Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка

М.О. Оліскевич

ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ:

Людський капітал. Моделі для панельних даних

Навчально-методичний посібник

Львів
2012

УДК 519.862+340.43
ББК У.В 611
О 54

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук *Я. Я. Притула*
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

канд. фіз.-мат. наук *Г. І. Берегова*
(Львівський інститут банківської справи
Університету банківської справи НБУ)

Рекомендовано до друку Вченою Радою
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету імені Івана Франка
Протокол № 6 від 6 червня 2012 р.

О 54 Оліскевич М.О.

Економетричне моделювання макроекономічних процесів: Людський капітал. Моделі для панельних даних : навч.-метод. посібник./ М.О. Оліскевич. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2012. – 96с.

ISBN 978-966-613-983-5

Розглянуто аналіз теорій економічного зростання, які враховують людський капітал. Досліджено проблеми економетричного моделювання витрат на освіту в областях України. Наведено основні методи дослідження моделей для панельних даних, на підставі яких проведено емпіричне моделювання взаємозв'язків між показниками освітньої сфери.

Для студентів, аспірантів і наукових працівників.

ISBN 978-966-613-981-1
ISBN 978-966-613-983-5
УДК 519.862+340.43
ББК У.В 611
© Оліскевич М.О., 2012
© Львівський національний університет імені Івана Франка, 2012

Зміст

Вступ **5**

1 Модель економічного зростання, яка враховує людський капітал **11**

1.1 Динаміка економіки 14

1.2 Якісні висновки моделі 18

1.3 Кількісні висновки моделі 20

1.3.1 Вплив частки заощаджень на відмінності у рівнях випуску в різних країнах 22

1.3.2 Відмінності у граничній нормі прибутку в різних країнах 24

1.4 Швидкість збіжності до траєкторії збалансованого зростання 26

1.5 Модель, яка використовує виробничу функцію зі сталою віддачею від розширення масштабів фізичного та людського капіталу . . 30

1.6 Модель, яка використовує виробничу функцію зі зростаючою віддачею від розширення масштабів фізичного та людського капіталу 32

1.7 Емпіричні дослідження: Нагромадження фізичного та людського капіталу та міждержавні відмінності в доходах 35

2 Економетричне моделювання витрат на освіту на основі панельних даних областей України 39
2.1 Аналіз даних 40
2.2 Економетричне моделювання на підставі об'єднаної регресії 48
2.3 Застосування моделей панельних даних з фіксованими ефектами 52
2.3.1 Оцінювання моделі, яка містить фіксовані ефекти областей 53
2.3.2 Внутрішньо-групове та міжгрупове оцінювання 60
2.3.3 Оцінювання моделі з фіксованими часовими ефектами 62
2.3.4 Модель з ефектами областей і часовими ефектами 65
2.3.5 Тестування значущих відмінностей у значеннях фіксованих ефектів 67
2.4 Застосування моделей панельних даних з випадковими ефектами 71
2.4.1 Оцінювання моделі, яка містить випадкові ефекти областей 74
2.4.2 Перевірка статистичної значущості випадкових ефектів 75
2.5 Порівняння моделей з фіксованими та випадковими ефектами на підставі тесту Гаусмана 76
2.6 Емпіричні висновки 79

Дані, що використовувались для моделювання 81

Список літератури 93

Вступ

У багатьох частинах світу рівень життя різний. Крім того у всіх країнах він змінюється з плином часу. Наявні дані засвідчують, що середній реальний дохід у багатих країнах, зокрема таких як США, Німеччина, Японія в десятки разів перевищує дохід бідних країн – Бангладешу, Індії, Заїру та інших. Також існує велика різниця в темпах зростання цих доходів. Деякі країни, зокрема Південна Корея, Туреччина, Ізраїль, характеризуються високими темпами росту доходів, тоді як іншим країнам (багатьом країнам Південної Америки та на Південь від Сахари) важко отримати позитивні темпи зростання реального доходу на душу населення.

Крім міждержавних відмінностей також простежуються значні зміни рівня життя з часом: світ сьогодні набагато багатший, ніж 300, чи навіть 50 років тому. Наслідки цих відмінностей, які визначаються в різних рівнях життя, для людського добробуту величезні. Різні реальні доходи пов'язані зі значними відмінностями в харчуванні, освіченості, дитячій смертності, тривалості життя та інших визначниках добробуту. З погляду добробуту, наслідки довгострокового економічного зростання мають набагато більше значення, ніж будь-які наслідки короткострокових коливань, яких намагаються уникнути державні діячі й економісти.

Питання відмінностей у доходах досліджують моделі економічного зростання, основною метою яких є пояснення причин світового економічного зростання та відмінностей у доходах між країнами. Основою таких моделей є модель Солоу, яка грунтується на виробничій функції

$$Y = A\,K^{\alpha}\,L^{1-\alpha}\,, \qquad 0 < \alpha < 1\,,$$

де Y – обсяг випуску, K – обсяг капіталу, L – обсяг праці, A – абстрактна величина, яка визначає ефективність виробництва. Головний результат моделі Солоу полягає в тому, що, незважаючи на те, в якому початковому стані перебуває економіка, внаслідок накопичення капіталу в довгостроковому періоді вона прямує до деякої траєкторії збалансованого зростання, досягнувши якої, залишається там надалі. На траєкторії збалансованого зростання кож-

на змінна моделі зростає зі сталим темпом, зокрема темп росту випуску на одного працівника визначається тільки темпом росту науково-технічного прогресу.

Модель Солоу виявляє дві можливі причини міжчасових або міждержавних відмінностей у рівнях випуску на душу населення: відмінності у величині капіталу на працівника K/L та відмінності у величині ефективної праці AL. Проте аналіз моделі засвідчує, що за правдоподібних значень параметрів пояснити великі різниці в доходах на підставі різниць у капіталі неможливо, оскільки для такого пояснення згідно з моделлю необхідна занадто велика різниця в капіталі, а емпіричні дані не підтверджують таких значних відмінностей у запасах капіталу в різних країнах світу. Отож, відмінності у капіталі на працівника, які існують у різних країнах, недостатні для того, щоб пояснити відмінності в доходах на одного працівника, які ми намагаємося зрозуміти. Іншим поясненням різних рівнів життя можуть бути різні норми прибутку в різних країнах. Проте для пояснення великих різниць у рівні випуску з моделі випливає, що відмінності в нормі прибутку повинні бути ще більшими. Як і у випадку з капіталом, ми не спостерігаємо таких відмінностей у нормі прибутку в різних країнах чи в різні роки.

Отже, висновки моделі Солоу стверджують, що накопиченням фізичного капіталу не можна пояснити ані швидкого зростання випуску на душу населення, ані відмінностей у реальних доходах на душу населення між регіонами. Тому для відповіді на головні питання теорії зростання треба розширити межі моделі Солоу.

Моделі Рамсея-Каса-Купманса, Даймонда та їхні узагальнення модифікують модель Солоу, грунтуються на задачах оптимізації й аналізують головні чинники, які визначають заощадження та інвестиції. У цих моделях норма заощаджень може змінюватися в часі та визначається ендогенно на відміну від моделі Солоу, в якій вона вважається постійною екзогенно заданою величиною. Проте головні висновки таких моделей щодо центральних питань теорії зростання збігаються з висновками моделі Солоу і не залежать від припущення про постійність норми заощаджень. Згідно з цими моделями до постійного збільшення темпів зростання випу-

ску на одного працівника може призвести лише підвищення темпів зростання ефективності праці.

Сучасні напрями ендогенної теорії зростання полягають у глибшому дослідженні параметра A, що визначає ефективність виробництва. Пояснення відмінностей у рівні життя різною ефективністю праці не потребує величезних відмінностей у капіталі або нормі прибутку. Тому подальші моделі економічного зростання відмовляються від припущення про екзогенність технічного прогресу, яке використане в моделі Солоу, і передбачають, що технічний прогрес є результатом перерозподілу факторів виробництва для створення нових технологій. Вони аналізують вплив ендогенного технічного прогресу на економічне зростання, а також вплив основних детермінант вибору обсягу ресурсів, використаних для створення інновацій. Різні моделі такого типу відрізняються в інтерпретації ефективності праці як знань і у формальному моделюванні її розвитку в часі. Зокрема, аналізується динаміка економіки, коли нагромадження знань явно моделюються і розглядаються різні погляди на те, як виробляються знання та що визначає розподіл ресурсів для виробництва знань.

Різні моделі ендогенного зростання по-різному інтерпретують коефіцієнт A. Одним з них є припущення про те, що ефективність праці відповідає абстрактним знанням. Тоді для пояснення світового зростання потрібно виявити чинники, які впливають на динаміку запасу знань. Для пояснення міждержавних відмінностей у реальних доходах треба зрозуміти, чому в одних країнах фірми мають доступ до більшого запасу знань, ніж в інших, і чому ці знання не переходять у бідні країни. Існують інші інтерпретації коефіцієнта A: освіта та кваліфікація робочої сили, гарантії прав власності, якість інфраструктури, ставлення до підприємництва та роботи, що визначається особливостями культури і т.д. Крім того, є змога відображати комбінацію різних чинників. Потребує також дослідження питання: які типи знань найважливіші для зростання, які показники вимірюють їхнє кількісне значення та якими є сили, що визначають рівень нагромадження знань.

За будь-якого з запропонованих поглядів на те, що таке пара-

метр A, для того, щоб дослідити, як він впливає на випуск, як еволюціонує в часі й чому різний для різних частин світу, в модель зростання вводять додатковий сектор дослідження та розвитку - R&D (Research and Development Models), що визначає модель виробництва нових технологій. Висновки моделі, які стосуються світового зростання, стверджують, що сили, на яких модель зосереджує увагу, є важливими. Зростання знань – це основна причина того, що виробництво та рівень життя є таким високим сьогодні порівняно із минулим століттям. Щодо відмінностей між реальними доходами різних країн, актуальність цієї моделі менш чітка, оскільки неправдоподібне те, що причина бідності деяких країн полягає в тому, що вони не мають доступу до технологічних досягнень минулого століття. Крім того, застосування однієї технології може відбуватися одночасно в різних місцях, тому виникає питання, чому бідніші країни не мають такого самого доступу до тих самих технологій, що й багаті. Якщо відповідні знання є у відкритому доступі, то бідні країни можуть ставати багатшими, змушуючи своїх працівників і менеджерів читати відповідну літературу. Якщо ж відповідні знання є складовими знань, які були вироблені приватним $R\&D$ сектором, то бідні країни можуть ставати багатими, вводячи ефективні програми про дотримання прав власності іноземних фірм. За такої програми фірми з розвинених країн з власними знаннями відкриватимуть заводи в бідних країнах, наймативуть їхню дешеву робочу силу та вироблятимуть продукцію з використанням запатентованої технології. У підсумку граничний продукт праці в бідних країнах, і, отже, заробітна плата буде швидко зростати до рівня розвинених країн. Хоча брак довіри з боку іноземних фірм у безпеці їхніх прав власності, безсумнівно, є важливою проблемою багатьох бідних країн, важко повірити, що лише це є причиною бідності країн. Існують численні приклади бідних регіонів чи країн, починаючи від європейських колоній протягом останніх декількох століть до багатьох інших країн сьогодні, де іноземні інвестори можуть засновувати заводи та використовувати свої ноу-хау з високим ступенем впевненості, що політична ситуація буде досить стабільною, їхні врожаї не будуть націоналізованими, а їхній при-

буток не обкладатимуть податком за завищеними ставками. Проте ми не спостежуємо у цих регіонах доходів, які б підскочили до рівня промислово розвинених країн.

Отже, висновок цього аналізу такий: ендогенний технічний прогрес майже напевно є найважливішим чинником світового економічного зростання і його розвиток може пояснити відмінності рівнів багатства в часі, проте, ймовірно, не має вирішального впливу на різницю в доходах між країнами.

Можна припустити, що труднощі, на які натрапляють бідні країни полягають не у браку доступу до передових технологій, а у браку можливостей використання цих технологій. Отож, головне джерело відмінностей у рівнях життя в різних країнах полягає не у різних рівнях знань або технологіях, а у відмінностях чинників, які дають змогу багатшим країнам краще використовувати передові технології. Отже, розуміння відмінностей у доходах потребує розуміння причин розбіжностей в цих чинниках.

У першому розділі навчально-методичного посібника розглянуто теоретичні моделі, які визначають капітал як основний чинник економічного зростання, проте надають поняттю капіталу ширшого розуміння. Зокрема, використовується виробнича функція, яка разом з фізичним враховує також людський капітал. Такі моделі допомагають зрозуміти та пояснити великі різниці в доходах між країнами завдяки використанню в аналізі двох нових чинників: відмінностей не тільки у фізичному, а й у людському капіталі, а також відмінностей у продуктивності, що не пов'язана з різницею в технологіях.

Другий розділ присвячено економетричному моделюванню витрат на освіту в Україні, що зумовлюють зростання людського капіталу в нашій країні, а відтак, як засвідчують моделі економічного росту, і зростання доходів в довгостроковому періоді. Пропоноване емпіричне дослідження грунтується на статистичних даних значень витрат на освіту для 26 областей України впродовж 7 років, кількості населення, кількості учнів у школах і кількості студентів у вищих навчальних закладах для відповідних областей протягом досліджуваного періоду. Дані отримано на підставі запитів в обла-

сні управління освіти та науки, обласні головні фінансові управління, обласні державні адміністрації та головні управління статистики в кожній області. Щиру вдячність автор висловлює Олегу Терличу за наполегливість у зборі даних.

Зауважимо, що дані, на яких грунтується моделювання, є панельними, тобто одночасно об'єднують і часові ряди, і просторові вибірки. А саме вони містять просторову вибірку, що охоплює різні області України, яка спостерігається впродовж семи років. Такі дані – значно багатше джерело інформації порівняно суто перерізними просторовими даними або з окремими часовими рядами, проте їхнє моделювання потребує досить складних специфікацій. Аналіз панельних даних є предметом одного з найактивніших та інноваційних напрямків сучасних економетричних досліджень.

Оскільки для сукупного моделювання важливе значення мають властивості кожного з рядів, які входитимуть у модель, тому у посібнику проведено графічний аналіз характеру поведінки кожної змінної, який описано в пункті 2.1. Пункти 2.2 - 2.5 присвячені етапам побудови економетричної моделі. Тут наведено теоретичний огляд методів дослідження моделей для панельних даних, а також за їхньою допомогою описано проведене практичне емпіричне дослідження. Зокрема в пункті 2.3 висвітлено моделі з фіксованими ефектами, а в пункті 2.4 – моделі з випадковими ефектами, пункт 2.5 описує методи їхнього порівняння.

Реалізацію кількісних розрахунків проведеного в посібнику моделювання виконано за допомогою економетричного пакета EViews.

Розділ 1

Модель економічного зростання, яка враховує людський капітал

Дослідження моделей економічного зростання засвідують, що теорії, які враховують лише обсяг накопичених знань, не можуть пояснити міждержавних розбіжностей у доходах. Розглянемо висновки нових теорій економічного зростання, а саме моделі, які враховують нагромадження не лише фізичного, а й людського капіталу.

Нагромадження людського капіталу пов'язане з навчанням працівників, тобто з обсягом нагромаджених знань. Проте існує чітке розмежування між людським капіталом і абстрактними знаннями. Людський капітал складається зі здібностей, навичок і знань окремих працівників, і подібно до звичайних економічних благ може бути конкурентним та ексклюзивним. Якщо, наприклад, інженер спрямовує усі свої зусилля (людський капітал) в один вид діяльності, то це не дає змоги йому використовувати свої навички в іншій сфері виробництва. Навпаки, якщо деякий алгоритм (знання) використовують в одній сфері діяльності, то це не заважає застосовувати його в іншій більш чи менш складній виробничій сфері.

Моделі, які використовують людський капітал як фактор виробництва, доповнюють моделі Солоу, Рамсея, Даймонда. Базові

моделі так само припускають, що виробнича функція має властивість постійної віддачі від масштабу, проте висновки моделей з врахуванням людського капіталу відрізняються від висновків моделі Солоу, і засвідчують, що помірні зміни ресурсів, які виникають внаслідок нагромадження фізичного та людського капіталу, можуть призвести до великих змін обсягу виробництва продукції на одного працівника. У підсумку ці моделі дають змогу пояснити великі відмінності в доходах у різних країнах.

Дослідимо, чому введення в модель людського капіталу дає підстави значно збільшити наші можливості при врахуванні відмінностей між країнами. Зауважимо, що в моделях, які враховують лише фізичний капітал, результат зміни норми заощаджень на випуск залежить від частки капіталу. У моделі Солоу довгострокова еластичність випуску стосовно заощаджень дорівнює $\alpha/(1-\alpha)$, де α частка капіталу. Якщо частка капіталу помірна, то ця еластичність незначна. Отож, з моделі Солоу випливає, що за помірного значення частки капіталу функція $sf(k)$, яка визначає фактичні інвестиції на одиницю ефективної праці, є відносно ввігнутою, і, таким чином, збільшення частки випуску, що інвестується s, не сильно впливає на рівень стаціонарного обсягу капіталу k^*.

Вплив зростання s на k^* за помірних значень α зображено на Рис. 1.1. У підсумку бачимо, що помірне значення частки капіталу спричиняє те, що $f(k^*)$ не буде дуже чутливим до зміни k^*, внаслідок чого випуск не сильно залежатиме від змін у нормі заощаджень.

Якщо частка капіталу близька до 1, то $sf(k)$ є близькою до лінійної, і тоді невелике збільшення s спричинятиме велике збільшення k^*. Цей випадок зображено на рис. 1.2. Збільшення частки капіталу також збільшує і вплив k^* на $f(k^*)$. Отож, у цьому випадку довгострокова еластичність випуску стосовно заощаджень велика. В крайньому випадку, коли частка капіталу дорівнює 1 (наприклад, у моделях лінійного економічного зростання), зміни s мають постійний вплив на темпи зростання випуску, причому цей вплив на рівень виробництва необмежено зростає.

Отож, визнання існування людського капіталу припускає, що

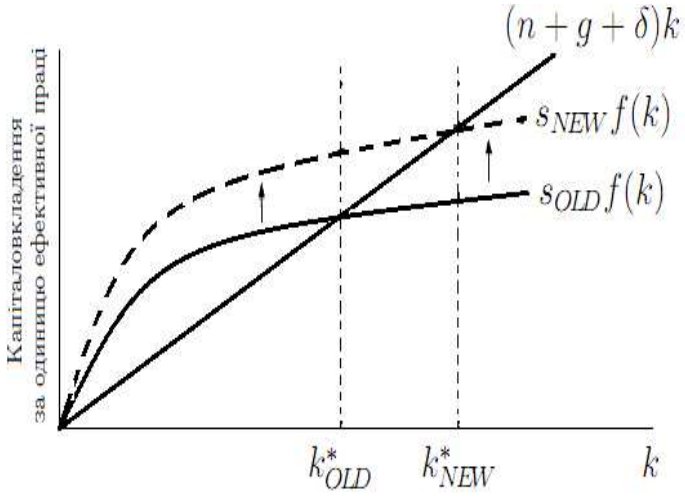

Рис. 1.1: Вплив зміни норми заощаджень на характеристики стаціонарного стану за помірного значення частки капіталу

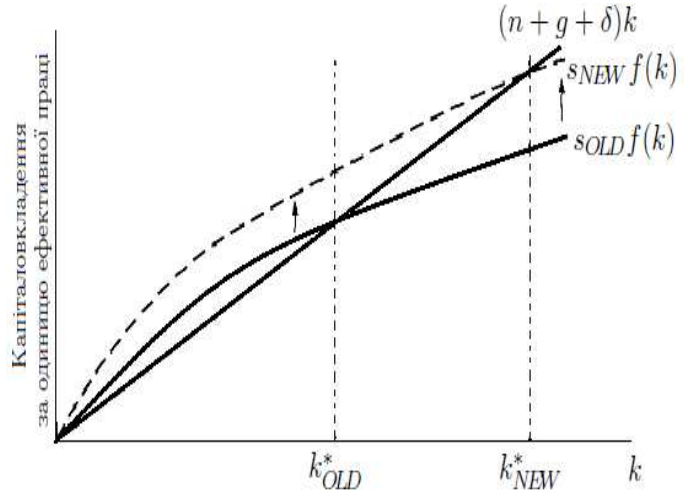

Рис. 1.2: Вплив зміни норми заощаджень на характеристики стаціонарного стану за значення частки капіталу, яка близька до одиниці

оцінка частки доходу, який виплачується всім видам капіталу, є більшою за звичайну оцінку частки, що припадає на фізичний капітал. Крім того, поведінка нагромадження людського капіталу багато в чому схожа на поведінку нагромадження фізичного капіталу: спрямування більшої кількості ресурсів на нагромадження будь-якого типу капіталу збільшує кількість продукції, яку можуть виробити в майбутньому. Додавши до моделі людський капітал, отримуємо збільшення випуску внаслідок зміни ресурсів, які спрямовані для нагромадження капіталу, так само як і зростання частки фізичного капіталу в моделі Солоу збільшує випуск внаслідок зміни норми заощаджень. Ця властивість моделі дає змогу пояснити великі відмінності в доходах між країнами.

1.1 Динаміка економіки

Розглянемо базову модель економічного зростання, що враховує нагромадження фізичного та людського капіталу. Такі моделі досліджували Манків (Mankiw), Ромер (Romer), Вейл (Weil). Різні модифікації таких моделей розглядали Лукас (Lucas), Дражен (Drazen), Беккер (Becker), Марфі (Murphy), Тамура (Tamura), Ребело (Rebelo), Кремер (Kremer), Томсон (Thomson) та інші.

Нехай сукупний дохід в економіці визначається виробничою функцією

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}\, H(t)^{\beta}\, [A(t)L(t)]^{1-\alpha-\beta}\,, \qquad (1.1)$$

$$\alpha > 0\,, \quad \beta > 0\,, \quad \alpha + \beta < 1\,,$$

де H — людський капітал, L — кількість працівників (кількість праці). Таким чином один кваліфікований працівник визначає одну одиницю L і деяку величину H.

Запишемо також (1.1) у вигляді

$$Y = K^{\alpha}(H/AL)^{\beta}(AL)^{(1-\alpha)}\,.$$

Тут випуск є функцією величини капіталу K, ефективної робочої сили AL, а також людського капіталу на одного ефективного працівника H/AL. Зауважимо, що (1.1) означає, що виробнича фун-

кція характеризується сталим ефектом від розширення масштабу за усіма факторами K, H і L разом.

Припустимо, що динаміка K і L визначається рівняннями

$$\dot{K}(t) \;=\; s_K\, Y(t)\,, \tag{1.2}$$

$$\dot{L}(t) \;=\; n\, L(t)\,, \tag{1.3}$$

де s_K використовують для позначення частки випуску, який спрямовується на нагроимадження фізичного капіталу. Для спрощення моделі припускатимемо також, що зношення фізичного капіталу не існує, тобто амортизація дорівнює нулю.

Крім того, оскільки наша мета не полягає в поясненні економічного зростання загалом в усьому світі впродовж часу, а спрямована на пояснення різниці в темпах економічного зростання в різних країнах, то модель подібно до моделі Солоу припускає постійний і екзогенний технологічний прогрес, тобто припускатимемо, що

$$\dot{A}(t) \;=\; g\, A(t)\,. \tag{1.4}$$

Припустимо також, що нагромадження людського капіталу відбувається подібно до нагромадження фізичного капіталу й описується рівнянням

$$\dot{H}(t) \;=\; s_H\, Y(t)\,, \tag{1.5}$$

де s_H позначає частку ресурсів, що виділяється для нагромадження людського капіталу. Зауважимо, що рівняння (1.5) не інтерпретується як деякі заощадження в людський капітал, а визначає, що технологія вироблення нового людського капіталу залежить від фізичного капіталу, людського капіталу та кількості праці в той самий спосіб як і технологія вироблення інших благ. Тобто, припускаємо, що

$$\dot{H} = K_E^{\alpha}\, H_E^{\beta}\, (AL_E)^{(1-\alpha-\beta)}\,,$$

де K_E, H_E, L_E визначають деякий обсяг фізичного капіталу, людського капіталу і робочої сили, які задіяні в освіті та навчанні працівників. Якщо припустити, що

$$K_E = s_H K\,, \quad H_E = s_H H\,, \quad L_E = s_H L\,,$$

то отримаємо

$$\dot{H} = s_H[K^\alpha H^\beta (AL)^{(1-\alpha-\beta)}]\,.$$

Така базова модель може бути узагальнена в декількох напрямах, проте головний висновок моделі не зміниться. Функцію Кобба-Дугласа можна замінити загальною виробничою функцією $Y = F(K, H, AL)$, яка характеризується сталою віддачею від масштабу і в інтенсивній формі задовольняє умови Інади. Припущення екзогенного технологічного прогресу можна замінити моделлю ендогенного зростання знань. Також припущення, що технологія отримання нового людського капіталу є такою самою, як і технологія отримання випуску, можна дещо послабити. Проте жодна з цих змін не впливає на головні результати про міждержавні відмінності в доходах, які демонструє модель.

Аналіз динаміки економіки в цій моделі подібний до аналізу моделі Солоу. Головна відмінність полягає у тому, що замість врахування лише динаміки фізичного капіталу, досліджується динаміка не лише фізичного, а й людського капіталу. Зокрема, визначимо $k = K/AL$, $h = H/AL$, $y = Y/AL$ – обсяг фізичного капіталу, людського капіталу та випуску на одного ефективного працівника, відповідно. Якщо поділити обидві частини (1.1) на AL, то за введених позначень отримаємо виробничу функцію в інтенсивній формі

$$y(t) = k(t)^\alpha h(t)^\beta\,. \tag{1.6}$$

Розглянемо спочатку поведінку k. З визначення $k = K/AL$ і рівностей (1.2)−(1.4), які визначають динаміку K, L і A, отримаємо

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}\,[A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t)] = \\
&= \frac{s_K Y(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\left[\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}\right] = \\
&= s_K y(t) - (n+g)k(t) = \\
&= s_K k(t)^\alpha h(t)^\beta - (n+g)k(t).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Отож, $\dot{k}$ дорівнює нулю, коли

$$s_K k^\alpha h^\beta = (n+g)k\,.$$

Ця умова рівносильна тому, що $k^{1-\alpha} = [s_K/(n+g)]h^\beta$, або

$$k = \left(\frac{s_K}{n+g}\right)^{1/(1-\alpha)} \; h^{\beta/(1-\alpha)}\,.$$

Комбінації h і k, які задовольняють цю умову, зображено на рис. 1.3. Оскільки $\beta < 1-\alpha$, то друга похідна k за h вздовж цієї кривої від'ємна. Крім того, з (1.7) випливає, що $\dot{k}$ зростає за h. Отже, справа від кривої $\dot{k} = 0$ отримаємо геометричне місце точок, де $\dot{k}$ додатна, а зліва – $\dot{k}$ від'ємна.

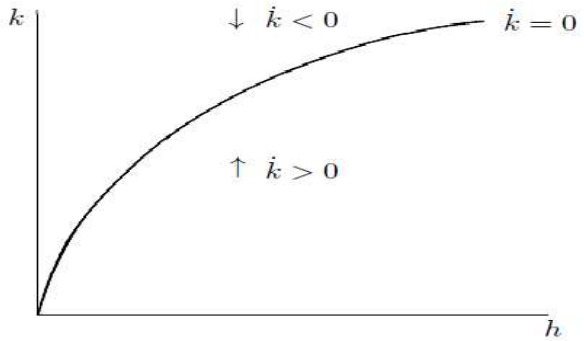

Рис. 1.3: Динаміка фізичного капіталу на одного ефективного працівника

Тепер розглянемо поведінку h. Аналогічно до того, як було виведене (1.7), отримаємо

$$\dot{h}(t) = s_H k(t)^\alpha h(t)^\beta - (n+g)h(t). \tag{1.8}$$

Величина $\dot{h}$ дорівнює нулю, коли

$$s_H k^\alpha h^\beta = (n+g)h\,,$$

або

$$k = \left(\frac{n+g}{s_H}\right)^{1/\alpha} \; h^{(1-\beta)/\alpha}\,.$$

Множина таких точок зображена на рис. 1.4. Оскільки $1 - \beta > \alpha$, то друга похідна додатна і залежність k від h, яка визначається кривою $\dot{h}(t) = 0$, є опуклою функцією. Крім того, $\dot{h}$ додатна над цією кривою і від'ємна під нею.

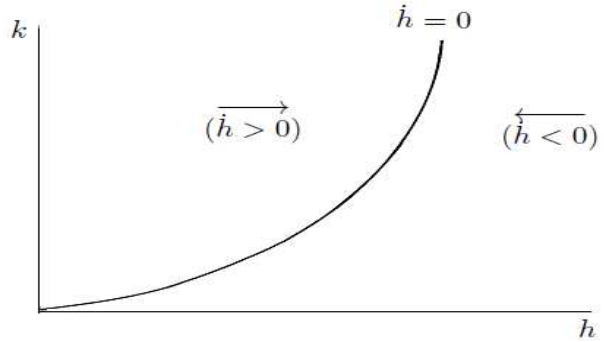

Рис. 1.4: Динаміка людського капіталу на одного ефективного працівника

Початкові значення K, H, A і L визначають початкові рівні k і h, які потім рухаються відповідно до (1.7) і (1.8). З рис. 1.5 видно одночасну динаміку k і h. Точка E глобально стійка. Початкове положення економіки прямує до точки E, і як тільки вона досягає цієї точки, економіка залишається там. Будемо ігнорувати можливість початку без капіталу, бо якщо початкове значення k або h дорівнює нулю, то економіка збігатиметься до $k = h = 0$.

1.2 Якісні висновки моделі

Дослідимо динаміку основних змінних економіки, яка досягла точки E. У цьому випадку кажуть, що вона розташована на траєкторії збалансованого зростання. На траєкторії збалансованого зростання, оскільки $\dot{k}(t) = 0$ і $\dot{h}(t) = 0$, то обсяг фізичного капіталу на одного ефективного працівника k, обсяг людського капіталу на одного ефективного працівника h, а відтак згідно з (1.6) і обсяг випуску на одного ефективного працівника y є сталими. Позаяк сукупний фізичний капітал K дорівнює ALk і k в точці E є ста-

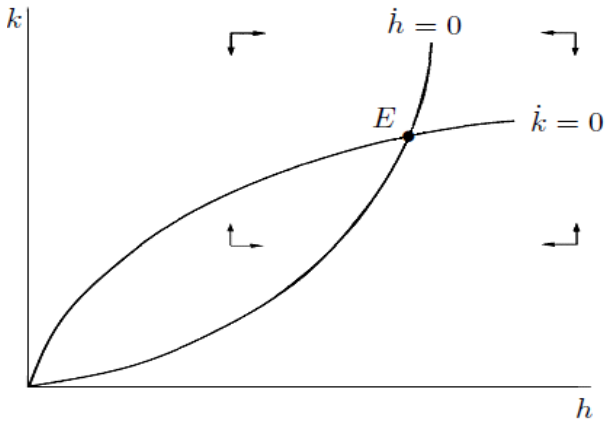

Рис. 1.5: Динаміка k і h

лим, то сукупний фізичний капітал K зростає з тим самим темпом, що і ефективна праця, а саме з темпом $n+g$. Аналогічно сукупний людський капітал H і сукупний випуск Y зростають з темпом $n+g$. Фізичний капітал на одного працівника K/L, людський капітал на одного працівника H/L і випуск на одного працівника Y/L зростають з темпом g. Отож, так само як і в моделі Солоу, отримуємо висновок, що довгостроковий темп зростання випуску на одного працівника визначається екзогенним темпом науково-технічного прогресу g.

Дослідимо, як зміни в заощадженнях впливають на економіку. Для цього припустимо, що спочатку вона перебуває на траєкторії збалансованого зростання, і що s_K збільшується. З рівняння (1.7) і (1.8) випливає, що ця зміна впливає на геометричне місце точок, які задовольняють рівність $\dot{k} = 0$, але не на розташування кривої $\dot{h} = 0$. Крива $\dot{k} = 0$ зміщується, як це показано на рис. 1.6. Точка E старої траєкторії збалансованого зростання лежить на кривій $\dot{h} = 0$, але нижче нової кривої $\dot{k} = 0$. Отож, спочатку h стале, а k росте. Тому економіка рухається вгору в просторі (h, k). Це переміщує економіку вище кривої $\dot{h} = 0$, тому h також починає зростати. Далі k і h зростають, економіка рухається вгору та вправо, доки не досягне нової траєкторії збалансованого зростання – точки E'.

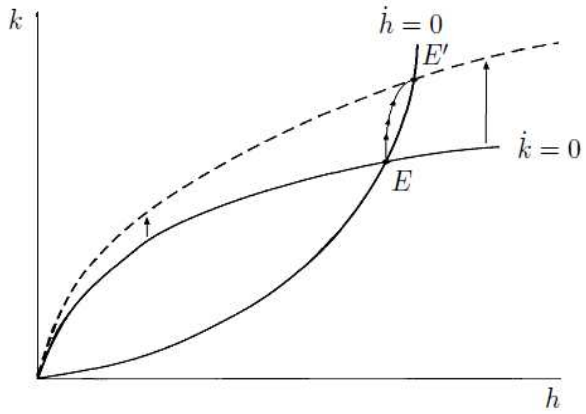

Рис. 1.6: Зміни пов'язані зі збільшенням норми заощадження

Ми можемо визначити випуск на одного працівника Y/L як $A(Y/AL)$ або $Ak^{\alpha}h^{\beta}$. Під час переходу від однієї траєкторії збалансованого зростання (точка E) до іншої (точка E') випуск на одного працівника зростає з двох причин: по-перше, тому що росте A і тому що h і k ростуть. Отож, випуск на одного працівника зростає зі швидкістю більшою, ніж g. Коли економіка досягає нової траєкторії збалансованого зростання, h і k знову сталі, тому темп зростання випуску на одного працівника повертається до g. Таким чином, збільшення рівня заощаджень призводить до тимчасового збільшення темпів зростання економіки. Отже, якісні наслідки моделі, яка враховує людський капітал подібні до якісних висновків моделі Солоу.

1.3 Кількісні висновки моделі

Досліджувана модель не дає остаточних кількісних висновків, проте як і модель Солоу показує, як зміни в рівні заощаджень й кількості населення впливають на випуск. Знайдемо рівень y на траєкторії збалансованого зростання, який позначимо y^*.

Нехай k^* і h^* позначають значення k і h на траєкторії збалансованого зростання. Оскільки на траєкторії збалансованого зростан-

ня $\dot{k} = \dot{h} = 0$, то з (1.7) і (1.8) випливає

$$s_K k^{*\alpha} h^{*\beta} = (n+g)k^*\,, \tag{1.9}$$

$$s_H k^{*\alpha} h^{*\beta} = (n+g)h^*\,. \tag{1.10}$$

Прологарифмувавши ці два рівняння, отримаємо

$$\ln s_K + \alpha \ln k^* + \beta \ln h^* = \ln(n+g) + \ln k^*\,, \tag{1.11}$$

$$\ln s_H + \alpha \ln k^* + \beta \ln h^* = \ln(n+g) + \ln h^*\,. \tag{1.12}$$

Розв'язуючи цю систему лінійних рівняння стосовно $\ln k^*$ і $\ln h^*$, отримуємо

$$\ln k^* = \frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}\,\ln s_K + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\,\ln s_H - \frac{1}{1-\alpha-\beta}\,\ln(n+g)\,, \tag{1.13}$$

$$\ln h^* = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\,\ln s_K + \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}\,\ln s_H - \frac{1}{1-\alpha-\beta}\,\ln(n+g)\,. \tag{1.14}$$

Для виробничої функції (1.6) одержимо

$$\ln\, y^* = \alpha \ln\, k^* + \beta \ln\, h^*\,,$$

тому, підставляючи (1.13), (1.14) у цей вираз і згрупувавши подібні доданки, отримаємо

$$\ln\, y^* = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\,\ln\, s_K + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\,\ln\, s_H - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\,\ln\,(n+g)\,. \tag{1.15}$$

Висновок моделі Солоу, яка грунтується на виробничій функції

$$Y(t) = K(t)^\alpha\,[A(t)L(t)]^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1\,,$$

є частковим випадком виразу (1.15), в якому β дорівнює нулю. А саме для моделі Солоу одержимо

$$\ln\, y^*_{Solow} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\ln\, s_K - \frac{\alpha}{1-\alpha}\,\ln\,(n+g)\,. \tag{1.16}$$

Для оцінки кількісних наслідків моделі нам потрібна оцінка частки людського капіталу β. Існують різні способи отримання такої оцінки. Зокрема, для Сполучених Штатів Кендрік (Kendrick) визначав значення частки людського капіталу і показав, що ця величина трохи більша, ніж оцінка значення частки фізичного капіталу ($\alpha = 1/3$), тобто значення параметра β трохи більше за $1/3$. Згідно з його міркуваннями зарплата некваліфікованого робітника, яка наближається до розмірів мінімальної оплати праці, в США зазвичай становить від $1/3$ до $1/2$ від величини середньої заробітної плати. Це свідчить про те, що від $1/2$ до $2/3$ загальної суми платежів за працю вкладається в людський капітал, або, що $1/2(1-\alpha) < \beta < 2/3(1-\alpha)$. Звідси випливає, що значення β перебуває між $1/3$ та $4/9$. До повного впровадження закону про мінімальну заробітну плату некваліфікований іммігрант у Сполучених Штатах заробляв приблизно $1/4$ від середньої заробітної плати. У цьому випадку $\beta = 1/2$.

Для того, щоб побачити важливість впливу включення в модель людського капіталу на кількісні висновки моделі, припустимо, що β становить $0,4$, а α дорівнює $0,35$. З рівняння (1.15) випливає, що за цих значень параметрів еластичність випуску стосовно s_K дорівнює $\alpha/(1-\alpha-\beta) = 1,4$, стосовно s_H дорівнює $\beta/(1-\alpha-\beta) = 1,6$, а стосовно $n+g$ дорівнює $-(\alpha+\beta)/(1-\alpha-\beta) = -3$. У моделі без людського капіталу ці еластичності значно менші, а саме, за значення $\alpha = 0,35$ отримаємо, що еластичність випуску стосовно s_K становить $\alpha/(1-\alpha) = 0,54$, а його еластичність стосовно $n+g$ дорівнює $-\alpha/(1-\alpha) = -0,54$.

1.3.1 Вплив частки заощаджень на відмінності у рівнях випуску в різних країнах

Завдяки великій еластичності випуску модель, яка враховує людський капітал, дає змогу пояснити великі відмінності в доходах у різних країнах. Розглянемо, наприклад, дві країни з однаковими виробничими функціями та технологіями, і вважатимемо, що $\alpha = 0,35$ і $\beta = 0,4$. Припустимо, що частки заощаджень у фізичний капітал s_K та у людський капітал s_H удвічі більші в другій

країні, ніж у першій, а темп росту ефективної робочої сили $n + g$ на 20 відсотків менший, тобто

$$s_{K2} = 2s_{K1}\,, \quad s_{H2} = 2s_{H1}\,, \quad n_2 + g = 0,8(n_1 + g)\,.$$

Зауважимо, що такі відмінності у величинах цих параметрів не є рідкісними у світовій практиці. З рівняння (1.15) випливає, що ці відмінності приводять до такої різниці у випуску на одного працівника на траєкторії збалансованого зростання

$$\begin{aligned} \ln y_2^* - \ln y_1^* =& \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\,(\ln s_{K2} - \ln s_{K1}) + \\ &+ \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\,(\ln s_{H2} - \ln s_{H1}) - \\ &- \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\,[\ln(n_2+g) - \ln(n_1+g)] = \\ =& 1,4\,(\ln 2) + 1,6\,(\ln 2) - 3\,(\ln 0,8) \simeq 2,75\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

З того, що $e^{2,75} = 15,6$, випливає, що випуск на одного працівника в другій країні буде майже в 16 разів більшим. Отже, відмінності в рівні заощаджень і темпі росту населення, які наявні в різних країнах, породжують значні відмінності в їхніх доходах.

Покажемо, що модель Солоу, яка не враховує людський капітал, не призводить до такого висновку. Для тих самих значень параметрів (за винятком значення β, яке тепер дорівнює 0), з (1.16) випливає, що розрив у доходах становить

$$\begin{aligned} \ln y_2^* - \ln y_1^* =& \frac{\alpha}{1-\alpha}\,(\ln s_{K2} - \ln s_{K1}) - \\ &- \frac{\alpha}{1-\alpha}\,[\ln(n_2+g) - \ln(n_1+g)] = \\ =& \frac{0,35}{0,65}\,(\ln 2 - \ln 0,8) \simeq 0,49\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Оскільки $e^{0,49} = 1,6$, то отримаємо, що модель Солоу пояснює лише 60% різниці в доходах.

1.3.2 Відмінності у граничній нормі прибутку в різних країнах

На рідставі моделі (1.1), яка враховує людський капітал, порівняємо також вплив граничної норми прибутку в різних країнах. Оскільки ця модель передбачає спадний характер граничного продукту фізичного та людського капіталу, то з неї випливає, що норма прибутку в багатих країнах нижча, ніж у бідних. Проте ця різниця незначна, і не спричиняє переміщення капіталу в бідні країни.

Знайдемо значення граничних продуктів фізичного та людського капіталу на траєкторії збалансованого зростання. Для виробничої функції (1.1) граничний продукт фізичного капіталу становить

$$\begin{aligned} MPK = \frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} &= \alpha\, K(t)^{\alpha-1}\, H(t)^{\beta}\, (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta} = \\ &= \alpha \left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{H(t)}{A(t)L(t)}\right)^{\beta} = \\ &= \alpha\, k(t)^{\alpha-1}\, h(t)^{\beta}\,. \end{aligned} \tag{1.19}$$

З рівнянь (1.13), (1.14) одержуємо значення фізичного та людського капіталу на одного ефективного працівника на траєкторії збалансованого зростання

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\beta}\, s_H^{\beta}}{n+g}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}, \tag{1.20}$$

$$h^* = \left(\frac{s_K^{\alpha}\, s_H^{1-\alpha}}{n+g}\right)^{1/(1-\alpha-\beta)}. \tag{1.21}$$

Підставивши (1.20) і (1.21) в рівність (1.19), одержимо

$$MPK^* = \alpha \left(\frac{s_K^{1-\beta}\, s_H^{\beta}}{n+g} \right)^{(\alpha-1)/(1-\alpha-\beta)} \left(\frac{s_K^{\alpha}\, s_H^{1-\alpha}}{n+g} \right)^{\beta/(1-\alpha-\beta)} =$$
$$= \alpha \left(\frac{s_K^{(1-\beta)(\alpha-1)+\alpha\beta}\, s_H^{\beta(\alpha-1)+(1-\alpha)\beta}}{(n+g)^{(\alpha-1)+\beta}} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} =$$
$$= \alpha \left(\frac{s_K^{-(1-\alpha-\beta)}\, s_H^{0}}{(n+g)^{-(1-\alpha-\beta)}} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} =$$
$$= \frac{\alpha\,(n+g)}{s_K}\,.$$

Аналогічно для виробничої функції (1.1) граничний продукт людського капіталу становить

$$MPH = \frac{\partial Y(t)}{\partial H(t)} = \beta\, K(t)^{\alpha}\, H(t)^{\beta-1}\, (A(t)L(t))^{1-\alpha-\beta} =$$
$$= \beta\, k(t)^{\alpha}\, h(t)^{\beta-1}\,.$$

Підставивши k^* та h^*, отримуємо його значення на траєкторії збалансованого зростання

$$MPH^* = \beta \left(\frac{s_K^{\alpha(1-\beta)+\alpha(\beta-1)}\, s_H^{\alpha\beta+(1-\alpha)(\beta-1)}}{(n+g)^{\alpha+(\beta-1)}} \right)^{1/(1-\alpha-\beta)} =$$
$$= \frac{\beta\,(n+g)}{s_H}\,.$$

Отже, граничні продукти фізичного та людського капіталу на траєкторії збалансованого зростання становлять

$$MPK^* = \alpha(n+g)/s_K\,, \tag{1.22}$$

$$MPH^* = \beta(n+g)/s_H\,. \tag{1.23}$$

Покажемо, що відмінності в наявних темпах росту населення та нормі заощаджень у різних країнах, які спричиняють великі різниці в доходах у цих країнах, ведуть при цьому лише до помірних

відмінностей у нормі прибутку. Зокрема, для наведеного вище прикладу

$$s_{K2} = 2s_K\,, \quad s_{H2} = 2s_H\,, \qquad n_2 + g = 0,8(n_1 + g)\,,$$

з (1.22) і (1.23) випливає, що

$$MPK_2^* = 0,4MPK_1^*\,, \quad MPH_2^* = 0,4MPH_1^*\,.$$

Хоча ця різниця в нормах прибутку може бути суттєвою, проте не виключено, що податкова політика, можливість експропріації капіталу, недосконалості ринку та інші політичні чинники можуть призвести до того, що капітал не перетікатиме до бідних країн, незважаючи на переваги в прибутках.

Зауважимо, що чим більше значення β, тим сильніший вплив людського капіталу на пояснення відмінностей між країнами, і тим менша необхідна різниця у заощадженнях і темпах росту кількості населення для пояснення великих відмінностей в рівнях доходів в різних країнах. У цьому разі різниця в нормі прибутку ще менша. У моделі Солоу зі звичайним значенням частки капіталу, на відміну від того що, ми отримали у цій моделі, великі відмінності в доходах потребують великих відмінностей у рівні заощаджень і темпах зростання населення, а також великих різниць у нормі прибутку.

1.4 Швидкість збіжності до траєкторії збалансованого зростання

На практиці нас цікавить не тільки довгостроковий ефект впливу деяких чинників, зокрема норми заощаджень і темпу росту населення, а й те наскільки швидко цей ефект реалізується. Для визначення швидкості збіжності економіки до траєкторії збалансованого зростання використаємо апроксимацію Тейлора моделі в околі точки довгострокової рівноваги.

Прологарифмувавши виробничу функцію в інтенсивній формі (1.6), отримаємо

$$\ln\, y(t) = \alpha\, \ln\, k(t) + \beta\, \ln\, h(t).$$

Наше завдання – визначити, наскільки швидко y збігається до y^*. Тому продиференціюємо цю рівність за часом і використаємо (1.7), (1.8). Одержимо

$$\begin{aligned}\frac{d\,\ln\,y(t)}{dt} &= \alpha\,\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} + \beta\,\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \\ &= \alpha\,\left(s_K k(t)^{\alpha-1}h(t)^{\beta} - (n+g)\right) + \\ &\quad + \beta\,\left(s_H k(t)^{\alpha}h(t)^{\beta-1} - (n+g)\right)\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Використаємо наближення першого порядку Тейлора

$$\begin{aligned}\frac{d\,\ln\,y(t)}{dt} \cong &\left(\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,\ln\,k(t)}\right)\,(\ln\,k(t) - \ln\,k^*(t)) + \\ &+ \left(\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,\ln\,h(t)}\right)\,(\ln\,h(t) - \ln\,h^*(t))\,, \end{aligned} \tag{1.25}$$

де часткові похідні обчислені за значень на траєкторії збалансованого зростання $\ln\,k = \ln\,k^*$, $\ln\,h = \ln\,h^*$.

Обчислимо похідні першого порядку від (1.24)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,\ln\,k(t)} \;&=\; k(t)\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,k(t)} = \\ &= k(t)\left(\alpha s_K(\alpha-1)\,k(t)^{\alpha-2}h(t)^{\beta} + \beta s_H\alpha\,k(t)^{\alpha-1}h(t)^{\beta-1}\right) = \\ &= \alpha(\alpha-1)s_K\,k(t)^{\alpha-1}h(t)^{\beta} + \beta\alpha s_H\,k(t)^{\alpha}h(t)^{\beta-1}\,. \end{aligned}$$

Підставивши (1.20), (1.21), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,\ln\,k(t)} = \alpha\,(\alpha-1)\,s_K &\left(\frac{s_K^{1-\beta}s_H^{\beta}}{n+g}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}}\,\left(\frac{s_K^{\alpha}s_H^{1-\alpha}}{n+g}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} + \\ &+ \beta\alpha s_H\left(\frac{s_K^{1-\beta}s_H^{\beta}}{n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\,\left(\frac{s_K^{\alpha}s_H^{1-\alpha}}{n+g}\right)^{\frac{\beta-1}{1-\alpha-\beta}} = \end{aligned}$$

$$= \alpha(\alpha-1)\left(s_K^{1-\alpha-\beta+\alpha-1-\alpha\beta+\beta+\alpha\beta}\, s_H^{\alpha\beta-\beta+\beta-\alpha\beta}(n+g)^{-\alpha-\beta+1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} +$$
$$+ \beta\alpha\left(s_K^{\alpha-\alpha\beta+\alpha\beta-\alpha}\, s_H^{1-\alpha-\beta+\alpha\beta+\beta-1-\alpha\beta+\alpha}(n+g)^{-\alpha-\beta+1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} +$$
$$= \alpha(\alpha-1)(n+g) + \beta\alpha(n+g) = \alpha(n+g)(\alpha-1+\beta) =$$
$$= -\alpha(1-\alpha-\beta)(n+g)\,. \tag{1.26}$$

Аналогічно

$$\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,\ln\,h(t)} = h(t)\frac{\partial\,(d\,\ln\,y(t)/dt)}{\partial\,h(t)} =$$
$$= \alpha\beta s_K k(t)^{\alpha-1}h(t)^{\beta} + \beta(\beta-1)s_H k(t)^{\alpha}h(t)^{\beta-1} =$$
$$= \alpha\beta s_K\left(\frac{s_K^{1-\beta}s_H^{\beta}}{n+g}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_K^{\alpha}s_H^{1-\alpha}}{n+g}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} +$$
$$+ \beta(\beta-1)s_H\left(\frac{s_K^{1-\beta}s_H^{\beta}}{n+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}\left(\frac{s_K^{\alpha}s_H^{1-\alpha}}{n+g}\right)^{\frac{\beta-1}{1-\alpha-\beta}} =$$
$$= \alpha\,\beta\,(n+g) + \beta\,(\beta-1)\,(n+g) =$$
$$= -\,\beta\,(1-\alpha-\beta)\,(n+g)\,. \tag{1.27}$$

Використавши (1.26), (1.27), з (1.25) одержимо

$$\frac{d\,\ln\,y(t)}{dt} \cong -\,\alpha\,(1-\alpha-\beta)(n+g)\,(\ln\,k(t) - \ln\,k^*) -$$
$$-\,\beta\,(1-\alpha-\beta)(n+g)\,(\ln\,h(t) - \ln\,h^*) =$$
$$= -\,(1-\alpha-\beta)(n+g)\times$$
$$\times\,(\alpha\ln\,k(t) + \beta\ln\,h(t) - (\alpha\ln\,k^* + \beta\ln\,h^*))\,.$$

Оскільки $\ln\,y(t) = \alpha\,\ln\,k(t) + \beta\,\ln\,h(t)$, то на траєкторії збалансованого зростання $\ln\,y^* = \alpha\,\ln\,k^* + \beta\,\ln\,h^*$, і тоді матимемо

$$\frac{d\,\ln\,y(t)}{dt} \cong -(1-\alpha-\beta)(n+g)\,(\ln\,y(t) - \ln\,y^*)\,. \tag{1.28}$$

З рівності (1.28) випливає, що в околі траєкторії збалансованого зростання логарифм випуску на одиницю ефективної праці прямує

до значення $\ln y^*$ зі швидкістю, яка приблизно пропорційна до його відхилення від $\ln y^*$. Таким чином, позначивши $\chi(t) = \ln y(t) - \ln y^*$ і $\lambda = (1-\alpha-\beta)(n+g)$, з (1.28) отримаємо

$$\dot{\chi}(t) \cong -\lambda\, \chi(t)\,.$$

Тобто, темп росту χ є константою і дорівнює $-\lambda$. Траєкторія χ така:

$$\chi(t) \cong \chi(0) e^{-\lambda t}\,,$$

де $\chi(0)$ - початкове значення χ. З погляду y, це означає

$$\frac{d\ \ln\ y(t)}{dt} \cong -\lambda\ (\ln\ y(t) - \ln\ y^*)\ . \tag{1.29}$$

або

$$\ln y(t) - \ln y^* \cong e^{-(1-\alpha-\beta)(n+g)t} (\ln y(0) - \ln y^*)\,.$$

Кількісно обчислимо як швидко економіка прямує до траєкторії збалансованого зростання. Для цього припустимо, що $n+g = 0,06$, тобто приблизно 6% у рік, частки фізичного та людського капіталу в сукупному доході дорівнюють $1/3$, тоді $\lambda = (1-1/3-1/3)0,06 = 0,02$, тобто становить приблизно 2%. Таким чином, відстань між $\ln y$ і $\ln y^*$ щороку скорочується приблизно на 2%. Час t^*, за який економіка пройде половину шляху до траєкторії збалансованого зростання, є розв'язком рівняння $e^{-\lambda t^*} = 0,5$, де λ - темп збіжності. Тому треба приблизно $t^* = -\ln(0,5)/\lambda \cong 0,69/\lambda = 35$ років для того, щоб пройти половину шляху до траєкторії збалансованого зростання. Отже, вплив зміни норми заощаджень реалізується не так швидко.

1.5 Модель, яка використовує виробничу функцію зі сталою віддачею від розширення масштабів фізичного та людського капіталу

Розглянемо виробничу функцію, яка залежить лише від обсягу фізичного та людського капіталу і характеризується сталою віддачею від розширення масштабів. А саме

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} H(t)^{1-\alpha}\,, \qquad 0 < \alpha < 1\,. \tag{1.30}$$

Нагромадження фізичного та людського капіталу описується рівняннями

$$\dot{K}(t) \;=\; s_K\, Y(t)\,, \tag{1.31}$$

$$\dot{H}(t) \;=\; s_H\, Y(t)\,. \tag{1.32}$$

Доведемо, що не залежно від початкових значень K та H (за умови, що вони додатні), відношення обсягу фізичного капіталу до обсягу людського капіталу K/H збігається до деякої траєкторії збалансованого зростання $(K/H)^*$. Для цього знайдемо похідну

$$\dot{(K(t)/H(t))} \;=\; \frac{1}{H^2(t)}\,\left(\dot{K}(t)H(t) - K(t)\dot{H}(t)\right)\,. \tag{1.33}$$

Підставивши (1.31) та (1.32) в (1.33), отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{(K(t)/H(t))} \;&=\; \frac{1}{H^2(t)}\,\left(s_K Y(t)H(t) - s_H Y(t)K(t)\right) = \\ &=\; \frac{Y(t)}{H(t)}\left(s_K - s_H\,\frac{K(t)}{H(t)}\right)\,.\end{aligned} \tag{1.34}$$

З (1.34) випливає, що відношення K/H зростає, якщо

$$s_K - s_H\,(K(t)/H(t)) > 0\,,$$

або $K/H < s_K/s_H$. Відповідно K/H спадає, якщо $K/H > s_K/s_H$. Отож, K/H збігається до рівня траєкторії збалансованого зростання

$$\left(\frac{K}{H}\right)^{*} = \frac{s_K}{s_H}\,.$$

Поділивши обидві частини (1.31) на $K(t)$ і підставивши (1.30), знайдемо темп росту фізичного капіталу

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{s_K Y(t)}{K(t)} = \frac{s_K K(t)^{\alpha} H(t)^{1-\alpha}}{K(t)} = \\ = s_K \left(\frac{H(t)}{K(t)}\right)^{1-\alpha} . \tag{1.35}$$

Аналогічно темп росту людського капіталу виражається як

$$\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} = s_H \left(\frac{K(t)}{H(t)}\right)^{\alpha} . \tag{1.36}$$

Оскільки $(K/H)^* = s_K/s_H$, то темп росту фізичного капіталу на траєкторії збалансованого зростання становить

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s_K \left(\frac{s_H}{s_K}\right)^{1-\alpha} = s_K^{\alpha}\, s_H^{1-\alpha} . \tag{1.37}$$

Оскільки на траєкторії збалансованого зростання відношення K/H стале, то людський капітал зростає з тим самим темпом, що і фізичний капітал K. Тоді за припущення, що виробнича функція характеризується сталою віддачею від розширення масштабу за змінними K і H разом, випуск також зростає з тим самим темпом $s_K^{\alpha}\, s_H^{1-\alpha}$. Тому зростання норми заощаджень чи в фізичний s_K, чи в людський s_H капітал призводить до збільшення довгострокового темпу росту випуску. Цей висновок відрізняється від висновку попередньої моделі, в якій виробнича функція (1.1) характеризувалась спадною віддачею від розширення масштабів за змінними K і H, і ми отримували, що зростання норми заощаджень спричиняє лише зростання рівня випуску, проте не впливає на довгостроковий темп його росту на траєкторії збалансованого зростання.

Взявши похідну від логарифма виробничої функції (1.30), отримаємо вираз для темпу росту випуску

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha) g_H , \tag{1.38}$$

де g_K і g_H позначають темпи росту фізичного та людського капіталу, відповідно. Підставивши замість g_K і g_H вирази (1.35) і (1.36), отримаємо

$$g_Y = \alpha s_K \left(K/H\right)^{\alpha-1} + (1-\alpha) s_H \left(K/H\right)^{\alpha}. \tag{1.39}$$

Дослідимо як зміниться темп росту випуску зі зміною співвідношення фізичного та людського капіталу. З (1.40) одержимо

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_Y}{\partial (K/H)} &= \alpha(\alpha-1) s_K \left(K/H\right)^{\alpha-2} + \alpha(1-\alpha) s_H \left(K/H\right)^{\alpha-1} = \\ &= \alpha(1-\alpha) s_H \left(K/H\right)^{\alpha-2} \left(\frac{K}{H} - \frac{s_K}{s_H}\right). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Звідси випливає таке: якщо K/H менше за рівень траєкторії збалансованого зростання $(K/H)^* = s_K/s_H$, то $\partial g_Y/\partial(K/H) < 0$. Отже, якщо початкове відношення обсягу фізичного капіталу до обсягу людського капіталу K/H менше за рівень траєкторії збалансованого зростання, то це відношення зростає і наближається до рівня траєкторії збалансованого зростання, при цьому оскільки в цей час $K/H < s_K/s_H$, то темп росту випуску мусить зменшуватись. Оскільки темп росту випуску зменшується і досягає значення g^* тоді, коли K/H досягає $(K/H)^*$, то в початковому положенні g повинно бути більшим за g^*. Отож, якщо початкове співвідношення K/H менше за його рівень траєкторії збалансованого зростання, то початковий темп росту випуску більший за темп росту випуску на траєкторії збалансованого зростання.

1.6 Модель, яка використовує виробничу функцію зі зростаючою віддачею від розширення масштабів фізичного та людського капіталу

Розглянемо випадок, за якого виробнича функція набуде вигляду

$$Y(t) = K(t)^{\alpha}[(1-a_H)H(t)]^{\beta} \tag{1.41}$$

і характеризуватиметься зростаючою віддачею від розширення масштабів, тобто

$$\alpha > 0\,, \quad \beta > 0\,, \quad \alpha + \beta > 1\,.$$

Нагромадження фізичного та людського капіталу описується рівняннями

$$\dot{K}(t) \;=\; s_K\, Y(t)\,, \tag{1.42}$$

$$\dot{H}(t) \;=\; Ba_H\, H(t)\,. \tag{1.43}$$

З рівняння (1.42) випливає, що темп росту людського капіталу сталий і дорівнює

$$g_H = \dot{H}(t)/H(t) \;=\; Ba_H\,. \tag{1.44}$$

Темп росту фізичного капіталу становить

$$\begin{aligned} g_K(t) = \dot{K}(t)/K(t) &= s_K Y(t)/K(t) = \\ &= s_K K^{\alpha-1}[(1-a_H)H(t)]^{\beta}\,. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Дослідимо поведінку темпу росту фізичного капіталу. Продиференціювавши прологарифмоване рівняння (1.45) за часом, отримаємо темп росту темпу росту фізичного капіталу

$$\begin{aligned} \dot{g}_K(t)/g_K(t) \;&=\; (\alpha-1)\dot{K}(t)/K(t) + \beta\dot{H}(t)/H(t) = \\ &=\; (\alpha-1)g_K(t) + \beta g_H\,. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Тоді залежність зміни темпу росту капіталу $\dot{g}_K(t)$ від самого темпу росту капіталу g_K описується рівнянням

$$\dot{g}_K(t) = (\alpha-1)(g_K(t))^2 + \beta g_H\, g_K(t)\,. \tag{1.47}$$

Дослідимо як залежить питання збіжності економіки до траєкторії збалансованого зростання від величини параметра α, а саме від того, чи параметр α більший чи менший за одиницю, тобто від того чи виробнича функція характеризується зростаючою чи спадною віддачею за змінною фізичного капіталу. Якщо $\alpha > 1$, маємо зростаючу віддачу від фізичного капіталу K. У цьому випадку графіком правої частини рівняння (1.47) є парабола вітками вгору і коренем $g_K(t) = 0$. Незважаючи на початкове значення, темп

росту капіталу безмежно зростає. Тому економіка не прямує до деякої траєкторії збалансованого зростання. Зауважимо, що у випадку $\alpha = 1$ (стала віддача від фізичного капіталу) отримуємо той самий результат. У цьому випадку $\dot{g}_K(t)$ є лінійною функцією від $g_K(t)$, але висновок той самий – $g_K(t)$ безмежно зростає і не існує траєкторії збалансованого зростання.

Розглянемо випадок $\alpha < 1$, що характеризує спадну віддачу від фізичного капіталу. У цьому випадку графіком правої частини рівняння (1.47) є парабола вітками вниз. Темп росту капіталу $g_K(t)$ є константою, коли $\dot{g}_K(t) = 0$, або $(\alpha - 1)g_K(t) + \beta g_H = 0$. Розв'язуючи це рівняння стосовно $g_K(t)$, отримаємо

$$g_K^* = \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) g_H \,.$$

Зауважимо таке: оскільки $\alpha+\beta > 1$, то $\beta > 1-\alpha$ і $g_K^* > g_H$. Тоді зліва від g_K^* маємо $\dot{g}_K(t) > 0$, а тому $g_K(t)$ зростає і прямує до g_K^*. Аналогічно справа від g_K^* одержуємо $\dot{g}_K(t) < 0$, тому $g_K(t)$ спадає і прямує до g_K^*. Отож, якщо $\alpha < 1$, то темп росту фізичного капіталу прямує до сталого значення g_K^* і траєкторія збалансованого зростання існує.

Знайдемо темп росту випуску, продиференціювавши за часом прологарифмоване рівняння (1.41),

$$\dot{Y}(t)/Y(t) = \alpha\dot{K}(t)/K(t) + \beta\dot{H}(t)/H(t) = \alpha g_K(t) + \beta g_H \,.$$

На траєкторії збалансованого зростання

$$g_K(t) = g_K^* = [\beta/(1-\alpha)]g_H \,,$$

тому

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\, g_H + \beta g_H = \frac{\beta}{1-\alpha}\, g_H = g_K^*$$

Отже, на траєкторії збалансованого зростання випуск зростає з тим самим темпом росту, що і фізичний капітал, який більший за темп росту людського капіталу $g_H = Ba_H$.

1.7 Емпіричні дослідження: Нагромадження фізичного та людського капіталу та міждержавні відмінності в доходах

Теоретична модель, яка враховує людський капітал, виявила, що різні темпи зростання населення та відмінності в нагромадженні капіталу можуть пояснити великі різниці в доходах різних країн.

Манків, Ромер і Вейл у своїх емпіричних дослідженнях показали, що вплив заощаджень і зростання кількості населення на доходи набагато більший, ніж передбачає модель Солоу з часткою капіталу $\alpha = 1/3$. Оскільки модель з людським капіталом передбачає набагато більший вплив заощаджень та зростання кількості населення на випуск, ніж робить це модель Солоу, цей емпіричний висновок є доказом на користь моделі людського капіталу.

Манків, Ромер і Вейл на підставі даних різних країн оцінювали рівняння

$$\ln y^* = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\ln s_K + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\ln s_H - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}\ln(n+g).$$

Вони вимірювали y як реальний ВВП на одну особу працездатного віку, s – як середню частку реальних приватних і державних інвестицій у реальному ВВП впродовж 1960-1985 років, n – як середній темп росту населення працездатного віку впродовж цього ж періоду. Значення g приймали таким, що дорівнює $0,05$ для всіх країн. Вони також вимірювали s_H як середнє відношення кількості осіб, які закінчили середню школу, до загальної кількості осіб працездатного віку впродовж 1960-1985 років. Зрозуміло, що таке вимірювання s_H, яке визначає частку ресурсів країни, яка спрямована на нагромадження людського капіталу, не є досконалим. Оскільки в (1.15) входить логарифм від s_H, то якщо справжнє s_H пропорційне до виміряної величини, то така недосконаліть вимірювання вплине лише на сталий член регресії. Незважаючи на ці міркування, похибка вимірювання в s_H є проблемою.

Переписавши (1.15) в іншому вигляді, Манків, Ромер і Вейл оцінили таке рівняння:

$$\ln y_i = a + b\,[\ln\, s_{Ki} - \ln\,(n_i + 0,05)] + c\,[\ln s_{Hi} - \ln\,(n_i + 0,05)] + \varepsilon_i, \quad (1.48)$$

де i позначає номер країни. Результати оцінювання, отримані на основі досить широкої вибірки країн, такі:

$$\begin{array}{rl} \ln\, y_i = & 7,86 \;+\; 0,73\,[\ln\, s_{Ki} - \ln\,(n_i + 0,05)] \\ & \underset{(0,14)}{} \quad \underset{(0,12)}{} \\ & + 0,67\,[\ln\, s_{Hi} - \ln\,(n_i + 0,05)], \\ & \underset{(0,07)}{} \end{array} \qquad (1.49)$$

$$N = 98, \qquad \overline{R}^2 = 0,78, \qquad s = 0,51\,.$$

Тут числа в дужках визначають стандартні похибки параметрів. Оцінки параметрів α і β отримані за допомогою оцінок параметрів b і c дорівнюють

$$\widehat{\alpha} = 0,31\ (0,04)\,, \qquad \widehat{\beta} = 0,28\ (0,03)\,,$$

де в дужках також подано стандартні похибки. Крім того, коли змінну $\ln(n_i + 0,05)$ ввели в регресію окремо, то коефіцієнт при ній приблизно дорівнював мінус сумі коефіцієнтів при $\ln s_{Ki}$ і $\ln s_{Hi}$, як і передбачає модель (тобто значення статистики Вальда свідчило про те, що це обмеження не можна відхилити). Отож, модель людського капіталу добре узгоджується з даними. З результатів оцінювання одержуємо, що частки фізичного та людського капіталу помірні, а регресія пояснює 80% міждержавних відмінностей у доходах на одного працівника.

Манків, Ромер і Вейл досліджували також питання швидкості збіжності економіки до траєкторії збалансованого зростання. З теоретичної моделі випливає таке: оскільки країни з різними рівнями s_K, s_H і n на їхніх траєкторіях збалансованого зростання мають різний рівень виробництва на одного працівника, то існує компонента міждержавних відмінностей доходу, яка зберігається протягом довгого часу. Крім цих відмінностей. існують також розбіжності, які виникають внаслідок того, що країни перебувають у

різних початкових положеннях стосовно їхніх траєкторій збалансованого зростання. Такі відмінності поступово зникають, в міру того як країни наближаються до їхніх траєкторій збалансованого зростання. Отож, модель передбачає збіжність до величин доходу на траєкторії збалансованого зростання, або так звану умовну збіжність.

З теоретичної моделі випливає, що в околі траєкторії збалансованого зростання y збігається до y^* з темпом $\lambda = (1-\alpha-\beta)(n+g)$, тобто

$$\frac{d\ln y(t)}{dt} \simeq -\lambda\,(\ln y(t) - \ln y^*)\,. \tag{1.50}$$

З рівняння (1.50) випливає, що $\ln y$ наближається до $\ln y^*$ експоненціально

$$\ln y(t) - \ln y^* \simeq e^{-\lambda t}\,(\ln y(0) - \ln y^*)\,, \tag{1.51}$$

де $y(0)$ – значення доходу в деякий початковий момент часу. Якщо α і β дорівнюють $1/3$, $n+g$ становить 6%, то λ становить 2%. Звідси випливає, що країна перебуватиме на півдорозі до її траєкторії збалансованого зростання через 35 років.

Додавши $\ln y^* - \ln y(0)$ до обидвох частин (1.51), отримаємо вираз для темпу росту доходу

$$\ln y(t) - \ln y(0) \simeq -(1-e^{-\lambda t})[\ln y(0) - \ln y^*]. \tag{1.52}$$

Зазначимо, що з (1.52) випливає умовна збіжність: країни, в яких відношення початкового доходу до доходу на траєкторії збалансованого зростання низький, характеризуються високим темпом росту. Використавши рівняння (1.15) для визначення $\ln y^*$, одержимо

$$\begin{aligned}\ln y(t) - \ln y(0) &\simeq (1-e^{-\lambda t})\,\ln y^* - (1-e^{-\lambda t})\,\ln y(0)\\ &= (1-e^{-\lambda t})\,\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}\,(\ln s_K - \ln(n+g))\\ &\quad + (1-e^{-\lambda t})\,\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}\,(\ln s_H - \ln(n+g))\\ &\quad - (1-e^{-\lambda t})\,\ln y(0)\,.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Манків, Ромер і Вейл оцінили це рівняння, використовуючи ті самі дані, що і раніше, й отримали такі результати:

$$\begin{aligned}\ln y_i(t) - \ln y_i(0) \;=\; & 2,46 \;+\; 0,500\,[\ln s_{Ki} - \ln(n_i+g)] \\ & \quad (0,48) \quad (0,082) \\ & + 0,238\,[\ln s_{Hi} - \ln(n_i+g)] - 0,299 \ln y_i(0), \\ & \quad (0,07) \qquad\qquad\qquad\qquad (0,061)\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$N = 98, \qquad \overline{R}^2 = 0,46, \qquad s = 0,33\,.$$

З оцінок параметрів цієї регресії одержано оцінки параметрів

$$\widehat{\alpha} = 0,48\,(0,07)\,, \quad \widehat{\beta} = 0,23\,(0,05)\,, \quad \widehat{\lambda} = 0,0142\,(0,0019)\,.$$

Оцінки в цілому узгоджуються з прогнозами моделі: економіки країн збігаються до їхніх траєкторій збалансованого зростання приблизно з такою самою швидкістю, що і передбачає модель. Крім того, оцінки частки капіталу подібні до тих, які пропонують безпосередньо на підставі моделі.

Загалом, дані свідчать про те, що модель, яка підтримує припущення спадної віддачі від капіталу, але грунтується на ширшому визначенні капіталу, ніж традиційний фізичний капітал, і отже, передбачає загальну частку капіталу близькою до 1, а не до $1/3$, забезпечує хороше пояснення відмінностей у доходах між країнами.

Розділ 2

Економетричне моделювання динаміки витрат на освіту на основі панельних даних областей України

Проведемо емпіричне дослідження витрат на освіту в Україні, що зумовлюють зростання людського капіталу в нашій країні, а відтак, як засвідчують моделі економічного росту, і зростання доходів у довгостроковому періоді. В кожній країні ці витрати зростають з ростом доходу, тобто чим багатша країна, тим більші витрати на освіту. В Україні з кожним роком витрати на освіту збільшуються, водночас зростають і доходи бюджету. Також дослідимо, як залежать витрати на освіту від кількості населення, кількості учнів у школах та кількості студентів у вищих навчальних закладах.

Щоб оцінити залежність витрат на освіту в Україні від зазначених чинників, треба мати досить велику вибірку даних, в іншому випадку (у випадку малої вибірки) оцінки моделі будуть дуже неточними. Для того, щоб розширити множину даних, ми об'єднаємо дані часових рядів за 7 років (від 2004 р. до 2010 р. включно) для 26

областей України в одну вибірку і на підставі такої об'єднаної вибірки побудуємо економетричну модель, яка описуватиме динаміку витрат на створення та розвиток людського капіталу в Україні.

2.1 Аналіз даних

Моделювання проводитимемо на підставі щорічних даних по 26 областях (Вінницька, Волинська, Дніпропетровська, Донецька, Житомирська, Закарпатська, Запорізька, Івано-Франківська, Київська. Кіровоградська, Луганська, Львівська, Миколаївська, Одеська, Полтавська, Рівненська, Сумська, Тернопільська, Харківська, Херсонська, Хмельницька, Черкаська, Чернівецька, Чернігівська, м.Севастополь, Крим) за 7 років (всього 182 спостережень) таких величин:

1. витрати на освіту, в млн.грн. – змінна CO;
2. доходи місцевих бюджетів, в млн.грн. – змінна Y;
3. кількість населення, в тис. – змінна L;
4. кількість учнів на 10 тис. населення, в тис. – змінна U;
5. кількість студентів на 10 тис. населення, в тис. – змінна S.

Дані отримано на підставі запитів в обласні управління освіти та науки, обласні головні фінансові управління, обласні державні адміністрації та головні управління статистики в кожній області. Почнемо з графічного аналізу даних, на основі яких проводитимемо подальше моделювання.

Панельний графічний аналіз витрат на освіту

На рис. 2.1 зображено динаміку зміни витрати на освіту для кожної області впродовж 2004-2010 років. Зауважимо, що у всіх областях витрати на освіту з часом зростали, найбільшими витрати на освіту були в Донецькій та Дніпропетровській областях.

Скупчення ліній у середині рисунка свідчить про те, що більшість областей мала переважно однакові витрати на освіту впродовж 2004 - 2010 років. Львівську область визначає третя зверху

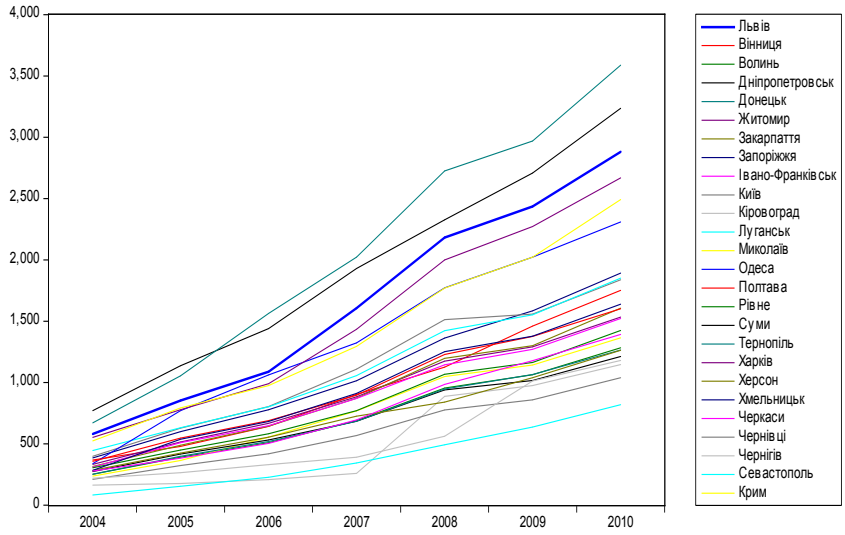

Рис. 2.1: Динаміка зміни витрат на освіту в областях України

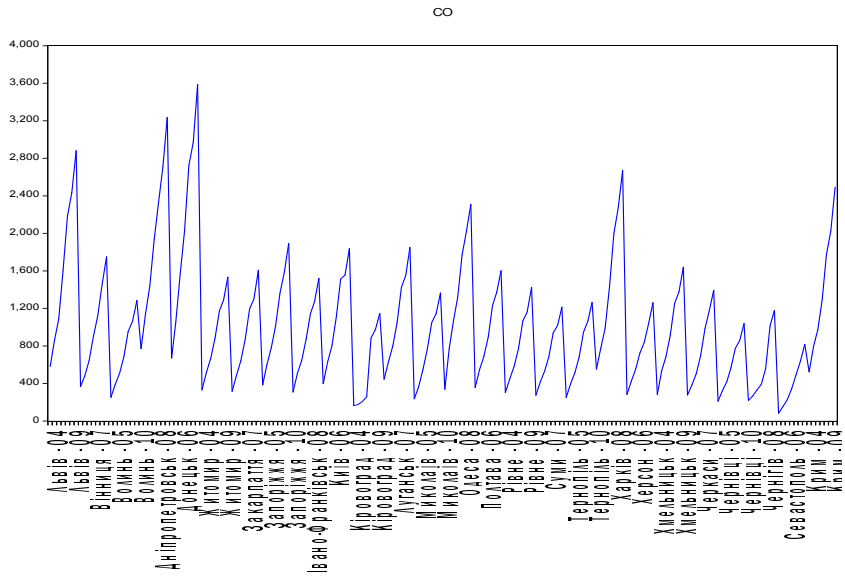

Рис. 2.2: Об'єднаний ряд витрат на освіту в областях

лінія (тут досить високі витрати на освіту порівняно з іншими областями). Найменше на освіту витрачають Севастополь, Чернігівська та Кіровоградська області.

На рис. 2.2 зображено динаміку об'єднаного ряду витрат на освіту, на основі якого буде проводитися моделювання. Зокрема, великими піками вирізняються Львівська, Дніпропетровська, Донецька, Харківська області та Крим.

Панельний графічний аналіз доходів

Розглянемо динаміку доходів бюджетів областей. З рис. 2.3 видно, як змінюються доходи місцевих бюджетів впродовж 2004-2010 років. Бачимо, що максимальні значення досягаються для Донецької, Дніпропетровської, Львівської, Харківської, Одеської областей та Криму.

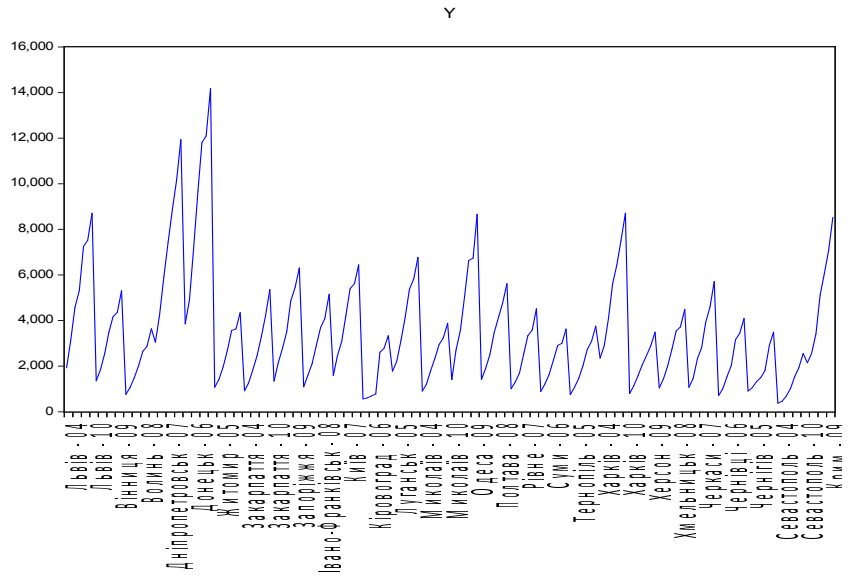

Рис. 2.3: Поведінка доходів бюджету кожної області

Отож, можна стверджувати, що у всіх областях впродовж досліджуваного періоду доходи бюджетів зростали. Це зростання також добре видно з рис. 2.4, що показує доходи бюджету окремо

по кожній області. Найбільші доходи отримують Донецька та Дніпропетровська області. Львівська область також має досить високі доходи бюджету, і перебуває в верхній частині графіка. Скупчення ліній внизу графіка свідчить про те, що доходи бюджетів більшості областей України сильно не відрізняються. Найменші доходи отримують місто Севастополь і Чернігівська область. Отже, бачимо, що

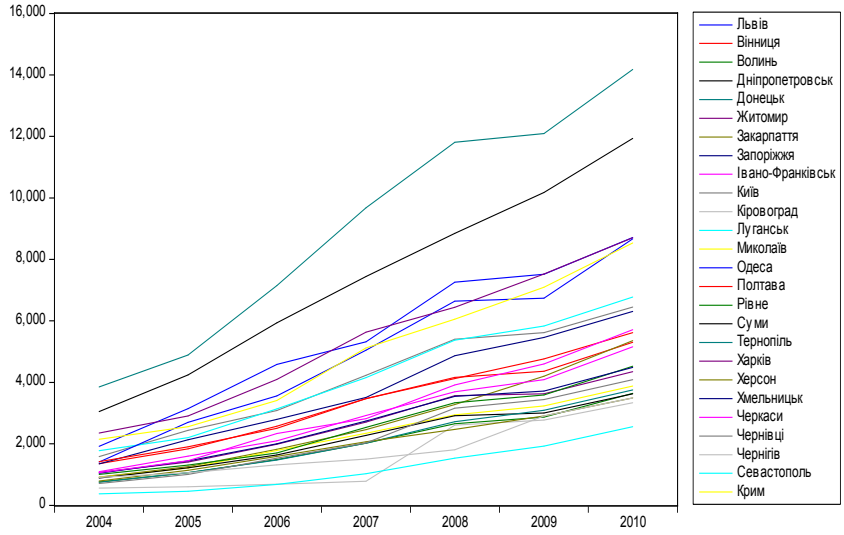

Рис. 2.4: Поведінка доходів бюджетів кожної області

ті області, в яких доходи більші, мають і більші витрати на освіту. Наше завдання – визначити, якою саме є залежність між витратами та доходом, і якими є оцінки параметрів цієї моделі. Проте і доходи, і витрати на освіту залежать від кількості населення області. Тому, можливо, високий ступінь кореляції між доходами та витратами на освіту зумовлений значною залежністю цих змінних від фактора величини населення в області.

Панельний графічний аналіз кількості населення

Розглянемо як змінюється кількість населення протягом 2004-2010 років в областях України. З рис. 2.5 видно, що ця величина в кожній області впродовж останніх семи років зменшується. Найпомітніші зміни відбулися у Донецькій області. Крім того, бачимо, що у Донецькій, Дніпропетровській, Харківській областях проживає більша частка населення порівняно з іншими областями. Кількість населення у Львівській області зображено синьою лінією. Зауважимо, що кількість населення у Луганській області, яка характеризувалася високими доходами та витратами на освіту, приблизно 2500 тис., що є середньою величиною по Україні.

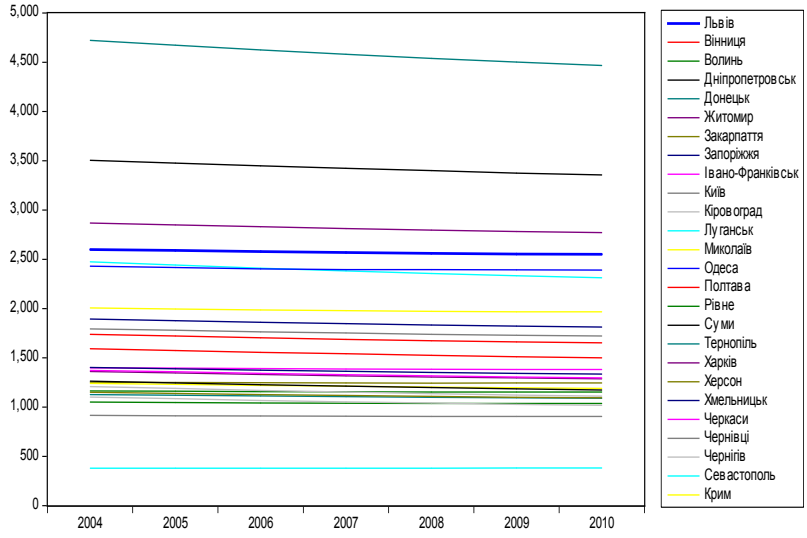

Рис. 2.5: Динаміка кількості населення в областях

Панельний графічний аналіз кількості учнів

Проаналізуємо як змінюється кількість учнів на 10 тис. населення в областях України з 2004 до 2010 року. З рис. 2.6 видно, що частка дітей шкільного віку в Україні з кожним роком зменшується. Зокрема, в середині 2005 р. майже у всіх областях України розпочався різкий спад кількості учнів. Графік кількості учнів у

Львівській області зображено виділеною лінією, і це вже не третя позиція (як було для змінних доходу і витрат на освіту). Зокрема, у Львівській області у 2004 р. частка учнів становила 1300 учнів на 10 тис. населення, тоді як у 2010 р. ця кількість зменшилась до 1 тис. учнів на 10 тис. населення. В середньому за 7 років частка учнів в Україні зменшилась приблизно на 20%. Зауважимо, що найбільше учнів припадає на 10 тис. населення в Рівненській, Волинській, Закарпатській та Івано-Франківській областях, найменша частка учнів у Дніпропетровській, Луганській, Сумській, Донецькій областях і в м. Севастополь.

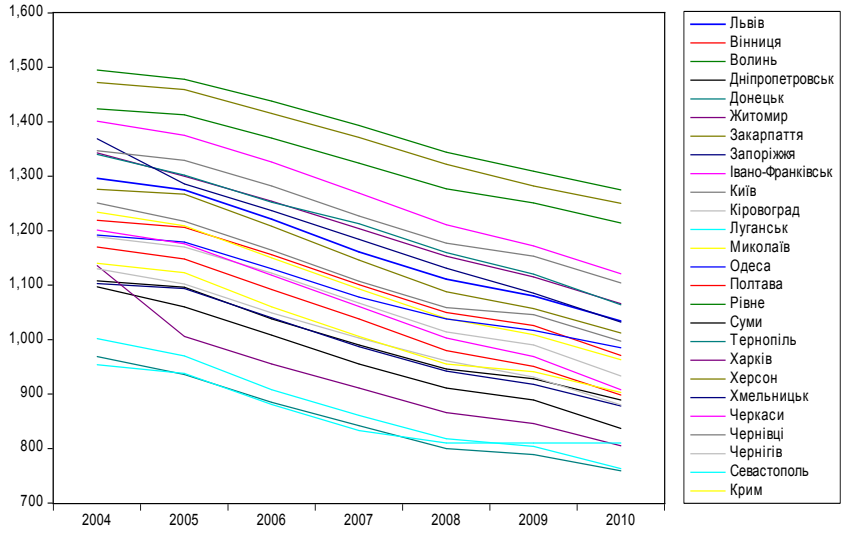

Рис. 2.6: Динаміка кількості школярів на 10 тис. населення в областях

Панельний графічний аналіз кількості студентів

Зобразимо графічно зміну кількості студентів на 10 тис. населення в областях України протягом семи років. З рис. 2.7 видно, що найбільша частка студентів у Харківській області, а саме 1 тис. студентів на 10 тис. населення, це майже вдвічі більше, ніж в середньому по Україні. Львівська область займає друге місце по щіль-

ності студентів, зокрема у Львівській області на 10 тис. населення припадає приблизно 600 студентів, ця кількість досить велика порівняно з іншими областями, причому протягом 2004-2008 років вона зростала. В Закарпатській області простежується найменша кількість студентів. Помітно, що в більшості областей, починаючи з середини 2007 р. частка студентів зменшується.

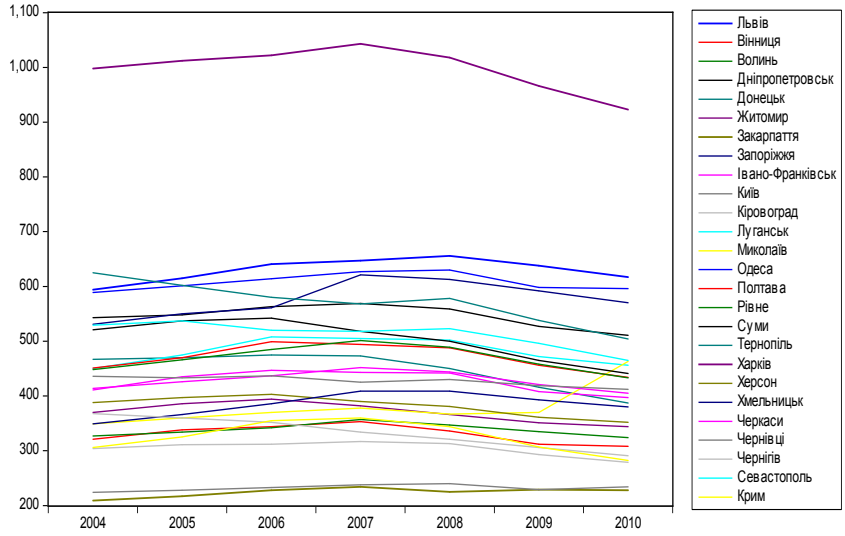

Рис. 2.7: Динаміка кількості студентів на 10 тис. населення по областях України впродовж 2004-2010 років

Зауважимо, що в Дніпропетровській і Донецькій областях, в яких спостерігають найбільші доходи бюджетів та найбільші обсяги витрат на освіту, частка студентів середня по Україні.

Розглянемо також ряди UL і SL, які вимірюють загальну кількість школярів і студентів у кожній області. На рис. 2.8 показано динаміку зміни загальної кількості студентів у кожній області. Найвища лінія відповідає Харківській області, а в Севастополі найменша загальна кількість студентів. Виділимо Львівську область, в якій велика кількість студентів, причому цей показник зростає з часом. Загальну кількість студентів у Донецькій і Дніпропетровській областях позначено зеленим та чорним кольором.

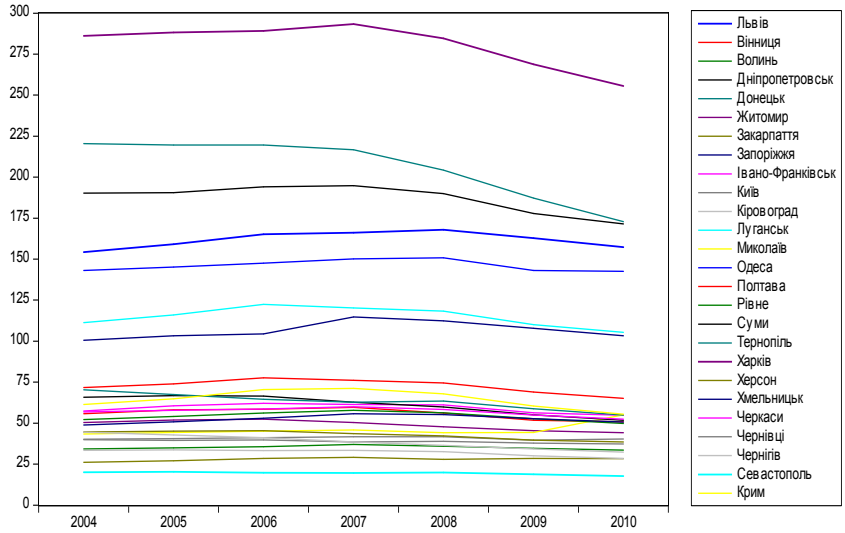

Рис. 2.8: Динаміка загальної кількості студентів по областях України впродовж 2004-2010 років

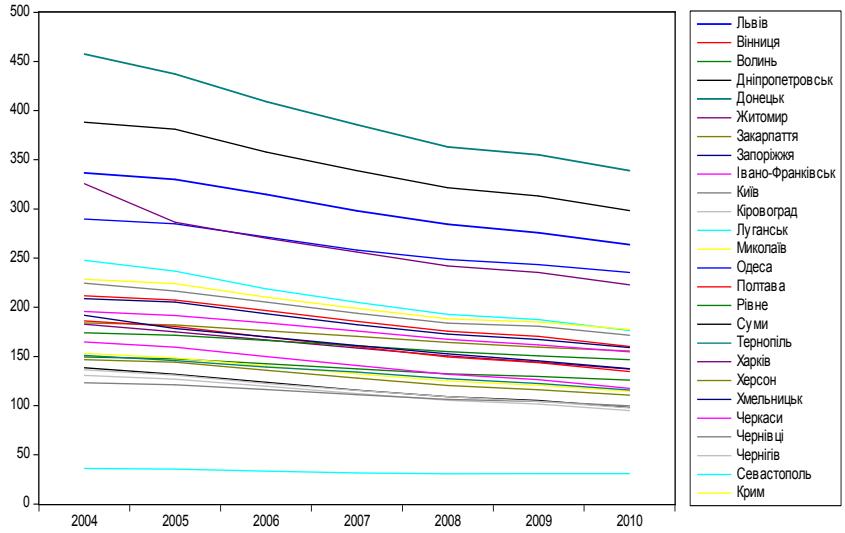

Рис. 2.9: Динаміка загальної кількості учнів по областях України

Рис. 2.9 ілюструє зміну загальної кількості учнів у кожній області. На ньому чітко видно різкий спад кількості школярів у всіх областях, особливо в Донецькій області (верхня виділена лінія). Львівська область перебуває в верхній частині графіка, що свідчить про те, що тут висока загальна кількість учнів, проте, як і в інших областях, цей показник спадає.

2.2 Економетричне моделювання на підставі об'єднаної регресії

Будуючи економетричну модель неможливо одразу визначити, який саме тип моделі буде краще відображати потрібну нам залежність. Саме тому дослідимо різні види моделей і проведено їх порівняння. Так ми зможемо обрати найбільш адекватну модель, яка буде відображати залежність витрат на освіту від доходу, кількості населення, загальної кількості учнів і загальної кількості студентів.

Для початку побудуємо найпростішу модель, яка дає змогу моделювати панельні дані — модель без ефектів або модель об'єднаної регресії. Моделювання даних таким способом припускає, що зв'язки між змінними є сталими протягом часу і для всіх перехресних об'єктів у вибірці.

У загальному вигляді модель панельних даних для опису витрат на освіту можна подати так:

$$CO_{it} = c + \beta_{1it} Y_{it} + \beta_{2it} L_{it} + \beta_{3it} UL_{it} + \beta_{4it} SL_{it} + \varepsilon_{it}\,, \qquad (2.1)$$

$$i = 1, \ldots, N,\ t = 1, \ldots, T,$$

де CO_{it} – витрати на освіту i-ї області за рік t (млн.грн.); c – постійний доданок в моделі; Y_{it} – доходи бюджету i-ї області за рік t (млн. грн.); L_{it} – кількість населення i-ї області за рік t (тис.); UL_{it} – загальна кількість учнів i-ї області за рік t (тис.); SL_{it} – загальна кількість студентів i-ї області за рік t (тис.); e_{it} – збурення, β_{jit}, $(j = 1, 2, 3, 4)$ – параметри моделі, які вимірюють часткові ефекти від зміни регресора.

У практичних застосуваннях досить часто вводять додаткові обмеження на параметри моделі. Стандартним є припущення про постійність параметрів β_{jit} для всіх значень t та i. Тоді модель (2.1) набуває вигляду

m. 1. $$CO_{it} = c + \beta_1 Y_{it} + \beta_2 L_{it} + \beta_3 UL_{it} + \beta_4 SL_{it} + \varepsilon_{it}\,,$$

$$i = 1, \ldots, N\,, \quad t = 1, \ldots, T\,.$$

Зауважимо, що при моделюванні у ролі різних груп ми розглядаємо окремі області на території України ($N = 26$). Часовий проміжок становить 7 років – з 2004 до 2010 р. ($T = 7$). Модель такого типу можна розглядати як загальну модель панельних даних, яка фактично є регресійною моделлю на множині панельних даних. Побудова, оцінювання параметрів і дослідження такої моделі нічим не відрізняється від класичних багатофакторних регресійних моделей.

Провівши економетричні оцінювання цієї моделі, отримуємо

$$\widehat{CO} = 173,822 + 0,311\,Y - 0,376\,L + 1,741\,UL + 0,952\,SL\,.$$

Статистичні результати оцінювання моделі **m. 1.** подано в табл. 2.1.

Аналізуючи значення статистик Стьюдента, бачимо, що всі вони більші за критичні, тому всі параметри моделі значущі, а отже, всі змінні включені в модель мають суттєвий вплив на витрати на освіту. Економічний зміст параметрів полягає в тому, що вони вимірюють граничний ефект впливу включених факторів на рівень витрат на освіту, за умови, що всі інші змінні не змінюються. Бачимо, що збільшення доходів бюджетів, загальної кількості школярів, загальної кількості студентів спричиняє зростання рівня витрат на освіту. А саме, згідно з цією моделлю зі збільшенням доходів бюджетів областей на 1 млн. грн. витрати на освіту збільшуються на 311 тис. грн., зі зменшенням кількості населення на 1 тис. витрати на освіту збільшуються на 376 тис. грн., зі збільшенням загальної кількості студентів на 1 тис. витрати на освіту збільшаться на 952 тис. грн., зі збільшенням загальної кількості учнів на 1 тис. витрати на освіту збільшаться на 1741 тис. грн., тобто на кожного

Таблиця 2.1: Результати оцінювання моделі **m. 1.**

Dependent Variable: CO
Method:Panel Least Squares
Sample: 2004 2010
Periods included: 7
Cross-sections included: 26
Total panel (balanced) observations: 182

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	173,8221	24,52278	7,088186	0,0000
Y	0,310570	0,005717	54,32284	0,0000
L	-0,376466	0,045497	-8,274606	0,0000
UL	1,741385	0,395472	4,403303	0,0000
SL	0,952066	0,258833	3,678308	0,0003

R-squared	0,971299	Mean dependent var	1011,558
Adjusted R-squared	0,970651	S.D. dependent var	663,0683
S.E. of regression	113,5943	Akaike info criterion	12,33023
Sum squared resid	2283950,	Schwarz criterion	12,41825
Log likelihood	-1117,051	Hannan-Quinn criter.	12,36592
F-statistic	1497,528	Durbin-Watson stat	1,640831
Prob(F-statistic)	0,000000		

додаткового школяра область в середньому витрачає 1741 гривню на рік.

Коефіцієнт детермінації моделі R^2 становить $0,971299$ і є близьким до 1, тобто модель пояснює 97% дисперсії зміни витрат на освіту. Перевіримо модель на адекватність на підставі статистики Фішера. Оскільки значення F-статистики настільки велике, що $P = 0,000000$, то робимо висновок, що побудована модель адекватно описує дані.

На рис. 2.10 показано фактичні значення залежної змінної (червоний колір) і оцінені, на основі моделі **m. 1.** значення залежної змінної (зелений колір), а також залишки оціненої регресії.

З динаміки залишків бачимо, що є деякі викиди значень залишків, крім того, переважна більшість їхніх абсолютних значень є не достатньо малими. Також обчислене значення статистики Дарбіна - Уотсона $DW = 1,64$ (табл. 2.1) свідчить про автокореляцію залишків, тому ми не можемо стверджувати, що залишки побудованої

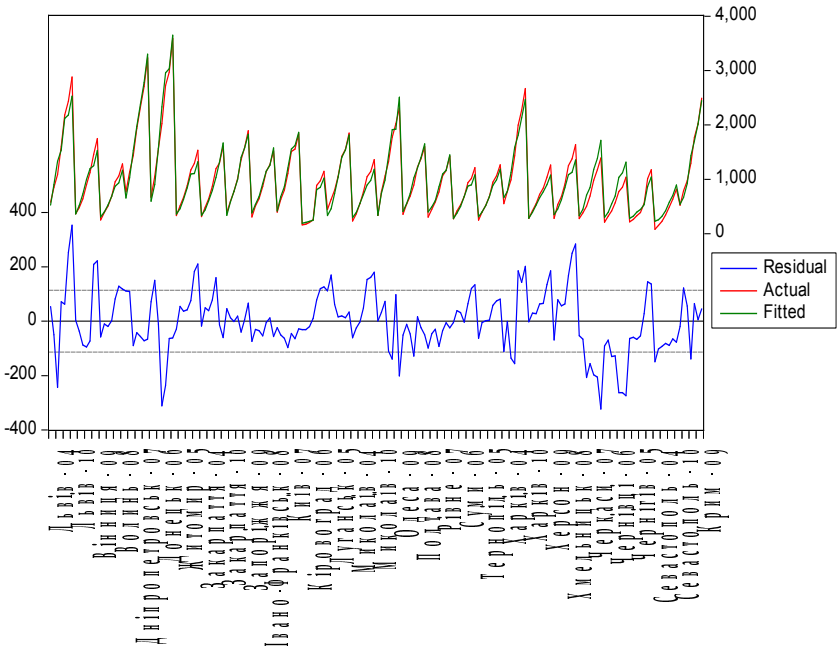

Рис. 2.10: Реальні та оцінені на підставі моделі **m. 1.** значення витрат на освіту; динаміка залишків моделі

моделі є білим шумом. Отже, модель **m. 1.** потребує подальшого дослідження та вдосконалення.

2.3 Застосування моделей панельних даних з фіксованими ефектами

Модель **m. 1.** містить спільний для різних областей перетин c і не враховує індивідуальних особливостей формування витрат на освіту в кожній області. У цій моделі дані по різних областях ми об'єднали в одну вибірку і трактували їх як спостереження однієї узагальненої абстрактної області України, тобто припускали, що такі значення витрат на освіту можливі і могли б бути для кожної з областей України за заданих значень екзогенних змінних. Отже, якби, наприклад, у Львівській області проживала така сама кількість населення як у Дніпропетровській області, була б така сама кількість учнів і студентів, а також та сама величина доходів, то згідно з моделлю **m. 1.** і витрати на освіту були б однакові для Львівської та Дніпропетровської областей.

Проте специфіка регіону, традиції та загальне ставлення до освіти зумовлює те, що витрати на освіту можуть бути різними для різних областей навіть за однакових рівнів доходу, кількості населення, учнів і студентів. Перевага моделювання, яке грунтується на використанні панельних даних, полягає в тому, що таке дослідження дає змогу виділяти різні ефекти впливу невимірюваних факторів для кожного об'єкта панельної вибірки.

Щоб дослідити модель, яка враховуватиме різні ефекти для різних областей, розкладемо збурення ε_{it} на декілька складових. Якщо збурення моделі **m. 1.** подати у вигляді

$$\varepsilon_{it} = \alpha_i + u_{it}, \tag{2.2}$$

то модель **m. 1.** перетвориться у модель панельних даних з однокомпонентною помилкою. Тут α_i позначає специфічні індивідуальні ефекти факторів кожної з областей, які не піддаються спостереженню та кількісному вимірюванню, тому й не можуть бути враховані в регресійній моделі **m. 1.**, а u_{it} – випадкові збурення.

Крім моделей панельних даних з одновимірною складовою помилки, досліджують також моделі з двовимірною складовою помилки. У випадку моделей з двовимірною складовою помилки за-

лишки моделі **m. 1.** зображають у вигляді

$$\varepsilon_{it} = \alpha_i + \tau_t + u_{it}, \tag{2.3}$$

де α_i позначає неспостережувані специфічні індивідуальні ефекти областей; τ_t — неспостережувані часові ефекти; u_{it} — залишкові шуми. У цьому випадку включення параметрів τ_t дає змогу додатково враховувати специфічні часові ефекти. Залежно від того, чи компоненти збурень фіксовані величини, чи випадкові, розрізняють моделі панельних даних з фіксованими ефектами та моделі з випадковими ефектами.

2.3.1 Оцінювання моделі, яка містить фіксовані ефекти областей

Якщо розглядати α_i як N невідомих фіксованих параметрів, то модель **m.1.** зі збуреннями у вигляді (2.2) належатиме до класу стандартних моделей панельних даних з фіксованими ефектами та набуде вигляду

m.2. $$CO_{it} = \alpha_i + \beta_1\, Y_{it} + \beta_2\, L_{it} + \beta_3\, UL_{it} + \beta_4\, SL_{it} + u_{it}\,,$$

де CO – витрати на освіту (млн грн.); α_i – різні значення перетину (фіксовані ефекти) для кожної області; Y – доходи бюджетів (млн грн.); L – кількість населення (тис.); UL – загальна кількість учнів (тис.); SL – загальна кількість студентів (тис.); β_1, β_2, β_3, β_4 – невідомі параметри моделі.

Моделі **m. 1.** грунтувалась на припущенні, що існує спільний перетин для всіх областей, який відображений у коефіцієнті c. В моделі **m. 2.** ми узагальнюємо модель **m. 1.**, ввівши різні значення перетинів α_i і тим самим враховуємо те, що залежність витрат на освіту для однієї області може відрізнятися від залежності витрат на освіту іншої області, проте є постійною для різних періодів часу.

Особливістю моделі **m. 2.** є те, що для різних областей оцінюються різні значення констант α_i, які відображають вплив факторів, що є специфічними саме для них. Водночас оцінені параметри β_i будуть однаковими для всіх об'єктів і всіх періодів часу. Отже,

відмінності між областями подаються лише як відмінності між постійними доданками.

Припустимо, що збурення u_{it} моделі **m. 2.** незалежні, однаково розподілені випадкові величини для всіх об'єктів і періодів часу з нульовим математичним сподіванням та постійною дисперсією σ_u^2. Тоді модель **m. 2.** з фіксованими ефектами є лінійною регресійною моделлю, в якій перетини варіюють залежно від номера i. Таким чином цю модель можна переписати у вигляді лінійної регресії

$$\begin{pmatrix} CO_1 \\ CO_2 \\ \vdots \\ CO_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} + \tag{2.4}$$

$$+ \begin{pmatrix} Y_1 & L_1 & UL_1 & SL_1 \\ Y_2 & L_2 & UL_2 & SL_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_N & L_N & UL_N & SL_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix},$$

де e – T - вимірний вектор, складений з одиниць; CO_i, Y_i, L_i, UL_i, SL_i – T - вимірні вектори, що містять T річних спостережень для i-ї області; u_i – T - вимірні вектори збурень, $i = 1, ..., N$. Ввівши фіктивні змінні, регресію **m.2.** можна також зобразити у такому вигляді:

$$CO = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_N & Y & L & UL & SL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} + u, \tag{2.5}$$

де d_i – фіктивна змінна, що визначає i-ту область і є NT - вимірним вектором ($i = 1, ..., N$); $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)'$; CO, Y, L, UL, SL – вектори розмірності $(NT \times 1)$.

Позначимо $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_N \end{pmatrix}$ – матрицю розмірності $(NT \times N)$. Тоді модель з фіктивними змінними (2.5) можна записати у вигляді

$$CO = D\alpha + Y \cdot \beta_1 + L \cdot \beta_2 + UL \cdot \beta_3 + SL \cdot \beta_4 + u\,. \tag{2.6}$$

Параметри β_1, β_2, β_3, β_4 цієї моделі можна оцінити за допомогою методу найменших квадратів, а саме використовуючи формулу

$$\widehat{\beta} = \left(\begin{pmatrix} Y \\ L \\ UL \\ SL \end{pmatrix} M_d \begin{pmatrix} Y \\ L \\ UL \\ SL \end{pmatrix}' \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} Y \\ L \\ UL \\ SL \end{pmatrix} M_d \, CO \right),$$

де $M_d = I - D(D'D)^{-1}D'$.

На практиці таке оцінювання неефективне, оскільки побудована регресійна модель може містити велику кількість додаткових фіктивних змінних. Зауважимо, що у нашому випадку треба ввести 26 додаткових змінних, тоді загальна кількість факторів становить 30 змінних. У зв'язку з цим часто оцінювання моделей, які враховують фіксовані ефекти відбувається у два етапи, які грунтуються на оцінюванні допоміжної регресії.

Розглянемо модель

$$\overline{CO}_i = \alpha_i + \beta_1 \overline{Y}_i + \beta_2 \overline{L}_i + \beta_3 \overline{UL}_i + \beta_4 \overline{SL}_i + \overline{u}_i \,, \qquad (2.7)$$

де

$$\overline{CO}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} CO_{it} \,, \quad \overline{Y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it} \,, \quad \overline{L}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} L_{it} \,,$$

$$\overline{UL}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} UL_{it} \,, \quad \overline{SL}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} SL_{it} \,, \quad \overline{u}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} u_{it}$$

визначають середні значення показників для кожної області. Віднявши від обох частин моделі **m. 2.** відповідні частини (2.7), отримаємо модель зі змінними у відхиленнях від середніх

$$\begin{aligned} CO_{it} - \overline{CO}_i \; = & \beta_1 (Y_{it} - \overline{Y}_i) + \beta_2 (L_{it} - \overline{L}_i) + \beta_3 (UL_{it} - \overline{UL}_i) + \\ & + \beta_4 (SL_{it} - \overline{SL}_i) + (u_{it} - \overline{u}_i). \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Зауважимо, що модель (2.8) не містить індивідуальних ефектів областей α_i. Оцінки параметрів β, отримані з цієї моделі, називаються оцінками фіксованих ефектів, і вони співпадають з оцінками

параметрів, які одержують з моделі з фіктивними змінними (2.6). Позначимо їх $\widehat{\beta}_{FE}$ і обчислимо за формулою

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1FE} \\ \widehat{\beta}_{2FE} \\ \widehat{\beta}_{3FE} \\ \widehat{\beta}_{4FE} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y_i} \\ L_{it} - \overline{L_i} \\ UL_{it} - \overline{UL_i} \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix}' \right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y_i} \\ L_{it} - \overline{L_i} \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \left(CO_{it} - \overline{CO_i} \right) .$$

На підставі знайдених оцінок $\widehat{\beta}_{FE}$ за умови, що всі фактори моделі незалежні від випадкових величин u_{it}, знаходимо незміщені оцінки різних перетинів α_i моделі **m. 2.**, а саме

$$\widehat{\alpha}_i = \overline{CO_i} - \begin{pmatrix} \overline{Y_i} & \overline{L_i} & \overline{UL}_i & \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1FE} \\ \widehat{\beta}_{2FE} \\ \widehat{\beta}_{3FE} \\ \widehat{\beta}_{4FE} \end{pmatrix} .$$

Необхідним елементом дослідження є знаходження коваріаційної матриці параметрів. Коваріаційну матрицю оцінок $\widehat{\beta}_{FE}$ за припущення, що величини u_{it} незалежні, однаково розподілені для усіх значень t та i, з однаковою дисперсією σ_u^2 оцінюють так:

$$\mathrm{Var}\left[\widehat{\beta}_{FE}\right] = \widehat{\sigma}_u^2 \left(\begin{pmatrix} Y \\ L \\ UL \\ SL \end{pmatrix} M_d \begin{pmatrix} Y \\ L \\ UL \\ SL \end{pmatrix}' \right)^{-1} =$$

$$= s^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix}' \right)^{-1} .$$

Оскільки дисперсія трансформованої похибки $(u_{it} - \overline{u}_i)$ дорівнює $\frac{T-1}{T}\sigma_u^2$, а не просто σ_u^2, то для консистентного оцінювання невідомої дисперсії s^2 треба внутрішню суму квадратів ділити на $NT - N - K$

$$s^2 = \frac{1}{NT - N - K} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left((CO_{it} - \overline{CO}_i) - \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y_i} \\ L_{it} - \overline{L_i} \\ UL_{it} - \overline{UL_i} \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1FE} \\ \widehat{\beta}_{2FE} \\ \widehat{\beta}_{3FE} \\ \widehat{\beta}_{4FE} \end{pmatrix} \right)^2 .$$

Для індивідуальних ефектів також можна знайти оцінку коваріаційної матриці, побудовану на підставі s^2

$$\mathrm{Var}\,[\widehat{\alpha}_i] = \frac{s^2}{T} + \begin{pmatrix} \overline{Y}_i \\ \overline{L}_i \\ \overline{UL}_i \\ \overline{SL}_i \end{pmatrix}' \mathrm{Var}\,[\widehat{\beta}_{FE}] \begin{pmatrix} \overline{Y}_i \\ \overline{L}_i \\ \overline{UL}_i \\ \overline{SL}_i \end{pmatrix} .$$

Провівши відповідні розрахунки, отримаємо результати, подані в табл. 2.2.

Отже, ми отримали таку оцінену залежність:

$$CO = \alpha_i + 0,224\,Y + 2,637\,L - 9,917\,UL - 5,289\,SL\,,$$

де α_i – різні значення перетину (фіксовані ефекти) для кожної області, які наведені в табл. 2.3.

Графічне зображення значень перетинів (фіксовані ефекти) для кожної області зображено на рис. 2.11.

Побудована модель досить добре відображає залежність витрат на освіту від доходів бюджетів, кількості населення, кількості учнів, кількості студентів. Коефіцієнт детермінації становить $R^2 = 0,9872$. Значення F - статистики більше за критичне значення і свідчить про адекватність побудованої моделі. Аналізуючи значення t - статистик, бачимо, що всі екзогенні змінні є значущими. Економічний зміст параметрів полягає в тому, що вони є показниками, які відображають вплив факторів на обсяг витрат на освіту.

Таблиця 2.2: Результати оцінювання моделі **m. 2.**

Dependent Variable: CO
Method:Panel Least Squares
Sample: 2004 2010
Periods included: 7
Cross-sections included: 26
Total panel (balanced) observations: 182

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2011,349	786,1632	-2,558437	0,0115
Y	0,223996	0,014858	15,07616	0,0000
L	2,637408	0,601834	4,382284	0,0000
UL	-9,917162	1,744853	-5,683666	0,0000
SL	-5,288920	1,395008	-3,791320	0,0002

Effects Specification			
Cross-section fixed (dummy variables)			
R-squared	0,987238	Mean dependent var	1011,558
Adjusted R-squared	0,984803	S.D. dependent var	663,0683
S.E. of regression	81,74161	Akaike info criterion	11,79455
Sum squared resid	1015617,0	Schwarz criterion	12,32268
Log likelihood	-1043,304	Hannan-Quinn criter.	12,00865
F-statistic	405,4454	Durbin-Watson stat	1,973317
Prob(F-statistic)	0,000000		

Обчислені значення фіксованих ефектів для кожної області показують рівень витрат на освіту в цій області порівняно з середнім рівнем перетину моделі. З рис. 2.12 бачимо, що за однакових значень факторів моделі (а саме, доходів бюджетів областей, загальної кількості учнів і студентів) значно менше порівняно з середнім по Україні рівнем витрачали б на освіту Донецька та Дніпропетровська області.

Таблиця 2.3: Значення перетинів (фіксовані ефекти) для кожної області

№	Область	Ефект	№	Область	Ефект
1	Львів	-502,10	14	Одеса	-700,80
2	Вінниця	-74,80	15	Полтава	115,09
3	Волинь	1090,65	16	Рівне	1088,98
4	Дніпропетровськ	-2352,77	17	Суми	524,65
5	Донецьк	-5056,19	18	Тернопіль	1009,38
6	Житомир	683,12	19	Харків	-999,16
7	Закарпаття	863,23	20	Херсон	833,65
8	Запоріжжя	-233,68	21	Хмельницький	648,58
9	Івано-Франківськ	645,30	22	Черкаси	280,07
10	Київ	-249,78	23	Чернівці	1018,69
11	Кіровоград	699,79	24	Чернігів	476,31
12	Луганськ	-1427,59	25	Севастополь	1556,88
13	Миколаїв	640,17	26	Крим	-577,69

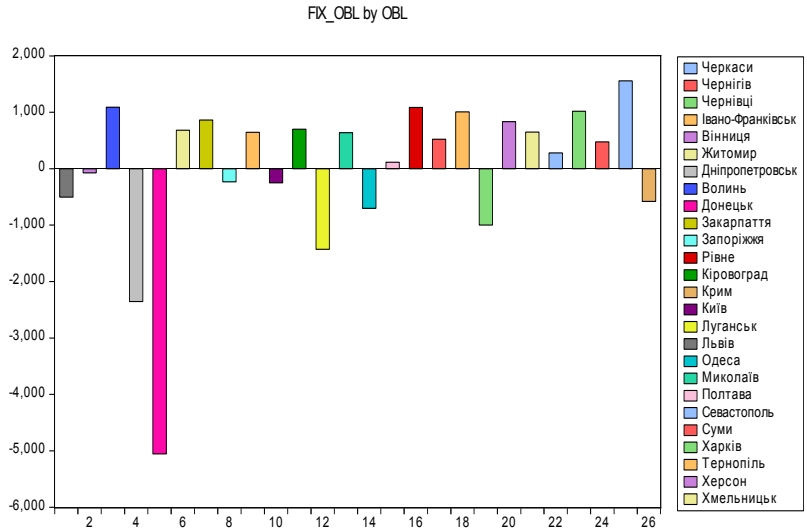

Рис. 2.11: Значення перетинів (фіксовані ефекти) для кожної області

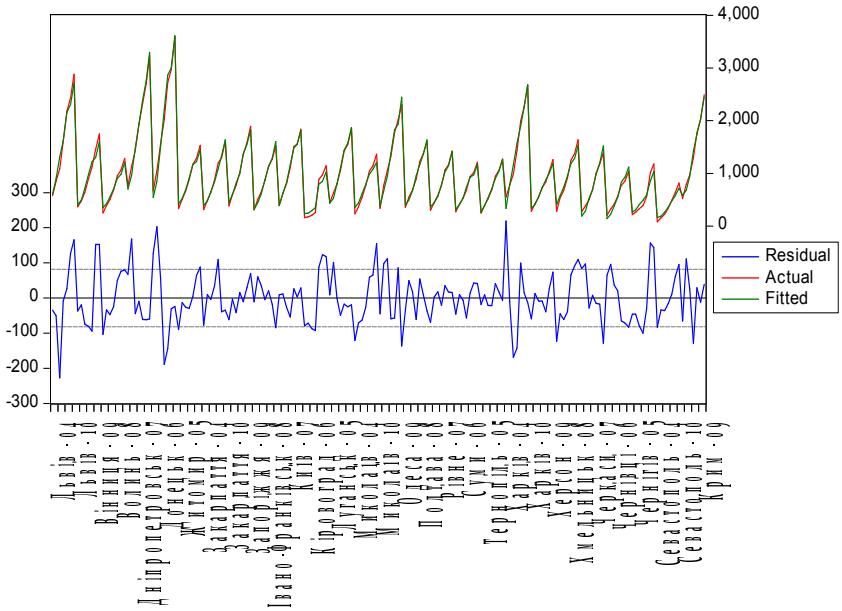

Рис. 2.12: Реальні та оцінені, на підставі моделі **m. 2.** значення витрат на освіту; динаміка залишків моделі

2.3.2 Внутрішньо-групове та міжгрупове оцінювання

Зазначимо, що модель об'єднаної регресії можна сформулювати трьома способами. Початкове формулювання має вигляд

m. 1. $$CO_{it} = c + \beta_1 Y_{it} + \beta_2 L_{it} + \beta_3 UL_{it} + \beta_4 SL_{it} + e_{it}\,.$$

Оцінки параметрів цієї моделі обчислюються за формулами

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \\ \widehat{\beta}_3 \\ \widehat{\beta}_4 \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{\overline{Y}} \\ L_{it} - \overline{\overline{L}} \\ UL_{it} - \overline{\overline{UL}} \\ SL_{it} - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{\overline{Y}} \\ L_{it} - \overline{\overline{L}} \\ UL_{it} - \overline{\overline{UL}} \\ SL_{it} - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix}' \right)^{-1} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{\overline{Y}} \\ L_{it} - \overline{\overline{L}} \\ UL_{it} - \overline{\overline{UL}} \\ SL_{it} - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix} \times \left(CO_{it} - \overline{\overline{CO}} \right).$$

У термінах відхилень від групових середніх цю модель можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} CO_{it} - \overline{CO}_i = {} & \beta_1 (Y_{it} - \overline{Y}_i) + \beta_2 (L_{it} - \overline{L}_i) + \beta_3 (UL_{it} - \overline{UL}_i) + \\ & + \beta_4 (SL_{it} - \overline{SL}_i) + (u_{it} - \overline{u}_i). \end{aligned}$$

Оцінки коефіцієнтів цієї регресії грунтуються на внутрішньо групових сумах квадратів і взаємних добутків

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1^W \\ \widehat{\beta}_2^W \\ \widehat{\beta}_3^W \\ \widehat{\beta}_4^W \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix}' \right)^{-1} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \left(CO_{it} - \overline{CO}_i \right).$$

Для побудови та розгляду цієї моделі використовують те, що всередині групи існують певні зв'язки та закономірності.

У термінах групових середніх модель записують так:

$$\overline{CO}_i = \beta_1 \overline{Y}_i + \beta_2 \overline{L}_i + \beta_3 \overline{UL}_i + \beta_4 \overline{SL}_i + \overline{u}_i.$$

Для оцінювання такої специфікації використовують властивість, що всередині досліджуваних об'єктів існує різниця, оцінки грунтуються на міжгрупових сумах квадратів і перехресних добутків

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1^G \\ \widehat{\beta}_2^G \\ \widehat{\beta}_3^G \\ \widehat{\beta}_4^G \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} T \begin{pmatrix} \overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}} \\ \overline{L}_i - \overline{\overline{L}} \\ \overline{UL}_i - \overline{\overline{UL}} \\ \overline{SL}_i - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}} \\ \overline{L}_i - \overline{\overline{L}} \\ \overline{UL}_i - \overline{\overline{UL}} \\ \overline{SL}_i - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix}' \right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{N} T \begin{pmatrix} \overline{Y}_i - \overline{\overline{Y}} \\ \overline{L}_i - \overline{\overline{L}} \\ \overline{UL}_i - \overline{\overline{UL}} \\ \overline{SL}_i - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix} \times \left(\overline{CO}_i - \overline{\overline{CO}} \right).$$

Оцінка моделі з фіксованими ефектами – це матрично зважене середнє внутрішньо групової та міжгрупової оцінок. Вона ефективніша, ніж кожна з них окремо.

2.3.3 Оцінювання моделі з фіксованими часовими ефектами

Підхід з фіксованими змінними можна доповнити врахуванням часових ефектів. Один зі способів такого узагальнення полягає у додаванні до моделі факторів τ_t, які характеризують часові ефекти. Таке моделювання характеризується введенням додаткових фіктивних змінних

$$CO_{it} = \tau_t + \beta_1 Y_{it} + \beta_2 L_{it} + \beta_3 UL_{it} + \beta_4 SL_{it} + u_{it}\,. \qquad (2.9)$$

Якщо ввести в модель сталу, то для того, щоб уникнути досконалої колінеарності, ми повинні відмовитись від одного з часових ефектів. Однак у такій моделі буде наявна певна асиметрія. У такому випадку для приведення моделі до симетричної форми вводимо постійний доданок і накладаємо обмеження $\sum_{t=1}^{T} \tau_t = 0$. Отже, одержимо

m.3. $CO_{it} = \alpha + \tau_t + \beta_1\, Y_{it} + \beta_2\, L_{it} + \beta_3\, UL_{it} + \beta_4\, SL_{it} + u_{it}\,,$

де τ_t – різні значення перетину (фіксовані ефекти) для кожного року. Зауважимо, що припущення, за якого залежність витрат на освіту в одному році може відрізнятися від залежності витрат на освіту в іншому році, але є постійною для різних областей, вводиться в модель за допомогою різних значень перетину τ_t.

З рис. 2.13 видно часову динаміку зміни витрат на освіту в областях України. Кожна лінія відповідає певному року й ілюструє, якими є витрати на освіту для кожної області у цьому році. Зокрема бачимо, що в усіх областях відбувається збільшення витрат на освіту.

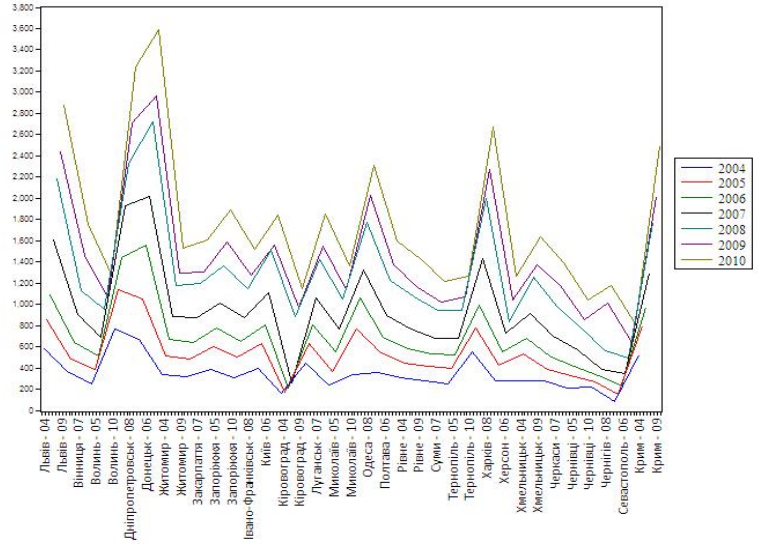

Рис. 2.13: Динаміка зміни витрат на освіту в областях у часовому розрізі

На рис. 2.14 зображено, як змінювалися доходи бюджетів в областях з часом. Зокрема, цей графік ілюструє зростання доходів бюджетів з кожним роком.

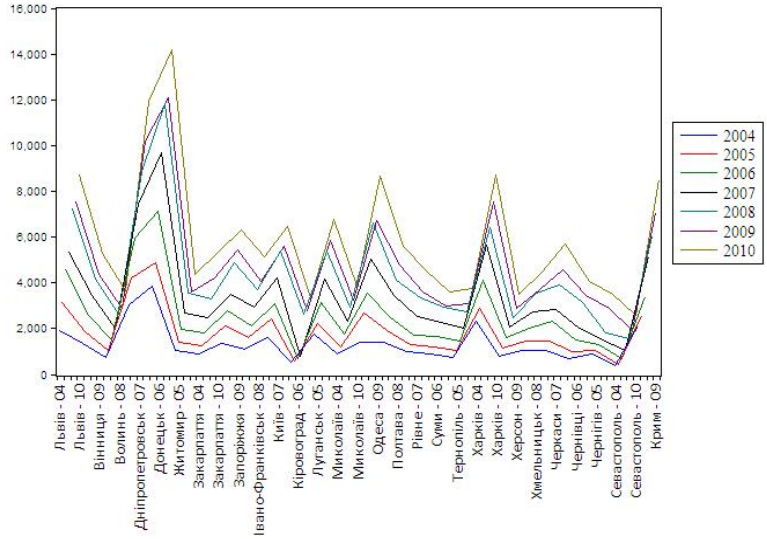

Рис. 2.14: Поведінка доходу бюджету кожної області в часовому розрізі

МНК - оцінки коефіцієнтів при незалежних змінних одержують з допоміжної регресії

$$CO_{*it} = \beta_1 Y_{*it} + \beta_2 L_{*it} + \beta_3 UL_{*it} + \beta_4 SL_{*it} + u_{*it},$$

де

$$Y_{*it} = Y_{it} - \overline{Y}_i - \overline{Y}_t + \overline{\overline{Y}}, \quad \overline{Y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it},$$

$$\overline{Y}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_{it}, \quad \overline{\overline{Y}} = \frac{1}{TN}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} Y_{it}$$

та аналогічно для інших змінних. Тоді спільну константу та коефіцієнти при фіктивних змінних знаходимо так:

$$\widehat{\alpha} = \overline{\overline{CO}} - \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\beta}_3 & \widehat{\beta}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\overline{Y}} \\ \overline{\overline{L}} \\ \overline{\overline{UL}} \\ \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\tau}_t = (\overline{CO}_t - \overline{\overline{CO}}) - \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 & \widehat{\beta}_2 & \widehat{\beta}_3 & \widehat{\beta}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{Y}_t - \overline{\overline{Y}} \\ \overline{L}_t - \overline{\overline{L}} \\ \overline{UL}_t - \overline{\overline{UL}} \\ \overline{SL}_t - \overline{\overline{SL}} \end{pmatrix}.$$

Провівши відповідні розрахунки, отримуємо результати оцінювання моделі **m. 3.**, які подані в табл. 2.4.

Отже, отримали таку оцінку моделі

$$CO = 157,5345 + \tau_t + 0,256\,Y - 0,303\,L + 2,244\,UL + 0,856\,SL\,.$$

Різні значення перетину (фіксовані ефекти) для кожного року, τ_t, наведені в табл. 2.5.

Графічне зображення значень перетинів (фіксовані ефекти) для кожного року подано на рис. 2.15.

2.3.4 Модель з ефектами областей і часовими ефектами

Розглянемо модель **m.4**, в якій враховуємо обидва види ефектів: ефекти фіксованого часу й ефекти фіксованого об'єкта

m. 4. $CO_{it} = \alpha + \alpha_i + \tau_t + \beta_1 Y_{it} + \beta_2 L_{it} + \beta_3 UL_{it} + \beta_4 SL_{it} + u_{it}\,.$

Результати оцінювання такої моделі подано в табл. 2.6.

Таблиця 2.4: Результати оцінювання моделі **m. 3.**

Dependent Variable: CO
Method:Panel Least Squares
Sample: 2004 2010
Periods included: 7 Cross-sections included: 26
Total panel (balanced) observations: 182

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Const	157,5345	21,49455	7,329043	0,0000
Y	0,255646	0,009102	28,08724	0,0000
L	-0,302637	0,040742	-7,428126	0,0000
UL	2,243706	0,352634	6,362700	0,0000
SL	0,855650	0,226147	3,783599	0,0002

Effects Specification			
Period fixed (dummy variables)			
R-squared	0,979116	Mean dependent var	1011,558
Adjusted R-squared	0,977895	S.D. dependent var	663,0683
S.E. of regression	98,58376	Akaike info criterion	12,07823
Sum squared resid	1661908,	Schwarz criterion	12,27187
Log likelihood	-1088,119	Hannan-Quinn criter.	12,15673
F-statistic	801,7123	Durbin-Watson stat	0,588153

Таблиця 2.5: Значення часових ефектів

№	**Рік**	**Ефект**
1	2004	-158,9027
2	2005	-90,73601
3	2006	-88,89689
4	2007	-48,67017
5	2008	62,32357
6	2009	135,7442
7	2010	189,1381

Аналізуючи значення статистик Стьюдента, бачимо, що для всіх змінних вони більші за критичні, тому всі змінні, які включені в модель, мають суттєвий вплив на витрати на освіту, тобто змінні доходу, населення, загальної кількості школярів і студентів мають значущий статистичний вплив на витрати на освіту в Україні. Економічний зміст параметрів полягає в тому, що вони вимірю-

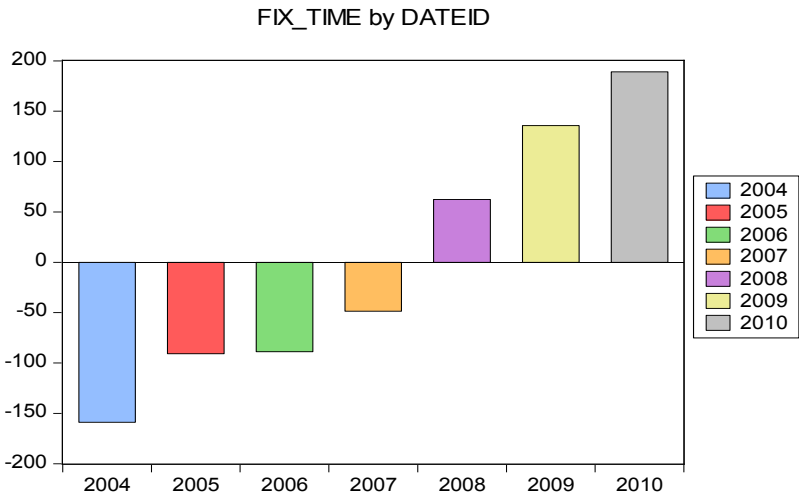

Рис. 2.15: Значення перетину (фіксовані ефекти) для кожного року

ють граничний ефект впливу включених факторів на рівень витрат на освіту за умови, що всі інші змінні фактори не змінюються.

Коефіцієнт детермінації моделі R^2 становить $0,992$ і близький до 1. Перевіримо модель на адекватність за допомогою статистики Фішера. На підставі обчисленого значення F - статистики робимо висновок, що побудована модель адекватно описує дані, при цьому ймовірність здійснити помилку (першого роду) становить $0,000000$.

2.3.5 Тестування значущих відмінностей у значеннях фіксованих ефектів

Використовуючи моделі панельних даних з фіксованими ефектами, важливою є перевірка факту, чи статистично відрізняються значення перетинів.

Перевірка значущих відмінностей у фіксованих ефектах областей здійснюється на підставі перевірки нульової гіпотези, що всі перетини рівні між собою

$$H_0 \ : \ \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N$$

Таблиця 2.6: Результати оцінювання моделі з фіксованими часовими ефектами та з фіксованими ефектами окремих областей

Dependent Variable: CO
Method:Panel Least Squares
Sample: 2004 2010
Periods included: 7
Cross-sections included: 26
Total panel (balanced) observations: 182

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1218,887	674,9039	-1,806016	0,0730
Y	0,179853	0,013344	13,47839	0,0000
L	2,111482	0,510286	4,137838	0,0001
UL	-9,140642	1,477037	-6,188501	0,0000
SL	-3,921790	1,390828	-2,819752	0,0055

Effects Specification
Cross-section fixed (dummy variables)
Period fixed (dummy variables)

R-squared	0,991795	Mean dependent var	1011,558
Adjusted R-squared	0,989827	S.D. dependent var	663,0683
S.E. of regression	66,87633	Akaike info criterion	11,41877
Sum squared resid	652976,7	Schwarz criterion	12,05253
Log likelihood	-1003,108	Hannan-Quinn criter.	11,67569
F-statistic	504,2013	Durbin-Watson stat	1,914053
Prob(F-statistic)	0,000000		

проти альтернативи, що хоча б один з параметрів відрізняється від решти. Для тестування нульової гіпотези використовують статистику

$$F\left[N-1,\ NT-N-K\right] = \frac{(R_U^2 - R_R^2)/(N-1)}{(1-R_U^2)/(NT-N-K)}\ , \qquad (2.10)$$

де N – кількість областей; T – кількість років спостереження; K – кількість факторів в моделі; R_U^2 – коефіцієнт детермінації моделі без обмежень на параметри (в цьому випадку – це коефіцієнт де-

термінації моделі з фіксованими ефектами **m. 2.**); R_R^2 – коефіцієнт детермінації моделі з обмеженнями на параметри (тобто моделі з одним загальним сталим членом **m. 1.**). Обмеження полягає у тому, що всі фіксовані ефекти рівні між собою та дорівнюють певній константі.

Для перевірки нульової гіпотези обчислене значення F-статистики (2.10) порівнюють з критичним значенням, знайденим за таблицями критичних значень розподілу Фішера зі ступенями свободи $(N-1)$ та $(NT-N-K)$ за заданого рівня значущості. Якщо обчислене значення F-статистики перевищує критичне значення, то нульова гіпотеза відхиляється. Це означає, що краще оцінювати модель панельних даних з фіксованими ефектами, ніж звичайну регресійну модель зі спільним перетином на множині панельних даних.

Протестуємо значущість відмінностей між ефектами областей у моделі витрат на освіту. Перевіряючи цю гіпотезу, використаємо $N = 26$, $T = 7$, $K = 4$. Коефіцієнти детермінації для моделі **m. 1.** та моделі **m. 2.**, відповідно, дорівнюють $R_R^2 = 0,971$ та $R_U^2 = 0,987$. Звідси $F = 7,5929$, що перевищує критичне значення $F_{kr}[25,152] = 1,578613$. Отже, фіксовані ефекти кожної області значущо відрізняються.

Таблиця 2.7: Тестування значущих відмінностей у фіксованих ефектах областей моделі **m. 2.**

Redundant Fixed Effects Tests
Equation: M02
Test cross-section fixed effects

Effects Test	Statistic	d.f.	Prob.
Cross-section F	7,592889	[25,152]	0,0000
Cross-section Chi-square	147,494663	25	0,0000

Аналогічно протестуємо значущість відмінностей у фіксованих часових ефектах моделі **m. 3.**. Результати такого тестування наведені в табл. 2.8, і свідчать про те, що часові ефекти різних років не є однаковими.

Таблиця 2.8: Тестування значущих відмінностей у фіксованих часових ефектах областей моделі **m. 3.**

Redundant Fixed Effects Tests
Equation: M03
Test period fixed effects

Effects Test	Statistic	d.f.	Prob.
Period F	10,667391	[6,171]	0,0000
Period Chi-square	57,865162	6	0,0000

Протестуємо також сукупну гіпотезу про те, чи доцільно використовувати різні ефекти для областей і періодів часу в одній моделі. Результати таких тестувань подано у табл. 2.9.

Таблиця 2.9: Тестування значущих відмінностей у фіксованих часових ефектах областей моделі **m. 3.**

Redundant Fixed Effects Tests
Equation: M04
Test cross-section and period fixed effects

Effects Test	Statistic	d.f.	Prob.
Cross-section F	9,023533	[25,146]	0,0000
Cross-section Chi-square	170,020750	25	0,0000
Period F	13,513879	[6,146]	0,0000
Period Chi-square	80,391249	6	0,0000
Cross-Section/Period F	11,763605	[31,146]	0,0000
Cross-Section/Period Chi-square	227,885912	31	0,0000

Узагальнені результати проведених вище тестів наведено в табл. 2.10.

Отже, F-статистики засвідчують, що фіксовані ефекти кожної області та часові ефекти різних років значущо відрізняються. Отож, для моделювання треба оцінювати різні константи-перетини для різних областей і для різних років, тобто використовувати модель **m.4**.

Таблиця 2.10: Тестування значущості фіксованих ефектів

Гіпотеза	F-статистика	χ^2-статистика	P-значення
$H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_N$ (відмінностей між ефектами областей немає)	9,023533	170,020750	0,000000
$H_0 : \tau_1 = \ldots = \tau_T$ (часові ефекти значущо не відрізняються)	13,513879	80,391249	0,000000
H_0 : значущо не відрізняються ефекти областей і часові ефекти	11,763605	227,885912	0,000000

2.4 Застосування моделей панельних даних з випадковими ефектами

Якщо припускати, що α_i – це реалізація незалежних від регресорів випадкових величин з математичним сподіванням α та дисперсією σ_α^2, то модель **m. 2.** є моделлю панельних даних з випадковими ефектами. Для опису витрат на освіту модель з випадковими ефектами матиме вигляд

m. 5. $$CO_{it} = \alpha + \beta_1 Y_{it} + \beta_2 L_{it} + \beta_3 UL_{it} + \beta_4 SL_{it} + \alpha_i + u_{it} .$$

Вплив випадкових факторів відображається за допомогою включення збурення u_{it}, а α_i визначає індивідуальну випадкову специфічну компоненту i-ї області, що не змінюється з часом.

Випадкові величини u_{it} та α_i припускають взаємно незалежними, а також не залежать від зміни регресорів. Оскільки

$$\mathrm{E}\left[\alpha_i + u_{it}\right] = \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 ,$$

$$\mathrm{Cov}\left[\alpha_i + u_{it}, \alpha_i + u_{is}\right] = \sigma_\alpha^2 , \quad t \neq s ,$$

то випадкова величина моделі $(\alpha_i + u_{it})$ гетероскедастична і потрапляє під вплив автокореляції, тому стандартні похибки, які обчислюють на основі МНК, не є коректними, а оцінки параметрів

неефективні. Ефективніші оцінки можна отримати узагальненим методом найменших квадратів (УМНК). Для цього для кожної області згорнемо дві випадкові компоненти в одну

$$\varepsilon_i = \alpha_i e_T + u_i, \tag{2.11}$$

де $e_T = (\ 1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\ )' - T$ - вимірний вектор, а $u_i = (u_{i1},\ \ldots, u_{iT})'$. Коваріаційна матриця кожного вектора ε_i дорівнює

$$\begin{aligned}
\Omega &= \mathrm{Var}\left[\varepsilon_i\right] = \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \ldots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\alpha^2 & ... & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & & & & \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & ... & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 \end{pmatrix} = \\
&= \sigma_\alpha^2 e_T e_T' + \sigma_u^2 I_T\,,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

де I_T – одинична матриця розмірності $(T \times T)$. Тоді коваріаційна матриця вектора збурень для усіх NT спостережень є блочно діагональною матрицею

$$V = \begin{pmatrix} \Omega & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Omega \end{pmatrix}.$$

Матрицю, обернену до матриці (2.12), обчислюють за формулою

$$\Omega^{-1} = \sigma_u^{-2}\left[I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2} e_T e_T'\right]. \tag{2.13}$$

Тоді оцінки параметрів моделі з випадковими ефектами **m. 5.**

позначають $\widehat{\beta}_{RE}$ і знаходять за формулами

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1RE} \\ \widehat{\beta}_{2RE} \\ \widehat{\beta}_{3RE} \\ \widehat{\beta}_{4RE} \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix}' + \right.$$

$$\left. + \theta T \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} Y_i - \overline{Y}_i \\ L_i - \overline{L}_i \\ UL_i - \overline{UL}_i \\ SL_i - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_i - \overline{Y}_i \\ L_i - \overline{L}_i \\ UL_i - \overline{UL}_i \\ SL_i - \overline{SL}_i \end{pmatrix}' \right)^{-1} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \begin{pmatrix} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \left(CO_{it} - \overline{CO}_i\right)' + \right.$$

$$\left. + \theta\, T \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} Y_i - \overline{Y}_i \\ L_i - \overline{L}_i \\ UL_i - \overline{UL}_i \\ SL_i - \overline{SL}_i \end{pmatrix} \times \left(CO_i - \overline{CO}_i\right)' \right)$$

де

$$\theta = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + T\sigma_\alpha^2}\,,$$

$Y_i = (Y_{i1}, \ldots, Y_{iT})'$, $L_i = (L_{i1}, \ldots, L_{iT})'$, $CO_i = (CO_{i1}, \ldots, CO_{iT})'$, $UL_i = (UL_{i1}, \ldots, UL_{iT})'$, $SL_i = (SL_{i1}, \ldots, SL_{iT})'$.

Дисперсії σ_u^2 та σ_α^2 невідомі. Незміщену оцінку для σ_u^2 одержують з формули

$$\widehat{\sigma}_u^{\,2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{t=1}^{T} (\hat{u}_{it} - \overline{u}_i)^2}{NT - NK - N}\,.$$

Тоді консистентною оцінкою σ_α^2 буде величина

$$\widehat{\sigma}_\alpha^{\,2} = \widehat{\sigma}_G^{\,2} - \frac{1}{T}\,\widehat{\sigma}_u^{\,2}\,,$$

де

$$\widehat{\sigma}_G^2 = \frac{1}{N-K} \times \\ \times \sum_{i=1}^{N} \left(\overline{CO}_i - \left(\begin{array}{cccc} \overline{Y}_i & \overline{L}_i & \overline{UL}_i & \overline{SL}_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccc} \widehat{\beta}_1^G & \widehat{\beta}_2^G & \widehat{\beta}_3^G & \widehat{\beta}_4^G \end{array} \right)' \right)^2$$

оцінка дисперсії похибки регресії на підставі групових середніх, $\widehat{\beta}_1^G$, $\widehat{\beta}_2^G$, $\widehat{\beta}_3^G$, $\widehat{\beta}_4^G$ – оцінки коефіцієнтів цієї регресії.

Кінцева оцінка, яку отримали за допомогою ДУМНК, асимптотично нормально розподілена з коваріаційною матрицею

$$\mathrm{Var}\left[\widehat{\beta}_{RE}\right] = \sigma_u^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \left(\begin{array}{c} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} Y_{it} - \overline{Y}_i \\ L_{it} - \overline{L}_i \\ UL_{it} - \overline{UL}_i \\ SL_{it} - \overline{SL}_i \end{array} \right)' + \right. \\ \left. + \theta\, T \sum_{i=1}^{N} \left(\begin{array}{c} Y_i - \overline{Y}_i \\ L_i - \overline{L}_i \\ UL_i - \overline{UL}_i \\ SL_i - \overline{SL}_i \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} Y_i - \overline{Y}_i \\ L_i - \overline{L}_i \\ UL_i - \overline{UL}_i \\ SL_i - \overline{SL}_i \end{array} \right)' \right)^{-1}$$

2.4.1 Оцінювання моделі, що містить випадкові ефекти областей

Результати оцінювання моделі панельних даних з випадковими ефектами областей і фіксованими ефектами часу подано у табл. 2.11.

Порівнюючи цю модель і першу об'єднану модель зі спільним перетином на основі суми квадратів залишків, бачимо, що для моделі **m. 1.** $ESS = 1834201$, а для моделі **m. 5.** $ESS = 1043772$. Тобто, використання техніки моделювання з врахуванням випадкових ефектів значно зменшило суму квадратів залишків. Також змінилося значення статистики Дарбіна-Уотсона $DW = 1,9$. Значення статистики Фішера $F = 856,8112$ свідчить про те, що побудована модель адекватно описує дані.

Таблиця 2.11: Результати оцінювання моделі з випадковими ефектами областей і фіксованими часовими ефектами

Dependent Variable: CO
Method: Panel EGLS (Cross-section random effects)
Sample: 2004 2010
Periods included: 7
Cross-sections included: 26
Total panel (balanced) observations: 182

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	207,5914	32,94620	6,300921	0,0000
Y	0,254284	0,007831	32,47290	0,0000
L	-0,165157	0,062112	-2,658997	0,0086
UL	0,814711	0,539983	1,508772	0,1332
SL	0,611030	0,366808	1,665802	0,0976

Effects Specification		
	S. D.	Rho
Cross-section random	57,28347	0,4232
Period fixed (dummy variables)		
Idiosyncratic random	66,87633	0,5768

Weighted Statistics			
R-squared	0.980433	Mean dependent var	1011,558
Adjusted R-squared	0,979289	S.D. dependent var	542,8740
S.E. of regression	78,12763	Sum squared resid	1043772,0
F-statistic	856,8112	Durbin-Watson stat	1,905828
Prob(F-statistic)	0,000000		

Unweighted Statistics			
R-squared	0,976951	Mean dependent var	1011,558
Sum squared resid	1834201,0	Durbin-Watson stat	0,515471

2.4.2 Перевірка статистичної значущості випадкових ефектів

Проведемо перевірку гіпотези статистичної значущості випадкових ефектів. Для тестування нульової гіпотези $H_0 : \sigma_e^2 = 0$ проти альтернативної $H_1 : \sigma_e^2 \neq 0$ використовується статистика Бреуша-

Пагана

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} (T\overline{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} u_{it}^2} - 1 \right]^2 . \qquad (2.14)$$

Якщо D – матриця фіктивних змінних, u – вектор залишків, то статистику (2.14) можна переписати так:

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)} \left[\frac{u'DD'u}{u'u} - 1 \right]^2 .$$

За нульової гіпотези LM-статистика має розподіл χ^2 з одним степенем свободи.

Оцінимо значущість випадкових ефектів у моделі витрат на освіту за допомогою LM- статистики. Обчислене значення критерію $LM = 64,806$ свідчить про значущість випадкових ефектів різних областей.

2.5 Порівняння моделей з фіксованими та випадковими ефектами на підставі тесту Гаусмана

Ми оцінили дві моделі для панельних даних витрат на освіту: модель з фіксованими ефектами **m. 4.** та модель з випадковими ефектами **m. 5.**. При цьому модель з фіксованими ефектами моделює відмінності між залежностями для різних областей як параметричні зміщення регресійної специфікації, а модель з випадковими ефектами розглядає окремі індивідуальні сталі для різних областей як такі, що випадково розподілені між різними елементами просторової вибірки. Тому треба перевірити, яку з цих моделей краще використовувати у конкретному випадку.

Критерій для перевірки порівняння специфікацій спирається на критерій, який розробив Гаусман. Розглянемо нульову гіпотезу

$$H_0 \ : \ \widehat{\beta}_{FE} \text{ і } \widehat{\beta}_{RE} - \text{консистетні оцінки } \beta \,,$$

та альтернативну

$$H_1 \ : \text{ консистентною є лише оцінка } \widehat{\beta}_{RE}\,.$$

За нульової гіпотези $p\lim(\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE}) = 0$, а за альтернативної $p\lim(\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE}) \neq 0$. Перевірити цю гіпотезу можна за допомогою критерію Вальда

$$W = \chi^2[K] = (\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE})' \left(\text{Var}\,[\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE}]\right)^{-1} (\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE})$$

.

Асимптотичну коваріаційну матрицю $\text{Var}\,[\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE}]$ обчислюють з виразу

$$\text{Var}\,[\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE}] = \text{Var}\,[\widehat{\beta}_{RE}] + \text{Var}\,[\widehat{\beta}_{FE}] - 2\text{Cov}\,[\widehat{\beta}_{RE}, \widehat{\beta}_{FE}]. \quad (2.15)$$

Ми не маємо виразів для обчислення коваріацій. Ідея Гаусмана полягає в тому, що коваріація ефективного оцінника та різниці між ним та неефективним оцінником дорівнює нулю

$$\text{Cov}\,[\beta_{RE}, \beta_{RE} - \beta_{FE}] = \text{Var}\,[\beta_{RE}] - \text{Cov}\,[\beta_{RE}, \beta_{FE}] = 0.$$

Звідси

$$\text{Cov}\,[\beta_{RE}, \beta_{FE}] = \text{Var}\,[\beta_{RE}].$$

Підставляючи цей результат у (2.15), одержуємо необхідну формулу для коваріаційної матриці

$$\text{Var}\,[\beta_{RE} - \beta_{FE}] = \text{Var}\,[\beta_{FE}] - \text{Var}\,[\beta_{RE}].$$

Тоді на основі критерію Вальда одержимо такий критерій для порівняння моделей

$$W = \chi^2[K] = (\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE})' \left(\text{Var}\,[\widehat{\beta}_{FE}] - \text{Var}\,[\widehat{\beta}_{RE}]\right)^{-1} (\widehat{\beta}_{RE} - \widehat{\beta}_{FE}).$$

Використаємо тест Гаусмана для порівняння моделі **m. 4.**, яка враховує фіксовані ефекти областей і фіксовані часові ефекти та моделі **m. 5.**, що містить випадкові ефекти областей та фіксовані часові ефекти. Результати такого тестування наведено в табл. 2.12.

Таблиця 2.12: Результат тесту Гаусмана для порівняння моделей з фіксованими і випадковими перехресними ефектами

Correlated Random Effects - Hausman Test
Equation: M06
Test cross-section random effects

Test Summary	Chi-Sq. Statistic	Chi-Sq. d.f.	Prob.
Cross-section random	66,378377	4	0,0002

Cross-section random effects test comparisons:

Variable	Fixed	Random	Var(Diff.)	Prob.
Y	0,179853	0,254284	0,000117	0,0000
L	2,111482	-0,165157	0,256534	0,0000
UL	-9,140642	0,814711	1,890056	0,0000
SL	-3,921790	0,611030	1,799854	0,0007

Обчислене значення критерію Гаусмана дорівнює $66,38$. Критичне значення з таблиць χ^2 - розподілу з чотирма ступенями свободи становить $9,49$, що менше, ніж обчислене значення статистичного критерію. Тому ми відхиляємо гіпотезу про те, що для врахування індивідуальних особливостей кожної з областей краще використовувати модель з фіксованими ефектами. Отже, на підставі результатів тесту Гаусмана ми можемо стверджувати, що випадкові ефекти краще підходять для моделювання витрат на освіту різних областей.

На рис. 2.16 показано фактичні значення залежної змінної (червоний колір) і оцінені, на підставі моделі з випадковими перехресними ефектами, значення залежної змінної (зелений колір), а також залишки регресії (синій колір), які є випадковими і досить малими.

Отже, для моделювання обсягу витрат на освіту в областях України метод, який використовує випадкові ефекти, характеризується кращою пояснювальною здатністю, ніж метод моделювання на основі фіксованих ефектів. Результати дослідження засвідчують, що для такого моделювання треба використовувати модель

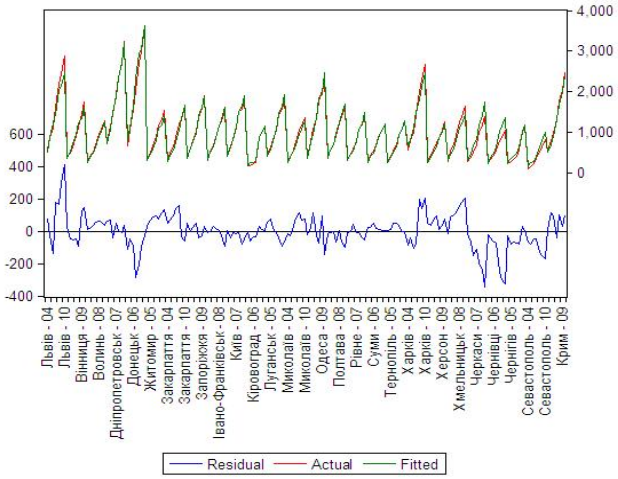

Рис. 2.16: Реальні та оцінені, на основі моделі з випадковими ефектами, значення витрат на освіту та динаміка залишків моделі

для панельних даних, що враховує випадкові ефекти для різних областей і фіксовані часові ефекти різних років.

2.6 Емпіричні висновки

Результати дослідження показують, що для моделювання видатків на освіту потрібно використовувати модель для панельних даних, що враховує випадкові ефекти для різних областей та фіксовані часові ефекти різних років. Статистики Стьюдента коефіцієнтів побудованої моделі (див. табл. 2.11) показують, що видатки на освіту областей України не залежать від кількості учнів та студентів у цих областях, хоча як ми бачили раніше їх частка є різною у різних областях, а залежать лише від сукупного доходу області і загальної кількості населення, яка у ній проживає. Крім того ця залежність містить різні коефіцієнти перетину для кожної області та різних часових періодів. Отже, як показує моделювання, в областях України

не достатньо справедливо і обгрунтовано формуються видатки на освіту, що сповільнює розвиток людського капіталу в нашій країні. Тому при встановленні рівня видатків на освіту в різних областях слід враховувати фактор щільності учнів та студентів в регіонах. Крім того слід також надати більшої уваги розвитку освіти в промислових регіонах України, зокрема в Донецькій, Луганській та Дніпропетровській областях, в яких як показує моделювання встановилося занижене, враховуючи їх можливості і потреби, фінансування освіти.

Концентрація ресурсів в напрямку підвищення рівня освіченості майбутніх працівників є необхідним елементом сучасних економічних перетворень в нашій країні, оскільки як засвідчують моделі економічного зростання, які враховують людський капітал (див. Розділ 1), навіть помірні зміни ресурсів, що виникають внаслідок нагромадження людського капіталу, можуть призвести до великих змін обсягу виробництва продукції на одного працівника.

Дані, що використовувались для моделювання

ДОДАТОК 1

Область	Рік	Видатки на освіту, млн грн.	Дохід бюджету, млн грн.	Кількість населення, тис.
Львівська	2004	579,60	1921,70	2598,30
	2005	851,90	3142,90	2588,00
	2006	1088,30	4581,00	2577,20
	2007	1607,10	5316,70	2568,40
	2008	2181,30	7254,90	2559,80
	2009	2434.8	7516.2	2552.9
	2010	2881.3	8711.80	2549.6
Вінницька	2004	366,61	1357,80	1736,20
	2005	478,71	1841,20	1720,20
	2006	642,83	2571,30	1701,50
	2007	902,90	3472,70	1686,50
	2008	1124,50	4164,80	1672,20
	2009	1459.01	4363.21	1660,00
	2010	1750.08	5307.05	1650.60
Волинська	2004	250,52	761,92	1048,80
	2005	390,35	1060,72	1044,80
	2006	508,71	1491,79	1040,40
	2007	688,22	2025,09	1038,00
	2008	954,56	2654,42	1036,40
	2009	1062.40	2869.70	1036.20
	2010	1283.60	3640.70	1036.70
Дніпропетровська	2004	769.60	3047.40	3502.90
	2005	1136.10	4239.60	3476.20
	2006	1438.50	5938.80	3447.20
	2007	1929.60	7440.40	3422.90
	2008	2326.80	8847.15	3398.40
	2009	2707.50	10178.60	3374.20
	2010	3235.40	11938.70	3355.50

Область	Рік	Видатки на освіту, млн грн.	Дохід бюджету, млн грн.	Кількість населення, тис.
Донецька	2004	670.50	3850.70	4720.90
	2005	1054.30	4889.20	4671.90
	2006	1562.70	7143.30	4622.90
	2007	2021.80	9677,00	4580.60
	2008	2723.90	11811.10	4538.90
	2009	2968.30	12092.20	4500.50
	2010	3588.30	14176.70	4466.70
Житомирська	2004	332.30	1073.17	1359.90
	2005	513.54	1409.26	1345.30
	2006	666.81	1985.35	1330.10
	2007	882.92	2703.01	1317.10
	2008	1173.37	3565.78	1305.50
	2009	1290.70	3627.43	1294.20
	2010	1532.34	4350.67	1285.80
Закарпатська	2004	315.15	916.45	1251.10
	2005	487,00	1259,00	1248.50
	2006	644,00	1824,00	1245.50
	2007	872,00	2458,00	1243.80
	2008	1196,00	3277,00	1242.60
	2009	1300.56	4195.37	1243.40
	2010	1606.70	5355.67	1244.80
Запорізька	2004	384.50	1345.75	1892.60
	2005	598.20	2133.60	1877.20
	2006	776.80	2796.48	1861.10
	2007	1014.10	3510.76	1846.90
	2008	1362.10	4864.64	1832.90
	2009	1582.78	5457.89	1821.30
	2010	1892.04	6306.82	1811.70
Івано-Франківська	2004	309.10	1094.40	1397.80
	2005	507.70	1600.90	1393.60
	2006	647.70	2098.70	1388.90
	2007	870.30	2922.20	1385.40
	2008	1144.60	3692.26	1382.60
	2009	1270.60	4085.53	1381.10
	2010	1521.40	5157.29	1380.70

Область	Рік	Видатки на освіту, млн грн.	Дохід бюджету, млн грн.	Кількість населення, тис.
Київська	2004	396.70	1586.80	1793.90
	2005	627.20	2440.50	1778.90
	2006	802.80	3087.70	1763.70
	2007	1107.90	4228.60	1751.10
	2008	1511.80	5399.30	1737.30
	2009	1556.40	5618.80	1727.90
	2010	1837.60	6447.70	1721.80
Кіровоградська	2004	162.83	561.50	1100,00
	2005	175.48	605.12	1083.90
	2006	207.09	690.30	1067.10
	2007	257.63	780.70	1053.10
	2008	885.50	2610.30	1039.70
	2009	974.10	2773.10	1027,00
	2010	1146.40	3338.20	1017.80
Луганська	2004	445.35	1781.68	2472.60
	2005	630.57	2200.17	2440.30
	2006	801.20	3139.41	2409.10
	2007	1055.44	4157.67	2381.90
	2008	1422.81	5370.96	2355.40
	2009	1551.64	5834.08	2331.80
	2010	1850.14	6778.55	2311.60
Миколаївська	2004	235.56	906,00	1240.40
	2005	364.65	1215.50	1229.50
	2006	552.79	1783.20	1219.60
	2007	768.10	2342.40	1211.90
	2008	1048.70	2947.14	1203.60
	2009	1142.70	3236.57	1195.80
	2010	1363.50	3882.64	1189.50
Одеська	2004	337.75	1407.30	2430,00
	2005	769.80	2702.40	2415.70
	2006	1061.30	3561.41	2402.20
	2007	1321.70	5044.66	2395.50
	2008	1771.90	6641.50	2394.70
	2009	2022.20	6734.80	2392.20
	2010	2309.20	8664.60	2391,00

Область	Рік	Видатки на освіту, млн грн.	Дохід бюджету, млн грн.	Кількість населення, тис.
Полтавська	2004	7357.10	1420,00	1590.50
	2005	546.40	1904.70	1572.40
	2006	689.50	2504.50	1554.90
	2007	895.70	3474,00	1540.50
	2008	1227.60	4122.50	1524.90
	2009	1375.90	4760.90	1511.40
	2010	1601.46	5619.16	1499.60
Рівненська	2004	302.90	1008.80	1164.20
	2005	447.50	1307.90	1160.70
	2006	581.40	1703.90	1156.50
	2007	768.90	2534.90	1154.40
	2008	1066.10	3339.50	1152,00
	2009	1161.80	3588.40	1151,00
	2010	1423.60	4522.10	1151.60
Сумська	2004	273.70	888.80	1261.70
	2005	416.60	1220.70	1244,00
	2006	531.20	1639.80	1226.30
	2007	683,00	2278.90	1211.40
	2008	939.20	2914.50	1196.80
	2009	1016.80	3003.80	1184,00
	2010	1212.40	3626.30	1172.30
Тернопільська	2004	250.08	751.83	1126.60
	2005	397.31	1069.07	1119.60
	2006	517.95	1471.75	1112.10
	2007	683.31	2023.87	1105.40
	2008	947.02	2724.18	1098.60
	2009	1065.10	3089.47	1093.30
	2010	1265.02	3753.95	1088.90
Харківська	2004	552.62	2349.60	2866.70
	2005	776.72	2908.75	2848.30
	2006	990.34	4092.95	2829.10
	2007	1433.45	5630.26	2812.10
	2008	1998.75	6438.32	2795.90
	2009	2272.41	7526.18	2782.40
	2010	2668.65	8708.55	2769.10

Область	Рік	Видатки на освіту, млн грн.	Дохід бюджету, млн грн.	Кількість населення, тис.
Херсонська	2004	282.10	790.50	1149.80
	2005	424.40	1143.30	1138.10
	2006	552.79	1595.50	1126.50
	2007	724.10	2071.40	1117.10
	2008	838.74	2466.90	1107.50
	2009	1037.96	2907.88	1099.20
	2010	1261.48	3493.94	1093.40
Хмельницька	2004	282.70	1045.90	1401.10
	2005	537.10	1441.70	1388,00
	2006	681.60	2001.40	1373.40
	2007	911.40	2746.50	1361.40
	2008	1251.70	3542.80	1350.30
	2009	1377.20	3718.40	1341.40
	2010	1638,00	4490.40	1334,00
Черкаська	2004	276.60	1067.60	1372.50
	2005	382.10	1455.10	1357.10
	2006	503.30	2331.70	1341.40
	2007	694.70	2815.20	1328,00
	2008	983.50	3918.33	1315.50
	2009	1178.29	4600.50	1304.20
	2010	1392.46	5713.85	1295.20
Чернівецька	2004	210.40	706.20	914.60
	2005	322.90	1007.90	911.50
	2006	418,00	1531.20	908.20
	2007	567,00	2032.70	906.30
	2008	774.70	3160.40	904.50
	2009	857.62	3443.89	904.10
	2010	1038.55	4088.80	904.40
Чернігівська	2004	218.16	909,00	1206.80
	2005	264.25	1057,00	1187.70
	2006	330.25	1321,00	1168.40
	2007	390.26	1501,00	1151.90
	2008	560.78	1809,00	1135.90
	2009	1012.58	2903.28	1121.30
	2010	1178.62	3493.33	1109.70

Область	Рік	Видатки на освіту, млн грн.	Дохід бюджету, млн грн.	Кількість населення, тис.
м. Севастополь	2004	81.56	377.30	378.4
	2005	153.23	459.70	378.6
	2006	227.30	681.90	379.1
	2007	343.57	1030.70	379.2
	2008	491.19	1534.97	379.5
	2009	636.59	1929.07	380.1
	2010	817.91	2555.98	380.5
Крим	2004	523.14	2146.12	2005.10
	2005	791.51	2558.84	1994.20
	2006	974.35	3408.50	1983.90
	2007	1293.91	5116.84	1977.10
	2008	1770.29	6056.91	1971.10
	2009	2021.12	7091.66	1967.30
	2010	2491.50	8532.55	1965.30

ДОДАТОК 2

Область	Рік	Кількість учнів загальноосвітніх навчальних закладів, у тис. на 10 тис. населення	Кількість студентів у вищих навчальних закладах усіх рівнів акредитації, у тис. на 10 тис. населення
Львівська	2004	1296	594
	2005	1275	615
	2006	1221	641
	2007	1161	647
	2008	1111	656
	2009	1080	638
	2010	1034	617
Вінницька	2004	1219	321
	2005	1206	338
	2006	1156	344
	2007	1101	353
	2008	1050	336
	2009	1026	312
	2010	971	308
Волинська	2004	1424	327
	2005	1413	334
	2006	1370	342
	2007	1324	357
	2008	1277	347
	2009	1251	335
	2010	1214	324
Дніпро-	2004	1108	543
петровська	2005	1096	548
	2006	1038	563
	2007	990	569
	2008	946	559
	2009	928	527
	2010	889	511

Область	Рік	Кількість учнів загальноосвітніх навчальних закладів	Кількість студентів у вищих навчальних закладах
Донецька	2004	969	467
	2005	936	470
	2006	885	475
	2007	842	473
	2008	800	450
	2009	789	416
	2010	759	387
Житомирська	2004	1343	370
	2005	1300	386
	2006	1254	394
	2007	1204	382
	2008	1153	366
	2009	1115	351
	2010	1066	344
Закарпатська	2004	1472	209
	2005	1459	217
	2006	1415	228
	2007	1371	234
	2008	1322	225
	2009	1282	229
	2010	1250	228
Запорізька	2004	1103	531
	2005	1094	550
	2006	1040	561
	2007	987	621
	2008	942	613
	2009	918	592
	2010	878	570
Івано-Франківська	2004	1401	411
	2005	1375	435
	2006	1326	447
	2007	1269	443
	2008	1211	442
	2009	1172	408
	2010	1121	397

Область	Рік	Кількість учнів загальноосвітніх навчальних закладів	Кількість студентів у вищих навчальних закладах
Київська	2004	1251	224
	2005	1217	228
	2006	1164	233
	2007	1107	238
	2008	1059	240
	2009	1046	229
	2010	997	234
Кіровоградська	2004	1189	304
	2005	1170	311
	2006	1122	312
	2007	1067	317
	2008	1014	313
	2009	990	293
	2010	933	279
Луганська	2004	1002	450
	2005	970	475
	2006	908	508
	2007	861	505
	2008	818	502
	2009	804	472
	2010	763	456
Миколаївська	2004	1234	349
	2005	1209	360
	2006	1150	370
	2007	1093	378
	2008	1039	367
	2009	1009	370
	2010	963	463
Одеська	2004	1192	589
	2005	1179	601
	2006	1130	614
	2007	1078	627
	2008	1038	630
	2009	1017	598
	2010	985	596

Область	Рік	Кількість учнів загальноосвітніх навчальних закладів	Кількість студентів у вищих навчальних закладах
Полтавська	2004	1170	451
	2005	1148	470
	2006	1092	499
	2007	1038	494
	2008	980	488
	2009	951	456
	2010	898	434
Рівненська	2004	1495	448
	2005	1478	466
	2006	1438	485
	2007	1393	501
	2008	1344	489
	2009	1309	458
	2010	1275	433
Сумська	2004	1097	521
	2005	1060	537
	2006	1008	542
	2007	955	518
	2008	911	500
	2009	889	465
	2010	837	441
Тернопільська	2004	1340	625
	2005	1302	602
	2006	1252	580
	2007	1213	568
	2008	1160	578
	2009	1120	538
	2010	1064	504
Харківська	2004	1136	998
	2005	1006	1012
	2006	955	1022
	2007	911	1043
	2008	866	1018
	2009	846	966
	2010	805	923

Область	Рік	Кількість учнів загальноосвітніх навчальних закладів	Кількість студентів у вищих навчальних закладах
Херсонська	2004	1276	388
	2005	1267	397
	2006	1208	403
	2007	1146	390
	2008	1088	381
	2009	1057	361
	2010	1012	352
Хмельницька	2004	1369	349
	2005	1286	366
	2006	1237	386
	2007	1184	409
	2008	1131	409
	2009	1085	393
	2010	1032	380
Черкаська	2004	1201	414
	2005	1176	426
	2006	1118	437
	2007	1061	452
	2008	1003	444
	2009	969	421
	2010	908	405
Чернівецька	2004	1347	436
	2005	1329	433
	2006	1282	437
	2007	1227	425
	2008	1177	430
	2009	1153	419
	2010	1104	412
Чернігівська	2004	1130	368
	2005	1102	360
	2006	1049	352
	2007	1003	334
	2008	961	321
	2009	931	306
	2010	880	291

Область	Рік	Кількість учнів загальноосвітніх навчальних закладів	Кількість студентів у вищих навчальних закладах
м. Севастополь	2004	954	529
	2005	938	537
	2006	881	520
	2007	833	518
	2008	810	523
	2009	810	496
	2010	810	465
Крим	2004	1140	306
	2005	1123	325
	2006	1060	355
	2007	1006	360
	2008	955	344
	2009	941	307
	2010	903	282

Список літератури

1. *Манків, Грегорі Н.* Макроекономіка / Пер. з англ. – К.: Основи, 2000. – 588с.

2. *Панчишин С.М.* Макроекономіка: навч. посібник./ С.М. Панчишин - К.: Либідь, 2001. - 616 с.

3. *David Romer.* Advanced Macroeconomics – The McGraw Hill Companies, Inc., 1996.

4. *Jeffrey Rohaly.* Solution Manual to Accompany Romer Advanced Macroeconomics – The McGraw Hill Companies, Inc., 1996.

5. *Lars Ljungqvist, Thomas J. Sargent.* Recursive Macroeconomic Theory – The MIT Press Cambridge, 2004.

6. *Лук'яненко І.Г., Городніченко Ю.О.* Сучасні економетричні методи в фінансах. / І.Г. Лук'яненко, Ю.О. Городніченко – К.: Літера, 2003. – 348с.

7. *Оліскевич М.О.* Основи економетрії часових рядів: навч. посібник. / М.О. Оліскевич - Львів: ЛНУ імені І. Франка, 2009. - 327 с.

8. *Ґрін, Вільям Г.* Економетричний аналіз – Видавництво Соломії Павличко "Основи", К. 2005 — 1197с.

9. *Доугерти К.* Введение в эконометрию – Москва: ИНФРА – М, 2007. – 432с.

10. *Черняк О.І., Ставицький А.В.* Динамічна економетрика: навч. посібник/ О.І. Черняк, А.В. Ставицький – К.: КВІЦ. 2000.

11. *Черняк О.І., Комашко О.В., Ставицький А.В., Боженова О.В.* Економетрика: підручник. / О.І. Черняк, О.В. Комашко, А.В. Ставицький, О.В. Боженова – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010.

12. *Здрок В.В., Лагоцький Т.Я.* Економетрія: підручник. / В.В. Здрок, Т.Я. Лагоцький – К.: Знання, 2010. – 541с.

13. *Лавренюк С.П., Оліскевич М.О.* Основи економетрії: тексти лекцій. / С.П. Лавренюк, М.О. Оліскевич – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2003. – 367с.

14. *Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю.* Econometrika / Н.П. Тихомиров, Е.Ю. Дорохина — М.: Екзамен, 2003.

15. *J. Wooldridge.* Introductory Econometrics. A Modern Approach – MIT Press Cambridge, 1997 – P.818.

16. *Gujarati R.* Basic Econometrics, Fourth Edition – The McGraw-Hill Companies, 2004 – P.1003.

17. *Verbeek, Marno.* A guide to modern econometrics. — John Wiley and Sons, Ltd, 2000 — UD, England.

18. *Baltagi Bagi H.* Econometric Analysis of Panel Data. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. – P. 253.

19. *J. Wooldridge.* Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data. – MIT Press Cambridge, 2001 – P. 753.

20. EViews 7 User's Guide I – Quantitative Micro Software, LLS, 2009. – 686 p.

21. EViews 7 User's Guide II – Quantitative Micro Software, LLS, 2009. – 822 p.

22. *Грішнова О.А.* Людський капітал: формування в системі освіти і професійної підготовки. – К.: Т-ов "Знання", КОО, 2001. – 254с.

23. *Грішнова О., Тертична Л.* Економічна природа і значення категорії людський капітал // Україна: аспекти праці. – 2003. – N7. – С. 33-37.

24. *Гурова Ю.Є.* Розвиток людського ресурсу і міжнародна конкурентоспроможність країн / Ю.С. Гурова. – Київ, 2007. – 40с.

25. *Бородина Е.* Человеческий капитал как основной источник экономического роста // Економіка України. – 2003. – N7. – С. 48-53.

26. *Близнюк В.В.* Людський капітал як фактор економічного розвитку // Економіка і прогнозування. – 2005. – N2. – С. 64-74.

27. Людський розвиток в Україні : 2003 рік / Щорічна науково - наналітична доповідь / за ред. Е.М. Лібанової. – К.: Ін-т демографії та соціальних досліджень НАН України, Держкомстат України, 2004. – 290с.

28. *Лібанова Е.М.* Людський розвиток регіонів України: методика оцінки і сучасний стан / Е.М. Лібанова, Н.С. Власенко, О.С. Власюк та ін. – К.: 2002. – 110с.

29. *Радіонова І.* Економічне зростання з участю людського капіталу // Економіка України. – 2009. – N1. – С. 19-30.

30. *Гальків Л.І.* Людський капітал: базисні поняття та концептуальні положення // Науковий вісник НЛТУ України. – 2009. – Вип. 18,9. – С. 187-191.

31. *Ляховець О.О.* Порівняльний аналіз методологічних підходів до оцінки людського капіталу // Бюлетень Міжнародного Нобелівського економічного форуму. – 2010. – N1 (3). – Том 2. – С. 199-206.

Навчальне видання

Оліскевич Маріанна Олександрівна

ЕКОНОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МАКРОЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ: Людський капітал. Моделі для панельних даних

Навчально-методичний посібник

Редактор *Н.Й. Плиса*
Технічний редактор *С.З. Сеник*
Комп'ютерний набір та верстання *М.О. Оліскевич*
Обкладинка *В.О. Роган*

Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 5,6. Тираж 100 прим.
Видавець і виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
Свідоцтво
про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
видавців, виготоників і роздруковувачів видавничої продукції.
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.