \in Y'$ такий, що $y' \geqslant y$, $y' \neq y$. Отже, ми знайшли допустимий виробничий процес, для якого прибуток не менший ніж для y. Звідси випливає, що потрібно розглядати лише процеси $y \in Y'$.

Оскільки Y' компактна множина, а $p \cdot y$ — неперервна функція за змінною y, то за теоремою Вейєрштрасса задача (PMP) має розв'язок на Y'. □

Припущення цієї теореми накладає досить сильне обмеження на структуру технології, воно не дає змоги довести існування розв'язку задачі (PMP), наприклад, для технології Коба-Дугласа $Y = \{y = (-z, q) \in \mathbb{R}^3 : q - z_1^{\alpha} z_2^{\beta} \leqslant 0, z \in \mathbb{R}^2_+, \alpha + \beta < 1\}$ зі спадаючою віддачею.

Існування розв'язку задачі максимізації прибутку в цьому випадку випливає з того, що на всіх рецесивних напрямах – напрямах "віддалення в нескінченість"[1] — заданої технологічної множини функція прибутку набуває від'ємне значення.

Теорема 2.2.2. *Нехай технологічна множина Y замкнута і справджуєтьcя умова*

$$\left(y^n \in Y,\ \ ||y^n|| \to \infty,\ \ \frac{y^n}{||y^n||} \to \bar{y} \right) \Rightarrow \left(\bar{y} \in -\mathbb{R}^L_+ \right). \quad (2.2.2)$$

Тоді для будь-якої системи цін $p \gg 0$ прибуток досягає максимуму на Y принаймні в одній точці, тобто для всіх

[1] Вектор y називається рецесивним напрямом, якщо $\lambda y \in Y$ для всіх $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$p \in \mathbb{R}^L_{++}, \quad y(p) \neq \emptyset$.

Доведення. Нехай $\pi(p) = \max\limits_{y \in Y} p \cdot y$ (зокрема може бути $\pi(p) = +\infty$) і послідовність $y^n \in Y$ така, що

$$p \cdot y^n \to \pi(p) \text{ при } n \to \infty. \tag{2.2.3}$$

Доведемо, що послідовність y^n обмежена. Припустимо протилежне. Тоді з неї можна виділити підпослідовність $y^{n'}$ таку, що $||y^{n'}|| \to +\infty$. Оскільки норма всіх векторів $\dfrac{y^n}{||y^n||}$ дорівнює одиниці, а одинична куля в $\mathbb{R}^L$ компактна, то можна виділити іншу нову підпослідовність $y^{n''}$ таку, що $\dfrac{y^{n''}}{||y^{n''}||}$ буде збігатися до деякого вектора $\bar{y}$ і $\bar{y} \in -\mathbb{R}^L_+$ (умова (2.2.2)). Враховуючи, що $p \gg 0$ і $p \cdot \bar{y} < 0$, маємо

$$p \cdot y^{n''} = ||y^{n''}|| \Big(p \cdot \frac{y^{n''}}{||y^{n''}||} \Big) \to -\infty. \tag{2.2.4}$$

Порівнюючи (2.2.3) і (2.2.4), одержимо, що $\pi(p) = -\infty$, тобто отримали суперечність. Отже, послідовність y^n обмежена. Тоді з неї можна виділити збіжну підпослідовність y^{n_m}

$$\text{існує вектор } \hat{y} \text{ такий, що : } y^{n_m} \to \hat{y}. \tag{2.2.5}$$

Оскільки технологічна множина Y замкнута і $y^{n_m} \in Y$, то $\hat{y} \in Y$. Врахувавши формули (2.2.3) і (2.2.5), одержимо, що $\pi(p) = p \cdot \hat{y}$, тобто $\hat{y}$ максимізує прибуток $p \cdot y$ на множині Y. $\square$

Економічна інтерпретація умови (2.2.2) така.

Вектор $\bar{y}$ зображає "виробництво на нескінченності": коли рівень випуску фірми дуже великий (тобто $||y^n||$ дуже велике), координати вектора $\bar{y}$ приблизно дорівнюють відносним часткам різних товарів у виробничому процесі. Те, що $\bar{y} \in -\mathbb{R}^L_+ = \mathbb{R}^L_-$, означає, що набір випусків поступово порожніє зі збільшенням виробництва. Іншими словами, зі зростанням рівня діяльності продуктивність прямує до нуля.

Із доведеної теореми випливає, якщо множина рецесивних напрямів збігається з $\mathbb{R}^L_-$, то розв'язок задачі (PMP) існує для всіх $p \in \mathbb{R}^L_{++}$. Прикладом є технологія Коба-Дугласа з незростаючою віддачею.

2.3 Умови оптимальності в задачі (PMP)

Надалі припустимо, що множина векторів цін p, для яких існує розв'язок задачі (PMP), збігається з множиною $\mathbb{R}^L_{++}$.

Нехай технологічна множина Y визначається неперервно диференційовною функцією перетворення $F(\cdot)$ і $\nabla F(y) \neq 0$[1] для всіх $y \in Y$. Тоді умови оптимальності першого порядку в задачі (2.1.1) визначаються теоремою Куна-Такера. Функція Лагранжа для задачі (2.1.1) має вигляд

$$\mathcal{L}(y, \lambda) = p \cdot y - \lambda F(y),$$

де λ — множник Лагранжа, який відповідає технологічному обмеженню.

За теоремою Куна-Такера, якщо $y^* \in y(p)$, тоді існує мно-

[1] Умова регулярності задачі (2.1.1).

жник Лагранжа $\lambda \geqslant 0$ такий, що справджуються умови

$$\begin{aligned} p_l - \lambda \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_l} &= 0, \quad l = 1, ..., L, \\ F(y^*) &= 0. \end{aligned}$$

або у векторному вигляді

$$p = \lambda \nabla F(y^*), \quad F(y^*) = 0. \tag{2.3.1}$$

Якщо функція $F(\cdot)$ опукла, то умови (2.3.1) задають систему рівнянь, кожний розв'язок якої — оптимальний виробничий процес.

Звідки випливає, що для оптимального виробничого процесу $y^* \in y(p)$ гранична норма перетворення продукту l на продукт k дорівнює відношенню цін на ці товари, тобто

$$\mathrm{MRT}_{lk}(y^*) = \frac{p_l}{p_k} \quad \text{для всіх } \ l, k.$$

Нехай технологія визначається неперервно диференційовною виробничою функцією $f(\cdot)$. Тоді задача (2.1.1) зводиться до такої задачі максимізації прибутку

$$pf(z) - w \cdot z \to \max, \quad z \in \mathbb{R}_+^{L-1}, \tag{2.3.2}$$

де $p > 0$ — ціна випуску продукції, $w \gg 0$ — вектор цін на фактори виробництва. За теоремою Куна-Такера, якщо z^* розв'язок задачі (2.3.2), то справджуються умови

$$p\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_j} \leqslant w_j, \ (=, \ \text{якщо} \ \ z_j^* > 0) \quad \text{для } j = 1, \ldots, L-1,$$

або у векторному вигляді

$$p\nabla f(z^*) \leqslant w, \quad [p\nabla f(z^*) - w] \cdot z^* = 0.$$

Якщо $z^* \gg 0$, то граничний продукт кожного фактора виробництва дорівнює його відносній ціні (пропорції обміну цього виробничого фактора на продукт)

$$\mathrm{MP}_j(z^*) = \frac{w_j}{p}, \quad j = 1, \ldots, L-1.$$

2.4 Властивості функції прибутку і пропозиції фірми

Теорема 2.4.1. *Нехай технологічна множина Y замкнута і володіє властивістю вільного розміщення. Нехай $\pi(\cdot)$ — функція прибутку, а $y(\cdot)$ — пропозиція фірми для технології Y. Тоді:*

(i) $\pi(\cdot)$ *— однорідна першого степеня;*

(ii) $\pi(\cdot)$ *— опукла і неперервна;*

(iii) *якщо* Y *— опукла, то* $Y = \{\, y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leqslant \pi(p)$ *для всіх* $p \gg 0\}$*;*

(iv) *відображення* $p \to y(p)$ *однорідне степеня нуль;*

(v) *якщо Y опукла множина, то для кожного p множина $y(p)$ опукла. Зокрема, якщо Y строго опукла, тоді множина $y(p)$ складається не більше, ніж з одного виробничого процесу і функція $y(\cdot)$ неперервна;*

(vi) *(Hotelling's lemma) якщо $y(\bar{p})$ складається з одного виробничого процесу, тоді $\pi(\cdot)$ диференційовна в точці $\bar{p}$ і* $\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$*;*

(vii) *якщо функція* $p \to y(p)$ *диференційовна в точці* $p = \bar{p}$, *тоді* $\mathrm{D}y(\bar{p}) = \mathrm{D}^2\pi(\bar{p})$ *— симетрична і додатно напіввизначена матриця і* $\mathrm{D}y(\bar{p})\,\bar{p} = 0$*;*

(viii) $\pi(\cdot)$ *не спадає за ціною випуску і не зростає за ціною факторів виробництва, тобто, якщо* $p'_i \geqslant p_i$ *для всіх випусків і* $p'_j \leqslant p_j$ *для всіх чинників, тоді* $\pi(p') \geqslant \pi(p)$.

Доведення. Доведення властивостей (i), (ii) та (vi) можна отримати, використавши результати параграфа **??**. Справді, з огляду на зроблені припущення, функція прибутку $\pi(\cdot)$ є опорною функцією множини $-Y$, $\pi(p) = -\mu_{-Y}(p)$, де $\mu_{-Y}(p) = \min\{p\cdot(-y) : y \in Y\}$. Отже, $\pi(\cdot)$ — опукла й однорідна першого степеня функція для всіх $p \gg 0$. Зокрема, опукла функція $\pi(\cdot)$ неперервна в $\mathbb{R}^L_{++}$.

(iii) Властивості: замкнутість, опуклість і вільне розміщення технологічної множини Y забезпечують її двоїсте описання за допомогою функцій прибутку $\pi(\cdot)$ та пропозиції $y(\cdot)$. Справді, розглянемо множину

$$Y_\pi = \{\, y \in \mathbb{R}^L : \; p\cdot y \leqslant \pi(p) \text{ для всіх } p \gg 0 \,\},$$

яка є опуклою оболонкою множини Y і володіє властивістю вільного розміщення. Очевидно, що $Y \subseteq Y_\pi$ і $y(\cdot)$ є розв'язком задачі (PMP) з технологією Y_π при цінах $p \in \mathbb{R}^L_{++}$.

Отже, ми побудували (максимальну) технологічну множину, яка є породжена функціями $\pi(\cdot)$ і $y(\cdot)$. Виникає запитання: чи збігається множина Y_π з технологічною множиною Y? Відповідь залежить від структурних властивостей технології Y, оскільки побудована множина опукла і володіє властивістю вільного розміщення.

Нехай Y — опукла, замкнута і володіє властивістю вільного розміщення. Нехай $\tilde{y} \notin Y$. Тоді за наслідком **??** існує вектор $\tilde{p} \in \mathbb{R}^L$, $\tilde{p} \neq 0$ і число β такі, що

$$\tilde{p} \cdot \tilde{y} > \beta > \tilde{p} \cdot y \quad \text{для всіх} \quad y \in Y. \tag{2.4.1}$$

Доведемо, що $\tilde{p} \in \mathbb{R}^L_{++}$. Припустимо, що для деякого $i \in \{1, \ldots, L\}$, $\tilde{p}_i < 0$. Розглянемо деякий вектор $y' \in Y$ і промінь $y - \tilde{l} e^i$, де $\tilde{l} \in \mathbb{R}_+$ і $e^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, який належить множині Y, оскільки вона володіє властивістю вільного розміщення. Величина $\tilde{p} \cdot y' - \tilde{l}\tilde{p}_i$ необмежена зверху. Це суперечить тому, що $\tilde{p} \cdot \tilde{y} > \beta > \tilde{p} \cdot y$ для всіх $y \in Y$. Отже, $\tilde{p} \in \mathbb{R}^L_+$.

Можна вибрати вектор $\tilde{p}$ так, що в нього всі координати будуть додатними. Справді, розглянемо вектор $\tilde{p} + \varepsilon p'$, де $p' \in \mathbb{R}^L_{++}$ — довільний вектор цін. Оскільки величина $p' \cdot y$ для $y \in Y$ обмежена зверху значенням $\pi(p')$, то для досить малого ε буде правильна нерівність

$$(\tilde{p} + \varepsilon p') \cdot \tilde{y} > \beta > (\tilde{p} + \varepsilon p') \cdot y \quad \text{для всіх} \quad y \in Y.$$

Отже, існує вектор цін $p \in \mathbb{R}^L_{++}$ такий, що справджується (2.4.1).

Звідси маємо, що $\tilde{p} \cdot \tilde{y} > \pi(\tilde{p})$, і отже, $\tilde{y} \notin Y_\pi$.

Отож, ми показали, що будь-яка точка, яка не належить Y, не належить і Y_π. Це означає, що $Y_\pi \subseteq Y$.

Властивість (iv) випливає з властивості (i). Властивість (vi), яка є аналогом тотожності Роя в теорії споживання, є результатом використання теореми **??**. Властивість (vii) — наслідок властивостей (vi), (ii) і формули Ейлера.

(v) Нехай Y опукла множина і $y^1, y^2 \in y(p)$ та $\alpha \in [0,1]$, тоді $\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2 \in Y$ і $p \cdot (\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) = \alpha p \cdot y^1 + (1-\alpha)p \cdot y^2 = \alpha\pi(p) + (1-\alpha)\pi(p) = \pi(p)$. Отже, $\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2 \in y(p)$, тобто $y(p)$ - опукла множина.

Припустимо, що Y строго опукла множина в $\mathbb{R}^L$. Нехай в $y(p)$ є два різні виробничі процеси y^1 і y^2: $y^1, y^2 \in Y,\ p \cdot y^1 = p \cdot y^2 = \pi(p)$. Розглянемо вектор $\bar{y} = \dfrac{1}{2}(y^1 + y^2)$. Очевидно, що $p \cdot \bar{y} = \pi(p)$. Оскільки Y строго опукла множина, то вектор $\bar{y}$ є центром кулі B досить малого радіуса $\varepsilon > 0$, яка цілком міститься в $Y,\ B \subset Y$.

Отже, маємо

$$\hat{\pi} \;=\; \max_{y \in B} p \cdot y \leqslant \max_{y \in Y} p \cdot y \;=\; \pi(p).$$

З іншого боку випливає, що

$$\hat{\pi} \,\geqslant p \cdot \bar{y} \,+\, \varepsilon_1 ||p||^2 \,= \pi(p) \,+\, \varepsilon_1 ||p||^2 \,> \pi(p),$$

де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Отож, ми одержали потрібну суперечність: в $y(p)$ не можна вибрати два різні виробничі процеси.

(viii) Нехай $y \in y(p)$ і $y' \in y(p')$. Тоді $p' \cdot y \leqslant p' \cdot y'$. Оскільки $p'_i \geqslant p_i$ для всіх $y_i \geqslant 0$ і $p'_j \leqslant p_j$ для всіх $y_j \leqslant 0$, тоді маємо

$p' \cdot y \geqslant p \cdot y$. Звідки випливає, що $\pi(p') = p' \cdot y' \geqslant p \cdot y = \pi(p)$.
$\square$

З доведеної теореми випливає, що необхідні вимоги до функції прибутку такі: опуклість, однорідність першого степеня і неперервність. Однак ці вимоги є і достатніми для того, щоб довільна функція $\pi : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}$ була функцією прибутку для деякої технології. За таку технологічну множину можна взяти вище розглянуту множину Y_π.

Перерахуємо необхідні умови

на *функцію* $\pi(\cdot)$: (P1) опукла, (P2) однорідна першого степеня і (P3) двічі неперервно диференційовна;

на *функцію* $y(\cdot)$: (S1) неперервно диференційовна, (S2) однорідна степеня нуль і (S3) матриця $\mathrm{D}y = (\partial y_l(p)/\partial p_j)$ — симетрична і додатно напіввизначена.

Теорема 2.4.2. (i) *Нехай $y(p) = \nabla\pi(p)$, де функція $\pi(\cdot)$ задовольняє умови $(P1), (P2), (P3)$. Тоді функція $y(\cdot)$ задовольняє умови $(S1), (S2), (S3)$, яким задовольняє функція пропозиції.*

(ii) *Нехай $y(\cdot)$ задовольняє умови $(S1), (S2), (S3)$. Тоді функція $\pi(\cdot)$ задовольняє умови $(P1), (P2), (P3)$.*

(iii) *Нехай функція $\pi(\cdot)$ задовольняє умови $(P1), (P2), (P3)$. Тоді множина $Y_\pi = \{ y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leqslant \pi(p)$ для всіх $p \gg 0 \}$ є технологічною множиною, яка породжена функцією прибутку $\pi(\cdot)$.*

Доведення. (i) Доведення залишаємо як вправу.

(ii) Продиференціюємо $\pi(p) = p \cdot y$ за змінною p_j, отримаємо

$$\frac{\partial \pi(p)}{\partial p_j} = y_j(p) + \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial y_l(p)}{\partial p_j} = y_j(p) + \sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial y_j(p)}{\partial p_l}.$$

Оскільки функція $y(\cdot)$ однорідна, то за формулою Ейлера останній доданок у виразі дорівнює нулю. Отже,

$$\frac{\partial \pi(p)}{\partial p_j} = y_j(p).$$

Далі з існування матриці $\mathrm{D}y = (\partial y_l(p)/\partial p_j)$ та її властивостей маємо, що функція $\pi(\cdot)$ задовольняє умови $(P1), (P2), (P3)$.

(iii) Позначимо через $y(p) = \nabla \pi(p)$. Тоді за формулою Ейлера

$$\pi(p) = p \cdot y(p).$$

Оскільки $p \cdot y(p) = \pi(p)$, то в точці $y(p)$ при заданій системі цін p маємо, що $p \cdot y(p) \geqslant p \cdot y$ для всіх $y \in Y_\pi$. З іншого боку, за характеристичною властивістю опуклих функцій маємо

$$\pi(p') \geqslant \pi(p) + \nabla \pi(p)(p' - p).$$

Оскільки $\nabla \pi(p) = y(p)$ і $p \cdot y(p) = \pi(p)$, то маємо

$$\pi(p') \geqslant \pi(p) + y(p)(p' - p) = y(p) \cdot p'.$$

Отже, для всіх $p' \in \mathbb{R}^L_{++}$ маємо, що $y(p) \in Y_\pi$, тобто $\pi(\cdot)$ — функція прибутку, яка відповідає технології Y_π. $\square$

З властивості (vii) теореми 2.4.1 випливає закон пропозиції

$$\frac{\partial y_i(p)}{\partial p_i} \geqslant 0, \quad i = 1, ..., L,$$

якщо ціна випуску продукції зростає, тоді зростає пропозиція випуску; якщо ціна чинника виробництва зростає, тоді попит на цей чинник спадає.

Приклад 2.4.1. Нехай множина вхідних потреб виробництва має вигляд $V(q) = \{z \in \mathbb{R}_+ : q \leqslant z^\alpha\}$. Тоді задача максимізації прибутку виглядає як

$$\Pi(z) = pf(z) - wz = pz^\alpha - wz \to \max, \quad z \geqslant 0.$$

Запишемо умови оптимальності першого порядку

$$p\alpha z^{\alpha-1} = w$$

й умови оптимальності другого порядку

$$p\alpha(\alpha - 1)z^{\alpha-2} < 0.$$

Звідки знаходимо умову на параметр α: $\alpha \in (0, 1)$ і функцію попиту на фактор виробництва

$$z(w, p) = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Отже, пропозиція випуску, пропозиція фірми і функція прибутку має вигляд

$$q(w, p) = \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \qquad y(w, p) = (-z(w, p), q(w, p))$$

$$\pi(w, p) = pq(w, p) - wz(w, p) = w\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Легко бачити, що функція прибутку однорідна першого степеня й опукла (матриця Гесе додатно напіввизначена). ▲

Приклад 2.4.2. Нехай множина вхідних потреб виробництва має вигляд $V(q) = \{\, z \in \mathbb{R}^2_+ : q \leqslant \sqrt{az_1 + bz_2}\,\}$, де $a > 0$, $b > 0$. Тоді задача максимізації прибутку виглядає як

$$\Pi(z) = p\sqrt{az_1 + bz_2} - w_1 z_1 - w_2 z_2 \to \max, \quad z \in \mathbb{R}^2_+.$$

Запишемо умови оптимальності першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{pa}{2\sqrt{az_1 + bz_2}} - w_1 \leqslant 0, \\ \frac{pb}{2\sqrt{az_1 + bz_2}} - w_2 \leqslant 0. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Оскільки цільова функція задачі ввігнута, то (2.4.2) одночасно є достатніми умовами оптимальності. З цих умов знаходимо функції попиту на фактори виробництва

$$z_1(w,p) = \begin{cases} \dfrac{p^2 a}{4w_1^2}, \quad \text{якщо } \dfrac{w_1}{a} < \dfrac{w_2}{b}, \\ \text{будь-яке } z_1 \text{ і } z_2 \quad \text{таке, що } z_1 + z_2 = \left(\dfrac{p\,a}{2w_1}\right)^2, \\ \qquad \text{якщо } \dfrac{w_1}{a} = \dfrac{w_2}{b}, \\ 0, \quad \text{якщо } \dfrac{w_1}{a} > \dfrac{w_2}{b}, \end{cases}$$

$$z_2(w,p) = \begin{cases} \dfrac{p^2 b}{4w_2^2}, \quad \text{якщо } \dfrac{w_2}{b} < \dfrac{w_1}{a}, \\ \text{будь-яке } z_2 \text{ і } z_1 \quad \text{таке, що } z_1 + z_2 = \left(\dfrac{p\,b}{2w_2}\right)^2, \\ \qquad \text{якщо } \dfrac{w_2}{b} = \dfrac{w_1}{a}, \\ 0, \quad \text{якщо } \dfrac{w_2}{b} > \dfrac{w_1}{a}. \end{cases}$$

Отже, пропозиція випуску і функція прибутку мають вигляд

$$q(w,p) = \frac{p}{2\min\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\}}, \qquad \pi(p,w) = \frac{p^2}{4\min\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\}}.$$

▲

Розділ 3

Мінімізація витрат фірми

Теорію фірми часто розглядають з позиції функції витрат. Такий підхід дещо спрощує проведення аналізу. Проте його можна критикувати.

З одного боку, співвідношення між вартістю вхідних факторів виробництва і рівнем випуску залежить від цін різних факторів виробництва, тому функція витрат змінюється зі зміною цих цін. Оскільки виробнича функція відображає технологічні обмеження незалежно від системи цін, то вона відображає більш фундаментальне поняття ніж функція витрат.

З іншого боку, теорія фірми, побудована на аналізі витрат, погано вписується в теорію загальної рівноваги, позаяк ціни розглянуті в ній ендогенні, а невизначені наперед.

Розгляд функції витрат дає змогу розглянути багато важливих властивостей.

У мікроекономіці технологію виробництва можна описувати через функцію прибутку, а можна описати і через функцію витрат, розв'язуючи задачу максимізації прибутку в два етапи. На першому етапі знаходять мінімальні витрати виробництва (і відповідні їм технологічні процеси), які дають змогу виробити заданий обсяг продукції. Відповідна залежність між випуском і цими (мінімальними) витратами називається функцією витрат. На другому етапі при відомій функції витрат і заданих цінах на фактори виробництва та випуск продукції знаходить той обсяг випуску, при якому прибуток буде найбільшим. Такий підхід до розв'язання задачі "планування" виробництва зручний при дослідженні моделей рівноваги в виробництві, а також при аналізі моделей недосконалої конкуренції, коли поведінка виробника має вплив на ринкові ціни.

3.1 Задача мінімізації витрат

Розглядаємо випадок виробництва одного виду продукції. Нехай технологія визначається виробничою функцією $Y = \{(-z, q) : q - f(z) \leqslant 0, \ z \in \mathbb{R}_{+}^{L-1}\}$ — замкнута і володіє властивістю вільного розміщення, що для випуску означає: якщо $q' > q$, то $V(q') \subset V(q)$. Нехай $w = (w_1, ..., w_{L-1})$ — вектор цін на ці фактори виробництва. Вважатимемо, що ринок факторів виробництва підпорядковується законам досконалої конкуренції, тому ціни w_l, $l = 1, ..., L-1$ задані для фірми екзогенно.[1]

Задача мінімізації витрат виробництва (cost minimization problem) (CMP)

$$w \cdot z \to \min, \quad z \in V(q). \tag{CMP}$$

Припустимо, що множина цін факторів виробництва, на якій існує розв'язок задачі (CMP) при заданому обсягу випуску, збігається з $\mathbb{R}_{++}^{L-1}$.

Для виробничої множини Y визначимо *функцію витрат* $c(w, q)$, яка кожному вектору (w, q) ставить у відповідність

[1] Припущення стосовно організації ринку в умовах досконалої конкуренції розглянемо пізніше.

число $c(w,q) = \min\{\, w \cdot z : z \in V(q) \,\}$ (оптимальне значення цільової функції задачі (CMP)). Відповідно множину розв'язків задачі (CMP) позначимо через $z(w,q) = \{\, z \in V(q) : w \cdot z = c(w,q) \,\}$ і назвемо *попитом на фактори виробництва* (або *функцією попиту*, якщо для кожного вектора (w,q) множина $z(w,q)$ складається з однієї точки).

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі (CMP). Поверхня рівня $H_{w,\hat{c}} = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1} : w \cdot z = \hat{c}\}$ цільової функції задачі (CMP), які називають *ізокостами*, утворюють сім'ю паралельних гіперплощин. Градієнт цільової функції всюди однаковий і дорівнює w та є нормаллю до кожної з цих гіперплощин. Пошук розв'язку задачі зводиться до знаходження мінімального числа c серед всіх таких чисел $\hat{c}$, що гіперплощина $H_{w,\hat{c}}$ має непорожний перетин із $V(q)$, тобто $c = \min\{\hat{c} : H_{w,\hat{c}} \cap V(q) \neq \emptyset\}$. При цьому $z(w,q) = H_{w,c} \cap V(q)$ — множина розв'язків задачі (CMP).

Зауважимо, що при пошуку числа c ніби відбувається переміщення гіперплошини $H_{w,\hat{c}}$ в напрямі протилежному до вектора w. На рис. 3.1.1 показано пошук розв'язку задачі (CMP) для випадку двох факторів виробництва.

Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ диференційовна за сукупністю змінних. Необхідні умови оптимальності першого порядку визначаються умовами Куна-Такера: якщо z^* є розв'язком задачі (CMP), тобто $z^* \in z(w,q)$, тоді існує множник Лагранжа $\lambda \geqslant 0$ такий, що

$$w_l \geqslant \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l} \ (=, \text{ якщо } z_l^* > 0), \ l = 1, \ldots, L-1, \qquad (3.1.1)$$

або у векторному вигляді

$$w \geqslant \lambda \nabla f(z^*) \qquad \text{і} \qquad [w - \lambda \nabla f(z^*)] \cdot z^* = 0. \qquad (3.1.2)$$

Якщо виробнича множина Y опукла (наприклад, якщо $f(\cdot)$ квазіввігнута), то умови (3.1.2) не тільки необхідні, а й достатні для того, щоб $z^* \in z(w,q)$.

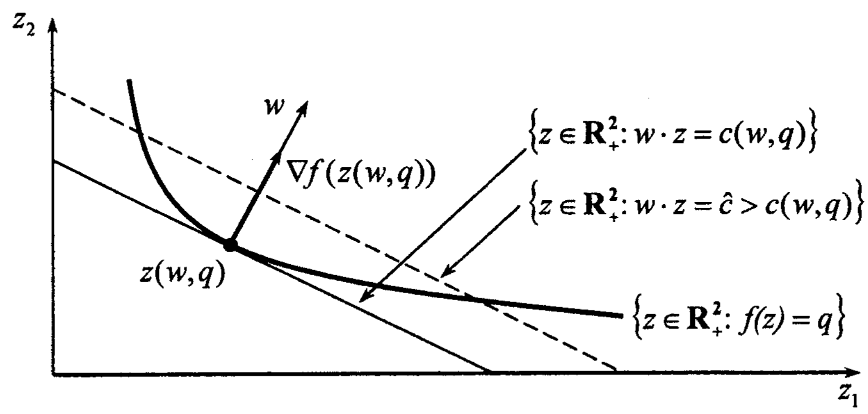


Рис. 3.1.1. $L = 3$. Задача мінімізації витрат

Оскільки виробляється лише один вид продукції, то можна вважати, що простір факторів виробництва $\mathbb{R}^{L-1}_+$ не є надлишковим. Тоді для рівнів випуску $q > 0$ вектор витрат $z^* \in \mathbb{R}^{L-1}_{++}$. У цьому випадку умова оптимальності набуває вигляду

$$w = \lambda\, \mathrm{PM}(z^*), \tag{3.1.3}$$

тобто вектор граничних продуктів у точці оптимуму пропорційний вектору цін на фактори виробництва.

Для нашої технології функція перетворення має вигляд $F(y) = q - f(z)$, де $y = (-z, q)$. Оскільки рівень випуску q фіксований, то граничну норму перетворення l-го чинника в k-й чинник $\mathrm{MRT}_{lk}(y) = \mathrm{MP}_l(z)/\mathrm{MP}_k(z)$ можна трактувати як міру, яка показує наскільки одиниць збільшиться (зменшиться) використання k-го чинника, якщо використання l-го чинника зменшити (збільшити) на одну одиницю без зміни рівня випуску продукції. Іншими словами, це є міра заміщення l-го чинника k-тим чинником при незмінному рівні випуску і позначається через $\mathrm{MRTS}_{lk}(z)$.

Зокрема з (3.1.3) випливає таке: якщо для двох факторів виробництва l і k $(z_l^*, z_k^*) \gg 0$, то $\mathrm{MRTS}_{l\,k}(z^*) = \dfrac{w_l}{w_k}$.

Множник Лагранжа λ, який відповідає розв'язку задачі (CMP), вимірює чутливість оптимального значення цільової функції $c(w,q)$ до зміни константи обмеження q

$$\lambda = \frac{\partial c(w,q)}{\partial q},$$

тобто множник λ дорівнює *граничним витратам виробництва* $\dfrac{\partial c(w,q)}{\partial q}$.

Приклад 3.1.1. Функція витрат для технології Коба-Дугласа. Задача мінімізації витрат має вигляд

$$c(w,q) = \min_{z_1,z_2} w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{за умови} \quad k z_1^\alpha z_2^\beta = q.$$

З умови обмеження знаходимо z_2 і підставляємо в цільову функцію, отримаємо

$$\min_{z_1} w_1 z_1 + w_2 k^{-\frac{1}{\beta}} q^{\frac{1}{\beta}} z_1^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Із умови оптимальності першого порядку

$$w_1 - \frac{\alpha}{\beta} w_2 k^{-\frac{1}{\beta}} q^{\frac{1}{\beta}} z_1^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = 0$$

знаходимо

$$z_1(w_1,w_2,q) = k^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}},$$

$$z_2(w_1,w_2,q) = k^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Отже, функція витрат має вигляд

$$\begin{aligned} c(w_1,w_2,q) &= w_1 z_1(w_1,w_2,q) + w_2 z_2(w_1,w_2,q) \\ &= k^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

▲

Приклад 3.1.2. Функція витрат для технології CES. Нехай виробнича функція має вигляд $f(z) = (z_1^\rho + z_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$. Тоді задача мінімізації витрат виглядає як

$$\min_{z_1,z_1} w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{за умови} \quad z_1^\rho + z_2^\rho = q^\rho.$$

Умови оптимальності першого порядку мають вигляд

$$\begin{aligned} w_1 - \lambda\,\rho\, z_1^{\rho-1} &= 0 \\ w_2 - \lambda\,\rho\, z_2^{\rho-1} &= 0 \\ z_1^\rho + z_2^\rho &= q^\rho. \end{aligned}$$

Звідки знаходимо z_1^ρ і z_1^ρ

$$z_1^\rho = w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} (\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}, \qquad z_2^\rho = w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} (\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}} \tag{3.1.4}$$

і підставляємо у виробничу функцію

$$(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right] = q^\rho.$$

Розв'язавши це рівняння стосовно $(\lambda\rho)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}$ і підставивши його в систему (3.1.4), знаходимо функції попиту на обидва фактори виробництва

$$
\begin{aligned}
z_1(w_1, w_2, q) &= w_1^{\frac{1}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{-1}{\rho}} q \\
z_2(w_1, w_2, q) &= w_2^{\frac{1}{\rho-1}} \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{-1}{\rho}} q.
\end{aligned}
$$

Отже, функція витрат має вигляд

$$
\begin{aligned}
c(w_1, w_2, q) &= w_1 z_1(w_1, w_2, q) + w_2 z_2(w_1, w_2, q) \\
&= q \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right] \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \\
&= q \left[w_1^{\frac{\rho}{\rho-1}} + w_2^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}} \\
&= q \left[w_1^r + w_2^r \right]^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}
$$

де $r = \rho/\rho - 1$. ▲

Приклад 3.1.3. Функція витрат для технології Леонтьєва. Нехай виробнича функція має вигляд $f(z) = \min\{az_1, bz_2\}$. Тоді задача мінімізації витрат виглядає як

$$
\min_{z_1, z_1} w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{за умови} \quad \min\{az_1, bz_2\} = q.
$$

Оскільки ціни на фактори виробництва додатні, то для рівня випуску q оптимальним вибором факторів виробництва є вектор $z(w, q) = (\frac{q}{a}, \frac{q}{b})$. Отже, функція витрат має вигляд

$$
c(w_1, w_2, q) = w_1 \frac{q}{a} + w_2 \frac{q}{b} = q \left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b} \right).
$$

▲

Приклад 3.1.4. Функція витрат для лінійної технології. Нехай виробнича функція має вигляд $f(z) = az_1 + bz_2$, $a > 0$, $b > 0$. Тоді задача мінімізації витрат має вигляд

$$\min_{z_1, z_1} w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{за умови} \quad az_1 + bz_2 = q.$$

Оскільки ціни на фактори виробництва додатні, то для рівня випуску q оптимальним вибором факторів виробництва є такий:

$z_1 = q/a$, $z_2 = 0$, якщо $w_1/w_2 < a/b$; $z_2 = q/b$, $z_1 = 0$, якщо $w_1/w_2 > a/b$; будь-яка комбінація z_1 і z_2, що задовольняє умову $az_1 + bz_2 = q$, якщо $w_1/w_2 = a/b$. Функція витрат має вигляд $c(w_1, w_2, q) = \min\{w_1/a, w_2/b\}q$.

Легко бачити, що для технології, яка визначається виробничою функцією $f(z) = \sqrt{az_1 + bz_2}$, функція витрат має вигляд

$$c(w, q) = q^2 \min\{\frac{w_1}{a}, \frac{w_2}{b}\}.$$

▲

Знайдемо вигляд функції витрат для випадку однорідної виробничої функції.

Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ однорідна степеня k і диференційовна. Тоді за формулою Ейлера маємо

$$kf(z^*) = \nabla f(z^*) \cdot z^*, \tag{3.1.5}$$

де $z^* \in z(w, q)$. Припустимо, що $z^* \gg 0$. Тоді з (3.1.5) і (3.1.3) випливає

$$kq = \frac{w}{\lambda} \cdot z^* \iff kq\lambda = w \cdot z^*$$

або
$$kq\frac{\partial c(w,q)}{\partial q} = c(w,q).$$
Звідки отримаємо
$$c(w,q) = C_0 q^{\frac{1}{k}},$$
де $C_0 = C_0(w)$ — витрати за одиницю випуску продукції.

3.2 Властивості функції витрат і попиту на фактори виробництва

Теорема 3.2.1. *Нехай технологічна множина* $Y = \{(-z,q) \in \mathbb{R}^L : q - f(z) \leqslant 0,\, z \in \mathbb{R}_+^{L-1}, q \geqslant 0\}$ *— замкнута і володіє властивістю вільного розміщення. Нехай* $c(w,q)$ *— функція витрат і* $z(w,q)$ *— попит на фактори виробництва для технології* Y. *Тоді:*

(i) $c(\cdot)$ *— однорідна першого степеня за змінною* w;

(ii) $c(w,q)$ *— неспадна за змінною* w *і за змінною* q;

(iii) $c(\cdot)$ *— ввігнута за змінною* w;

(iv) *якщо* $V(q)$ *опукла для кожного* q *(функція* $f(\cdot)$ *— квазіввігнута), то* $Y = \{(-z,q) \in \mathbb{R}^L : w\cdot z \geqslant c(w,q)$ *для всіх* $w \gg 0\}$;

(v) *відображення* $(w,q) \to z(w,q)$ *є однорідним нульового степеня за змінною* w;

(vi) *якщо множина* $V(q)$ *опукла , то* $z(w,q)$ *— опукла множина. Зокрема, якщо* $V(q)$ *строго опукла множина, то множина* $z(w,q)$ *має лише одну точку;*

(vii) (*Shepard's lemma*) *якщо* $z(\bar{w}, q)$ *складається з одного вектора, то* $c(w, q)$ *диференційовна за змінною* w *у точці* $\bar{w}$ *і* $\nabla_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$;

(viii) *якщо функція* $(w, q) \to z(w, q)$ *диференційовна за змінною* w *у точці* $\bar{w}$, *тоді* $\mathrm{D}_w z(\bar{w}, q) = \mathrm{D}_w^2 c(\bar{w}, q)$ — *симетрична і від'ємно напіввизначена матриця, для якої* $\mathrm{D}_w z(\bar{w}, q)\bar{w} = 0$;

(ix) *якщо* $f(\cdot)$ — *однорідна першого степеня* (*технологія характеризується сталою віддачею від масштабу*), *тоді* $c(w, q) = qc(w, 1)$ *і* $z(w, q) = qz(w, 1)$;

(x) *якщо* $f(\cdot)$ — *ввігнута функція, то* $c(\cdot)$ — *опукла функція за змінною* q (*зокрема, граничні витрати не спадають за змінною* q);

(xi) $c(\cdot)$ — *неперервна за змінними* w *і* q.

Доведення. Легко бачити, що функція витрат $c(w, q)$ є опорною функцією множини $V(q)$. Звідки випливають властивості (i), (iii) і (vii).

(iv) Побудуємо за допомогою функції витрат при заданому рівні випуску таку множину

$$V_c(q) = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1} : w \cdot z \geqslant c(w, q) \text{ для всіх } w \in \mathbb{R}_+^{L-1}\}.$$

При будь-якому рівні випуску q ця множина опукла і $V_c(q) = \mathrm{conv}V(q)$. Оскільки ціни на фактори виробництва є невід'ємні, то множина $V_c(q)$ задовольняє властивість вільного розміщення факторів виробництва (властивість монотонності)

$$V_c(q) \subseteq V_c(q) - \mathbb{R}_+^{L-1},$$

тобто, якщо $z \in V_c(q)$ і $z' \geqslant z$, то $z' \in V_c(q)$.

Отож, множини $V(q)$ і $V_c(q)$ можуть не збігатися, якщо вихідна множина вхідних потреб $V(q)$ не є опуклою або монотонною. Оскільки за умовою теореми множина $V(q)$ замкнута, опукла і задовольняє властивість монотонності, то $V(q) = V_c(q)$.

Властивість (viii) є наслідком властивості (vii), якщо функція попиту на фактори виробництва диференційовна. Властивість (vi)доводиться аналогічно до властивості (v) теореми 2.4.1.

(ii) Нехай z і z' — оптимальні набори факторів виробництва при цінах w і w'. Тоді для $w \leqslant w'$ маємо

$$c(w,q) = w \cdot z \leqslant w \cdot z' \leqslant w' \cdot z' = c(w',q).$$

Нехай $q \geqslant q'$, тоді $V(q) \subseteq V(q')$ і $c(w,q) = \min\limits_{z\in V(q)} w \cdot z \geqslant \min\limits_{z\in V(q')} w \cdot z = c(w,q')$.

(ix) Нехай $z^* \in z(w,1)$. Оскільки технологія характеризується сталою віддачею від масштабу, то для випуску q продукції необхідно qz^* факторів виробництва. Нехай $c(w,q) = w \cdot z' < w \cdot (qz^*)$. Тоді $w \cdot z'/q < w \cdot z^*$, що суперечить оптимальності чинників z^* для одиничного випуску. Отже, $c(w,q) = qc(w,1)$ і $z(w,q) = qz(w,1)$.

(x) Нехай q^1 і q^2 довільні рівні випуску і $q^\alpha = \alpha q^1 + (1-\alpha)q^2$ для $\alpha \in [0,1]$. Нехай

$$c(w,q^j) = \min\{w \cdot z : z \in V(q^j)\} = w \cdot z^j, \quad j = 1,2.$$

Якщо функція $f(\cdot)$ — ввігнута, то $z^\alpha = \alpha z^1 + (1-\alpha)z^2 \in V(q^\alpha)$. Отже,

$$\begin{aligned} c(w, q^\alpha) &= \min\{w \cdot z : \ z \in V(q^\alpha)\} = w \cdot \bar{z} \\ &\leqslant w \cdot z^\alpha = \alpha(w \cdot z^1) + (1-\alpha)(w \cdot z^2) \\ &= \alpha c(w, q^1) + (1-\alpha)c(w, q^2), \end{aligned}$$

тобто функція витрат $c(w, q)$ опукла за змінною q.

Властивість (xi) випливає з теореми про максимум **??** . □

Зауважимо, якщо навіть множини $V(q)$ і $V_c(q)$ не збігаються, то ця відмінність не є суттєвою з погляду опису поведінки виробника, оскільки $V_c(q)$ породжує ту саму функцію витрат, що і $V(q)$.

Справді, нехай $c^*(w, q) = \min\limits_{z \in V_c(q)} w \cdot z$. Тоді $c^*(w, q) \leqslant c(w, q)$. Припустимо, що для деякого вектора цін w' нерівність виконується строго, тобто існує вектор факторів виробництва $z' \in V_c(q)$ такий, що $w' \cdot z' = c^*(w', q) < c(w', q)$. Це суперечить визначенню множини $V_c(q)$, оскільки $w' \cdot z' \geqslant c(w', q)$.

Одержані результати обґрунтовують отримання деякої множини вхідних потреб виробництва $V_c(q)$ за допомогою функції витрат $c(w, q)$. Те, що $V(q)$ і $V_c(q)$ збігаються можливо лише у випадку, коли $V(q)$ опукла і володіє властивістю монотонності.

Зокрема, якщо функція витрат така, що $c(w, q) = qc(w, 1)$, то $V(q)$ визначає технологію, яка характеризується сталою віддачею від масштабу.

Як вправу показати таке: якщо функція витрат ввігнута і $c(w, 0) = 0$, то ця функція витрат породжена виробничою функцією, яка в точках оптимуму характеризується зростаючою віддачею від масштабу.

3.3 Достатні умови визначення функції витрат

Теорема 3.3.1. *Нехай функція* $\varphi(w,q)$ — *диференційовна і правильні умови*

(i) $\varphi(\alpha w, q) = \varphi(w,q)$ *для всіх* $\alpha > 0$;

(ii) $\varphi(w,q) \geqslant 0$ *для* $w \geqslant 0$ *і* $q \geqslant 0$;

(iii) $\varphi(w',q) \geqslant \varphi(w,g)$ *для* $w' \geqslant w$;

(iv) $\varphi(w,q)$ — *ввігнута за змінною* w.

Тоді $\varphi(w,q)$ — *функція витрат для технології*

$$V_\varphi(q) = \left\{ z \in \mathrm{R}_+^{L-1} : \, w \cdot z \geqslant \varphi(w,q) \quad \text{для всіх } w \geqslant 0 \right\}.$$

Доведення. За означенням приймемо

$$z(w,q) = \nabla_w \varphi(w,q) \quad \text{для } w \geqslant 0.$$

Оскільки $\varphi(w,q)$ однорідна першого степеня за змінною w, тоді за формулою Ейлера маємо

$$\varphi(w,q) = \nabla_w \varphi(w,q) \cdot w = z(w,q) \cdot w.$$

З властивості (iii) випливає, що $z(w,q) \geqslant 0$. За характеристичною властивістю ввігнутих функцій маємо

$$\varphi(w',q) \leqslant \varphi(w,q) + \nabla_w \varphi(w,q) \cdot (w' - w) \quad \text{для всіх } w' \geqslant 0.$$

Звідки отримаємо, що

$$\varphi(w',q) \leqslant w' \cdot z(w,q),$$

тобто $z(w,q) \in V_\varphi(q)$.

Якщо $z \in V_\varphi(q)$, то

$$\varphi(w, q) \leqslant w \cdot z.$$

З іншого боку,

$$\varphi(w, q) = w \cdot z(w, q).$$

Отже, $\varphi(w, q)$ функція витрат для технології $V_\varphi(q)$. □

3.4 Функція попиту на фактори виробництва

Нехай задано сукупність функцій попиту на фактори виробництва $\{z_i(w, q)\}_{i=1}^{L-1}$, які є однорідними нульового степеня за змінною w і матриця

$$\mathrm{D}_w z(w, q) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial w_j}\right)_{i,j=1}^{L-1}$$

симетрична і від'ємно напіввизначена.

Виникає запитання: для якої технології функції $\{z_i(w, q)\}_{i=1}^{L-1}$ є функціями попиту на фактори виробництва?

Розглянемо функцію

$$\varphi(w, q) = \sum_{i=1}^{L-1} w_i z_i(w, q).$$

Покажемо, що ця функція є функцією витрат, тобто задовольняє умови (i) – (iv) теореми 3.3.1.

(i)

$$\varphi(\alpha w, q) = \sum_{i=1}^{L-1} (\alpha w_i)\, z_i(\alpha w, q) = \alpha \sum_{i=1}^{L-1} w_i z_i(w, q) = \alpha \varphi(w, q).$$

(ii) Оскільки $z_i(w,q) \geqslant 0$ для всіх $w \geqslant 0$, то $\varphi(w,q) \geqslant 0$ для всіх $w \geqslant 0$.

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(w,q)}{\partial w_i} &= z_i(w,q) + \sum_{j=1}^{L-1} w_j \,\frac{\partial z_j(w,q)}{\partial w_i}\\ &= z_i(w,q) + \sum_{j=1}^{L-1} w_j \,\frac{\partial z_i(w,q)}{\partial w_j}\\ &= z_i(w,q) + w\cdot\nabla_w z_i(w,q)\\ &= z_i(w,q) \geqslant 0 \quad \text{для всіх } \ w \geqslant 0,\end{aligned}$$

тобто функція $\varphi(w,q)$ не спадає за змінною w.

(iv) Оскільки матриця Гесе функції $\varphi(w,q)$ за змінною w збігається з матрицею $\mathrm{D}_w z(w,q)$, яка симетрична і від'ємно напіввизначена, то функція $\varphi(w,q)$ ввігнута за змінною w.

Отже, побудована функція $\varphi(w,q)$ є функцією витрат для технології

$$V_\varphi(q) = \left\{z \in \mathrm{R}_+^{L-1} : \, w\cdot z \geqslant \varphi(w,q) \quad \text{для всіх } \ w \geqslant 0\right\}.$$

Приклад 3.4.1. Нехай

$$z_1(w,q) = \alpha q w_1^{\alpha-1} w_2^{1-\alpha}, \quad z_2(w,q) = (1-a) q w_1^{\alpha} w_2^{-\alpha}.$$

Легко бачити, що функції є однорідними нульового степеня за змінною w і матриця $\mathrm{D}_w z(w,q)$ симетрична і від'ємно напіввизначена.

Функція витрат має вигляд

$$c(w,q) = w_1 z_1(w,q) + w_2 z_2(w,q) = q w_1^{\alpha} w_2^{1-\alpha}.$$

Крім того, маємо

$$\frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{z_1}{\alpha q}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad \frac{w_2}{w_1} = \left(\frac{z_2}{(1-\alpha)q}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Звідки

$$\frac{z_1^{-\alpha}}{\alpha^{-\alpha} q^{-\alpha}} = \frac{z_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^{1-\alpha} q^{1-\alpha}}$$

або

$$q = [\alpha^{-\alpha}(1-\alpha)^{\alpha-1}] z_1^{\alpha} z_2^{1-\alpha} = k z_1^{\alpha} z_2^{1-\alpha}.$$

Отже, маємо технологію Коба-Дугласа. ▲

Розділ 4

Максимізація прибутку конкурентної фірми

4.1 Побудова ринку

Досконала конкуренція — це така організація ринку, коли кожна фірма може продати за заданою ринковою ціною стільки продукції, скільки вона хоче, а на рівень ринкової ціни вплинути не може ні один продавець, ні один покупець товару. [1]

Модель досконалої конкуренції ґрунтується на деяких припущеннях стосовно організації ринку.

1. Однорідність продукції. Однорідність продукції означає, що всі її одиниці з погляду покупця, абсолютно однакові, тобто товари різних фірм абсолютно взаємозамінні. Це означає, що

[1] Е.Чеберлин запропонував для класифікації ринків два критерії — взаємозамінність товарів, які пропонують різні фірми, і взаємозалежність цих фірм. Перший критерій — коефіцієнт цінової перехресної еластичності попиту на товари, які запропонували фірми i та j $\varepsilon^p_{ij} = \dfrac{p_j}{q_i}\dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}p_j}$, другий — коефіцієнтом кількісної перехресної еластичності $\varepsilon^q_{ij} = \dfrac{q_j}{p_i}\dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}q_j}$.

для кожного покупця крива байдужості має форму прямої, а для виробників перехресна еластичність попиту за ціною для будь-якої пари фірм близька до нескінченності

$$\varepsilon_{ij} = \frac{p_j}{q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}p_j} \to \infty,$$

де i, j — фірми, які виробляють однорідну продукцію, тобто невелике підвищення ціни понад ринковий рівень однією фірмою призводить до повного переведення попиту на цю продукцію інших фірм.

Однорідними продуктами є, наприклад, кава, пшениця, нафта деяких сортів або напівфабрикати (сталь, золото тощо), товари які продають на спеціалізованих товарних біржах.

В умовах досконалої конкуренції кожний продавець ціноодержувач: обернена крива попиту $p(q) = \bar{p}$ на його продукцію є пряма паралельна до осі випуску; фірма може продавати будь-який обсяг продукції за існуючою ринковою ціною. Оскільки дохід фірми пропорційний випуску продукції $R(q) = \bar{p}q$, то середній $AR(q) = \dfrac{R(q)}{q}$ і граничний дохід $\dfrac{\mathrm{d}R(q)}{\mathrm{d}q}$ від її продажу однаковий і дорівнює ринковій ціні

$$AR(q) = MR(q) = \bar{p}.$$

Тому в умовах досконалої конкуренції обернена крива попиту на продукцію фірми є одночасно кривою середнього та граничного доходу.

2. Свобода входу та виходу з ринку. Всі продавці і покупці володіють повним правом входити та виходити з ринку. Це означає, що фірми володіють правом почати виробництво продукції, продовжити або зупинити його. Покупці також мають ці права, вони можуть вільно купувати товар у будь-якій кількості.

З іншого боку, ні одна з фірм незобов'язана залишатися на ринку, якщо це не відповідає її бажанню. Свобода входу та виходу з ринку забезпечується мобільністю виробничих ресурсів, свободою їх перетоку з однієї галузі в іншу, туди де вища альтернативна цінність.

3. Досконала інформація. Суб'єкти ринку (продавці, покупці, власники факторів виробництва) мають досконалу інформацію про всі параметри ринку. Інформація поширюється миттєво і є безкоштовною.

4.2 Фірма в умовах досконалої конкуренції

В умовах досконалої конкуренції фірма є ціноодержувачем. Вона може максимізувати свій прибуток, пристосувавши рівень випуску до умов товарного ринку і (або) до зумовлених технологією власними витратами. Проте вона не може вплинути на ціну продукції. Знайдемо випуск, який забезпечує максимальний прибуток конкурентної фірми при заданих умовах ринку і технології. Зауважимо лише, що економісти називають максимумом прибутку максимум додатної різниці між доходом (виторгом) і витратами виробництва продукції та мінімум від'ємної різниці між цими величинами. Мінімум збитків фірма може розглядати як максимум прибутку, якщо отримати додатний прибуток не можна.

Оскільки прибуток фірми є різницею між виторгом і витратами, а крива витрат $c(w, q)$ характеризує мінімальні витрати при різних рівнях випуску і заданих цінах на фактори виробництва, то оптимальним рівнем випуску q^* є розв'язок задачі максимізації прибутку

$$\Pi(q) = p\,q \,-\, c(w, q) \to \max, \quad q \geqslant 0. \tag{4.2.1}$$

Необхідною умовою оптимальності для q^* у задачі (4.2.1) є

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(q^*)}{\mathrm{d}q} = p - \frac{\partial c(w,q^*)}{\partial q} \leqslant 0, \ (=, \text{ якщо } q^* > 0). \qquad (4.2.2)$$

Зокрема, якщо $q^* > 0$, то умова (4.2.2) вимагає, щоб граничні витрати дорівнювали ринковій ціні

$$\frac{\partial c(w,q^*)}{\partial q} = p. \qquad (4.2.3)$$

Якщо $c(w,q)$ — опукла за змінною q, то (4.2.2) є також достатньою умовою першого порядку для того, щоб q^* був оптимальним рівнем випуску для фірми.

Позначимо через $C(q) = c(w,q)$ — функцію витрат виробництва при фіксованих цінах w, а через $MC(q) = \dfrac{\partial c(w,q)}{\partial q}$ — функцію граничних витрат.

Оскільки для конкурентної фірми ціна, середній і граничний дохід однакові, тобто $p = AR = MR$, то необхідна умова першого порядку може бути подана і як рівність граничного виторгу граничним витратам

$$MR(q^*) = MC(q^*). \qquad (4.2.4)$$

Для ситуації, яку зображено на рис. 4.2.1, умова першого порядку справджується двічі, в точках A і C, для яких відповідають рівні випуску є $\hat{q}$ і q^*. Проте в першому випадку є максимальні збитки, в другому — прибуток. Для розпізнавання цих випадків використовують достатню умову оптимальності другого порядку, яка стверджує, що в точці максимуму прибутку $\Pi(\cdot)$ граничні витрати повинні зростати, тобто крива граничних витрат перетинає криву граничного доходу знизу (в точці C, а не в точці A на рис.4.2.1)

$$\frac{\mathrm{d}MC(q^*)}{\mathrm{d}q} > 0. \qquad (4.2.5)$$

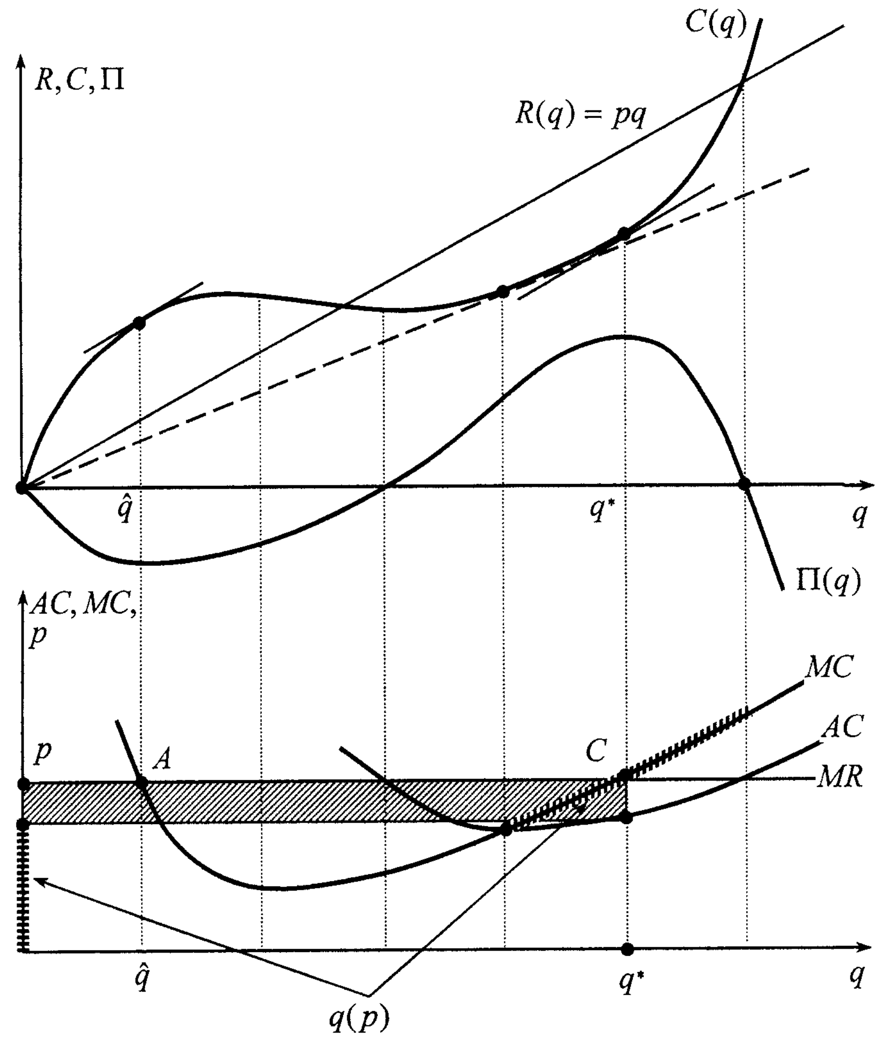


Рис. 4.2.1. Визначення оптимального випуску через дохід і криві витрат

Тому оптимальний випуск на рис. 4.2.1 перебуває в точці q^*, і характеризує оптимальний рівень пропозиції випуску при цінах випуску p і заданих платах w за фактори виробництва, які використали для побудови кривих витрат. Величину прибутку при оптимальному випуску q^* можна знайти як площу заштрихованого прямокутника за графіками середніх витрат $AC(q) = \dfrac{c(w,q)}{q}$ і середнього доходу. (Вершини прямокутника перебувають у точках з координатами (q^*, p), $(q^*, AC(q^*))$, $(0, AC(q^*))$, $(0, p)$).

Прибуток фірми можна записати у вигляді

$$\Pi(q) = q[p - AC(q)].$$

Отже, якщо $p < \min\limits_q AC(q)$, то найкращий вихід для фірми нічого не виробляти, а у випадку $p \geqslant \min\limits_q AC(q)$ пропозиція випуску визначається кривою граничних витрат $MC(q)$ (див. рис. 4.2.1).

Приклад 4.2.1. У прикладі 3.1.1 для технології Коба-Дугласа $q = z_1^\alpha z_2^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ знайшли функції попиту на фактори виробництва $z_i(w_1, w_2, q)$, $i = 1, 2$ і функцію витрат

$$c(w_1, w_2, q) = m\psi(w_1, w_2) q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \tag{4.2.6}$$

де

$$m = k^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[\left(\frac{\alpha}{\beta})\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right], \quad \psi(w_1, w_2) = w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}.$$

Розглянемо задачу максимізації прибутку (4.2.1)

$$\Pi(q) = p \cdot q - m\psi(w_1, w_2) q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \to \max, \quad q \geqslant 0. \tag{4.2.7}$$

Необхідна умова оптимальності першого порядку для цієї задачі має вигляд

$$p \leqslant m\psi(w_1, w_2)\frac{1}{\alpha+\beta}\, q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \quad (=, \text{ якщо } \ q > 0). \qquad (4.2.8)$$

Якщо $\alpha+\beta \leqslant 1$, то функція витрат $c(w, q)$ опукла за змінною q і умова (4.2.8) достатня умова максимуму прибутку.

Нехай $\alpha+\beta < 1$, тоді з (4.2.8) знаходимо єдиний оптимальний рівень випуску

$$q(w_1, w_2, p) = \left[\frac{(\alpha+\beta)p}{m\psi(w_1, w_2)}\right]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}.$$

Зокрема, функції попиту на фактори виробництва та функція прибутку мають вигляд

$$z_i(w_1, w_2, p) = z_i(w_1, w_2, q(w_1, w_2, p)), \quad i = 1, 2,$$
$$\pi(w_1, w_2, p) = pq(w_1, w_2, p) - w \cdot z(w_1, w_2, q(w_1, w_2, p)).$$

Нехай $\alpha+\beta = 1$ (технологія зі сталою віддачею від масштабу), тоді функція витрат $c(w, q) = qc(w, 1) = q[m\psi(w_1, w_2)]$ є лінійною за змінною q і при $p < m\psi(w_1, w_2)$ оптимальним рівнем випуску є $q = 0$; при $p > m\psi(w_1, w_2)$ умова оптимальності (4.2.8) не справджується і задача (4.2.7) розв'язку не має; при $p = m\psi(w_1, w_2)$ розв'язком задач (4.2.7) є кожний невід'ємний рівень випуску і прибуток дорівнює нулю.

Нехай $\alpha + \beta > 1$, тоді функція витрат $c(w, q)$ ввігнута за змінною q і розв'язок рівняння (4.2.8) є точкою мінімуму цільової функції задачі (4.2.7). Зокрема в цій точці прибуток від'ємний, що відповідає найбільшим втратам фірми. Тому найкраще для фірми — зупинити виробництво. ▲

Розділ 5

Сукупна технологія

5.1 Технологічна множина індустрії

Нехай виробничий сектор економіки складається з J фірм, кожна з яких має свою технологічну множину $Y_1, ..., Y_J$. Припустимо, що кожна множина Y_j непорожня, замкнута і володіє властивістю вільного розміщення.

Основною функцією економіки є розподіл сукупного виробництва за окремими виробниками. Розподіл виробництва відбувається вибором процесу y_j із технологічної множини Y_j для кожного $j = 1, ..., J$. Тоді сума

$$y = \sum_{j=1}^{J} y_j$$

зображає відповідний *сукупний виробничий процес.* Такі сукупні виробничі процеси утворюють *сукупну технологічну множину*

$$Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j = \left\{ y \in \mathbb{R}^L : y = \sum_{j=1}^{J} y_j, \;\; y_j \in Y_j, \;\; j = 1, ..., J \right\},$$

яку отримують як алгебраїчну суму множин Y_j, і є в цілому технологічною множиною всієї індустрії.

Нехай $\pi_j(\cdot)$ і $y_j(\cdot)$ відповідно функція прибутку і пропозиція фірми j для технології Y_j. Тоді *сукупна пропозиція фірм* (сукупна пропозиція індустрії) визначається як сума індивідуальних пропозицій

$$y(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p). \tag{5.1.1}$$

Обернена функція пропозиції індустрії $p(\cdot)$ визначає мінімальну ціну індустрії для кожного рівня випуску, а кожна з фірм вибирає рівень випуску з умови рівності ринкової ціни граничним витратам.

Тимчасово припустимо, що для кожного p множина $y_j(p)$, $j = 1, ..., J$ складається з одного виробничого процесу і функція $p \to y(p)$ диференційовна. Тоді як відомо матриця $\mathrm{D}y_j(p)$ — симетрична і додатно напіввизначена. Ці дві властивості зберігаються і для сукупної пропозиції, тобто матриця $\mathrm{D}y(p)$ симетрична і додатно напіввизначена.

Так само, як і для індивідуального виробництва, з додатної напіввизначеності матриці $\mathrm{D}y(p)$ випливає *закон сукупної пропозиції:* якщо ціна зростає, тоді сукупна пропозиція випуску зростає, а сукупний попит на фактори виробництва спадає.

У недиференціальній формі закон пропозиції для фірми j має вигляд

$$(p - p') \cdot [\, y_j(p) \;-\; y_j(p') \,] \geqslant 0 \tag{5.1.2}$$

для всіх p, p', і $j = 1, ..., J$. Тоді просумувавши (5.1.2) за всіма j, дістанемо закон сукупної пропозиції

$$(p - p') \cdot [\, y(p) \;-\; y(p') \,] \geqslant 0 \quad \text{для всіх } \; p, \, p'.$$

5.2 Функція пропозиції індустрії

Нехай $\pi^*(p) = \max\{p \cdot y : y \in Y\}$ і $y^*(p) = \{y \in Y : p \cdot y = \pi^*(p)\}$ відповідно — функція прибутку і сукупна пропозиція всієї індустрії.

Теорема 5.2.1. *Для всіх $p \gg 0$, маємо*

$$\text{(i)} \quad \pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p), \qquad \text{(ii)} \quad y^*(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j(p).$$

Доведення. (i) Зазначимо, якщо виробничий процес $y \in Y$, то $y = \sum\limits_j y_j$, де $y_j \in Y_j$, $j = 1, ..., J$. Оскільки $\pi^*(\cdot)$ — функція прибутку для сукупної технологічної множини Y, тоді $\pi^*(p) \geqslant p \cdot y = p \cdot (\sum\limits_j y_j) = \sum\limits_j p \cdot y_j$ для кожного $y \in Y$. Отже, $\pi^*(p) \geqslant \sum\limits_j \pi_j(p)$. Навпаки, для кожного виробничого процесу $y \in Y$, $y = \sum\limits_j y_j$ маємо, що $p \cdot y = p \cdot (\sum\limits_j y_j) = \sum\limits_j (p \cdot y_j) \leqslant \sum\limits_j \pi_j(p)$. Звідки $\pi^*(p) \leqslant \sum\limits_j \pi_j(p)$. Зіставивши отримані нерівності, маємо, що $\pi^*(p) = \sum\limits_j \pi_j(p)$.

(ii) Для доведення рівності покажемо, що виконується вкладення $\sum\limits_j y_j(p) \subset y^*(p)$ і $y^*(p) \subset \sum\limits_j y_j(p)$. Нехай $y_j \in y_j(p)$, $j = 1, ..., J$. Тоді $p \cdot (\sum\limits_j y_j) = \sum\limits_j (p \cdot y_j) = \sum\limits_j \pi_j(p) = \pi^*(p)$. Отже, $y = \sum\limits_j y_j \in y^*(p)$ і зокрема $\sum\limits_j y_j(p) \subset y^*(p)$. Навпаки. Нехай $y \in y^*(p)$, $y = \sum\limits_j y_j$, де $y_j \in Y_j$, для всіх j. Тому $p \cdot (\sum\limits_j y_j) = \pi^*(p) = \sum\limits_j \pi_j(p)$ і для кожного j маємо, що $p \cdot y_j \leqslant \pi_j(p)$. Отож, $p \cdot y_j = \pi_j(p)$ для кожного j. Звідки

$y_j \in y_j(p)$ для всіх j і $y \in \sum\limits_j y_j(p)$, тобто $y^*(p) \subset \sum\limits_j y_j(p)$. $\square$

Тлумачення теореми дає результат децентралізації: виробничі процеси, які оптимальні з погляду всього виробничого сектора економіки, оптимальні і з погляду кожного виробника (фірми).

Зауважимо, якщо $f_j(\cdot)$ — виробнича функція j-ї фірми, то агрегована фірма матиме виробничу функцію $f(\cdot)$, яка отримується як значення задачі

$$\sum_j f_j(z_j) \to \max, \quad z_j \in \mathbb{R}_+^{L-1}, \quad \sum_j z_j = z.$$

Побудована так функція $f(\cdot)$ буде виробничою функцією, відповідної сукупної технологічної множини Y.

Аналогічно, якщо $c_j(\cdot)$ — функція витрат j-ї фірми, то агрегована фірма буде мати функцію витрат $c(\cdot)$, яка отримується як значення такої задачі

$$\sum_j c_j(w, q_j) \to \max, \quad q_j \geqslant 0, \quad \sum_j q_j = q.$$

Приклад 5.2.1. Розглянемо конкурентну індустрію з двох фірм. Функція витрат першої фірми $c_1(q_1) = q_1^2$, другої — $c_2(q_2) = 2q_2^2$. Тоді функція пропозиції фірм, відповідно, $q_1 = p/2$, $q_2 = p/4$, а сукупна пропозиція індустрії $q = 3p/4$. Для рівня випуску індустрії q граничні витрати такі $4q/3$.

Це саме можна отримати так. Функцію витрат індустрії знаходимо як розв'язок задачі

$$q_1^2 + 2q_2^2 \max, \quad q_1 \geqslant 0, q_2 \geqslant 0, \; q_1 + q_2 = q.$$

Звідки маємо: $q_1 = q/3$, $q_2 = 2q/3$, $c_1(q) = q^2/9$, $c_2(q) = 8q^2/9$, а функція витрат індустрії така $c(q) = 2q^2/3$. Звідси знаходимо пропозицію індустрії $q = 3p/4$. ▲

Розділ 6

Порівняльна статика фірми

Методом порівняльної статики визначимо чутливість оптимального попиту на фактори виробництва та пропозиції випуску фірми до змін параметрів задачі. Цей метод застосовують у неокласичній теорії фірми для того, щоб визначити як впливає на оптимальні кількості продуктів зміна L параметрів — цін чинників виробництва і випуску.

6.1 Довгострокова задача для фірми

Нехай технологія виробництва описується виробничою функцією $f(\cdot)$. Припустимо, що технологічна множина визначається виробничою функцією $Y = \{(-z, q) : q - f(z) \leqslant 0,\ z \in \mathbb{R}_{+}^{L-1}\}$ — замкнута і володіє властивістю вільного розміщення. Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ двічі неперервно диференційовна за сукупністю змінних і строго ввігнута в особливій області $\mathcal{D}$.

Нехай $p > 0$ — ціна за одиницю випуску і $w \in \mathbb{R}_{++}^{L-1}$ — вектор цін за одиницю факторів виробництва. Ціль фірми — максимізувати прибуток шляхом вибору обсягу факторів виробництва з простору факторів виробництва $\mathbb{R}_{+}^{L-1}$ при заданій виробничій функції $f(\cdot)$ і заданих цінах (w, p).

Довгострокова задача для фірми має вигляд

$$\Pi(z) \;=\; p\,f(z) \;-\; w\cdot z \to \max, \quad z \in \mathbb{R}^{L-1}_{+}. \quad (6.1.1)$$

Необхідними умовами для максимізації прибутку є умови Куна-Такера:

якщо z^* є розв'язком задачі (6.1.1), то

$$p\mathrm{MP}_i(z^*) = p\,\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_i} \leqslant w_i \quad (=,\ \text{якщо}\ z_i^* > 0), \qquad (6.1.2)$$

або у векторному вигляді

$$p\,\nabla\mathrm{MP}(z^*) \leqslant w, \quad z^* \cdot [\,p\,\nabla\mathrm{MP}(z^*) \;-\; w\,] \;=\; 0,$$

де $p\mathrm{MP}_i(z)$ — вартість граничного продукту виду i в точці z простору факторів виробництва, тобто вартість додаткового випуску отриманого при використанні додаткового чинника виробництва виду i.

Припустимо, що всі фактори виробництва використовують для випуску продукції, тобто $z^* \gg 0$,[1] тоді умови оптимальності першого порядку мають вигляд

$$p\,\nabla f(z^*) \;=\; p\,\mathrm{MP}(z^*) \;=\; w, \qquad (6.1.3)$$

тобто оптимальний прибуток фірми досягається тоді, коли вартість граничних продуктів дорівнює платі за вхідні фактори виробництва.

[1] Оскільки фірма виробляє лише один вид продукції, тоді вхідний виробничий фактор, який не бере участі у випуску продукції, можна виключити з розгляду, зменшивши вимір простору факторів виробництва на одиницю.

Точка z^* з особливої області $\mathcal{D}$, яка задовольняє умову (6.1.3), справджує достатню умову оптимальності другого порядку: матриця Гесе цільової функції $\mathrm{D}^2\Pi(z^*) = p\,H(z^*)$ є від'ємно визначена, тобто z^* — розв'язок задачі (6.1.1).

Отже, оптимальний вибір факторів виробництва z^* знаходимо як розв'язок системи рівнянь

$$\psi_j(z,w,p) = p\,\mathrm{MP}_j(z) - w_j = 0, \quad j = 1,...,L-1, \tag{6.1.4}$$

для якої матриця Якобі $J = p\,H(z)$ в особливій області $\mathcal{D}$ невироджена. Отже, оптимальні обсяги факторів виробництва можна знайти як функції від цін (w,p)

$$z_i^* = z_i^*(w,p), \quad i = 1,...,L-1. \tag{6.1.5}$$

Зокрема, функції $z_j^*(w,p)$, $j = 1,...,L-1$ — неперервно диференційовні за сукупністю змінних. Рівняння (6.1.5) визначають *функції попиту на фактори виробництва.* Підставляючи ці функції попиту у виробничу функцію $f(\cdot)$, знаходимо оптимальний рівень випуску як функцію від цін (w,p)

$$q^* = f(z^*(w,p)) = q^*(w,p), \tag{6.1.6}$$

тобто *функцію пропозиції випуску.*

Отож, функція прибутку і функція пропозиції фірми має вигляд

$$\pi(w,p) = p\,q^*(w,p) - w\cdot z(w,p) \tag{6.1.7}$$

$$(w,p) \xrightarrow{y(\cdot)} y(w,p) = (\,-z^*(w,p), q^*(w,p)\,). \tag{6.1.8}$$

Зокрема, за теоремою про неявну функцію, функція пропозиції фірми диференційовна за сукупністю змінних і має вигляд

$$\mathrm{D}y(w,p) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial z_1^*}{\partial w_1} & \dots & -\dfrac{\partial z_1^*}{\partial w_{L-1}} & -\dfrac{\partial z_1^*}{\partial p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\dfrac{\partial z_{L-1}^*}{\partial w_1} & \dots & -\dfrac{\partial z_{L-1}^*}{\partial w_{L-1}} & -\dfrac{\partial z_{L-1}^*}{\partial p} \\ \\ \dfrac{\partial q^*}{\partial w_1} & \dots & \dfrac{\partial q^*}{\partial w_{L-1}} & \dfrac{\partial q^*}{\partial p} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mathrm{D}_w z^* & -\mathrm{D}_p z^* \\ \mathrm{D}_w q^* & \mathrm{D}_p q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{p}\, H^{-1} & \dfrac{1}{p}\, H^{-1}\mathrm{MP}^\tau \\ \dfrac{1}{p}\, H^{-1}\mathrm{MP}^\tau & \dfrac{1}{p}\, \mathrm{MP} \cdot H^{-1}\mathrm{MP}^\tau \end{pmatrix}.$$

Ця матриця характеризує в явному вигляді показники порівняльної статики в термінах ціни продукції, матриці оберненої до матриці Гесе і вектора граничного продукту.

6.2 Порівняльна статика

За властивістю (vii) теореми 2.4.1, матриця $\mathrm{D}y(w,p)$ — симетрична і додатно напіввизначена[1]. Звідки маємо

$$\frac{\partial z_j^*}{\partial w_j} \leqslant 0, \quad j = 1, ..., L-1, \qquad \frac{\partial q^*}{\partial p} \geqslant 0.$$

Отже, *збільшення плати за вхідний фактор виробництва деякого виду завжди призводить до зменшення попиту на цей*

[1] Це також випливає з того, що матриця $H^{-1}(z^*)$, яка обернена до матриці $H(z^*)$, від'ємно визначена.

фактор, а зростання ціни випуску продукції завжди призводить до збільшення пропозиції випуску. Оскільки, на відміну від споживача, фірма не задовольняє бюджетне обмеження, то для фірми немає чинників виробництва, які були б "продуктами Гіфена". Тому криві попиту на фактори виробництва завжди спадають.

Оскільки

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_i} \frac{\partial z_i^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{L-1} \mathrm{MP}_i(z^*) \frac{\partial z_i^*}{\partial p} \geqslant 0, \qquad (6.2.1)$$

то в особливій області, де граничні продукти невід'ємні, деякі $\dfrac{\partial z_j^*}{\partial p}$ повинні бути додатними

$$\frac{\partial z_j^*}{\partial p} > 0 \text{ для деякого } j, \quad j = 1, ..., L-1.$$

Отож, *зростання ціни на продукцію завжди спричиняє збільшення оптимального рівня випуску продукції (крива пропозиції продукції має зростати) і, отже, до збільшення попиту на деякі види факторів виробництва.*

Назвемо вхідний фактор виробництва j *малоцінним,* якщо

$$\frac{\partial z_j^*}{\partial p} < 0.$$

З симетричності матриці $\mathrm{D}y(w, p)$ випливає, що

$$\frac{\partial q^*}{\partial w_i} = -\frac{\partial z_i^*}{\partial p}, \quad i = 1, ..., L-1, \qquad (6.2.2)$$

тому *зростання ціни на продукцію зумовлює збільшення (зменшення) попиту на певні види факторів виробництва* *тоді і тільки тоді, коли підвищення плати за цей вид факторів спричиняє скорочення (нарощування) оптимального випуску.* Зокрема, *підвищення плати за малоцінні фактори виробництва спричиняє нарощування випуску продукції.* З (6.2.1) і (6.2.2) маємо

$$\frac{\partial q^*}{\partial p} = -\sum_{i=1}^{L-1} \mathrm{MP}_i(z^*)\frac{\partial q^*}{\partial w_i} \geqslant 0, \tag{6.2.3}$$

тому в особливій області

$$\frac{\partial q^*}{\partial w_i} < 0 \text{ для деякого } i, \quad i = 1, ..., L-1,$$

тобто *підвищення плати за деякий вид факторів виробництва спричинить скорочення випуску продукції.*

З симетричності матриці $\mathrm{D}y(w,p)$ маємо, що

$$\frac{\partial z_i^*}{\partial w_j} = \frac{\partial z_j^*}{\partial w_i}, \quad i, j = 1, ..., L-1,$$

тому вплив зміни оплати за фактори виробництва j-го виду на попит, який запропоновано на фактори виробництва i-го виду, і вплив зміни оплати за фактори виробництва i-го виду на попит, який запропоновано на фактори j-го виду, однакові. За означенням вхідні фактори виробництва j-го і i-го видів *взаємозамінні* (*взаємодоповнюючі*), якщо $\dfrac{\partial z_i^*}{\partial w_j} > 0$ $\left(\dfrac{\partial z_i^*}{\partial w_j} < 0\right)$. Наприклад, у випадку, коли оплата за вхідний фактор виробництва j-го виду збільшується так, що розміри попиту на ці фактори зменшується, то попит на вхідний фактори i-го виду збільшується (зменшується), якщо фактори виробництва взаємозамінні (взаємодоповнюючі).

Розділ 7

Ефективні виробничі процеси і ціни

7.1 Ефективний розподіл і ціни

Нехай технологія виробництва описується виробничою множиною Y.

Означення 7.1.1. Виробничий процес $y \in Y$ називається ефективним (технічно ефективним), якщо немає іншого виробничого процесу $\acute{y} \in Y$ такого, що $\acute{y} \geqslant y$ і $\acute{y} \neq y$.

Для виробничих процесів у термінах запасів процес (z, q) називається ефективним для технології Y, якщо немає іншого процесу з запасами $(v, u) \in Y$ такого, що $(-v, u) \geqslant (-z, q)$.

Поняття ефективності не потребує підрахунку прибутку в якій-небудь системі цін. Визначення ефективності ґрунтується на порівнянні кількості фізичних факторів виробництва і випуску. Проте не можна говорити, що підрахунок прибутку не пов'язаний з оцінкою ефективності процесу. При відповідному виборі системи цін ці два підходи до оцінки процесу еквівалентні. Існування такої системи цін дає змогу поєднати концепцію ефективності та прибутковості. Відповідне формальне обґрунтування дають такі теореми.

Теорема 7.1.1. *Нехай Y — технологічна множина в $\mathbb{R}^L$. Тоді правильні твердження:*

(i) *якщо процес $y \in Y$ максимізує прибуток у $\in y(p)$ при деякому векторі цін $p \gg 0$, то y — ефективний виробничий процес;*

(ii) *нехай Y — опукла множина, тоді кожний ефективний виробничий процес $y \in Y$ є розв'язком задачі максимізації прибутку при деякому ненульовому векторі цін $p \geqslant 0$.*

Доведення. (i) Припустимо протилежне. Тоді існує $\acute{y} \in Y$ такий, що $\acute{y} \geqslant y$ і $\acute{y} \neq y$. Оскільки $p \gg 0$, то $p \cdot \acute{y} > p \cdot y$, що суперечить тому, що y максимізує прибуток.

(ii) Нехай $y \in Y$ ефективний виробничий процес. Розглянемо множину $Z = \{\, \acute{y} \in \mathbb{R}^L : \acute{y} \gg y \,\}$. Множина Z опукла. Оскільки y ефективний виробничий процес, то $Y \cap Z = \emptyset$. Тоді за теоремою про відокремлення опуклих множин існує вектор $p \in \mathbb{R}^L,\ p \neq 0$ такий, що $p \cdot \acute{y} \geqslant p \cdot y''$ для всіх $\acute{y} \in Z$ і $y'' \in Y$. Зокрема маємо, що $p \cdot \acute{y} \geqslant p \cdot y$ для всіх $\acute{y} \in Z$. Звідки випливає, що $p \geqslant 0$. Справді, якщо існує $p_j < 0$ для деякого j, то матимемо, що $p \cdot \acute{y} < p \cdot y$ для деякого $\acute{y} \gg y$ такого, що $\acute{y}_j - y_j$ досить велика.

Візьмемо будь-який процес $y'' \in Y$. Тоді $p \cdot \acute{y} \geqslant p \cdot y''$ для всіх $\acute{y} \in Z$. Оскільки $\acute{y}$ можна вибрати досить близьким до y, то в замиканні маємо, що $p \cdot y \geqslant p \cdot y''$ для всіх $y'' \in Y$. Отже, $y \in y(p)$, тобто є розв'язком задачі максимізації прибутку для вектора цін $p \geqslant 0$. □

Зауваження 7.1.1. Теорема 2.5.1 (ii) не гарантує існування додатного вектора цін $p \gg 0$. Справді, розглянемо виробничий процес $\hat{y} = (1, -1, 0)$, який ефективний для технологічної множини $Y = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3^2 \leqslant 0, \ y_3 \geqslant 0 \}$. Щоб це перевірити, припустимо $y \geqslant \hat{y}$ для деякого $y \in Y$. Тоді $y_1 \geqslant 1, \ y_2 \geqslant -1, \ y_3 \geqslant 0$ і $0 \leqslant y_1 + y_2 + y_3^2 \leqslant 0$. Звідки маємо $y_1 + y_2 = y_3^2 = 0$, що в поєднанні з $y_1 \geqslant 1, \ y_2 \geqslant -1$, дає $y_1 = 1 \ y_2 = -1, \ y_3 = 0$. Отже, немає ні одного процесу множини Y такого, що $y \geqslant \hat{y}$ і $y \neq \hat{y}$. Нехай $p = (p_1, p_2, p_3) \geqslant 0$ вектор цін, який відповідає ефективному процесу $\hat{y}$ згідно з теоремою. Тоді виконується співвідношення

$$p_1 - p_2 \geqslant p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 \quad \text{для всіх } y \in Y, \tag{7.1.1}$$

зокрема для вектора y, координати якого задовольняють умови $y_1 = 1, \ y_2 = -1 - y_3^2$, де $y_3 > 0$ - довільне додатне число. Для цього вектора з нерівності (7.1.1) після ділення на y_3 маємо

$$p_2 \, y_3 \geqslant p_3 \geqslant 0.$$

Оскільки число $y_3 > 0$ довільне, то одержуємо, що $p_3 = 0$.

Отож, немає ні одного додатного вектора цін p, для якого задача максимізації прибутку на Y має розв'язком виробничий процес $\hat{y}$.

Насправді, шуканим вектором цін є $p = (1, 1, 0)$.

Незважаючи на правильність зробленого зауваження, в деяких окремих ситуаціях ефективним виробничим процесам завжди можна поставити у відповідність додатний вектор цін $p \gg 0$.

Теорема 7.1.2. *Нехай технологічна множина Y — замкнутий опуклий конус і виробничий процес $y = 0$ ефективний в Y, тоді існує вектор цін $p \gg 0$ такий, що $0 \in y(p)$.*

Зауваження 7.1.2. Ефективність нульового виробничого процесу в Y, про який йдеться в теоремі, рівносильна нездійсненності "рогу достатку".

Описувати виробництво в термінах технологічних множин, яке ми розглянули раніше, запропонували порівняно недавно. Натомість класичні роботи з математичної економіки ґрунтуються на понятті виробничої функції.

Нехай технологічна множина Y замкнута й опукла. Легко бачити, що кожний ефективний процес в Y є граничною точкою множини Y. Отже, множина всіх ефективних процесів є частиною границі множини Y — загалом вона зображає деяку гіперповерхню в просторі $\mathbb{R}^L$.

Нехай рівняння цієї гіперплощини має вигляд

$$F(z_1, \dots, z_k, q_1, \dots, q_m) = 0, \quad k + m = L.$$

Функція $F(\cdot)$, стосовно якої припускаємо, що вона достатньо раз неперервно диференційовна, є неокласичною виробничою функцією і одним із способів опису багатопродуктової фірми. Для того щоб відобразити загальні закономірності виробництва припускається, що

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} \leqslant 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q_i} \geqslant 0, \; j = 1, \dots, k; \; i = 1, \dots, m.$$

Припустимо, що виробляється лише один вид продукції і використовується $L-1$ вхідних факторів виробництва. Тоді рівняння цієї гіперповерхні визначає виробничу функцію

$$q \,-\, f(z_1, ..., z_{L-1}) \,=\, 0.$$

У класичній математичній економіці функція $f(\cdot)$ загалом припускається ввігнутою. Це припущення повністю відповідає опуклості технологічної множини.

Припустимо, що технологія визначається ввігнутою виробничою функцією $f(z)$. Нехай $\bar{z}$ фіксований вектор факторів виробництва і $\bar{q} = f(\bar{z})$ — відповідний рівень випуску. Нехай функція $f(\cdot)$ диференційовна в точці $z = \bar{z}$ і $\nabla f(\bar{z}) \gg 0$. Тоді виробничий процес $\bar{y} = (-\bar{z}, \bar{q})$ ефективний. Справді, нехай існує допустимий для заданої технології виробничий процес $y' = (-z', q')$ такий, що $y' \geqslant \bar{y}$, $y' \neq \bar{y}$, тобто $z' \leqslant \bar{z}$, $z \neq \bar{z}$ і $q' \geqslant \bar{q}$. Тоді за характеристичною властивістю ввігнутих функцій маємо

$$f(z') \leqslant f(\bar{z}) + \nabla f(\bar{z}) \cdot (z' - \bar{z})$$

або

$$q' \leqslant \bar{q} + \nabla f(\bar{z}) \cdot (z' - \bar{z}).$$

Звідки випливає, що $q' < \bar{q}$. Отримана суперечність доводить, що $\bar{y}$ ефективний виробничий процес.

Нехай ціна випуску дорівнює 1. Тоді для ефективного виробничого процесу, який максимізує прибуток, вектор цін чинників виробництва дорівнює граничній продуктивності, тобто $w = \nabla f(\bar{z})$.

7.2 Теорема про заміщення

Як ми бачили, існує тісний зв'язок між вибором ефективного виробничого процесу і максимізацією прибутку фірми при деякій системі цін. В економіці важливу роль відіграють ціни, тому вибір ефективних процесів відбувається з принципу максимізації прибутку. Ефективний процес, який реалізується в тій чи інші мірі, буде залежати від системи цін, тому при зміні цін відбудеться зміна виробничого процесу.

З цього погляду модель Леонтьєва характерна тим, що вона ґрунтується на припущенні: кожна галузь має один і лише один виробничий процес. Змога вибору керівником галузі зводиться до вибору лише рівня інтенсивності, з яким буде реалізований процес. Отож, у моделі Леонтьєва немає альтернативних процесів.

Теорема Самуельсона про заміщення, яку наведемо нижче, для моделі Леонтьєва стверджує, якщо в кожній галузі припустити наявність альтернатив на множині виробничих процесів, то достатньо для кожної галузі обмежитися використанням одного процесу. Саме в кожній з L галузей можна виділити такий процес, що спільне функціонування цих L фіксованих процесів буде достатнім для того, щоб при відповідному виборі інтенсивностей отримати всі ефективні вектори випусків і чинників виробництва, які допустимі для заданої технології. Додатково до зроблених припущень моделі, припустимо, що праця є єдиним абсолютно необхідним чинником виробництва.

Нехай Y_j — технологічна множина j-ї галузі, яка складається з процесів у термінах запасів (l_j, z^j, q^j), де $l_j \in \mathbb{R}_+$ — кількість трудових ресурсів, $z^j = x_j a^j \in \mathbb{R}^L_+$ — вектор валових витрат, $q^j \in \mathbb{R}^L_+$ — вектор валового випуску, координати якого задовольняють умови: $q^j_i = 0$, якщо $i \neq j$ (відсутність спільного випуску). Припустимо, що Y_j — замкнутий опуклий конус і $(l_j, z^j, q^j) \in Y_j$, $l_j = 0$, то $q^j = 0$.

Технологічна множина національної економіки $Y = \sum\limits_j Y_j$, а множина

$$Y_+ = \{(l, q - z) \in Y : \, q \geqslant z\}$$

— "продуктивна частина" множини Y, де l — вектор витрат трудових ресурсів, $q - z$ вектор чистих випусків.

Теорема 7.2.1 (Теорема про заміщення). *Нехай технологія Y продуктивна в тому розумінні, що множина Y_+ містить процес з додатним вектором чистих випусків, тоді існують базисні процеси $(1, \tilde{z}^j, \tilde{q}^j) \in Y_j$, $j = 1, \ldots, L$, які задовольняють такі умови:*

(i) *множина Y_+^e всіх ефективних процесів із Y_+ є конічна оболонка множини, яка складаються з базисних процесів, тобто $Y_+^e = \mathrm{cone}\{(1, \tilde{z}^1, \tilde{q}^1), \ldots, (1, \tilde{z}^L, \tilde{q}^L)\}$;*

(ii) *для довільного невід'ємного вектора кінцевого попиту c існує невід'ємний вектор трудових витрат l такий, що $(l, c) \in Y_+^e$.*

Розділ 8

Виробничі функції

Виробнича функція характеризує суто технічну залежність між кількістю вхідних чинників виробництва й обсягом виготовленої за одиницю часу (день, місяць, рік) продукції. Вона описує множину *технічно ефективних виробничих процесів.*

Нагадаємо, що виробничий процес y технічно ефективніший порівняно з процесом $\acute{y}$ для заданої технології, якщо він передбачає використання хоч одного чинника виробництва менше, а всіх інших не в більшій кількості ніж процес $\acute{y}$. Якщо виробничий процес y передбачає використання одних чинників у більшій, а інших у меншій кількості, ніж виробничий процес $\acute{y}$, то ці процеси не можна порівняти за технічною ефективністю і їх розглядають як технічно ефективні та включають у виробничу функцію. Який із цих виробничих процесів використовують у виробництві залежить від співвідношення цін на відповідні чинники виробництва.

8.1 Двофакторні виробничі функції

У теорії виробництва традиційно використовують двофакторну виробничу функцію

$$q = f(k, l),$$

яка описує взаємозв'язок між максимально можливим рівнем випуску q і кількостями чинників виробництва капіталу k і праці l. Це пояснюється не тільки зручністю графічного зображення, а й тим, що питомі витрати матеріалів у багатьох випадках мало залежать від рівня випуску, а такий чинник, як виробничі площі розглядають разом із капіталом.

Графічно кожний виробничий процес можна зобразити точкою, координати якої описують мінімально необхідні обсяги ресурсів k і l для виробництва заданого рівня випуску q, а виробничу функцію — ізоквантою, подібно до того як в теорії споживання крива байдужості описує той самий рівень корисності для різних комбінацій наборів продуктів.

Отже, на карті випуску кожна ізокванта зображає множину технічно ефективних процесів виробництва заданого рівня випуску продукції.

Виробничі функції двох аргументів є особливим класом квазіввігнутих функцій. Здебільшого розглядають лише однорідні функції. Їхні апріорні властивості (монотонність за кожним аргументом), які постулюють на основі змістовних гіпотез, накладають значні обмеження на форму функції і допустимі значення параметрів. Особливо це стосується функцій типу функції CES. Ми розглянемо деякі загальні властивості виробничих функцій двох аргументів.

Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ двічі неперервно диференційовна і для всіх $k > 0, l > 0$

$$f(k, l) > 0, \quad r = \frac{\partial f(k, l)}{\partial k} > 0, \quad w = \frac{\partial f(k, l)}{\partial l} > 0. \qquad (8.1.1)$$

Сама функція та її частинні похідні можуть бути довизначені за неперервністю на границю ортанта $\mathbb{R}^2_+$. Припустимо також, що для всіх точок $(k, l) \in \mathbb{R}^2_{++}$ виробнича функція задовольняє умови строгої ввігнутості за кожним аргументом

$$r_2 = \frac{\partial^2 f(k,l)}{\partial k^2} < 0, \quad w_2 = \frac{\partial^2 f(k,l)}{\partial l^2} < 0, \tag{8.1.2}$$

а також строгої квазіввігнутості, тобто строгої опуклості ізоквант. Ці припущення можна інтерпретувати як ефект спадаючої віддачі і гранична норма технічного заміщення капіталу на працю спадає.

Розглядатимемо лише однорідні виробничі функції фіксованого степеня γ

$$f(tk, tl) = t^\gamma f(k, l) \quad \text{для всіх } \ t > 0.$$

Логарифмічні похідні виробничої функції мають вигляд

$$\alpha = \frac{\partial \ln f(k,l)}{\partial \ln k} = \frac{rk}{q}, \quad \beta = \frac{\partial \ln f(k,l)}{\partial \ln l} = \frac{wl}{q}$$

і називають *факторними еластичностями.*

Легко бачити, що $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$ для $k, l > 0$. Справді, зафіксуємо один із параметрів, наприклад, $l = \bar{l}$ і розглянемо функцію $g(k) = f(k, \bar{l})$. Оскільки вона строго ввігнута для всіх $k > 0$, то, довизначивши її за неперервністю в точці нуль і враховуючи характеристичну властивість, маємо

$$g(0) - g(k) < -kg'(k) \quad \text{або} \quad \alpha < 1 - g(0)/g(k) \leqslant 1.$$

Із формули Ейлера випливає

$$\gamma q = rk + wl \quad \text{або} \quad \gamma = \alpha + \beta.$$

Отже, степінь однорідності задовольняє умову $\gamma \leqslant 2$.

Між строгою ввігнутістю за координатами та строгою квазіввігнутістю є простий зв'язок. Нехай $\mathcal{K}(l)$ — рівняння ізокванти $\{(k,l) \in \mathbb{R}^2_{++} : f(k,l) = \bar{q}\}$, тоді $r\,\mathrm{d}k + w\,\mathrm{d}l = 0$. Звідки знаходимо нахил ізокванти і логарифмічна похідну

$$\left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}l}\right|_{\mathrm{d}f=0} = \mathcal{K}'(l) = -w/r = R, \quad -\chi = \frac{\mathrm{d}\ln \mathcal{K}(l)}{\mathrm{d}\ln l} = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{R}{t}$$

як функцію від аргумента $t = k/l$.

Крім того, на ізокванті $r, w > 0$, тому $\mathrm{d}k$ і $\mathrm{d}l$ мають різні знаки: якщо $\mathrm{d}l < 0$, що відповідає зменшенню обсягу праці, то $\mathrm{d}k > 0$, тобто зменшення обсягу праці на величину $|\mathrm{d}l|$ заміщається (капіталом) фондами в обсязі $\mathrm{d}k$. Тому природним є таке поняття. *Граничною нормою технічного заміщення* MRTS_{lk} праці капіталом називають відношення граничних продуктів

$$\mathrm{MRTS}_{lk} = \frac{w}{r} = -R.$$

Оскільки виробнича функція однорідна степеня γ, то $f(k,l) = l^\gamma f(k/l, 1) = l^\gamma g(t)$, де $g(t) = f(t,1)$, t — фондоозброєність. Тоді

$$w = \gamma l^{\gamma-1} g(t) - l^\gamma g'(t) k/l^2 \;=\; l^{\gamma-1}[\gamma g(t) - t g'(t)],$$

$$r = l^\gamma g'(t)/l \;=\; l^{\gamma-1} g'(t).$$

Звідки

$$R = t - \gamma\,\frac{g(t)}{g'(t)}. \tag{8.1.3}$$

Мірою опуклості ізоквант є еластичність заміщення виробничої функції

$$\sigma = \frac{R}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}R}. \tag{8.1.4}$$

Продиференціювавши (8.1.3), одержимо рівність

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 1 - \gamma + \gamma\,\frac{gg''}{(g')^2}. \tag{8.1.5}$$

Із цієї рівності і нерівності (8.1.1) випливає, що для кожної виробничої функції існує $1/\sigma(t)$ для всіх $t \in (0, \infty)$.

Легко бачити, що умова строгої квазівгнутості $\mathcal{K}''(l) > 0$ еквівалентна $R'(t) < 0$ або $1/\sigma(t) > 0$.

Лема 8.1.1. *Для виробничої функції при* $\gamma \geqslant 1$ *із* (8.1.2) *випливає строга квазівгнутість* ($\sigma(t)$ *існує і додатна*), *а при* $\gamma \leqslant 1$ *із* $\sigma(t) > 0$ *випливає* (8.1.2).

Доведення. Якщо $r_2 < 0$, то $g'' < 0$. Отже, за рівністю (8.1.5) маємо, що $R'(t) < 0$ при $\gamma \geqslant 1$. Якщо $R'(t) < 0$, то $g''(t) < 0$ при $\gamma \leqslant 1$, а отже, $r_2 < 0$. Аналогічно розглянувши функцію $\psi(\xi) = f(1, \xi)$, де $\xi = l/k$, одержимо $w_2 < 0$.

□

Обернене до першого твердження леми неправильне. Це видно на прикладі функції Коба-Дугласа $q = z_1^{3/2} z_2^{3/2}$: $R = -t$, $R' = -1 < 0$. Але $\gamma = 3 > 2$, тобто (8.1.2) не справджується. Обернене до другого твердження леми правильне для широкого класу виробничих функцій — майже для всіх, які використовують у мікро- і макроекономічних дослідженнях.

Із (8.1.3) випливає, що

$$R = t\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Продиференціювавши останню рівність і врахувавши вигляд σ, отримаємо

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \rho\,\frac{\alpha(\alpha - \gamma)}{t\gamma}, \tag{8.1.6}$$

де $\rho = \dfrac{1}{\sigma - 1}$.

Продиференціювавши $r = \alpha q/k$ і врахувавши (8.1.6), отримаємо

$$r_2 = qk^{-2}(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,t + \alpha^2 - \alpha).$$

Аналогічно

$$w_2 = ql^{-2}(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\,t + \beta^2 - \beta).$$

Звідки випливає, якщо $0 < \sigma \leqslant 1$ для всіх $k, l > 0$, то нерівності $0 < \alpha < 1$ і $0 < \beta < 1$ є не лише необхідними, а й достатніми умовами строгої ввігнутості виробничої функції за координатами.

Еластичність заміщення ввів Дж. Хікс у 1932 р. Виробничі функції часто будують враховуючи гіпотезу про динаміку σ. Особливу роль відіграє випадок, коли σ близьке до одиниці. Чим більше значення σ, тим менше треба кожного з факторів виробництва для заміщення іншого без зміни рівня випуску. Це означає, що з ростом σ зменшується кривизна ізокванти.

Клас виробничих функцій зі сталою еластичністю заміщення має такий вигляд: (8.1.4) $\sigma = \dfrac{R}{t}\,\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}R} = const$, звідки $R = c\,t^{1/\sigma}$, де c — довільна стала.

Нехай $\sigma = 1$, тоді з (8.1.3) маємо $t - \gamma\,\dfrac{g(t)}{g'(t)} = ct$. Звідки $g(t) = A\,t^{\frac{\gamma}{1-c}}$, де A — довільна стала.

Отже, $f(k,l) = l^{\gamma}\,g(k/l) = A\,k^{\frac{\gamma}{1-c}}\,l^{\frac{-\gamma c}{1-c}}$. Враховуючи, що факторними еластичностями є α і β, то $\alpha = \dfrac{\gamma}{1-c}$, $\beta = \dfrac{-\gamma c}{1-c}$, $c < -1$.

Звідки маємо загальний вигляд (мультиплікативна форма) функції Коба-Дугласа $f(k,l) = Ak^{\alpha}\,l^{\beta}$, де A — коефіцієнт нейтрального технічного прогресу, цей коефіцієнт співвимірює фактори виробництва з випуском.

Мультиплікативна форма виробничої функції визначається за часовим рядом випусків і витрат факторів виробництва (q_τ, k_τ, l_τ), $\tau = 1, \ldots, T$, T — довжина часового ряду і припускаємо, що виконуються T співвідношень $q_\tau = e^{\varepsilon_\tau} A k_\tau^\alpha \, l_\tau^\beta$, де ε_τ — випадкова величина, яка приводить у відповідність фактичний і розрахунковий випуск, математичне сподівання якої дорівнює 0. Наприклад, за даними 1960-1995 рр. виробнича функція валового внутрішнього продукту США така:

$$f(k, l) = 2,248 \, k^{0,404} \, l^{0,803}.$$

У відносних показниках мультиплікативна виробнича функція має вигляд

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{k}{k_0}\right)^\alpha \left(\frac{l}{l_0}\right)^\beta, \tag{8.1.7}$$

де q_0, k_0, l_0 — значення випуску й обсягів фондів і праці в базовий рік, $A = \dfrac{q_0}{k_0^\alpha l_0^\beta}$.

Якщо позначити випуск і фактори виробництва в відносних одиницях виміру через $\tilde{q}, \tilde{k}, \tilde{l}$, то виробничу функцію у вигляді (8.1.7) запишемо так:

$$\tilde{q} = \tilde{k}^\alpha \tilde{l}^\beta.$$

Нагадаємо, що ефективність економіки — це відношення результату до обсягу факторів виробництва. Отож, маємо два частинних показники ефективності: $\tilde{q}/\tilde{k}$ — фондовіддача, $\tilde{q}/\tilde{l}$ — продуктивність праці. Узагальнений показник економічної ефективності є зважене середнє геометричне частинних показників ефективності

$$E = \left(\frac{\tilde{q}}{\tilde{k}}\right)^\nu \left(\frac{\tilde{q}}{\tilde{l}}\right)^{1-\nu}, \tag{8.1.8}$$

де роль ваг виконують відносні еластичності $\nu = \alpha/(\alpha + \beta)$, $1 - \nu = \beta/(\alpha + \beta)$.

Із (8.1.8) випливає, що виробничу функцію можна переписати так:

$$\tilde{q} = E\,\tilde{k}^{\nu}\,\tilde{l}^{1-\nu},$$

де E — не сталий коефіцієнт, а функція від факторів виробництва k і l.

Масштаб виробництва M визначається обсягом витрачених факторів виробництва, тому

$$M = \tilde{k}^{\nu}\,\tilde{l}^{1-\nu}.$$

Отже, рівень випуску $\tilde{q}$ є добутком економічної ефективності і масштабу виробництва

$$\tilde{q} = EM.$$

Валовий внутрішній продукт США, який вимірюється в млрд. дол. в цінах 1987р. зріс з 1960 – 1995 р. в 2,82 раза, тобто $\tilde{q} = 2,82$, основні виробничі фонди за цей період збільшилися в 2,88 раза, $\tilde{k} = 2,88$, а кількість зайнятих у виробництві — в 1,93 раза, $\tilde{l} = 1,93$. Для розглянутого прикладу знаходимо відносні показники еластичності

$$\nu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{0,404}{0,404+0,803} = 0,3347, \quad 1-\nu = 0,6653.$$

Знаходимо частинні ефективності факторів виробництва

$$E_k = \frac{\tilde{q}}{\tilde{k}} = \frac{2,82}{2,88} = 0,98, \quad E_l = \frac{\tilde{q}}{\tilde{l}} = \frac{2,82}{1,93} = 1,46.$$

Тепер знаходимо узагальнений показник економічної ефективності

$$E = E_k^{\nu}\,E_l^{1-\nu} = 0,98^{0,3347}\cdot 1,46^{0,6653} = 1,278,$$

а масштаб виробництва

$$M = \tilde{k}^{\nu}\,\tilde{l}^{1-\nu} = 2,88^{0,3347}\cdot 1,93^{0,6653} = 2,207.$$

Отже, загальний приріст ВВП з 1960 – 1995 р. в $2,82 = 1,273 \cdot 2,207$ раза відбувся за рахунок росту масштабу виробництва в $2,207$ раза і за рахунок підвищення ефективності виробництва в $1,278$ раза.

Важливим прикладом виробничої функції є функція CES, яку можна отримати, розв'язавши диференціальне рівняння $t - \gamma \dfrac{g(t)}{g'(t)} = c\, t^{1/\sigma}$, яка має такий вигляд

$$q = a\left[bk^{-\rho} + (1-b)l^{-\rho}\right]^{-\gamma/\rho},$$

де $a > 0$, $0 < b < 1$, ρ і γ — параметри, зокрема $\rho = 1/\sigma - 1$.

Функція CES завжди задовольняє умови (8.1.1), тому нерівності $\sigma > 0$ і $\gamma \leqslant 1$ еквівалентні умовам (8.1.2). Еластичності $\alpha(t)$ і $\beta(t)$ монотонні функції від t і мають вигляд

$$\alpha(t) = \frac{\gamma}{1 + \dfrac{1-b}{b} t^{\rho}}, \qquad \beta(t) = \frac{\gamma}{1 + \dfrac{1-b}{b} t^{-\rho}}.$$

При $\sigma \to \infty$ функція CES стає функцією з лінійними ізоквантами

$$q = a\left[bk + (1-b)l\right]^{\gamma}.$$

При $\sigma \to 0+$ функція CES набуває вигляду

$$q = a \min\{k, l\}^{\gamma}$$

і називається функцією Леонтьєва-Харрода-Домара.

Аналогічно, якщо $\sigma \to 0-$, то функція CES набуває вигляду

$$q = a \max\{k, l\}^{\gamma}.$$

При $\sigma \to 1$ неперервне продовження функції CES дає функцію Коба-Дугласа

$$q = ak^{\alpha} l^{\beta},$$

де $a > 0$, α і β — відповідні факторні еластичності.

8.2 Довгостроковий період. Віддача від масштабу

Нехай технологія виробництва описується виробничою функцією $f(\cdot)$, $Y = \{\,(-z, q) : \, q - f(z) \leqslant 0, \; z \in \mathbb{R}_{+}^{L-1}\,\}$ — замкнута і володіє властивостями відсутності "рога достатку" та вільного розміщення. Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ двічі неперервно диференційовна за сукупністю змінних і строго ввігнута в особливій області.

Нахил ізоквант характеризує граничну норму технічного заміщення MRTS (marginal rate of technical substitution) одного чинника виробництва іншим так само, як нахил кривої байдужості описує граничну норму заміщення одного товару іншим (MRS).

Гранична норма технічного заміщення чинника виробництва i на чинник j в точці $\bar{z}$ визначається так:

$$\mathrm{MRTS}_{i\,j}(\bar{z}) = \frac{\partial f(\bar{z})/\partial z_i}{\partial f(\bar{z})/\partial z_j} = \frac{\mathrm{MP}_i(\bar{z})}{\mathrm{MP}_j(\bar{z})}.$$

Величина $\mathrm{MRTS}_{i\,j}(\bar{z})$ — міра додаткової кількості чинника j, яка потрібна для рівня випуску $\bar{q} = f(\bar{z})$, якщо кількість чинника i зменшити на одну одиницю.

Приклад 8.2.1. Нехай технологія виробництва визначається функцією Коба-Дугласа $f(z_1, z_2) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$, де $\alpha, \beta > 0$. Гранична норма технічного заміщення між двома чинниками в точці $z = (z_1, z_2)$ має вигляд

$$\mathrm{MRTS}_{1\,2}(z) = \frac{\alpha z_2}{\beta z_1}.$$

▲

Виробнича функція $f(\cdot)$ в особливій області $\mathcal{D}$ характеризується віддачею від розширення масштабу виробництва і "здатністю до заміщення".

Розширювати виробництво можна різними шляхами. Зберігаючи незмінною технічну базу, рівень випуску можна збільшити шляхом збільшення обсягу використання вхідних факторів виробництва.

А.Маршал ввів поняття трьох періодів: дуже короткого, короткострокового і довгострокового, досліджуючи загальні закономірності розширення виробництва.

У дуже короткий період обсяги використання кожного чинника виробництва залишаються незмінними, тому в цей період розширювати виробництво неможливо.

У довгостроковий період можемо збільшувати використання всіх видів вхідних факторів виробництва. В цьому випадку збільшується масштаб виробництва і для його аналізу використовують поняття віддачі від масштабу. В короткостроковому періоді можемо збільшувати використання лише змінного фактора виробництва, розширення виробництва досліджується за допомогою поняття спадаючої віддачі змінного чинника виробництва.

Розширювати виробництво можна шляхом зміни його технічної бази, тобто за допомогою науково-технічного прогресу.

Нехай вибрано технічно ефективний виробничий процес, тоді збільшити рівень випуску продукції можна шляхом пропорційного збільшення обсягу використання всіх видів факторів виробництва. Це і є *зміною масштабу виробництва.*

Поняття спадаючої, зростаючої та сталої віддачі від масштабу розглядали при описанні структурних властивостей технологічної множини.

Розглянемо ще одну характеристику виробничої функції — *однорідність.* Нехай зі збільшенням обсягу всіх факторів виробництва в t разів, $t > 1$, то випуск продукції збільшиться в t^k разів, тобто

$$f(t\,z) = t^k f(z) \quad \text{для всіх} \quad t > 1.$$

Степінь однорідності k можна використати для характеристики типу віддачі від масштабу.

Якщо $k = 1$, то віддача від масштабу стала, а виробнича функція в цьому випадку називається *лінійно-однорідною.*

Якщо $k < 1$, то є *спадаюча* віддача від масштабу.

Якщо $k > 1$, тоді — *зростаюча* віддача від масштабу.

Для однорідної виробничої функції показником відддачі від масштабу може бути відстань уздовж променя, проведеного з початку координат, між ізоквантами, які зображають кратні q рівні випуску — $2q$, $3q$ і т.д.

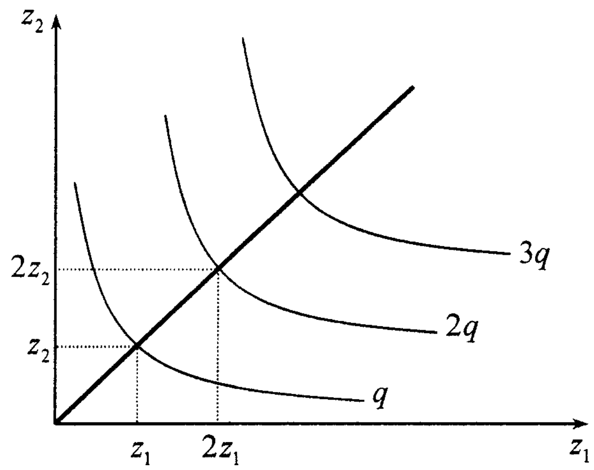


Рис. 8.2.1. Віддача від масштабу.

Стала віддача від масштабу простежується в тих виробництвах, де фактори виробництва однорідні (в технічному розумінні), їхні обсяги можна змінювати пропорційно. В таких виробництвах збільшення випуску продукції можна досягнути шляхом кратного збільшення використання всіх виробничих чинників. Спадаюча віддача здебільшого простежується у випадках обмеження можливостей керування великим виробництвом.

Варто зауважити, що в багатьох випадках *характер віддачі від масштабу змінюється при досягненні певних рівнів випуску.* До деякого рівня випуску ріст виробництва може супроводжуватися зростаючою, яка потім змінюється сталою, а далі спадаючою віддачею.

Промені, які проведено з початку координат на рис. 8.2.1, називають *лініями росту.* Вони характеризують технічно можливі шляхи розширення виробництва, тобто перехід від нижчої до вищої ізокванти. Серед можливих ліній росту є такі, вздовж яких гранична норма технічного заміщення для будь-якого рівня випуску є сталою. Такі лінії називають *ізоклиналами.* Для однорідної виробничої функції ізоклиналою є промінь, який проведено з початку координат, уздовж якого гранична норма технічного заміщення і співвідношення k/l має теж саме значення.

Отож, *ізоклиналами* називають лінії найбільшого росту виробничої функції. Оскільки функція зростає в напрямі градієнта, то ізоклинали ортогональні до ліній нульового росту, тобто до ізоквант. Тому рівняння ізоклинали має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}k}{\partial f(k,l)/\partial k} = \frac{\mathrm{d}l}{\partial f(k,l)/\partial l}.$$

Зокрема, для виробничої функції Коба-Дугласа диференціальне рівняння, з якого визначають ізоклинали, має вигляд

$$\frac{1}{\alpha}\, k\, \mathrm{d}k = \frac{1}{\beta}\, l\, \mathrm{d}l.$$

Звідки

$$k^2 = \frac{\alpha}{\beta}\, l^2 + c_0, \quad \text{де} \quad c_0 = k_0^2 - \frac{\alpha}{\beta}\, l_0^2,$$

де (k_0, l_0) — координати точки, через яку проходить ізоклинала. Найбільш проста ізоклинала при $c_0 = 0$ має вигляд прямої

$$k = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, l.$$

Оскільки в різних точках простору факторів виробництва $\mathbb{R}_+^{L-1}$ виробнича функція $f(\cdot)$ може характеризуватися по-різному, то вводиться локальний показник виміру віддачі від масштабу виробництва, який визначається в деякій точці $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$, і називається *еластичність виробництва* (або *еластичність випуску стосовно параметра масштабу* α)

$$\varepsilon(z) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha z)} \frac{\partial f(\alpha z)}{\partial \alpha} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{\partial \ln f(\alpha z)}{\partial \ln \alpha}. \tag{8.2.1}$$

Визначимо *еластичність випуску стосовно зміни чинника i-го виду* $\varepsilon_i(z)$ як

$$\varepsilon_i(z) = \frac{z_i}{f(z)} \frac{\partial\, f(z)}{\partial z_i}.$$

Отож, еластичність виробництва можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) &= \lim_{\alpha \to 1} \frac{\alpha}{f(\alpha z)} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\partial f(\alpha z)}{\partial z_i} z_i \\ &= \frac{1}{f(z)} \sum_{i=1}^{L-1} \mathrm{MP}_i(z) z_i = \sum_{i=1}^{L-1} \varepsilon_i(z), \end{aligned}$$

тобто еластичність виробництва в будь-якій точці $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ дорівнює сумі еластичностей випуску стосовно різних факторів виробництва в цій точці.

Приклад 8.2.2. Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ однорідна степеня k, тоді за формулою Ейлера для однорідних функцій маємо

$$\sum_{i=1}^{L-1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} z_i = k f(z),$$

звідки

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{f(z)} \sum_{i=1}^{L-1} \frac{\partial f(z)}{\partial z_i} z_i = k.$$

Отже, при $\varepsilon(z) > 1$ маємо зростаючу, при $\varepsilon(z) < 1$ — спадаючу, а при $\varepsilon(z) = 1$ — сталу віддачу від масштабу. ▲

Приклад 8.2.3. Нехай $f(z) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$. Тоді $f(tz) = (tz_1)^{\alpha}(tz_2)^{\beta} = t^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha} z_2^{\beta} = t^{\alpha+\beta} f(z_1, z_2)$ для всіх $t > 0$. Отож, функція Коба-Дугласа однорідна степеня $\alpha + \beta$ і $\varepsilon_1(z) = \alpha$, $\varepsilon_2(z) = \beta$, $\varepsilon(z) = \alpha + \beta$. ▲

Гранична норма технічного заміщення MRTS має недолік: вона залежить від одиниць, в яких вимірюються обсяги вхідних факторів виробництва. З огляду на це вводиться поняття *еластичність заміщення,* яке засвідчує на скільки відсотків повинно змінитися співвідношення між кількостями факторів виробництва, щоб гранична норма технічного заміщення змінилася на один відсоток. Еластичність заміщення σ визначається як відсоткова зміна в граничній нормі технічного заміщення: еластичність заміщення між факторами виробництва i та j, коли усі інші фактори виробництва залишаються сталими у точці z, визначається рівністю

$$\sigma_{i\,j}(z) = \frac{\mathrm{MRTS}_{ji}(z)}{(z_i/z_j)} \frac{\mathrm{d}(z_i/z_j)}{\mathrm{d}(\mathrm{MTRS})_{ji}(z)} = \frac{\mathrm{d}\ln z_i/z_j}{\mathrm{d}\ln \mathrm{MRTS}_{ji}(z)}. \quad (8.2.2)$$

В особливій області $\mathcal{D}$ еластичність заміщення $\sigma_{i\,j}(z) \geqslant 0$.

Геометрично, для двофакторної виробничої функції, гранична норма технічного заміщення визначає нахил ізокванти, еластичність заміщення — міру опуклості ізокванти.

Приклад 8.2.4. Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що для двофакторної виробничої функції правильна рівність

$$\mathrm{MRTS}_{12}(z) = \frac{\varepsilon_1(z)}{\varepsilon_2(z)} \frac{z_2}{z_1},$$

тобто гранична норма технічного заміщення першого фактора виробництва другим дорівнює відношенню еластичності випуску за першим і другим фактором виробництва, помноженому на відношення обсягу другого фактора до обсягу першого фактора виробництва. Якщо $z_1 = l\ z_2 = k$, то відношення $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{k}{l}$ називається *фондоозброєністю* праці (величина капіталу на одного працівника). В цьому випадку гранична норма технічного заміщення праці капіталом дорівнює відношенню еластичностей випуску стосовно праці та капіталу помноженому на фондоозброєність праці.

Еластичність заміщення праці капіталом

$$\sigma_{lk} = \frac{\mathrm{MRTS}_{lk}}{k/l} \frac{\mathrm{d}(k/l)}{\mathrm{dMRTS}_{lk}} = \frac{\mathrm{d}\ln k/l}{\mathrm{d}\ln \mathrm{MRTS}_{lk}}$$

засвідчує, на скільки відсотків зміниться фондоозброєність $\dfrac{k}{l}$ при зміні норми технічного заміщення праці капіталом MRTS_{lk} на один відсоток. ▲

Приклад 8.2.5. Еластичність заміщення для функції Коба-Дугласа $f(z) = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$. Знаходимо граничну норму технічного заміщення

$$\mathrm{MRTS}_{12} = \frac{\alpha z_2}{\beta z_1} \quad \text{або} \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{MRTS}_{12}(z).$$

Звідки

$$\ln\frac{z_2}{z_1} = \ln \mathrm{MRTS}_{12} + \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Отже,

$$\sigma_{21} = \frac{\mathrm{d}\ln\dfrac{z_2}{z_1}}{\mathrm{d}\ln \mathrm{MRTS}_{12}} = 1.$$

Еластичність заміщення для функції CES

$$f(z) = (z_1^{\rho} + z_2^{\rho})^{1/\rho}, \quad \rho \leqslant 1.$$

Звідки гранична норма технічного заміщення

$$\mathrm{MRTS}_{12}(z) = \left[\frac{z_1}{z_2}\right]^{\rho-1} \quad \text{або} \quad \frac{z_1}{z_2} = (\mathrm{MRTS}_{12}(z))^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Звідки

$$\ln\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\rho-1}\ln \mathrm{MRTS}_{12} = \frac{1}{\rho-1}\ln \mathrm{MRTS}_{21}.$$

Отже,

$$\sigma_{12} = \frac{\mathrm{d}\ln\dfrac{z_2}{z_1}}{\mathrm{d}\ln \mathrm{MRTS}_{12}} = \frac{1}{1-\rho}.$$

▲

8.3 Короткостроковий період. Спадаюча віддача змінного чинника

У короткостроковий період фірма змушена вибирати вектор факторів виробництва z із заданої множини простору факторів виробництва, тому в задачі для фірми є додаткові обмеження

$$\begin{aligned} \Pi(z) \;=\; p\,f(z) \,-\, w\cdot z \;\to \max,\;\; z\in\mathbb{R}_+^{L-1}, \\ \text{за умов}\quad g_k(z)\leqslant 0,\; k=1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Останні m нерівностей визначають обмеження на фактори виробництва для деякого короткострокового періоду.

Розглянемо частковий випадок короткострокового періоду, для якого кількість другого фактора виробництва фіксована на рівні $\bar z_2$, тоді як кількість першого може змінюватися.

У короткостроковому періоді лінією росту є пряма паралельна до осі змінного фактора виробництва (див. рис.8.3.2, *а*). Співвідношення $\dfrac{\bar z_2}{z_1}$ уздовж цієї лінії росту зменшується. Отже, в короткостроковий період ріст рівня випуску відбувається при зміні пропорцій між кількостями фіксованого та змінного фактора виробництва. Вплив зміни пропорцій на ріст випуску досліджують за допомогою кривої продукції $\mathrm{P}_1(z_1) = f(z_1,\bar z_2)$, кривої середнього $\mathrm{AP}_1(z_1) = \dfrac{P(z_1)}{z_1}$ і граничного $\mathrm{MP}_1(z_1) = \dfrac{\mathrm{d}\,P(z_1)}{\mathrm{d}z_1}$ продукту першого змінного фактора виробництва. Крива продукції $\mathrm{P}_1(z_1)$ описує залежність випуску від першого фактора виробництва при незмінному обсязі цього фактора; крива середнього продукту $\mathrm{AP}_1(z_1)$ характеризує випуск продукції на одиницю першого фактора виробництва; $\mathrm{MP}_1(z_1)$ — описує приріст загального продукту зі збільшенням використання змінного фактора на одну одиницю.

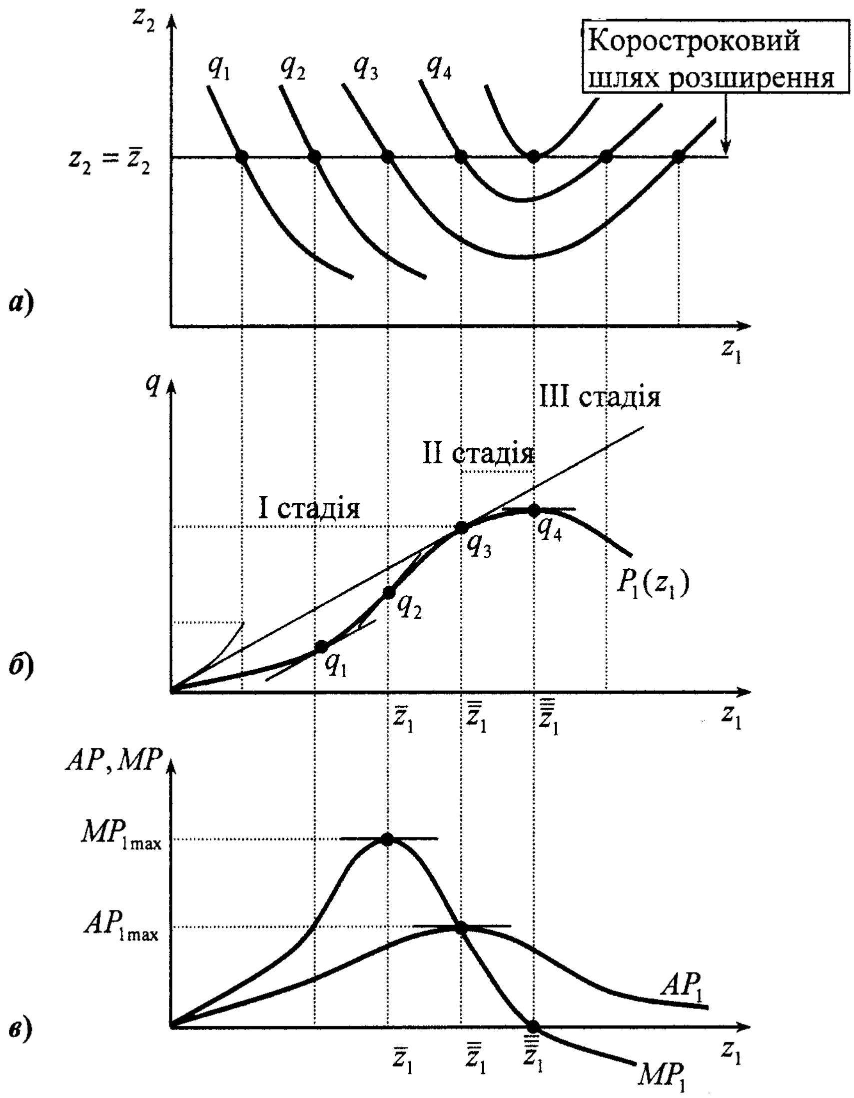


Рис. 8.3.2. Загальний, середній і граничний продукт змінного ресурсу

Графічно величина граничного продукту визначається тангенсом кута нахилу дотичної до кривої продукції в точці, яка відповідає визначеному обсягу цього продукту; величина середнього продукту — тангенсом кута нахилу променя, проведеного з початку координат до цієї точки.

Граничний продукт змінного фактора виробництва може бути додатним, нульовим і від'ємним. Проте економічна теорія приділяє увагу лише економічній (технічно ефективній) області виробничої функції, тобто тій частині кривої $\mathrm{P}_1(z_1)$, де граничний продукт цього фактора виробництва є додатним. На графіку (див. рис.8.3.2, *б*) кривої продукції можна виділити три сегменти. Перший сегмент від початку координат до точки a_2. Він відображає зростаючу віддачу змінного фактора виробництва і граничний продукт відповідного фактора на цій частині зростає

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{P}_1(z_1)}{\mathrm{d}z_1^2} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{MP}_1(z_1)}{\mathrm{d}z_1} > 0,$$

тобто крива продукції $\mathrm{P}_1(z_1)$ опукла для $z_1 \in [0, \bar{z}_1]$.

Другий сегмент кривої $\mathrm{P}_1(z_1)$ від точки a_2 до точки a_4 відображає спадаючу віддачу змінного фактора виробництва і граничний продукт $\mathrm{MP}_1(z_1)$ для $z_1 \in [\bar{z}_1, \bar{\bar{\bar{z}}}_1]$ спадає, проте залишається додатним. Крива граничного продукту для $z_1 \in [\bar{z}_1, \bar{\bar{\bar{z}}}_1]$ має від'ємний нахил

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{P}_1(z_1)}{\mathrm{d}z_1^2} = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{MP}_1(z_1)}{\mathrm{d}z_1} < 0,$$

тобто крива продукції $\mathrm{P}_1(z_1)$ ввігнута на проміжку $z_1 \in [\bar{z}_1, \bar{\bar{\bar{z}}}_1]$.

Третій сегмент, правіше від точки a_4, також відображає спадаючу віддачу змінного фактора виробництва, де граничний продукт $\mathrm{MP}_1(z_1)$ від'ємний.

Отож, крива продукції має S форму, яка зобов'язана закону спадаючої віддачі: *при додаванні змінного фактора ви-*

робництва z_1 *до визначеного обсягу іншого фактора* $\bar{z}_2$, *внаслідок чого досягається особлива область, де приріст продуктивності зменшується.*

На рис. 8.3.2,*в* зображено три критичні точки: перша $\bar{z}_1$ — точка перегину функції $\mathrm{P}_1(z_1)$, де крива $\mathrm{MP}_1(z_1)$ досягає максимального значення; друга $\bar{\bar{z}}_1$ — точка дотику променя проведеного з початку координат до функції $\mathrm{P}_1(z_1)$, де крива середнього продукту $\mathrm{AP}_1(z_1)$ досягає максимального значення і $\mathrm{AP}_1(\bar{\bar{z}}_1) = \mathrm{MP}_1(\bar{\bar{z}}_1)$; третя $\bar{\bar{\bar{z}}}_1$ — точка максимуму кривої продукції $\mathrm{P}_1(z_1)$ і $\mathrm{MP}_1(\bar{\bar{\bar{z}}}_1) = 0$.

На рис. 8.3.2,*б* зображено три стадії виробництва. Перша стадія виробництва триває до другої критичної точки і на цій стадії граничний продукт перевищує середній

$$\text{стадія } 1: \qquad \mathrm{MP}_1(z_1) > \mathrm{AP}_1(z_1) > 0. \tag{8.3.2}$$

Друга стадія триває між другою і третьою критичними точками. На цій стадії середній продукт перевищує граничний, а він є додатним

$$\text{стадія } 2: \qquad \mathrm{AP}_1(z_1) > \mathrm{MP}_1(z_1) > 0, \tag{8.3.3}$$

або

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{P}_1(z_1)}{\mathrm{d}z_1} > 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\,\mathrm{P}_1(z_1)}{\mathrm{d}z_1^2} < 0,$$

тобто граничний продукт фактора z_1 додатний, а його крива продукції має від'ємний нахил.

Третя стадія розташована за третьою критичною точкою. На цій стадії граничний продукт від'ємний

$$\text{стадія } 3: \qquad \mathrm{MP}_1(z_1) < 0, \tag{8.3.4}$$

тобто зі збільшенням обсягу змінного фактора понад $\bar{\bar{\bar{z}}}_1$ рівень випуску продукції зменшується.

Отже, при раціональній поведінці фірма прагне перебувати на другій стадії, де залучення додаткової одиниці змінного фактора виробництва дає хоч і спадаючий, проте додатний приріст випуску. Іншими словами, для фірми, яка зорієнтована на максимізацію прибутку, вибір обсягу виробництва обмежений екстенсивною ($\mathrm{AP}_{1\max}$) й інтенсивною ($\mathrm{MP}_{1\max}$) границями використання змінного чинника. [1]

Якщо виробнича функція визначає технологію зі сталою віддачею від масштабу, то стадіїї 1 і 3 симетричні. Справді, за формулою Ейлера

$$q = z_1\mathrm{MP}_1 + z_2\mathrm{MP}_2$$

або

$$\mathrm{MP}_2 = \frac{z_1}{z_2}(\mathrm{AP}_1 - \mathrm{MP}_1).$$

Отже, першу стадію виробництва, де $\mathrm{MP}_1 > \mathrm{AP}_1$, можна охарактеризувати співвідношенням $\mathrm{MP}_2 < 0$. Тоді

$$\begin{array}{ll} \text{стадія 1:} & \mathrm{MP}_2 < 0, \\ \text{стадія 3:} & \mathrm{MP}_1 < 0. \end{array} \tag{8.3.5}$$

Це і засвідчує симетричність стадій 1 і 3.

8.4 Стадії виробництва в довгостроковому періоді

Тепер розглянемо довгостроковий період і узагальнимо поняття стадій виробництва на множині ізоквант.

[1] В умовах досконалої конкуренції на ринку продукції та факторів виробництва.

Аналізуючи виробництво в довгостроковому періоді, раціональний підприємець приділяє увагу лише *ефективній частині ізокванти* (*тій частині, яка лежить в особливій області*), в границях якої граничні продукти кожного з двох чинників виробництва спадають, проте залишаються додатними. Множина точок на ізоквантах, які характеризуються нульовим розміром граничного продукту, утворюють границі технічно ефективної області (особливої області). Щоб визначити ці границі (які ще називають відокремлюючими лініями), треба провести дотичні до ізоквант, які паралельні осям координат і з'єднати ці точки дотику лініями OA і OB

$$OA = \{\, z \in \mathbb{R}^2_+ \,:\, \mathrm{MP}_2(z) = 0\,\},\;\; OB = \{\, z \in \mathbb{R}^2_+ \,:\, \mathrm{MP}_1(z) = 0\,\}.$$

Лінія OA показує на мінімальну кількість z_1, яка необхідна

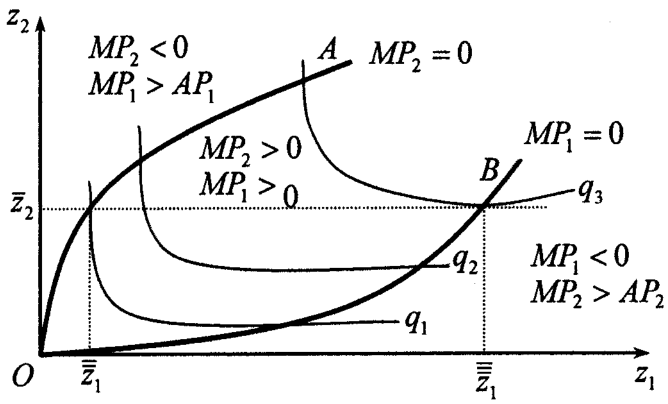


Рис. 8.4.3. Технічно ефективна область

для виробництва різних рівнів випуску. Наприклад, щоб виробити q_1 потрібен хоча б $\bar{\bar{z}}_1$ чинник виробництва. Аналогічно, лінія OB показує на мінімальну кількість z_2 необхідну для випуску різних обсягів продукції. Наприклад, для того щоб виробити q_3, потрібно хоча б $\bar{z}_2$ чинника.

Отож, технічно ефективна область обмежена лініями нульового граничного продукту, вона охоплює лише частини ізоквант із від'ємним нахилом. Нахил ізокванти (в границях технічної області) спадає в напрямі руху — уздовж неї вниз і вправо, що характеризує зростаючу трудність заміщення одного ресурсу іншим. Оскільки уздовж ізокванти випуск залишається незмінним, то

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_1}\mathrm{d}z_1 + \frac{\partial f(z_1, z_2)}{\partial z_2}\mathrm{d}z_2 = \mathrm{MP}_1\mathrm{d}z_1 + \mathrm{MP}_2\mathrm{d}z_2 = 0.$$

Звідки

$$-\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}z_1}\bigg|_{\mathrm{d}q=0} = \mathrm{MTRS}_{12}(z) = \frac{\mathrm{MP}_1(z)}{\mathrm{MP}_2(z)}, \tag{8.4.1}$$

гранична норма технічного заміщення першого чинника другим дорівнює відношенню граничних продуктів цих ресурсів.

У межах технічно ефективної області, яка обмежена відокремлюючими лініями OA і OB, граничні продукти обох факторів виробництва є додатними і ця область відповідає другій стадії росту виробництва. В області, яка лежить вище OA, граничний продукт другого чинника від'ємний, а граничний продукт першого чинника виробництва більший від його середнього продукту. Ця область відповідає третій стадії росту для z_2 і першій стадій росту для z_1. Навпаки, в області, яка лежить нижче, граничний продукт першого чинника від'ємний, а граничний продукт другого чинника більший за його середній продукт. Ця область відповідає третій стадії для z_1 і першій — для z_2.

8.5 Довгостроковий шлях розширення фірми

Визначення фірмою оптимальних комбінацій факторів виробництва аналогічно до визначення оптимального набору продуктів споживачем. Як ми знаємо, оптимум споживача визначається рівністю граничної норми заміщення товарів (MRS) відношенню їх цін, графічно — точкою дотику кривої байдужості і бюджетної прямої.

У теорії виробництва оптимум фірми визначають з умови оптимальності першого порядку (6.1.3). Розглянемо випадок двох факторів виробництва. Тоді умови (6.1.3) матимуть вигляд

$$p\,\mathrm{MP}_1(z^*) = w_1, \qquad p\,\mathrm{MP}_2(z^*) = w_2 \tag{8.5.1}$$

або

$$\frac{\mathrm{MP}_1(z^*)}{\mathrm{MP}_2(z^*)} = \frac{w_1}{w_2} = \mathrm{MRTS}_{12}(z^*), \tag{8.5.2}$$

тобто в точці оптимуму є рівність граничної норми технічного заміщення чинників z_1 і z_2 відношенню їхніх цін.

Відношення цін факторів виробництва характеризує норму, за якою фірма може заміняти один чинник іншим, купуючи їх на ринку факторів виробництва. Гранична норма технічного заміщення характеризує норму, за якою фірма може замінювати один чинник іншим у виробництві. Доки ця рівність не виконується, фірма може покращити своє становище, змінивши структуру використання факторів виробництва.

Отже, якщо

$$\frac{\mathrm{MP}_1(z^*)}{\mathrm{MP}_2(z^*)} > \frac{w_1}{w_2},$$

то випуск можна збільшити (при тих самих витратах) шляхом заміщення z_2 на z_1. Навпаки, якщо

$$\frac{\mathrm{MP}_1(z^*)}{\mathrm{MP}_2(z^*)} < \frac{w_1}{w_2},$$

то випуск можна збільшити шляхом заміщення z_1 на z_2. Якщо рівність (8.5.2) справджується, то будь-яка зміна комбінацій факторів виробництва не покращує становища фірми.

Умови оптимальності (8.5.2) можна записати

$$\frac{\mathrm{MP}_1(z^*)}{w_1} = \frac{\mathrm{MP}_2(z^*)}{w_2}, \tag{8.5.3}$$

тобто оптимум фірми досягається тоді, коли відношення граничного продукту першого чинника до його ціни дорівнює відношенню граничного продукту другого чинника до його ціни або, інакше, коли остання грошова одиниця витрачена на z_1 дає такий самий приріст випуску, що й остання грошова одиниця, витрачена на z_2.

Графічна інтерпретація оптимуму фірми також не відрізняється від графічної інтерпретації оптимуму споживача. Роль бюджетної прямої в теорії фірми виконує лінія рівних витрат — *ізокоста*, яка зображає множину всіх комбінацій факторів виробництва, які може купити фірма при визначеній сумі грошових витрат, тобто

$$H_{w,\bar{c}} = \{ z \in \mathbb{R}^2_+ \, : \, w_1 z_1 + w_2 z_2 = \bar{c} \}.$$

Оскільки w_1 і w_2 припускаємо заданими, то ізокости це паралельні лінії з нахилом

$$\left.\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}z_1}\right|_{\text{ізокоста}} = -\frac{w_1}{w_2}.$$

Ізокванти згідно з (8.4.1) мають нахил

$$\left.\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}z_1}\right|_{\text{ізокванта}} = -\frac{\mathrm{MP}_1(z)}{\mathrm{MP}_2(z)}.$$

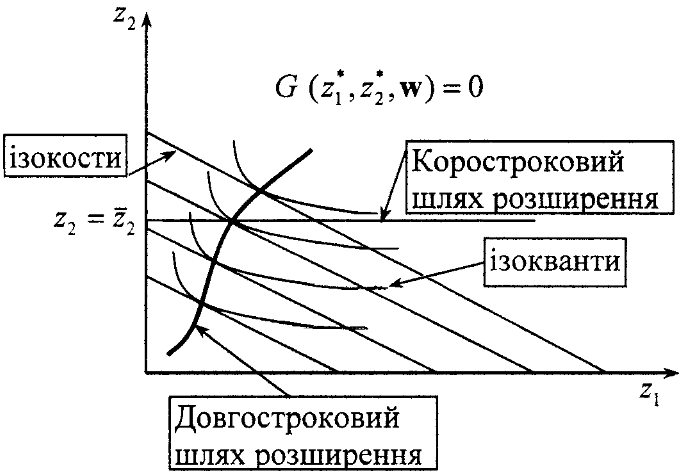
Враховуючи (8.5.2), одержуємо, що в точці оптимуму фірми нахил ізокости й ізокванти однаковий, тобто ізокоста й ізокванта в точці оптимуму фірми дотикаються.

Геометричне місце точок дотику ізокост і ізоквант, тобто сукупність оптимальних комбінацій факторів виробництва, які визначені для кожного фіксованого рівня сукупних витрат, при зроблених припущеннях на виробничу функцію, зображає собою деяку криву, яка визначає *довгостроковий шлях розширення фірми.* Рівняння кривої, яка описує точки дотику ізокости й ізокванти для оптимальної комбінації вхідних факторів виробництва для кожного рівня випуску, має вигляд

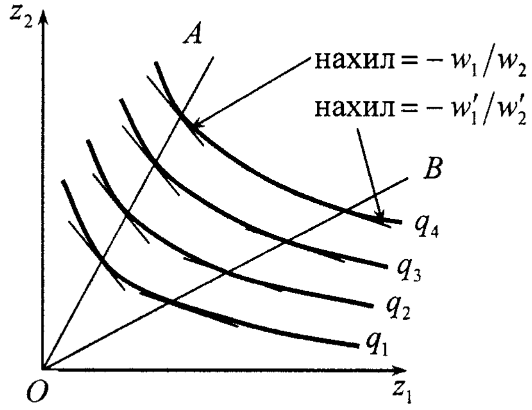
$$G(z_1^*, z_2^*, w_1, w_2) = \frac{\mathrm{MP}_1(z^*)}{w_1} - \frac{\mathrm{MP}_2(z^*)}{w_2} = 0. \qquad (8.5.4)$$

Довгостроковий шлях розширення фірми свідчить про вхідні фактори виробництва, які максимізують випуск продукції за умови довільно визначеного рівня витрат, або про фактори виробництва, які мінімізують витрати за умови певного рівня випуску, де рівень витрат визначає ізокоста, а рівень випуску — ізокванта.

Оскільки в довгостроковому періоді всі ресурси змінні, тому не має межі розширенню виробництва. Задача для фірми в цьому випадку зводиться до задачі вибору оптимального шляху росту. При заданій виробничій функції і заданих цінах на фактори виробництва, оптимальний ріст визначається довгостроковим шляхом розширення фірми. Зокрема, якщо виробнича функція однорідна, то оптимальний шлях росту визначається променем, який виходить із початку координат, нахил якого визначає оптимальне відношення z_2/z_1 і залежить від відношення цін на фактори виробництва. На рис. 8.5.4,*б* при відношенні цін w_1/w_2 оптимальний шлях росту визначається променем OA, а при відношенні цін w_1'/w_2' - променем OB. При зміні відношення цін відбудеться і зміна оптимального шляху росту.



а)



б)

Рис. 8.5.4. Шлях розширення фірми: *а*) загальний випадок; *б*) однорідний випадок

У короткостроковому періоді кількість другого фактора виробництва z_2 фіксована на рівні $\bar{z}_2$ і фірма може розширювати виробництво лише за рахунок збільшення кількості змінного фактора виробництва z_1, тобто вздовж горизонтальної прямої $z_2 = \bar{z}_2$. При заданих цінах на фактори виробництва їхня оптимальна комбінація є недосяжною.

Приклад 8.5.1. Нехай виробнича функція має вигляд $q = z_1^\alpha z_2^\beta, \ \alpha > 0, \ \beta > 0$. Довгостроковий шлях розширення фірми шукаємо за формулою (8.5.4)

$$G(z_1^*, z_2^*, w_1, w_2) = \frac{\alpha z_1^{*\alpha-1} \, z_2^{*\beta}}{w_1} - \frac{\beta z_1^{*\alpha} \, z_2^{*\beta-1}}{w_2} = 0,$$

або

$$z_2^* = \frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2} z_1^*.$$

▲

8.6 Підсумок концепції витрат

Підсумуємо результати останніх параграфів для технології, якщо визначається виробничою функцією $q = f(k, l)$ і охоплює як аргументи капітал k і працю l. Позначимо через r і w ціни капіталу і праці. Приймаємо ціни факторів виробництва заданими зовні (екзогенно) і сталими.

Пошук оптимальної комбінації факторів виробництва є близьким до розв'язання задачі оптимального вибору споживача. Справді, фіксований рівень витрат можна інтерпретувати як бюджетне обмеження фірми, яке визначає певний бюджет на закупку ресурсів. Тому випуск заданої технології має зміст максимізуючої величини і відображає карту ізоквант, а в цілому задача максимізації випуску при фіксованих витратах така:

$$f(k, l) \to \max, \quad rk + wl = C, \; k, l > 0.$$

Для строго ввігнутих виробничих функцій необхідна і достатня умова оптимальності визначається точкою дотику ізокости та ізокванти

$$-\frac{\mathrm{MP}_k}{\mathrm{MP}_l} = \mathrm{MPTS}_{kl}(k^*, l^*) = -\frac{r}{w}.$$

Користуючись теорією двоїстості, можна сформулювати двоїсту задачу

$$rk + wl \to \min, \quad f(k, l) = q, \; k, l > 0.$$

Порівняно з задачею максимізації випуску задача мінімізації витрат має прозорішу економічну інтерпретацію: мінімізація витрат при заданому рівні випуску добре узгоджується з принципом максимізації прибутку. Для строго ввігнутих виробничих функцій необхідна і достатня умова оптимальності визначається точкою дотику ізокости та ізокванти

$$-\frac{r}{w} = \mathrm{MPTS}_{kl}(k^*, l^*), \quad f(k^*, l^*) = q.$$

Вважаючи тепер, що r, w, q змінними параметрами, можна знайти оптимальні комбінації факторів виробництва $k^*(r, w, q)$, $l^*(r, w, q)$ для всіх випусків q і всіляких можливих цін r, w. Якщо підрахувати мінімальні витрати, які пов'язані з випуском q, ми отримаємо функцію довгострокових затрат

$$c(r, w, q) = rk^*(r, w, q) + wl^*(r, w, q).$$

Ця функція характеризує витрати раціонального виробника, який дотримується умов технологічної ефективності і принципу економічної ефективності, вибираючи (в довгостроковому періоді) ту технологію (пропорцію співвідношення факторів), яка забезпечує найменші затрати при кожному рівні випуску.

У короткостроковому періоді двофакторної моделі прийнято вважати капітал k — фіксованим, а трудові ресурси l — змінними. Формально короткостроковий період відрізняється від довгострокового введенням додаткового обмеження вигляду $k = \bar{k}$. Отож, задача оптимізації витрат у короткостроковому періоді така:

$$r\bar{k} + wl \to \min, \quad f(\bar{k}, l) = q, \; l > 0.$$

Очевидно така задача має вироджений розв'язок, оскільки обмеження $f(\bar{k}, l) = q$ однозначно (для ввігнутих і монотонних за кожним аргументом виробничих функцій) визначає значення $l^* = l(q, \bar{k})$, яке необхідне для випуску q при наявності капіталу $\bar{k}$.

На цій основі можна побудувати функцію короткострокових витрат $c(r, w, q) = r\bar{k} + wl(q, \bar{k})$, де $r\bar{k}$ — фіксовані витрати фірми, $wl(q, \bar{k})$ — змінні витрати, які пов'язані з кількістю праці, що забезпечує заданий рівень випуску.

Розділ 9

Функція витрат і пропозиція випуску

9.1 Геометрія витрат і пропозиція випуску

Нехай технологія виробництва визначається виробничою множиною $Y = \{(-z, q) : q - f(z) \leqslant 0, \ z \in \mathbb{R}_{+}^{L-1}, \ q \geqslant 0\}$. Продовжимо аналіз взаємозв'язку між технологією фірми, функцією витрат і пропозицією випуску одного виду продукту. Надалі вектор цін на фактори виробництва фіксований $w = \bar{w} \gg 0$. Для зручності позначимо функцію витрат фірми через $C(q) = c(\bar{w}, q)$. Функцію $C(\cdot)$ називають також *функцією довгострокових витрат* $C(q) \equiv LRC(q)$ (*lonq-run cost*). [1] Функцію витрат можна отримати на основі множини ізоквант, які зображають деяку виробничу функцію, та ізокост, що характеризують вартість ресурсів при заданих цінах, тобто на основі довгостро-

[1] Розрізнятимемо витрати в довгостроковому періоді та витрати в короткостроковому періоді.

кового шляху розширення фірми (див.рис. 9.1.1).

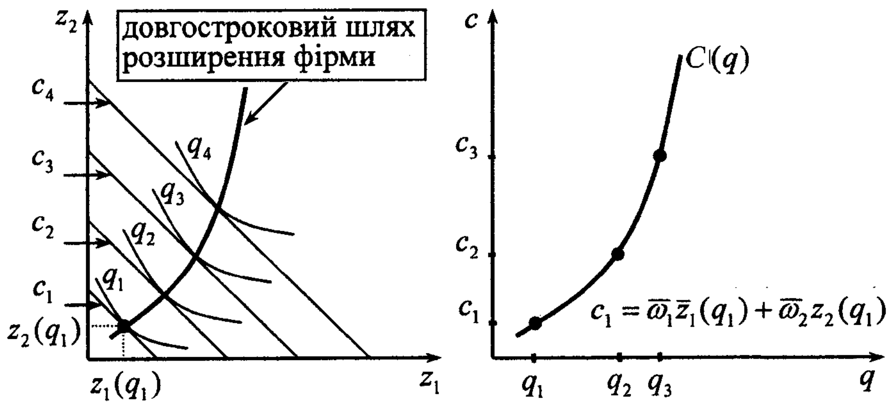


Рис. 9.1.1.

Для рівня випуску $q > 0$ визначимо *функцію середніх витрат*

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q}$$

(*функцію довгострокових середніх витрат — long-run average cost* $AC(q) \equiv LRAC(q)$) і якщо функція $C(\cdot)$ диференційовна, то визначимо *функцію граничних витрат*

$$MC(q) = \frac{\mathrm{d}\, C(q)}{\mathrm{d}\, q}$$

(*функцію довгострокових граничних витрат — long-run marginal cost*, $MC(q) \equiv LRMC(q)$).

Середні витрати $AC(\cdot)$ характеризують питомі витрати в розрахунку на одиницю випуску за умови, що всі виробничі ресурси змінні. Графічно середні витрати визначаються тангенсом кута нахилу променя, проведеного з початку координат до кривої витрат $C(\cdot)$ у точці, яка відповідає заданому рівню випуску.

Граничні витрати $MC(\cdot)$ характеризують приріст витрат зі збільшенням рівня випуску на одиницю за умови, що всі ресурси змінні. Графічно граничні витрати визначаються тангенсом кута нахилу дотичної до кривої витрат $C(\cdot)$ в точці, яка відповідає заданому рівню випуску.

Припустимо, що функція витрат $C(\cdot)$ диференційовна. Нагадаємо, що при заданій ціні p на продукцію всі оптимальні рівні випуску $q \in q(p)$ ($q(p)$ — геометричне місце рівнів випуску, які максимізують прибуток при ціні p) задовольняють необхідну умову оптимальності першого порядку (4.2.2)

$$p \leqslant MC(q), \quad \text{справджується рівність, якщо } q > 0. \tag{9.1.1}$$

Якщо виробнича функція $f(z)$ ввігнута, то функція витрат $C(q)$ опукла і граничні витрати не спадають (теорема 3.2.1). У цьому випадку умова (9.1.1) є також достатньою умовою для того, щоб рівень випуску q при ціні p максимізував прибуток фірми. На рис. 9.1.2 і 9.1.3 для випадку опуклої технології зображено пропозицію випуску $q(p)$.

Приклад 9.1.1. Нехай технологія виробництва описується виробничою функцією Коба-Дугласа $q = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. У прикладі 3.1.1 отримано функцію витрат $C(q) = \Theta\, q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$, де $\Theta = k^{-\frac{1}{\alpha+\beta}} \left[(\alpha/\beta)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + (\beta/\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right] \bar{w}_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, \bar{w}_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$. Тоді

$$AC(q) = \Theta\, q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}, \qquad MC(q) = \frac{\Theta}{\alpha+\beta}\, q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}},$$

$$q(p) = \left\{ q \geqslant 0 : \, p \leqslant \frac{\Theta}{\alpha+\beta}\, q^{\frac{1-\alpha-\beta}{\alpha+\beta}} \;\; (=, \text{якщо } \; q > 0) \right\}.$$

Рис. 9.1.2. *а*) Y - строго опукла технологічна множина; *б*) функція витрат; *в*) функції середніх, граничних витрат і пропозиція випуску

▲

Наведений приклад ілюструє важливі властивості функції витрат для випадку однорідної виробничої функції $f(\cdot)$. Нехай виробнича функція $f(\cdot)$ однорідна степеня k: $f(\alpha z) = \alpha^k f(z)$, $\alpha > 0$. Тоді за умови зростання обсягів ресурсів в α ($\alpha > 1$) разів, випуск зростає в α^k разів а витрати (з врахуванням властивості відсутності "рога достатку ") в α разів, тобто

$$C(q) = \Theta q^{\frac{1}{k}},$$

де параметр $\Theta > 0$.

Отже, якщо $k > 1$ — зростаюча віддача від масштабу, то функція витрат ввігнута, а функції середніх і граничних витрат — опуклі і спадні, та $AC(q) > MC(q)$. Якщо $k < 1$ — спадаюча віддача від масштабу, то функція витрат опукла, функції середніх і граничних витрат опуклі і зростаючі, та $MC(q) > AC(q)$. Якщо $k = 1$ — стала віддача від масштабу,

Рис. 9.1.3. *а*) Y - технологічна множина з властивістю сталої віддачі; *б*) функція витрат; *в*) функції середніх, граничних витрат і пропозиція випуску

то $C(q) = \Theta q$ і $AC(q) = MC(q) = \Theta$. Як бачимо, важливим фактором, який визначає конфігурацію функції витрат $C(q)$, є характер віддачі від масштабу. Оскільки в довгостроковому періоді не має сталих факторів виробництва, то криві витрат, за будь-якого характеру віддачі від масштабу, виходять із початку координат. У багатьох виробництвах зростаюча віддача від масштабу при досягненні певного рівня випуску змінюється на спадаючу. Технології виробництва з таким змінним характером віддачі від масштабу відповідає і змінююча конфігурація кривої витрат. До певного рівня випуску крива витрат $C(\cdot)$ — ввігнута, а після нього — опукла. З іншого боку, функція середніх витрат $AC(\cdot)$ може спадати до одинокого мінімуму, а потім зразу ж зростати. Тоді говоримо, що функція середніх витрат $AC(\cdot)$ має U — форму. Рис. 9.1.7 ілюструє функцію витрат, коли функція середніх витрат має U — форму. Коли технологія виробництва не опукла, то умова

Рис. 9.1.4. Випадок $k > 1$

(9.1.1) лише необхідна умова оптимальності першого порядку в задачі максимізації прибутку (6.1.3). Достатня умова оптимальності другого порядку стверджує, що граничні витрати в точці $q \in q(p)$ повинні зростати

$$\frac{\mathrm{d}^2 C(q)}{\mathrm{d}q^2} = \frac{\mathrm{d}\, MC(q)}{\mathrm{d}q} > 0. \tag{9.1.2}$$

Оскільки прибуток фірми обчислюється за формулою $\Pi(q) = p\,q - C(q) = q(\,p - AC(q)\,)$, то пропозиція випуску залежить від знака величини $p - AC(\bar{q})$, де $\bar{q}$ — точка мінімуму функції середніх витрат $AC(\cdot)$. Зокрема, для цього рівня випуску значення середніх і граничних витрат однакове $AC(\bar{q}) = MC(\bar{q})$. Справді, нехай $\bar{q}$ точка мінімуму функції $AC(q)$. Тоді

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left(\frac{C(q)}{q}\right) \leqslant 0 \qquad \text{для всіх} \quad q \leqslant \bar{q},$$

або

$$\frac{qC'(q) - C(q)}{q^2} \leqslant 0 \qquad \text{для всіх} \quad q \leqslant \bar{q}.$$

Рис. 9.1.5. Випадок $k < 1$

Звідки випливає, що

$$MC(q) \leqslant AC(q) \qquad \text{для всіх} \quad q \leqslant \bar{q}.$$

Подібний аналіз засвідчує, що

$$MC(q) \geqslant AC(q) \qquad \text{для всіх} \quad q \geqslant \bar{q}.$$

Отже, маємо

$$MC(\bar{q}) = AC(\bar{q}).$$

Якщо $p > AC(\bar{q})$, то єдиний рівень випуску q, який максимізує прибуток, задовольняє умову $p = MC(q) > AC(q)$. Якщо $p < AC(\bar{q})$, то для $q > 0$ величина прибутку від'ємна і єдина пропозиція випуску є $q = 0$ (зауважимо, що $q = 0$ задовольняє умову (9.1.1), бо $p < MC(0)$). Якщо $p = AC(\bar{q})$, то множина рівнів випуску, які максимізують прибуток така: $\{0, \bar{q}\}$. Пропозиція випуску зображена на рис. 9.1.7.

Крива пропозиції фірми в довгостроковому періоді відповідає зростаючій гілці кривої $MC(\cdot)$, яка лежить вище від мінімуму кривої $AC(\cdot)$. При ринкових цінах менших за $\min\limits_{q} AC(q)$ крива пропозиції збігається з віссю цін.

Рис. 9.1.6. Випадок $k = 1$

Для *короткострокового періоду* витрати виробництва поділяють на фіксовані — витрати, які не залежать від рівня випуску, і на змінні — витрати, які змінюються при зміні рівня випуску. До *фіксованих витрат* FC (*fixed cost*) належать витрати на утримання будівель, споруд, обладнання, адміністрації, орендна плата, деякі види податків. До *змінних витрат* $C_v(\cdot)$ (*variable cost*) належать — витрати на сировину, матеріали, робочу силу.

Отже, *загальні витрати в короткостроковому періоді* $STC(\cdot)$ (*short-run total cost*) зображають у вигляді суми змінних і фіксованих витрат

$$STC(q) = C_v(q) + FC.$$

Розглянемо тепер співвідношення між короткостроковими і довгостроковими витратами для випадку двох факторів виробництва. У короткостроковому періоді, на відміну від довгострокового, фірма не може змінювати обсяг випуску шляхом зміни всіх виробничих ресурсів. Замість того, щоб рухатись уздовж довгострокового шляху розширення фірми (у випадку однорідної виробничої функції — уздовж променя,

Рис. 9.1.7. *а*) технологія не опукла; *б*) функція витрат; *в*) функції середніх, граничних витрат і пропозиція випуску

який виходить із початку координат), вона змушена змінювати рівень випуску, рухаючись уздовж лінії, яка паралельна до осі змінного ресурсу. Тому крива короткострокових витрат не бігається з кривою довгострокових витрат. Зокрема, вона проходить вище кривої $C(q)$ для всіх q, крім точки спільного дотику q_2, крива $STC(\cdot)$ має конфігурацію, подібну до кривої $C(\cdot)$ (див. рис. 9.1.9) Нехай фірма перебуває на шляху

Рис. 9.1.8.

розширення в точці A і виробляє q_2 одиниць продукції при

Рис. 9.1.9.

витратах c_2. Якщо фірма має намір зменшити випуск продукції до рівня q_1, то вона зможе це зробити, рухаючись уздовж шляху розширення в точку B, і відповідно зменшити витрати до величини c_1. У короткостроковому періоді їй доведеться рухатись уздовж лінії $z_2 = \bar{z}_2$ до точки B'. Оскільки точка B' не є точкою дотику ізокости $_1$ до ізокванти q_1, то вона зображає вищий рівень витрат ніж точка B, $\quad c'_1 > c_1$. Отже, загальні витрати в точці B' більші, ніж у точці B. Звідки випливає, що в короткостроковому періоді для рівня випуску q меншого за q_2, $\ STC(q) > C(q)$. Навіть коли фірма зупинить виробництво $q = 0$, то вона не зможе зменшити кількість фіксованого ресурсу і доведеться нести певні витрати $FC > 0$.

Нехай фірма хоче збільшити рівень випуску понад q_2. Проте в короткостроковому періоді точка D для неї недосяжна, оскільки кількість фіксованого ресурсу є обмежена $z_2 = \bar{z}_2$. Для досягненя випуску q_3 фірмі доведеться перейти в точку D'. Для цього стану, як і в точці B', короткострокові витрати більші за довгострокові, $STC(q) > C(q)$ для $q > q_2$. Лише а точці A, де перетинаються два шляхи розширення, випуск і витрати однакові, тому у відповідній точці q_2 на рис. 9.1.8 короткострокові та довгострокові витрати рівні, $STC(q_2) = C(q_2)$. Всі решта точок на короткостроковому шляху розширення є не оптимальними в тому розумінні, що для заданого рівня випуску, який визначається ізоквантою, витрати не є мінімальними.

Отже, короткострокові загальні витрати та середні витрати для будь-якого випуску, який відмінний від $\bar{q}$, є більші за відповідні довгострокові та середні витрати.

Для фірми важливо знати не лише загальні витрати, а й показники, які характеризують їх рівень у розрахунку на одиницю випуску.

Отож, визначимо *функції короткострокових середніх і граничних витрат:*

$$\begin{aligned}
SAC(q) &= \frac{STC(q)}{q} \quad \text{(short-run average cost);}\\
SAC_v(q) &= \frac{C_v(q)}{q} \quad \text{(short-run average variable cost);}\\
AFC(q) &= \frac{FC}{q} \quad \text{(short-run average fixed cost);}\\
SMC(q) &= \frac{\mathrm{d}\,STC(q)}{\mathrm{d}q} \quad \text{(short-run marginal cost);}\\
SMC_v(q) &= \frac{\mathrm{d}\,C_v(q)}{\mathrm{d}q} \quad \text{(short-run marginal variable cost).}
\end{aligned}$$

Приклад 9.1.2. *Використаємо технологію Коба-Дугласа* $F(y) = q - z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *для ілюстрації функції короткострокових витрат. Нехай ресурс* z_2 *фіксований,* $z_2 = \bar{z}_2$. *Тоді*

$$
\begin{aligned}
q &= z_1^{\alpha}\bar{z}_2^{\beta}, \qquad z_1 = \bar{z}_2^{-\frac{\beta}{\alpha}}\, q^{\frac{1}{\alpha}},\\
STC(q) &= \bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2\bar{z}_2 = \bar{w}_1\, \bar{z}_2^{-\frac{\beta}{\alpha}}\, q^{\frac{1}{\alpha}} + \bar{w}_2\bar{z}_2 = C_v(q) + FC,\\
SAC(q) &= \frac{C_v(q)}{q} + \frac{FC}{q} = \bar{w}_1\, \bar{z}_2^{-\frac{\beta}{\alpha}}\, q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + \frac{\bar{w}_2\bar{z}_2}{q}\\
&= SAC_v(q) + AFC(q),\\
SMC(q) &= \frac{\mathrm{d}C_v(q)}{\mathrm{d}q} = \frac{\bar{w}_1\, \bar{z}_2^{-\frac{\beta}{\alpha}}}{\alpha}\, q^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = SMC_v(q).
\end{aligned}
$$

▲

Припустимо, що технологія, яка описується виробничою функцією $q = f(z_1, ..., z_L)$, використовує фіксовані фактори $i = 1, ..., L'$ і змінні фактори $i = L' + 1, ..., L$. Тоді функція короткострокових змінних витрат фірми визначається так:

$$
C_v(q) = \min_{(z_{L'+1},...,z_L)} \left\{ \sum_{i=L'+1}^{L} \bar{w}_i z_i : q = f(\bar{z}_1, ..., \bar{z}_{L'}, z_{L'+1}, ..., z_L) \right\},
$$

а функція короткострокових загальних витрат має вигляд

$$
STC(q) = C_v(q) + \sum_{i=1}^{L'} \bar{w}_i\bar{z}_i + K,
$$

де K — деякі фіксовані витрати (наприклад, орендна плата).

Зокрема зауважимо, що значення короткострокових середніх змінних витрат для рівня випуску $q = 0$ збігається із значенням короткострокових граничних витрат

$$
\lim_{q\to 0} \frac{C_v(q)}{q} = SMC_v(0) = SMC(0).
$$

Аналогічно до випадку довгострокового періоду можна показати, що в короткостроковому періоді мінімум середніх загальних і середніх змінних витрат досягається тоді, коли відповідні середні витрати дорівнюють граничним (див. рис.), тобто при рівнях випуску q_2 і q_3, для яких

$$SAC_v(q_2) = SMC(q_2), \qquad SAC(q_3) = SMC(q_3).$$

Оскільки збільшення середніх загальних витрат настає лише за умови, коли довгочасне знижування AFC перекриється зростанням SAC_v, то $q_2 < q_3$.

Зазначимо важливі *властивості функцій короткострокових витрат.*

Припустимо, наприклад, що технологія виробництва описується виробничою функцією $q = f(z_1, z_2)$. Нагадаємо, що ціни на фактори виробництва фіксовані $\bar{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$. Розв'язавши задачу мінімізації витрат фірми для виробництва заданого рівня випуску q

$$\bar{w}_1 z_1 + \bar{w}_2 z_2 \to \min, \qquad \text{за умови } f(z_1, z_2) = q,$$

знаходимо функцію довгострокових витрат

$$C(q) = \bar{w}_1 z_1(q) + \bar{w}_2\, z_2(q).$$

Для побудови функції короткострокових витрат зафіксуємо другий фактор виробництва z_2 на рівні $\bar{z}_2$. Тоді з рівняння $f(z_1, \bar{z}_2) = q$ ($f(\cdot)$ — монотонна за кожним аргументом) знаходимо z_1 як функцію від q і $\bar{z}_2$

$$z_1 = \varphi(q, \bar{z}_2).$$

Отже, функція короткострокових загальних витрат має вигляд

$$STC(q, \bar{z}_2) = \bar{w}_1 \varphi(q, \bar{z}_2) + \bar{w}_2 \bar{z}_2 = C_v(q, \bar{z}_2) + FC. \qquad (9.1.3)$$

Якщо $\bar{z}_2$ розглядати як параметр, то рівність (9.1.3) визначає сім'ю кривих STC. Вище було показано, що для рівнів випуску q таких, що $\bar{z}_2 = z_2(\bar{w}, q)$, правильна рівність

$$STC(q, z_2(\bar{w}, q)) = C(q) \qquad \text{для всіх } q. \tag{9.1.4}$$

Із (9.1.4) знаходимо нахил функції $C(\cdot)$ в точці q, для якої $\bar{z}_2 = z_2(\bar{w}, q)$

$$\frac{\mathrm{d}C(q)}{\mathrm{d}q} = \frac{\partial STC(q, \bar{z}_2)}{\partial q} + \frac{\partial STC(q, \bar{z}_2)}{\partial z_2}\frac{\partial z_2(\bar{w}, q)}{\partial q}.$$

Оскільки короткострокові витрати при фіксованому факторі виробництва $\bar{z}_2 = z_2(\bar{w}, q)$ для рівня випуску q найменші, $STC(q', z_2(\bar{w}, q)) \geqslant C(q')$ для всіх q', то

$$\frac{\partial STC(q, \bar{z}_2)}{\partial z_2} = 0.$$

Отож, довгострокові граничні витрати для рівня випуску q збігаються з короткостроковими граничними витратами в точці $(q, z_2(\bar{w}, q))$, тобто

$$MC(q) = SMC(q, z_2(\bar{w}, q)) \qquad \text{для всіх } q. \tag{9.1.5}$$

Звідки на основі рівностей (9.1.4) і (9.1.5) отримаємо властивість.

1. *Функція довгострокових витрат $C(q)$ є обвідною функцій короткострокових загальних витрат $STC(q, \bar{z}_2)$.*

Наслідком міркувань, наведених у цьому параграфі, є те, що *криву $AC(q)$ можна зобразити як обвідну сім'ї кривих $SAC(q, \bar{z}_2)$* (див. рис. 9.1.10). Це дає змогу розширити уявлення про поняття довгострокових середніх витрат. Це питання розглянемо пізніше.

2. *Функція короткострокових граничних витрат зрештою зростає під час зростання випуску.*

Рис. 9.1.10. Довгострокові та короткострокові середні витрати

При раціональній поведінці фірма прагне перебувати на другій стадії виробництва, де залучення додаткової одиниці змінного фактора виробництва дає хоч і спадаючий, проте додатний приріст випуску. Отже,

$$\begin{aligned} SMC(q) &= \frac{\mathrm{d}\, C_v(q)}{\mathrm{d}q} = \bar{w}_1 \frac{\mathrm{d}\varphi(q, \bar{z}_2)}{\mathrm{d}q} \\ &= \frac{\bar{w}_1}{\dfrac{\partial f(z_1, \bar{z}_2)}{\partial z_1}} = \frac{\bar{w}_1}{\mathrm{MP}_1(z_1, \bar{z}_2)}, \end{aligned}$$

оскільки граничний продукт $\mathrm{MP}_1(z_1, \bar{z}_2)$ у технічно ефективній (особливій) області спадає, то при $w_1 = \bar{w}_1$ функція $SMC(\cdot)$ зростає.

3. *Функція короткострокових середніх змінних витрат з часом починає зростати.*

Справді,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}SAC_v(q)}{\mathrm{d}q} &= \frac{\bar{w}_1}{q}\frac{\mathrm{d}\varphi(q,\bar{z}_2)}{\mathrm{d}q} - \frac{\bar{w}_1\varphi(q,\bar{z}_2)}{q^2}\\ &= \frac{\bar{w}_1}{q}\left(\frac{1}{\mathrm{MP}_1} - \frac{1}{\mathrm{AP}_1}\right) = \frac{\bar{w}_1\,(\mathrm{AP}_1 - \mathrm{MP}_1)}{q\mathrm{MP}_1\,\mathrm{AP}_1}.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathrm{AP}_1 < \mathrm{MP}_1$ на першій стадії виробництва, то функція $SAC_v(\cdot)$ спадає до другої критичної точки $\bar{\bar{z}}_1$. Після $\bar{\bar{z}}_1$, $\mathrm{AP}_1 > \mathrm{MP}_1$, тому $SAC_v(\cdot)$ зростає. Отже, $SAC_v(\cdot)$ має U — форму, тобто з часом починає зростати.

4. *Функція короткострокових середніх витрат має* U — *форму.*

Як відомо, в технічно ефективній області спочатку $\mathrm{MP}_1 > \mathrm{AP}_1$, а потім навпаки, $\mathrm{AP}_1 > \mathrm{MP}_1$. Тоді з доведення попередньої властивості бачимо, що крива $SAC_v(\cdot)$ опукла і має U — форму. Крім того, функція $AFC(q) = \dfrac{\bar{w}_2\bar{z}_2}{q}$ (має вигляд гіперболи) — опукла та спадна. Тому $SAC(\cdot)$, яка є сумою двох опуклих функцій (однієї спадної, а іншої — U – форми), має U — форму, що й потрібно було довести.

Криві короткострокових витрат характерні для тих виробництв, в яких зростаюча віддача змінного ресурсу змінюється на спадаючу. У виробництвах, де сталий ресурс однорідний і має властивість подільності так, що частину його можна перевести, наприклад, в запас, простежується стала віддача змінного фактора виробництва. Це притаманно для неопуклих технологій. Проілюструємо це для двох випадків рис. 9.1.11 і рис. 9.1.12. Нехай функція витрат фірми така:

$$C(q) = \begin{cases} 0, & q = 0,\\ C_v(q) + K, & q > 0,\end{cases}$$

де $K > 0$, $C_v(\cdot)$ — функція змінних витрат, опукла і $C_v(0) = 0$.

Рис. 9.1.11. Технологія з опуклими змінними витратами та незмінними заданими витратами

Рис. 9.1.12. Стала віддача змінних витрат

5. *Якщо виробнича функція визначає технологію зі сталою віддачею від масштабу, то точка дотику $\bar{q}$ між кривими довгострокових і короткострокових витрат завжди є точкою мінімуму функції короткострокових середніх витрат. У цій точці правильні рівності*

$$AC(\bar{q}) = MC(\bar{q}) = SMC(\bar{q}) = \min_q SAC(q).$$

Ця властивість є наслідком міркувань наведених у цьому параграфі (див. рис. 9.1.13).

Приклад 9.1.3. Нехай задано технологію Коба-Дугласа. У

Рис. 9.1.13.

прикладі 9.1.1 отримано функції довгострокових середніх і граничних витрат, а у прикладі 9.1.2 одержано функції короткострокових середніх і граничних витрат. Тепер знайдемо точку мінімуму функції $SAC(\cdot)$ та її мінімальне значення. Матимемо

$$\frac{\mathrm{d}\,SAC}{\mathrm{d}q} = \frac{\bar{w}_1}{\bar{z}_2^{\frac{\beta}{\alpha}} q^2} \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[q^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \bar{z}_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \right] = 0.$$

Звідки

$$q^* = \left(\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha} \bar{z}_2^{\alpha+\beta},$$

і

$$SAC(q^*) = SMC(q^*) = \left[\frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right]^{1-\alpha} \frac{\bar{w}_1}{\alpha} \bar{z}_2^{1-\alpha-\beta}.$$

Отже, у випадку $\alpha + \beta = 1$ в точці q^* правильні рівності

$$AC = MC = SMC = \min_q SAC(q).$$

▲

Якщо технологія характеризується зростаючою або спадаючою віддачею від розширення масштабу виробництва, то точка мінімуму короткострокових середніх витрат не збігається з $\bar{q}$. правді, нехай, наприклад, технологія характеризується спадаючою віддачею від масштабу (див. рис. 9.1.14). Оскільки крива $SAC(\cdot)$ розташована вище від $AC(\cdot)$ і має U – форму, то звідси випливає, що у точці мінімуму функції короткострокових середніх витрат промінь, який виходить з початку координат, дотикається до $STC(\cdot)$ і в околі цієї точки крива короткострокових витрат розташована вище променя. Крім того, крива $C(\cdot)$ – опукла (з початку координат), тому цей промінь не може дотикатися до кривої довгострокових витрат. Отож, точка мінімуму короткостокових середніх витрат розташована лівіше від $\bar{q}$. Тому властивість 5 у цьому випадку ніколи не виконується.

Рис. 9.1.14.

Тепер можна сформулювати основні співвідношення між різними середніми та граничними витратами (рис. 9.1.15).

1. Якщо $SAC(\cdot)$ або $SAC_v(\cdot)$ спадають, то граничні витрати менші за середні, $SMC < SAC$ або $SMC < SAC_v$ (графік кривих SAC і SAC_v лівіше від A' і B').

2. Якщо $SAC(\cdot)$ або $SAC_v(\cdot)$ зростають, то граничні витрати більші за середні, $SMC > SAC$ або $SMC > SAC_v$ (графік кривих SAC і SAC_v правіше від A' і B').

3. $SAC(\cdot)$ і $SAC_v(\cdot)$ досягають мінімуму, коли граничні витрати дорівнюють середнім, $SMC = SAC$ або $SMC = SAC_v$ (точки A' і B').

4. Оскільки збільшення середніх загальних витрат відбувається за умови, коли продовжуюче зменшення AFC перекриється SAC_v, то SAC_v досягають мінімуму при менших рівнях випуску, ніж SAC.

Нагадаємо, що довгостроковий період відрізняється від короткострокового тим, що всі фактори виробництва змінні. В довгостроковий період фірма може змінювати не лише обсяг трудових і матеріальних ресурсів, які використовують у виробництві, а й змінювати величину виробничих потужностей. Підприємство завжди функціонує в умовах короткострокового періоду, проте планує свій розвиток на довгостроковий період. Плануючи свій розвиток, фірма орієнтується на досягнення мінімальних середніх витрат для кожного заданого рівня випуску. Оскільки крива $AC(\cdot)$ є обвідною сім'ї кривих $SAC(\cdot)$, то уздовж цієї кривої відбувається вибір виробничої потужності в довгостроковий період.

Припустимо, що в галузі є змога утворити фірми (підприємства) лише трьох розмірів - малого, середнього і великого. Це передбачає, що обладнання, яке потрібне для цих фірм, також виробляється лише трьох розмірів – мале, середнє, велике. Розглянуте припущення рівнозначне наявності фіксованого фактора, який може набувати лише три дискретні значення

Рис. 9.1.15. Взаємозв'язок загальних, фіксованих, змінних, середніх і граничних витрат у корткостроковому періоді

z_2^1, z_2^2, z_2^3. На рис. 9.1.16 зображено криві короткострокових середніх витрат для кожної фірми (для кожного значення фіксованого фактора). Очевидно, якщо в довгостроковому періоді планується рівень випуску q_1, то перевага надаватиметься фірмі першого типу, якщо рівень q_2 – другого і q_3 – третього, тобто оптимальний вибір ресурсу z_2 для рівня випуску q визначається шляхом мінімізації витрат для цього рівня. Якщо планується випуск обсягу q_1', то вибір може бути зроблений і на користь першої фірми (економія капіталовкладень), і на користь другої фірми (в розрахунку на зростання рівня випуску).

Припустимо, що планується рівень випуску q_1. Для цього достатньо потужності першої фірми, якій відповідає крива

Рис. 9.1.16. Довгострокові та короткострокові середні витрати

SAC_1. Насправді, може виникнути необхідність збільшити рівень випуску до q_2. Це досягається і при середніх витратах SAC_1 та стає єдино можливим розв'язанням цього питання для короткострокового періоду. У довгостроковий період доцільно провести реконструкцію підприємства, орієнтуючись на збільшення потужності до середнього рівня, що дасть змогу випускати обсяг продукції q_2 при меншому рівні витрат SAC_2.

Крива довгострокових середніх витрат є обвідною для кривих $SAC_i(\cdot),\ i = 1, 2, 3$ і має форму гребінця (scalloped – форму). Уздовж цієї кривої відбувається вибір виробничої потужності в довгостроковий період. Якщо кількість можливих значень фіксованого фактора (кількість підприємств у галузі) зростає, то крива scalloped – форми стає гладкою кривою, тобто набирає U - форму.

Отже, оптимальна для короткострокового періоду технічна й економічна політика не завжди є такою з позиції довгострокового періоду.

Ми отримали, що крива $AC(\cdot)$, як і криві $SAC(\cdot)$, має U — форму (див. рис. 9.1.10), але з менш вираженою кривизною. Ліва гілка кривої $AC(\cdot)$ характеризує зростаючу віддачу від масштабу (економічність від масштабу), права гілка — спадаючу віддачу від масштабу (неекономічність від масштабу).

У галузях, для яких характерна економічність від масштабу, переважають великі підприємства; в галузях, для яких характерна неекономічність від масштабу, переважають порівняно малі фірми. Для деяких галузей крива $AC(\cdot)$ має U — форму з широким плоским дном. Тут довгострокові середні витрати для широкого діапазону потужностей не змінюються.

Економічність від масштабу зумовлена дією таких факторів:

- неподільністю деяких вхідних факторів виробництва, що передбачає обов'язкову наявність певного мінімуму постійних витрат для випуску будь-якого обсягу продукції;
- спеціалізацією факторів виробництва, в тім числі працю, обладнання, управління;
- зниженням питомої вартості машин і обладнання, збільшуючи їхні потужності.

Неекономічність від масштабу зумовлена насамперед труднощами керування великими фірмами. Крім того, при досягненні певного масштабу фактори, які забезпечують економічність від масштабу, виявляються вичерпаними і фаза економічності переходить у фазу неекономічності. Зокрема, перехід із однієї фази в іншу може відбуватися через фазу постійної віддачі. При постійній віддачі довгострокові середні витрати залишаються незмінними. Рівень випуску q_1, при якому закінчується стадія економічності від масштабу і починається стадія постійної віддачі, називається *мінімально ефективним масштабом виробництва* MES (minimum efficient scale).

Мінімально ефективний масштаб виробництва визначає максимально можливу кількість ефективно функціонуючих фірм, які потрібні для задоволення попиту на продукцію на ринку. MES можна вимірювати в одиницях випуску відповідного товару та у відсотках до обсягу ринку цього товару. MES виявляє суттєвий вплив на концентрацію виробництва.

Тому показники мінімально ефективного масштабу суттєво впливають на тип ринку відповідного товару: чи буде він монополізованний однією великою фірмою, чи буде діяти декілька невеликих фірм.

У теорії ринків поняття періодів дещо уточнюється.

Короткостроковим періодом називається такий період, протягом якого виробничі потужності кожного підприємства фіксовані, проте рівень випуску може бути збільшеним або зменшеним за рахунок зміни обсягу використання змінних факторів виробництва. Загальна кількість фірм на ринку залишається незмінною.

Довгостроковим періодом називається такий період, протягом якого виробничі потужності можуть бути пристосовані до умов попиту і витрат. Зокрема, якщо умови діяльності зовсім невигідні для фірми, то вона може вийти з ринку. З іншого боку, за сприятливих умов нові фірми можуть увійти на ринок, тобто кількість фірм на ринку може змінюватися.

9.2 Пропозиція фірми у короткостроковому періоді

Розглянемо пропозицію фірми у короткостроковому періоді. Прибуток фірми становить різниця між загальним виторгом і загальними короткостроковими витратами

$$\Pi = pq - STC(q). \tag{9.2.1}$$

Нагадаємо, що умови максимізації прибутку першого та другого порядку визначаються формулами (6.1.4) і (6.2.1). Аналогічно як для довгострокового періоду можна показати, що крива пропозиції конкурентної фірми для короткострокового періоду збігається з частиною її кривої короткострокових граничних витрат. Для цього перепишемо (9.2.1) у вигляді

$$\Pi = pq - C_v(q) - FC = q\,(p - SAC_v(q) - AFC(q)). \tag{9.2.2}$$

При ціні $p > \min\limits_q SAC(q)$ максимум додатного прибутку досягають при рівні випуску $\bar{q}$: $p = SMC(\bar{q})$; тому точка $(\bar{q}, SMC(\bar{q}))$ належить кривій пропозиції прибутково максимізуючої фірми. Якщо $p = \min\limits_q SAC(q) = SAC(\bar{\bar{q}})$, то максимальний прибуток буде при рівні випуску $\bar{\bar{q}}$ і точка $(\bar{\bar{q}}, SAC(\bar{\bar{q}}))$ лежить на кривій $SMC(\cdot)$ та максимальний прибуток дорівнює нулю. Якщо $\min\limits_q SAC_v(q) < p < \min\limits_q SAC(q)$, то прибуток у цьому випадку буде від'ємним. З іншого боку, дохід, одержаний від продажу випуску $\hat{q}$: $p = SMC(\hat{q})$, відшкодує всі змінні витрати та частину фіксованих витрат. Отже, витрати від випуску $\hat{q}$ будуть меншими від загальних фіксованих витрат FC у короткостроковому періоді. Порівняно з нульовим випуском випуск $\hat{q}$ буде прибутково максимізуючим.

Якщо $p = \min\limits_q SAC_v(q) = SAC_v(\tilde{q})$, то для рівня випус-ку $\tilde{q}$, який задовольняє обидві умови максимізації прибутку, витрати фірми дорівнюють фіксованим витратам. За таких умов фірмі байдуже: чи випускати $\tilde{q}$, чи зупинити виробництво. Відповідну точку $(\tilde{q}, SAC_v(\tilde{q}))$ на кривій $SMC(\cdot)$ називають *точкою зупинки* (schutdown point). Ця точка може належати кривій пропозиції фірми, а може і не належати.

Якщо $p < SAC_v(\tilde{q})$, то оптимальним випуском є $q = 0$, тобто фірма надає перевагу зупинці виробництва.

Отож, для отримання функції короткострокової пропозиції необхідно взяти функцію прибутку, яка залежить від параметрів (ціна, фактори виробництва) $\Pi = \Pi(q, p, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{z}_2)$ і записати рівняння

$$\frac{\mathrm{d}\Pi(q, p, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{z}_2)}{\mathrm{d}q} \leqslant 0 \implies p = SMC(q^*), \text{ якщо } q^* > 0. \tag{9.2.3}$$

Якщо q^* — розв'язок рівняння (9.2.3) і

$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi(q, p, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{z}_2)}{\mathrm{d}q^2} < 0 \quad \implies \quad \frac{\mathrm{d}SMC(q^*)}{\mathrm{d}q} > 0,$$

то $q^* = q^*(p, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{z}_2)$ і є функцією короткострокової пропозиції фірми.

Загалом кількість продукту, запропонованого фірмою у короткостроковому періоді, є функцією власної ціни цього товару, що містить: ціни чинників виробництва; ціни інших продуктів, які може виробити ця фірма; обсяг фіксованих чинників і технологічних констант. Зі зміною параметрів, які визначають функцію короткострокової пропозиції, функція змінюється.

Отже, *крива пропозиції конкурентної фірми в короткостроковому періоді становить зростаючу гілку кривої короткострокових граничних витрат, яка лежить вище від мінімуму середніх змінних витрат. При ринкових цінах менших за* $\min\limits_q SAC_v(q)$ *крива пропозиції збігається з віссю цін (рис. 9.2.17).*

Якщо функції середніх і граничних витрат відомі, то функція пропозиції конкурентної фірми має вигляд

$$q = \begin{cases} q(p), & \text{якщо } p \geqslant \min SAC_v \\ 0, & \text{якщо } p < \min SAC_v. \end{cases}$$

Рис. 9.2.17. Криві граничних витрат (*а*) і пропозиції (*б*) в короткостроковому періоді.

Приклад 9.2.1.

1. У випадку технології Коба-Дугласа (див. приклад 9.1.2) функція короткострокової пропозиції матиме вигляд

$$q^* = \left(\frac{\alpha}{\bar{w}_1}\right)^{\alpha/1-\alpha} \bar{z}_2^{-\beta/1-\alpha} p^{\alpha/1-\alpha}.$$

2. Нехай

$$STC(q) = 10 + 6q - 2q^2 + \frac{1}{3}q^3, \qquad (9.2.4)$$

де

$$FC = 10, \quad C_v(q) = 6q - 2q^2 + \frac{1}{3}q^3. \qquad (9.2.5)$$

Із (9.2.4) знаходимо

$$SMC(q) = 6 - 4q + q^2 = 2 + (q-2)^2.$$

Прирівнюючи SMC до ринкової ціни, дістанемо

$$p = 2 + (q-2)^2 \quad \text{або} \quad (q-2)^2 = p - 2,$$

звідки

$$q = 2 \pm (p-2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{якщо } p \geqslant 2. \tag{9.2.6}$$

Функція (9.2.6) має дві гілки при $p > 2$. Проте гілка $q = 2 - (p-2)^{\frac{1}{2}}$ має від'ємний нахил, що не відповідає умові оптимальності другого порядку. Тому цю гілку не будемо розглядати.

Знайдемо випуск, при якому середні змінні витрати є мінімальними. З (9.2.5) знаходимо, що

$$SAC_v(q) = 6 - 2q + \frac{1}{3}q^2. \tag{9.2.7}$$

Звідки

$$\frac{\mathrm{d}SAC_v}{\mathrm{d}q} = -2 + \frac{2}{3}q = 0, \qquad q = 3.$$

Підставляючи $q = 3$ в (9.2.7), маємо

$$\min_q SAC_v(q) = 3.$$

Отже, функція пропозиції фірми має вигляд

$$q = \begin{cases} 2 + (p-2)^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо } p \geqslant 3 \\ 0, & \text{якщо } p < 3. \end{cases}$$

Тепер запишемо функцію прибутку

$$\Pi(p) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,p(p-2)^{1/2} - \dfrac{4}{3}\,(p-2)^{1/2} + 2p - \dfrac{50}{3}, & p \geqslant 3, \\ -10, & p < 3. \end{cases}$$

▲