Серія «Актуарна і фінансова математика»

С. І. Підкуйко

Вступ до актуарної математики

**Основні ймовірнісні характеристики тривалості життя
Основні розподіли (закони) майбутньої тривалості життя
Таблиці життя
Припущення для нецілих значень віку особи**

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2022

УДК 517
ББК 22.16
П 32

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. Дільний В.М. (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка)
д-р екон. наук, проф. Заболоцький Т.М. (Львівський національний університет імені Івана Франка)
к-т фіз.-мат. наук Каплан Богдан (Страхова компанія ТАС).

Рекомендовано Вченою Радою
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
Протокол № 10 від 24.06.2022

Серія «Актуарна і фінансова математика»

Підкуйко С. І.
П32 Вступ до актуарної математики : навчальний посібник. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2022. — 65 с.

Навчальний посібник присвячено вивченню понять, якими оперує і на які спирається актуарна математика. Розглядаються випадкові величини тривалості життя, майбутньої тривалості життя, цілочисельної майбутньої тривалості життя, функція виживання, сила (інтенсивність смертності), припущення для нецілого віку особи, таблиці життя, основні розподіли (закони) майбутньої тривалості життя. Виведено формули для математичного сподівання й дисперсії невід'ємних і дискретних випадкових величин. Наведено приклади обчислень для введених понять.

Для студентів фізико-математичних та технічних спеціальностей.

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-617-10-0720-8

Зміст

Вступ

Викладений матеріал присвячено вивченню понять, якими оперує і на які спирається актуарна математика.

Розглядаються випадкові величини тривалості життя, майбутньої тривалості життя, цілочисельної майбутньої тривалості життя, цілою кількості періодів останнього року життя.

Вводяться поняття й вивчаються функція виживання, сила (інтенсивність смертності), припущення для нецілого віку особи, таблиці життя, основні розподіли (закони) майбутньої тривалості життя.

Виведено формули для математичного сподівання й дисперсії невід'ємних і дискретних випадкових величин.

Наведено приклади обчислень для введених понять.

Розділ 1

Основні ймовірнісні характеристики тривалості життя

1.1 Кусково гладкі функції

Означення 1.1. Нехай функція $f : (a-\delta, a) \to \mathbf{R}$ визначена на деякому інтервалі $(a-\delta, a),\ \delta > 0$. ***Границею функції зліва*** в точці $a \in \mathbf{R}$ називається

$$f(a_-) = \lim_{x \to a_-} f(x) = \lim_{h \to 0_-} f(a+h) = \lim_{h \to 0_+} f(a-h).$$

Означення 1.2. Нехай функція $f : (a, a+\delta) \to \mathbf{R}$ визначена на деякому інтервалі $(a, a+\delta),\ \delta > 0$. ***Границею функції справа*** в точці $a \in \mathbf{R}$ називається

$$f(a_+) = \lim_{x \to a_+} f(x) = \lim_{h \to 0_+} f(a+h).$$

Зауваження 1. Нехай функція $f : \dot{\mathcal{O}}(a) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ визначена в деякому виколотому околі $\dot{\mathcal{O}}(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$. Існує границя функції f в точці a тоді й лише тоді, коли існують границі функції зліва й справа в цій точці, і обидві вони дорівнюють границі функції в цій точці.

(i) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \implies \exists f(a_\pm) \wedge f(a_+) = f(a_-) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

(ii) $\exists f(a_\pm) \wedge f(a_+) = f(a_-) \implies \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a_\pm)$.

Вправа 1. *Обгрунтувати зауваження 1.*

Означення 1.3. Нехай функція $f:(a-\delta,a]\to\mathbf{R}$ визначена на деякому півінтервалі $(a-\delta,a]$, $\delta>0$. Функція f називається ***неперервною зліва*** в точці a, якщо існує границя функції f зліва в точці a, і вона дорівнює значенню функції f в цій точці:

$$\exists f(a_-)=f(a).$$

Означення 1.4. Нехай функція $f:[a,a+\delta)\to\mathbf{R}$ визначена на деякому півінтервалі $[a,a+\delta)$, $\delta>0$. Функція f називається ***неперервною справа*** в точці a, якщо існує границя функції f справа в точці a, і вона дорівнює значенню функції f в цій точці:

$$\exists f(a_+)=f(a).$$

Означення 1.5. Нехай $f:\mathcal{O}(a)\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, де $\mathcal{O}(a)$ деякий окіл точки $a\in\mathbf{R}$. Функція f неперервна в точці a $\iff$ існують границі функції f зліва й справа в точці a, і обидві вони дорівнюють значенню функції f в цій точці:

$$f\in\mathcal{C}\big(a\big)\iff\exists f(a_\pm)\wedge f(a_-)=f(a_+)=f(a).$$

Зауваження 2. Нехай функція $f:\dot{\mathcal{O}}(a)\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ визначена в деякому виколотому околі $\dot{\mathcal{O}}(a)$ точки $a\in\mathbf{R}$. Функцію f можна доозначити за неперервністю в точці a $\iff$ існують і рівні границі функції f зліва й справа в точці a.

Означення 1.6. Нехай функція $g:(a-\delta,a]\to\mathbf{R}$ визначена на деякому півінтервалі $(a-\delta,a]$, $\delta>0$. ***Лівою похідною функції*** g в точці $a\in\mathbf{R}$ називається

$$g'_-(a)=\lim_{x\to a_-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{h\to0_-}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to0_+}\frac{g(a-h)-g(a)}{h}.$$

Вправа 2. *Довести, що ($\exists g'_-(a)\implies g$ неперервна зліва в точці a).*

Означення 1.7. Нехай функція $g:[a,a+\delta)\to\mathbf{R}$ визначена на деякому півінтервалі $[a,a+\delta)$, $\delta>0$. ***Правою похідною функції*** g в точці $a\in\mathbf{R}$ називається

$$g'_+(a)=\lim_{x\to a_+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{h\to0_+}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}.$$

Вправа 3. *Довести, що ($\exists g'_+(a)\implies g$ неперервна справа в точці a).*

Зауваження 3. Нехай $g:[a,a+\delta)\to\mathbf{R}$, $\delta>0$. Визначимо функцію

$$\varphi:(a,a+\delta)\to\mathbf{R},\quad\varphi(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a},\quad x\in(a,a+\delta).$$

Тоді права похідна функції g в точці a — це границя функції φ справа в цій точці:

$$g_+(a)=\varphi(a_+).$$

Аналогічно, нехай $g : (a-\delta, a] \to \mathbf{R},\ \delta > 0$. Визначимо функцію

$$\varphi : (a-\delta, a) \to \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}, \quad x \in (a-\delta, a).$$

Тоді ліва похідна функції g в точці a — це границя функції φ зліва в цій точці:

$$g_-(a) = \varphi(a_-).$$

Зауваження 4. Нехай $g : \mathcal{O}(a) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, де $\mathcal{O}(a)$ деякий окіл точки $a \in \mathbf{R}$. Функція g диференційовна в точці $a \iff$ існують і рівні ліва й права похідні функції g в точці a. При цьому спільне значення лівої й правої похідної дорівнює похідній функції в цій точці.

(i) $\exists g'(a) \implies \exists g'_\pm(a) \wedge g'_-(a) = g'_+(a) = g'(a)$;

(ii) $\exists g'_\pm(a) \wedge g'_-(a) = g'_+(a) \implies \exists g'(a) \wedge g'(a) = g'_-(a) = g'_+(a)$.

Вправа 4. *Обгрунтувати зауваження 4.*

Приклад 1. Обчислити ліву й праву похідні функції:

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = x^2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Розв'язання. Оскільки функція $g(x)$ диференційовна скрізь в $\mathbf{R}$, то:

$$g'_-(x) = g'_+(x) = g'(x) = 2x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$\square$

Приклад 2. Обчислити ліву й праву похідні функції:

$$g : [0, +\infty) \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty).$$

Розв'язання. Оскільки функція $g(x)$ диференційовна скрізь на $(0, +\infty)$, то:

$$g'_-(x) = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty);$$

$$g'_+(x) = \begin{cases} g'(x), & x \in (0, +\infty) \\ \lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

$\square$

Вправа 5. *Обчислити ліву й праву похідні функції і побудувати графіки цих похідних:*

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = |x|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Означення 1.8. ***Скінченним розбиттям*** $\mathbf{R}$ називається довільний скінченний зростаючий набір точок в $\mathbf{R}$:

$$-\infty < x_0 < \ldots < x_k < +\infty. \tag{1.1}$$

Означення 1.9. Функція $g \in \mathcal{C}\big(\mathbf{R}, \mathbf{R}\big)$ називається ***кусково гладкою*** на $\mathbf{R}$, якщо існує скінченне розбиття $\mathbf{R}$ (1.1), для якого:

(i) $g \in \mathcal{C}^{(1)}\big((-\infty, x_0) \sqcup (x_0, x_1) \sqcup \ldots \sqcup (x_{k-1}, x_k) \sqcup (x_k, +\infty)\big)$;

(ii) $\exists g'_{\pm}(x_j), \ \ j = 0, \ldots, k$;

(iii) $g'(x) \to g'_{\pm}(x_j) \quad x \to x_{j\,\pm}, \ \ j = 0, \ldots, k.$

Означення 1.10. Функція $g \in \mathcal{C}\big(\mathbf{R}, \mathbf{R}\big)$ називається ***кусково гладкою*** на $\mathbf{R}$, якщо існує скінченне розбиття $\mathbf{R}$ (1.1), для якого звуження функції g на проміжки

$$(-\infty, x_0], \ [x_0, x_1], \ldots, [x_{k-1}, x_k], \ [x_k, +\infty)$$

належать класу $\mathcal{C}^{(1)}$.

Означення 1.11. Функція $g \in \mathcal{C}\big(\mathbf{R}, \mathbf{R}\big)$ називається ***кусково гладкою*** на $\mathbf{R}$, якщо існує скінченне розбиття $\mathbf{R}$ (1.1), для якого:

(i) $\exists g'_{\pm}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$;

(ii) $g'_{-}(x)$ неперервна зліва на $\mathbf{R}$;

(iii) $g'_{+}(x)$ неперервна справа на $\mathbf{R}$;

(iv) $g'_{-}(x) = g'_{+}(x) \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_k\}$.

Теорема 1.1. (про еквівалентність означень кусково гладкої функції) *Означення 1.9, 1.10 і 1.11 кусково гладкої функції еквівалентні.*

Доведення. Випливає з того, що кожне з означень 1.10 і 1.11 еквівалентне означенню 1.9. $\square$

Означення 1.12. Функція $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ називається кусково неперервною на $\mathbf{R}$, якщо існує скінченне розбиття $\mathbf{R}$ (1.1), для якого:

(i) $g \in \mathcal{C}\big(\mathbf{R} \setminus \{x_0, \ldots, x_k\}\big)$;

(ii) $\exists g(x_{j\pm}), \ \ j = 0, \ldots, k.$

Теорема 1.2. (про властивості кусково гладкої функції) *Нехай функція* $g \in \mathcal{C}\big(\mathbf{R}, \mathbf{R}\big)$ *кусково гладка на* $\mathbf{R}$. *Тоді:*

(i) *похідні* $g'_{\pm}$ *є кусково неперервними функціями на* $\mathbf{R}$;

(ii) *похідна g' неперервна на області свого визначення.*

Доведення. (i) Для кожної з похідних $g'_\pm$ за скінченне розбиття $\mathbf{R}$ в означенні кусково неперервної функції візьмемо скінченне розбиття $\mathbf{R}$ з означення кусково гладкої функції. Згідно з означенням кусково гладкої функції для доведення кускової неперервності на $\mathbf{R}$ похідних $g'_\pm$ досить довести існування

$$g'_-(x_{j_+}),\ g'_+(x_{j_-}),\quad j = 0,\ldots,k.$$

Оскільки

$$g'_-(x) = g'_+(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{x_0,\ldots,x_k\}, \tag{1.2}$$

то згідно з означенням кусково гладкої функції маємо:

$$\begin{aligned}
g'_-(x) = g'(x) \to g'_+(x_j),\ \ x \to x_{j_+} \implies \exists g'_-(x_{j_+}),\quad j = 0,\ldots,k;\\
g'_+(x) = g'(x) \to g'_-(x_j),\ \ x \to x_{j_-} \implies \exists g'_+(x_{j_-}),\quad j = 0,\ldots,k.
\end{aligned}$$

(ii) Неперервність похідної g' на $\mathbf{R} \setminus \{x_0,\ldots,x_k\}$ випливає безпосередньо з означення кусково гладкої функції. Нехай g диференційовна в точці $a \in \{x_0,\ldots,x_k\}$. Покажемо, що

$$\lim_{x\to a_\pm} g'(x) = g'(a).$$

Оскільки $g'_\pm(a) = g'(a)$, то за означенням кусково гладкої функції, враховуючи (1.2), маємо:

$$\begin{aligned}
g'(x) = g'_-(x) \to g'_-(a) = g'(a),\ \ x \to a_-;\\
g'(x) = g'_+(x) \to g'_+(a) = g'(a),\ \ x \to a_+.
\end{aligned}$$

□

Приклад 3. Обчислити ліву й праву похідні функції і побудувати графіки цих похідних:

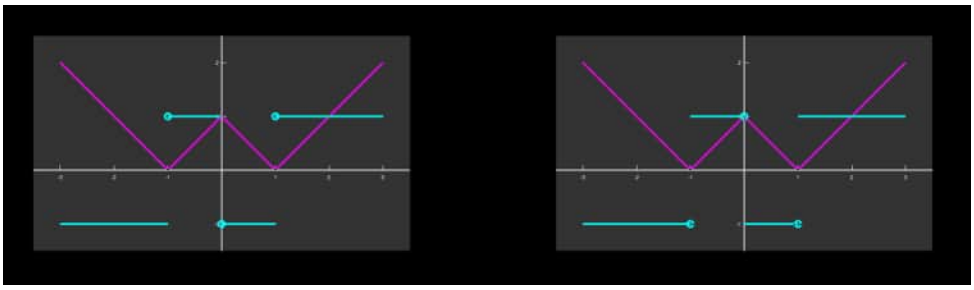
$$g(x) = \big||x| - 1\big|.$$

Розв'язання. Функція $g(x)$ є неперервною кусково гладкою на $\mathbf{R}$. Розбиття (1.1) складається з трьох точок

$$-\infty < -1 < 0 < 1 < +\infty.$$

Ліва й права похідні цієї функції мають вигляд:

$$g'_-(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty,-1] \\ 1, & x \in (-1,0] \\ -1, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in (1,+\infty) \end{cases} \qquad g'_+(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty,-1) \\ 1, & x \in [-1,0) \\ -1, & x \in [0,1) \\ 1, & x \in [1,+\infty) \end{cases}$$



□

1.2 Тривалість життя і функція виживання

Новонароджену особу або *новонародженого* або *особу віком* 0 позначаємо (0). Через X позначаємо тривалість життя новонародженого — за означенням це *неперервна невід'ємна випадкова величина.* Функцію розподілу випадкової величини X позначаємо $F_X(x)$:

$$F_X(x) \stackrel{def}{=} \mathsf{Pr}\{X \le x\}.$$

На (неперервну) функцію F_X накладаємо додаткову умову *кускової гладкості.* Щільність (розподілу) випадкової величини X позначаємо $f_X(x)$. Отже,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \int_0^x f_X(y)\,dy, & x \ge 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Означення 2.1. Функція

$$s(x) = 1 - F_X(x) = \mathsf{Pr}\{X > x\}, \quad x \ge 0, \tag{2.2}$$

називається ***функцією виживання*** (новонародженого).

Зауваження 1. Оскільки $F_X(0) = 0$, то $s(0) = 1$.

Зауваження 2. Нехай $0 \le x < z$. З означення функції виживання отримуємо:

$$\mathsf{Pr}\{x < X \le z\} = F_X(z) - F_X(x) = s(x) - s(z), \quad 0 \le x < z.$$

Нехай $\mathsf{Pr}\{X > x\} > 0$. Ймовірність смерті новонародженого між x та z за умови, що новонароджений доживе до віку x, має вигляд:

$$\mathsf{Pr}\{x < X \le z \mid X > x\} = \frac{\mathsf{Pr}\{x < X \le z\}}{\mathsf{Pr}\{X > x\}} = \frac{s(x) - s(z)}{s(x)}.$$

Приклад 1. Обчислити $F_X(x)$, $s(x)$, де

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & x \in [0, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Намалювати графіки функцій $f_X(x)$, $F_X(x)$, $s(x)$.

Розв'язання. Використовуючи означення (2.1) і (2.2), отримуємо:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{80}, & x \in [0, 80) \\ 1, & x \geq 80 \end{cases} \quad s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{80}, & 0 \leq x < 80 \\ 0, & x \geq 80 \end{cases}$$

□

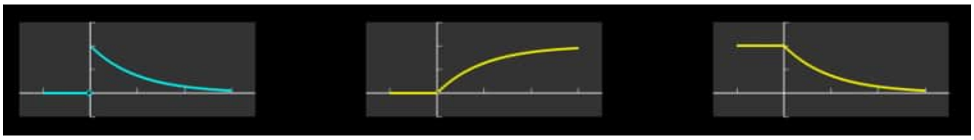
Приклад 2. Обчислити $F_X(x)$, $s(x)$, де

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Намалювати графіки функцій $f_X(x)$, $F_X(x)$, $s(x)$.

Розв'язання. Використовуючи означення (2.1) і (2.2), отримуємо:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



□

Вправа 1. *Обчислити* $F_X(x)$, $s(x)$, *де*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & x \in [0, 30) \\ \dfrac{1}{100}, & x \in [30, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Намалювати графіки функцій $f_X(x)$, $F_X(x)$, $s(x)$.

Вправа 2. *Обчислити* $f_X(x)$, $s(x)$, *де*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{80}\right)^2, & x \in [0, 80) \\ 1, & x \geq 80 \end{cases}$$

Намалювати графіки функцій $f_X(x)$, $F_X(x)$, $s(x)$.

1.3 Майбутня тривалість життя $T(x)$

Нехай $x \geq 0$. *Особу віком* x позначаємо (x). Випадкову величину *майбутньої тривалості життя* (x) позначаємо $T(x)$. Отже,

$$T(x) = X - x, \quad X > x. \tag{3.1}$$

Функцію розподілу випадкової величини $T(x)$ позначаємо

$$_tq_x = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \leq t\big\}, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Отже, $_tq_x$ — це ймовірність того, що особа віком x помирає протягом часу t, тобто на проміжку між x та $x + t$ (особа віком x не доживає до віку $x + t$).

Зауваження 1. Згідно з (3.1) і (3.2)

$$_tq_x = \mathsf{Pr}\big\{X - x \leq t \mid X > x\big\}, \quad t \geq 0.$$

Зауваження 2. Можна визначити випадкову величину $T(x)$ більш формально. Нехай X довільна неперервна невід'ємна випадкова величина (яку називаємо *тривалістю життя новонародженого*). Нехай

$$x \geq 0: \quad \mathsf{Pr}\big\{X > x\big\} > 0.$$

(Невід'ємна) випадкова величина, функція розподілу $_tq_x$ якої визначається формулою (законом, правилом)

$$_tq_x = \mathsf{Pr}\big\{X - x \leq t \mid X > x\big\}, \quad t \geq 0,$$

позначається $T(x)$ і називається *майбутньою тривалістю життя особи* (x). Отже, за означенням

$$_tq_x = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \leq t\big\} = \mathsf{Pr}\big\{X - x \leq t \mid X > x\big\}, \quad t \geq 0.$$

Означення 3.1. Функція

$$_tp_x = 1 - {}_tq_x, \quad t \geq 0, \tag{3.3}$$

називається ***функцією виживання особи*** (x).

Зауваження 3. Згідно з означенням

$$ {}_tp_x = \mathsf{Pr}\big\{T(x) > t\big\} = \mathsf{Pr}\big\{X - x > t \mid X > x\big\}, \quad t \ge 0. \tag{3.4}$$

Зауваження 4. Згідно з (3.3)

$$ {}_xp_0 = s(x), \quad x \ge 0. $$

Ймовірність того, що особа (x) проживе t років і помре протягом наступних u років, тобто на проміжку між $x+t$ та $x+t+u$, позначається

$$ {}_{t|u}q_x = \mathsf{Pr}\big\{t < T(x) \le t+u\big\}, \quad t, u \ge 0. $$

Звідси, зокрема, отримуємо:

$$ {}_{t|u}q_x = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \le t+u\big\} - \mathsf{Pr}\big\{T(x) \le t\big\} = \\ = {}_{t+u}q_x - {}_tq_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x\,. \tag{3.5}$$

Зауваження 5. У подальшому використовуються такі позначення:

$$ q_x = {}_1q_x\,, \quad p_x = {}_1p_x\,, \quad {}_{t|}q_x = {}_{t|1}q_x\,. $$

Теорема 3.1. (про зв'язок ${}_tq_x$, ${}_tp_x$, ${}_{t|u}q_x$ з $s(x)$) *Нехай* $\mathsf{Pr}\big\{X > x\big\} > 0$. *Тоді:*

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}; \tag{3.6}$$

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}; \tag{3.7}$$

$$ {}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)}. \tag{3.8}$$

Доведення. Формула (3.7) випливає з формули (3.6) та означення ${}_tp_x$. Формула (3.8) випливає з формул (3.5) та (3.6). Залишається довести формулу (3.6). Використовуючи (3.4) та означення умовної ймовірності (враховуючи умову теореми), отримуємо:

$$ {}_tp_x = \mathsf{Pr}\big\{X - x > t \mid X > x\big\} = \frac{\mathsf{Pr}\big\{X - x > t\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{X > x\big\}} = \frac{s(x+t)}{s(x)}. $$

□

Зауваження 6. З формули (3.7) отримуємо, що (невід'ємна) випадкова величина $T(x)$ є *неперервною* випадковою величиною, функція розподілу ${}_tq_x$ якої задовільняє додаткову умову *кускової гладкості*.

Наслідок 3.1.1. *Нехай* $s(x+t) > 0$. *Тоді:*

$$
\begin{aligned}
{}_{t+u}p_x &= {}_tp_x \ {}_up_{x+t}\,; && (3.9)\\
{}_{t|u}q_x &= {}_tp_x \ {}_uq_{x+t}\,. && (3.10)
\end{aligned}
$$

Доведення. Використовуючи формулу (3.6), отримуємо:

$$
{}_{t+u}p_x = \frac{s(x+t+u)}{s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)} = {}_tp_x \ {}_up_{x+t}\,.
$$

Формулу (3.10) доведемо двома способами.

<u>*1-й спосіб*</u>: Використовуючи формули (3.6), (3.7) і (3.8), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
{}_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} &= \\
&= \frac{s(x+t)}{s(x)} \left(1 - \frac{s(x+t+u)}{s(x+t)}\right) = {}_tp_x \ {}_uq_{x+t}\,.
\end{aligned}
$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Використовуючи формули (3.5) і (3.9), маємо:

$$
{}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x = {}_tp_x - {}_tp_x \ {}_up_{x+t} = {}_tp_x \,(1 - {}_up_{x+t}\,) = {}_tp_x \ {}_uq_{x+t}\,.
$$

□

Теорема 3.2. (про зображення ${}_yq_{x+t}$) *Нехай*

$$
x,\ y,\ t \geq 0, \quad s(x+t) > 0.
$$

Тоді

$$
{}_yq_{x+t} = 1 - \frac{{}_{t+y}p_x}{{}_tp_x} = \frac{{}_{t+y}q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x}. \qquad (3.11)
$$

Зокрема,

$$
{}_{1-t}q_{x+t} = \frac{q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x}, \quad 0 \leq t \leq 1. \qquad (3.12)
$$

Доведення. Формулу (3.12) отримуємо з другої рівності формули (3.11), поклавши $y = 1 - t$. Друга рівність в (3.11) випливає з означення (3.3):

$$
1 - \frac{{}_{t+y}p_x}{{}_tp_x} = \frac{{}_tp_x - {}_{t+y}p_x}{{}_tp_x} = \frac{(1 - {}_tq_x\,) - (1 - {}_{t+y}q_x\,)}{{}_tp_x} = \frac{{}_{t+y}q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x}.
$$

Першу рівність в (3.11) доведемо кількома способами.

1-й спосіб: Використовуючи співвідношення (3.9), отримуємо:

$$1 - \frac{{}_{t+y}p_x}{{}_tp_x} = 1 - {}_yp_{x+t} = {}_yq_{x+t}\,.$$

2-й спосіб: Скористаємося формулами (3.6) і (3.7).

$${}_yq_{x+t} = 1 - \frac{s(x+t+y)}{s(x+t)} = 1 - \frac{\frac{s(x+t+y)}{s(x)}}{\frac{s(x+t)}{s(x)}} = 1 - \frac{{}_{t+y}p_x}{{}_tp_x}.$$

3-й спосіб: Застосуємо формулу

$$\mathsf{Pr}\{A \cup B\} = \mathsf{Pr}\{A\} + \mathsf{Pr}\{B \mid \overline{A}\}\mathsf{Pr}\{\overline{A}\}, \tag{3.13}$$

де A, B — довільні події, $\mathsf{Pr}\{\overline{A}\} > 0$. Візьмемо

$$A = \{T(x) \le t\}, \quad B = \{t < T(x) \le y + t\}.$$

Тоді

$$\overline{A} = \{T(x) > t\}, \quad A \cup B = \{T(x) \le y + t\}.$$

Отже,

$$\mathsf{Pr}\{A\} = {}_tq_x\,, \quad \mathsf{Pr}\{A \cup B\} = {}_{y+t}q_x\,, \quad \mathsf{Pr}\{\overline{A}\} = {}_tp_x > 0.$$

Обчислимо $\mathsf{Pr}\{B \mid \overline{A}\}$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\{B \mid \overline{A}\} &= \mathsf{Pr}\{t < T(x) \le t + y \mid T(x) > t\} = \\
&= \frac{\mathsf{Pr}\{t < T(x) \le t + y\}}{\mathsf{Pr}\{T(x) > t\}} = \frac{\mathsf{Pr}\{t < X - x \le t + y \mid X > x\}}{\mathsf{Pr}\{X - x > t \mid X > x\}} = \\
&= \frac{\mathsf{Pr}\{t < X - x \le t + y\}}{\mathsf{Pr}\{X - x > t\}} = \frac{\mathsf{Pr}\{0 < X - (x+t) \le y\}}{\mathsf{Pr}\{X > x + t\}} = \\
&= \mathsf{Pr}\{X - (x+t) \le y \mid X > x + t\} = \mathsf{Pr}\{T(x+t) \le y\} = {}_yq_{x+t}\,.
\end{aligned}$$

Отже,

$${}_yq_{x+t} = \frac{\mathsf{Pr}\{A \cup B\} - \mathsf{Pr}\{A\}}{\mathsf{Pr}\{\overline{A}\}} = \frac{{}_{t+y}q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x}.$$

□

Вправа 1. *Довести формулу (3.13).*

Приклад 1. Обчислити $s(x)$, де

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & x \in [0, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Спираючись на $s(x)$, вивести формули для ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, $f_{T(x)}(t)$.

Розв'язання. Оскільки

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{80}, & 0 \le x < 80 \\ 0, & x \ge 80 \end{cases}$$

то з формул (3.6) і (3.7) $\forall x \in [0, 80)$ отримуємо:

$${}_tp_x = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{80 - x}, & 0 \le t < 80 - x \\ 0, & t \ge 80 - x \end{cases}$$

$${}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{80 - x}, & 0 \le t < 80 - x \\ 1, & t \ge 80 - x \end{cases}$$

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80 - x}, & t \in [0, 80 - x) \\ 0, & t \notin [0, 80 - x) \end{cases}$$

□

Приклад 2. Обчислити $s(x)$, де

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Спираючись на $s(x)$, вивести формули для ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, $f_{T(x)}(t)$.

Розв'язання. Оскільки

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

то з формул (3.6) і (3.7) $\forall x \ge 0$ отримуємо:

$${}_tp_x = e^{-t}, \quad {}_tq_x = 1 - e^{-t}, \quad f_{T(x)}(t) = e^{-t}, \quad t \ge 0.$$

□

Вправа 2. *Обчислити* $s(x)$, *де*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & x \in [0, 30) \\ \dfrac{1}{100}, & x \in [30, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Спираючись на $s(x)$, *вивести формули для* ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, $f_{T(x)}(t)$.

Вправа 3. *Обчислити* $s(x)$, *де*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{80}\right)^2, & x \in [0, 80) \\ 1, & x \geq 80 \end{cases}$$

Спираючись на $s(x)$, *вивести формули для* ${}_tp_x$, ${}_tq_x$, $f_{T(x)}(t)$.

1.4 Цілочисельна майбутня тривалість життя $K(x)$

Означення 4.1. Цілочисельна випадкова величина

$$K(x) = \lfloor T(x) \rfloor, \quad x \geq 0,$$

називається ***цілочисельною майбутньою тривалістю життя*** особи (x).

Теорема 4.1. (про ймовірнісну функцію K) *Ймовірнісна функція цілочисельної майбутньої тривалості життя особи* (x) *обчислюється за формулою:*

$$\begin{aligned} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} &= {}_{k|}q_x = \\ &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Нехай $s(x+k) > 0$. *Тоді*

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = {}_kp_x\ q_{x+k}\,. \tag{4.2}$$

Доведення. За означенням випадкової величини $K(x)$, враховуючи неперервність випадкової величини $T(x)$, маємо:

$$\begin{aligned} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} &= \mathsf{Pr}\big\{k \leq T(x) < k+1\big\} = \mathsf{Pr}\big\{k < T(x) \leq k+1\big\} = \\ &= {}_{k|}q_x = {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Нехай $s(x+k) > 0$. Тоді, використовуючи формулу

$${}_{t|u}q_x = {}_tp_x\ {}_uq_{x+t} \quad (t = k,\ u = 1)$$

та першу рівність в (4.1), отримуємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = {}_{k|}q_x = {}_kp_x\ q_{x+k}\,.$$

□

Зауваження 1. Якщо $s(x+k)=0$, то

$$ {}_kp_x = \frac{s(x+k)}{s(x)} = 0 \implies \mathsf{Pr}\{K(x)=k\} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = 0. $$

Отже, ліва частина рівності (4.2) дорівнює 0, а її права частина дорівнює добутку величини ${}_kp_x$, яка дорівнює 0, і величини q_{x+k}, яка не визначена.

Наслідок 4.1.1. (про функцію розподілу K) *Нехай $F_{K(x)}$ позначає функцію розподілу $K(x)$. Тоді*

$$ F_{K(x)}(t) = {}_{\lfloor t \rfloor+1}q_x\,, \quad t \ge 0. $$

Зокрема,

$$ F_{K(x)}(k) = {}_{k+1}q_x\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots . $$

Доведення. Використовуючи означення випадкової величини $K(x)$ і формулу (4.1), отримуємо:

$$ \begin{aligned} F_{K(x)}(t) &= \mathsf{Pr}\{K(x) \le t\} = \mathsf{Pr}\{K(x) \le \lfloor t \rfloor\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \mathsf{Pr}\{K(x)=k\} = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} ({}_{k+1}q_x - {}_kq_x) = {}_{\lfloor t \rfloor+1}q_x\,, \quad t \ge 0. \end{aligned} $$

□

Приклад 1. Нехай

$$ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & x \in [0,80) \\ 0, & x \notin [0,80) \end{cases} $$

Розв'язання. Для $x \in [0,80)$ маємо:

$$ \begin{aligned} {}_tq_x &= \begin{cases} \dfrac{t}{80-x}, & 0 \le t < 80-x \\ 1, & t \ge 80-x \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{t}{80-x}, & 0 \le t \le 80-x \\ 1, & t > 80-x \end{cases} \end{aligned} $$

Звідси для $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ отримуємо:

$$ {}_kq_x = \begin{cases} \dfrac{k}{80-x}, & k < 80-x \\ 1, & k \ge 80-x \end{cases} $$

$$
{}_{k+1}q_x = \begin{cases} \dfrac{k+1}{80-x}, & 0 \le k \le 79-x \\ 1, & k > 79-x \end{cases}
$$

Отже, використовуючи формулу (4.1), маємо:

$$
\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = \begin{cases} \dfrac{k+1}{80-x} - \dfrac{k}{80-x} = \dfrac{1}{80-x}, & k \le 79-x \\ 1 - \dfrac{k}{80-x}, & 79-x < k < 80-x \\ 0, & k \ge 80-x \end{cases}
$$

Зокрема, нехай $x \in \{0, \ldots, 79\}$. Тоді

$$
\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = \frac{1}{80-x}, \quad k = 0, \ldots, 79-x.
$$

За наслідком 4.1.1 отримуємо:

$$
F_{K(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lfloor t \rfloor + 1}{80-x}, & 0 \le t < 80-x \\ 1, & t \ge 80-x \end{cases} \qquad t \ge 0;
$$

$$
F_{K(x)}(k) = \begin{cases} \dfrac{k+1}{80-x}, & 0 \le k < 80-x \\ 1, & k \ge 80-x \end{cases} \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.
$$

□

Приклад 2. Нехай

$$
f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
$$

Потрібно вивести формули (ймовірнісних функцій і функцій розподілу):

(i) $\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\}, \quad x \ge 0, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$

(ii) $F_{K(x)}(t), \quad x \ge 0, \quad t \ge 0;$

(iii) $F_{K(x)}(k), \quad x \ge 0, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$

Розв'язання. Оскільки $\forall x \ge 0$

$$
{}_tp_x = e^{-t}, \quad t \ge 0, \qquad {}_tq_x = 1 - e^{-t}, \quad t \ge 0,
$$

то використовуючи формулу (4.2), для $x \geq 0$ маємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = e^{-k}\big(1 - e^{-1}\big) = e^{-(k+1)}\big(e - 1\big), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

За наслідком 4.1.1

$$F_{K(x)}(t) = (1 - e^{-(\lfloor t \rfloor + 1)}), \quad t \geq 0;$$
$$F_{K(x)}(k) = (1 - e^{-(k+1)}), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

□

Вправа 1. *Нехай*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & x \in [0, 30) \\ \dfrac{1}{100}, & x \in [30, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Вивести формули (ймовірнісних функцій і функцій розподілу):

(i) $\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}, \quad x \in [30, 80);$

(ii) $\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}, \quad x \in \{30, \ldots, 79\};$

(iii) $F_{K(x)}(t), \quad t \geq 0, \quad x \in [30, 80);$

(iv) $F_{K(x)}(k), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad x \in [30, 80).$

Вправа 2. *Нехай*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{80}\right)^2, & x \in [0, 80) \\ 1, & x \geq 80 \end{cases}$$

Вивести формули (ймовірнісних функцій і функцій розподілу):

(i) $\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}, \quad x \in [0, 80);$

(ii) $\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}, \quad x \in \{0, \ldots, 79\};$

(iii) $F_{K(x)}(t), \quad t \geq 0;$

(iv) $F_{K(x)}(k), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$

1.5 Випадкові величини $J(x)$ і $H(x)$ цілої кількості періодів життя

Нехай $m \in \mathbf{N},\ m > 1$. Для особи (x) поділимо кожен (цілий) рік

$$[x + k, x + k + 1), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

на m однакових півінтервалів

$$\Big[x+k+\frac{j}{m}, x+k+\frac{j+1}{m}\Big), \quad j=0,\dots,m-1$$

(для $m = 12,\ 2,\ 3$, це відповідно місяці, півріччя, квартали). Ці півінтервали називаються *періодами* або m*-періодами.*

Визначимо випадкову величину $J = J(x)$ цілої кількості періодів (m-періодів), яку проживає особа (x) протягом останнього року життя. Цю випадкову величину будемо називати *цілою кількістю періодів останнього року життя особи* (x). Тоді

$$\frac{J}{m} \le T-K = S < \frac{J+1}{m}. \tag{5.1}$$

Отже,

$$J = [m(T-K)] = [mS].$$

Згідно з означенням $J(x)$ є цілочисельною випадковою величиною, яка набуває значення з множини $\{0,1,2,\dots,m-1\}$.

Приклад 1. Нехай $S(x)$ рівномірно розподілена на $[0,1]$. Потрібно обчислити ймовірнісну функцію випадкову величину $J(x)$.

Розв'язання. За означенням і умовою маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big\{J(x)=j\big\} &= \mathsf{Pr}\big\{j \le mS(x) < j+1\big\} = \\ &= \mathsf{Pr}\left\{\frac{j}{m} \le S(x) < \frac{j+1}{m}\right\} = \frac{j+1}{m} - \frac{j}{m} = \frac{1}{m}, \quad j=0,\dots,m-1.\end{aligned}$$

$\square$

Теорема 5.1. (про спільний розподіл K, J) *Нехай*

$$k \in \{0,1,2,\dots\}, \quad j \in \{0,1,\dots,m-1\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\} &= {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = \\ &= {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x = {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Доведення. Використовуючи (5.1) і співвідношення

$${}_{k+t}p_x = {}_kp_x\ {}_tp_{x+k}\,,$$

отримуємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\} = \mathsf{Pr}\left\{k+\frac{j}{m} \le T(x) < k+\frac{j+1}{m}\right\} =$$
$$= {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x =$$
$$= {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} - {}_kp_x \ {}_{\frac{j+1}{m}}p_{x+k} = {}_kp_x \left({}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} - {}_{\frac{j+1}{m}}p_{x+k} \right) =$$
$$= {}_kp_x \, \mathsf{Pr}\left\{\frac{j}{m} \le T(x+k) < \frac{j+1}{m}\right\} = {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

У другій рівності використано неперервність випадкової величини $T(x)$. □

Визначимо випадкову величину

$$H = H(x) = mK(x) + J(x) \tag{5.3}$$

цілої кількості періодів (m-періодів), яку проживе особа (x) у майбутньому. Цю випадкову величину будемо називати *цілою кількістю періодів (майбутньої) тривалості життя особи* (x). Згідно з означенням $H(x)$ є невід'ємною цілочисельною випадковою величиною.

Зауваження 1. Згідно з означенням (5.3)

$$K(x) \ge n \iff H(x) \ge nm;$$
$$K(x) < n \iff H(x) < nm.$$

Звідси, зокрема, отримуємо:

$${}_np_x = \mathsf{Pr}\big\{K(x) \ge n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \ge nm\big\} = \sum_{h=nm}^{\infty} \mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\};$$
$${}_nq_x = \mathsf{Pr}\big\{K(x) < n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) < nm\big\} = \sum_{h=0}^{nm-1} \mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\}.$$

Наслідок 5.1.1. (про функцію розподілу H)

(i) *Нехай* $h \in \{0,1,2,\ldots\}$. *Тоді*

$$\mathsf{Pr}\big\{H=h\big\} = {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x\,. \tag{5.4}$$

Позначимо

$$k = [h/m], \quad j = h - km. \tag{5.5}$$

Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{H=h\big\} = {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \tag{5.6}$$

(ii) *Функція розподілу F_H випадкової величини $H(x)$ визначається формулою:*

$$F_H(y) = {}_{\frac{\lfloor y\rfloor+1}{m}}q_x\,, \quad y \geq 0. \tag{5.7}$$

Зокрема,

$$F_H(h) = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, \quad h = 0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

Доведення. (i) Згідно з означенням (5.3)

$$H(x) = h \iff K(x) = k,\ J(x) = j,$$

де k, j визначаються формулами (5.5). Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\ J(x) = j\big\}.$$

Звідси й з (5.2) отримуємо (5.6), а також (5.4), враховуючи рівність

$$h = km + j.$$

(ii) Оскільки $H(x)$ невід'ємна цілочисельна випадкова величина, то використовуючи (5.4), отримуємо (5.7):

$$\begin{aligned} F_H(y) = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \leq y\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \leq \lfloor y\rfloor\big\} = \\ = \sum_{h=0}^{\lfloor y\rfloor} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=0}^{\lfloor y\rfloor}\left({}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x\right) = {}_{\frac{\lfloor y\rfloor+1}{m}}q_x\,. \end{aligned}$$

$\square$

Приклад 2. Нехай випадкова величина $T(x)$ має експоненційний розподіл

$$f_{T(x)} = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Потрібно обчислити

(i) $\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\}, \quad k = 0,\,1,\,2,\,\ldots, \quad j = 0,\ldots,m-1;$

(ii) $\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\}, \quad h = 0,\,1,\,2,\,\ldots;$

(iii) $F_{H(x)}(t), \quad t \geq 0;$

(iv) $F_{H(x)}(h), \quad h = 0,\,1,\,2,\,\ldots.$

Розв'язання. Згідно з умовою

$$ {}_tp_x = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 $$

Отже,

$$ \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\} = e^{-\lambda\left(k+\frac{j}{m}\right)} - e^{-\lambda\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} = $$
$$ = e^{-\lambda\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right). $$

$$ \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = e^{-\lambda\,\frac{h}{m}} - e^{-\lambda\,\frac{h+1}{m}} = e^{-\lambda\,\frac{h}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right). $$

За наслідком 5.1.1

$$ F_{H(x)}(t) = 1 - e^{-\lambda\,\frac{\lfloor t\rfloor+1}{m}}, \quad t \geq 0; $$
$$ F_{H(x)}(h) = 1 - e^{-\lambda\,\frac{h+1}{m}}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots. $$

□

Приклад 3. Нехай випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра)

$$ f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \notin [0, c) \end{cases} \qquad c \in \mathbf{N}. $$

Потрібно обчислити

(i) $\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$

(ii) $\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$

(iii) $F_{H(x)}(t), \quad t \geq 0;$

(iv) $F_{H(x)}(h), \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$

Розв'язання. Згідно з умовою

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} $$

Отже, за формулами (5.2) і (5.4) отримуємо:

$$ \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\} = \begin{cases} \dfrac{1}{cm}, & k < c \\ 0, & k \geq c \end{cases} $$

$$\mathsf{Pr}\{H(x) = h\} = \begin{cases} \dfrac{1}{cm}, & h < cm \\ 0, & h \geq cm \end{cases}$$

За наслідком 5.1.1

$$F_{H(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lfloor t \rfloor + 1}{cm}, & t \in [0, cm - 1) \\ 1, & t \geq cm - 1 \end{cases}$$

$$F_{H(x)}(h) = \begin{cases} \dfrac{h + 1}{cm}, & h = 0, \ldots, cm - 2 \\ 1, & h = cm - 1,\, cm, \ldots \end{cases}$$

□

Зауваження 2. Оскільки

$$K(x+n) = K(x) - n, \;\; K(x) \geq n, \quad T(x+n) = T(x) - n, \;\; K(x) \geq n,$$

то

$$J(x+n) = J(x), \;\; K(x) \geq n.$$

Отже,

$$K(x+n) + \frac{J(x+n)+1}{m} = K(x) + \frac{J(x)+1}{m} - n, \quad K(x) \geq n.$$

Зокрема,

$$\frac{H(x+n)+1}{m} = \frac{H(x)+1}{m} - n, \quad H(x) \geq nm.$$

1.6 Сила (інтенсивність) смертності

Означення 6.1. Нехай $s(x) > 0$. ***Силою (інтенсивністю) смертності*** називається

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\{x < X \leq x + h \mid X > x\}}{h}. \tag{6.1}$$

Зауваження 1. Безпосередньо з (6.1) випливає, що $\mu(x) \geq 0$.

Теорема 6.1. (формули для сили смертності)

$$\mu(x) = \frac{F_X'(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}; \tag{6.2}$$

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)}; \tag{6.3}$$

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{{}_hq_x}{h}; \tag{6.4}$$

$$\mu(x) = (\,{}_hq_x\,)'_h\,\big|_{h=0} = -(\,{}_hp_x\,)'_h\,\big|_{h=0}\,. \tag{6.5}$$

Якщо F_X в точці x недиференційовна, праворуч у формулах (6.2), (6.3) і (6.5) стоять праві похідні функцій $F_X(x), s(x),\ {}_hq_x\,,\ {}_hp_x$ в точках x та $h = 0$ відповідно.

Доведення. Формулу (6.2) отримуємо з (6.1), означення умовної ймовірності та означення похідної:

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\big\{x < X \le x + h \mid X > x\big\}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\big\{x < X \le x + h\big\}}{h\ \mathsf{Pr}\big\{X > x\big\}} = \frac{1}{1 - F_X(x)} \lim_{h \to 0_+} \frac{F_X(x+h) - F_X(x)}{h} =$$
$$= \frac{F_X'(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}.$$

Зазначимо, що якщо функція F_X в точці x недиференційовна, то в останній рівності (зліва) стоїть права похідна функції F_X в точці x. Формула (6.3) випливає з формули (6.2):

$$\mu(x) = \frac{F_X'(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{(1 - s(x))'}{s(x)} = -\frac{s'(x)}{s(x)}.$$

Формулу (6.4) отримуємо з (6.1) і означення умовної ймовірності:

$$\mu(x) = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\big\{x < X \le x + h \mid X > x\big\}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\big\{0 < X - x \le h \mid X > x\big\}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\big\{X - x \le h \mid X > x\big\}}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{\mathsf{Pr}\big\{T(x) \le h\big\}}{h} = \lim_{h \to 0_+} \frac{{}_hq_x}{h}.$$

Зазначимо, що формулу (6.4) можна отримати з формули (6.3) (і навпаки):

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{{}_hq_x}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\,\frac{s(x)-s(x+h)}{s(x)} =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \lim_{h\to 0_+} \frac{s(x)-s(x+h)}{h} = -\frac{s'(x)}{s(x)}.$$

Для отримання формул (6.5) скористаємося формулою (6.4), рівністю ${}_0q_x = 0$ та означенням похідної:

$$\mu(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{{}_hq_x}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{{}_hq_x - {}_0q_x}{h} = (\,{}_hq_x\,)'_h\,|_{h=0} = -(\,{}_hp_x\,)'_h\,|_{h=0}\;.$$

□

Зауваження 2. З формули (6.3), неперервності й кускової гладкості функції $s(x)$ випливає, що сила смертності $\mu(x)$ є *неперервною справа* кусково неперервною функцією на множині свого визначення

$$\{x \ge 0 \mid s(x) > 0\}.$$

Зазначимо, що з рівності $s(0) = 1$, неперервності та незростання функції $s(x)$ отримуємо, що множиною визначення сили смертності $\mu(x)$ є непорожній (обмежений або необмежений зверху) півінтервал:

$$\{x \ge 0 \mid s(x) > 0\} = \begin{cases} [0, +\infty), & \forall x > 0 \;\; s(x) > 0 \\ [0, x_0), & \exists x > 0 : \; s(x) = 0 \end{cases}$$

Приклад 1. Нехай

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & x \in [0, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Потрібно обчислити $\mu(x)$.

Розв'язання. Оскільки

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{80}, & x \in [0, 80) \\ 0, & x \ge 80 \end{cases}$$

то сила смертності $\mu(x)$ визначена на $[0, 80)$. За формулою (6.3)

$$\mu(x) = \frac{1}{80 - x}, \quad x \in [0, 80).$$

□

Приклад 2. Нехай

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Потрібно обчислити $\mu(x)$.

Розв'язання. Оскільки

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

то сила смертності $\mu(x)$ визначена на $[0, +\infty)$. Використовуючи формулу (6.3), отримуємо:

$$\mu(x) = 1, \quad x \geq 0.$$

□

Вправа 1. *Нехай*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}, & x \in [0, 30) \\ \dfrac{1}{100}, & x \in [30, 80) \\ 0, & x \notin [0, 80) \end{cases}$$

Вивести формулу для сили смертності $\mu(x)$.

Вправа 2. *Нехай*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{80}\right)^2, & x \in [0, 80) \\ 1, & x \geq 80 \end{cases}$$

Вивести формулу для сили смертності $\mu(x)$.

Теорема 6.2. (про зв'язок $s(x)$, ${}_tq_x$, ${}_tp_x$ з $\mu(x)$) *Нехай* $s(x) > 0$. *Тоді*

$$s(x) = e^{-\int\limits_0^x \mu(y)\, dy}. \tag{6.6}$$

Нехай $s(x+t) > 0$. *Тоді:*

$${}_tp_x = e^{-\int\limits_x^{x+t} \mu(y)\, dy} = e^{-\int\limits_0^t \mu(x+s)\, ds}; \tag{6.7}$$

$${}_tq_x = 1 - e^{-\int\limits_x^{x+t} \mu(s)\, ds} = 1 - e^{-\int\limits_0^t \mu(x+s)\, ds}. \tag{6.8}$$

Доведення. Формулу (6.6) отримуємо з (6.3) і формули Ньютона-Лейбніца, можливість застосування якої випливає з неперервності й кускової гладкості функції $s(x)$:

$$-\int_0^x \mu(y)\,dy = \int_0^x \frac{s'(y)}{s(y)}\,dy = \int_0^x (\ln s(y))'\,dy = \ln\frac{s(x)}{s(0)} = \ln s(x).$$

Формула (6.8) випливає з формули (6.7) та означення ${}_tp_x$. Формула (6.7) випливає з (6.6), теореми про зв'язок ${}_tp_x$ з функцією виживання та адитивності інтеграла:

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = e^{-\int_0^{x+t}\mu(y)\,dy + \int_0^x \mu(y)\,dy} = e^{-\int_x^{x+t}\mu(y)\,dy}.$$

□

Наслідок 6.2.1. (про похідні ${}_tp_x$, ${}_tq_x$) *Нехай* $s(x+t) > 0$. *Тоді*

$$({}_tp_x)'_t = -\,{}_tp_x\,\mu(x+t); \tag{6.9}$$
$$({}_tq_x)'_t = {}_tp_x\,\mu(x+t). \tag{6.10}$$

Якщо F_X *в точці* $x+t$ *недиференційовна, ліворуч у формулах (6.9) і (6.10) стоять праві похідні функцій* ${}_tp_x$, ${}_tq_x$ *в точці* t.

Доведення. *1-й спосіб*: Зазначимо, що досить довести першу з цих формул. Для отримання її скористаємося теоремою про похідну інтеграла зі змінною верхньою межею (її аналога для правої похідної), неперервністю справа функції μ і формулою (6.7):

$$({}_tp_x)'_t = e^{-\int_x^{x+t}\mu(y)\,dy}\left(-\int_x^{x+t}\mu(y)\,dy\right)'_t = -\,{}_tp_x\,\mu(x+t).$$

2-й спосіб: Використовуючи неперервність і кускову гладкість функції $s(x+t)$, а також зв'язок ${}_tp_x$ та сили смертності з функцією виживання, маємо:

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} \implies ({}_tp_x)'_t = \frac{s'(x+t)}{s(x)} =$$
$$= \frac{s(x+t)}{s(x)}\,\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = -\,{}_tp_x\,\mu(x+t).$$

□

Зауваження 3. Оскільки

$$ {}_tq_x = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \le t\big\} $$

є функцією розподілу випадкової величини $T(x)$, то

$$ ({}_tq_x)'_t = {}_tp_x\,\mu(x+t) $$

є щільністю розподілу випадкової величини $T(x)$. Зокрема, нехай Z випадкова величина, що визначається рівністю

$$ Z = \varphi(T(x)), \quad T(x) \in (\alpha, \beta), \quad \varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}. $$

Тоді

$$ \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt. $$

Наслідок 6.2.2. (про зв'язок F_X, f_X з силою смертності) *Нехай* $s(x) > 0$. *Тоді*

$$ F_X(x) = 1 - e^{-\int\limits_0^x \mu(y)\;dy}, \quad f_X(x) = \mu(x)s(x). $$

Доведення. Випливає з формул (6.6) та (6.3), оскільки:

$$ F_X(x) = 1 - s(x), \quad f_X(x) = (F_X)'(x) = -s'(x). $$

□

Наслідок 6.2.3. (про інтеграл від сили смертності)

(i) *Нехай* $s(x) > 0 \;\; \forall x \in [0, +\infty)$. *Тоді*

$$ \int\limits_0^{\infty} \mu(y)\;dy = +\infty. $$

(ii) *Нехай* $s(x) > 0 \;\; \forall x \in [0, x_0)$, $s(x_0) = 0$. *Тоді*

$$ \int\limits_0^{x_0} \mu(y)\;dy = +\infty. $$

Доведення. (i) За умовою наслідку функція $\ln s(x)$ визначена на $[0, +\infty)$. За властивостями функції розподілу маємо:

$$\lim_{x \to +\infty} s(x) = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} \ln s(x) = -\infty.$$

За умовою наслідку функція μ визначена на $[0, +\infty)$. Використовуючи означення невластивого інтеграла і формулу (6.6), отримуємо перше твердження наслідку:

$$\int\limits_0^\infty \mu(y)\, dy = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_0^x \mu(y)\, dy = -\lim_{x \to +\infty} \ln s(x) = +\infty.$$

(ii) Доводиться аналогічно. За умовою наслідку функція $\ln s(x)$ визначена на $[0, x_0)$. З неперервності функції $s(x)$ та за умовою наслідку маємо:

$$\lim_{x \to x_{0_-}} s(x) = 0 \implies \lim_{x \to x_{0_-}} \ln s(x) = -\infty.$$

За умовою наслідку функція μ визначена на $[0, x_0)$. Використовуючи означення невластивого інтеграла і формулу (6.6), отримуємо друге твердження наслідку:

$$\int\limits_0^{x_0} \mu(y)\, dy = \lim_{x \to x_{0_-}} \int\limits_0^x \mu(y)\, dy = -\lim_{x \to x_{0_-}} \ln s(x) = +\infty.$$

□

Зауваження 4. Наслідок 6.2.3 про інтеграл від сили смертності *по області свого визначення* можна стисло переформулювати так:

$$\int\limits_{\{x \geq 0 \mid s(x) > 0\}} \mu(y)\, dy = \int\limits_0^{\sup\{x \geq 0 \mid s(x) > 0\}} \mu(y)\, dy = +\infty.$$

1.7 Основні розподіли (закони) майбутньої тривалості життя

У цьому параграфі використовуються виведені вище формули:

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)}; \tag{7.1}$$

$$_t p_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}; \tag{7.2}$$

$$
{}_tp_x = e^{-\int\limits_x^{x+t} \mu(y)\,dy}; \tag{7.3}
$$

$$
s(x) = e^{-\int\limits_0^{x} \mu(y)\,dy}. \tag{7.4}
$$

1.7.1 Закон де Муавра (de Moivre) або рівномірний розподіл

Щільність, функція розподілу й функція виживання випадкової величини (тривалості життя новонародженого) X визначаються формулами:

$$
f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}
$$

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 1, & x \geq \omega \end{cases}
$$

$$
s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{\omega}, & 0 \leq x < \omega \\ 0, & x \geq \omega \end{cases}
$$

Сила смертності $\mu(x)$ визначена $\forall x \in [0, \omega)$. Використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$
\mu(x) = \frac{1}{\omega - x}, \quad x \in [0, \omega).
$$

Застосовуючи формули (7.2) або (7.3), $\forall x \in [0, \omega)$ маємо:

$$
{}_tp_x = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{\omega - x}, & 0 \leq t < \omega - x \\ 0, & t \geq \omega - x \end{cases}
$$

$$
{}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{\omega - x}, & 0 \leq t < \omega - x \\ 1, & t \geq \omega - x \end{cases}
$$

$$
f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega - x}, & t \in [0, \omega - x) \\ 0, & t \notin [0, \omega - x) \end{cases}
$$

Отже, $T(x)$ також ***має розподіл де Муавра***.

1.7.2 Експоненційний (показниковий) розподіл

Щільність, функція розподілу й функція виживання випадкової величини (тривалості життя новонародженого) X визначаються формулами:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Сила смертності $\mu(x)$ визначена $\forall x \geq 0$. Використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$\mu(x) = \lambda, \quad x \geq 0.$$

Застосовуючи формули (7.2) або (7.3), $\forall x \geq 0$ маємо:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0; \\ {}_tq_x &= 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0; \\ f_{T(x)}(t) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, $T(x)$ також ***має експоненційний розподіл*** з тим самим параметром λ.

1.7.3 Узагальнений закон де Муавра або бета-розподіл

Щільність, функція розподілу й функція виживання випадкової величини (тривалості життя новонародженого) X визначаються формулами:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\omega}\left(\dfrac{\omega - x}{\omega}\right)^{\alpha-1}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases} \qquad \alpha > 0;$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \left(\dfrac{\omega - x}{\omega}\right)^{\alpha}, & x \in [0, \omega) \\ 1, & x \geq \omega \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \left(\dfrac{\omega - x}{\omega}\right)^{\alpha}, & 0 \le x < \omega \\ 0, & x \ge \omega \end{cases}$$

Сила смертності $\mu(x)$ визначена $\forall x \in [0, \omega)$. Використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$\mu(x) = \frac{\alpha}{\omega - x}, \quad x \in [0, \omega).$$

Застосовуючи формули (7.2) або (7.3), $\forall x \in [0, \omega)$ маємо:

$$_tp_x = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{\omega - x}\right)^{\alpha}, & 0 \le t < \omega - x \\ 0, & t \ge \omega - x \end{cases}$$

$$_tq_x = \begin{cases} 1 - \left(1 - \dfrac{t}{\omega - x}\right)^{\alpha}, & 0 \le t < \omega - x \\ 1, & t \ge \omega - x \end{cases}$$

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\omega - x}\left(1 - \dfrac{t}{\omega - x}\right)^{\alpha - 1}, & t \in [0, \omega - x) \\ 0, & t \notin [0, \omega - x) \end{cases}$$

Отже, $T(x)$ також ***має узагальнений розподіл де Муавра*** з тим самим параметром α.

1.7.4 Розподіл Вейбула (Weibull)

Щільність, функція розподілу й функція виживання випадкової величини (тривалості життя новонародженого) X визначаються формулами:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\tau}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{\tau - 1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad \tau, \lambda > 0;$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}}, & x \ge 0 \end{cases}$$

$$s(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau}}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Сила смертності $\mu(x)$ визначена $\forall x \geq 0$. Використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$\mu(x) = \frac{\tau}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau-1}, \quad x \geq 0.$$

Застосовуючи формули (7.2) або (7.3), $\forall x \geq 0$ маємо:

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= e^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau} - \left(\frac{x+t}{\lambda}\right)^{\tau}}, \quad t \geq 0;\\
{}_tq_x &= 1 - e^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau} - \left(\frac{x+t}{\lambda}\right)^{\tau}}, \quad t \geq 0;\\
f_{T(x)}(t) &= \begin{cases} \dfrac{\tau}{\lambda}\left(\dfrac{x+t}{\lambda}\right)^{\tau-1} e^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\tau} - \left(\frac{x+t}{\lambda}\right)^{\tau}}, & t \geq 0\\ 0, & t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

1.7.5 Закон Ґомпертца (Gompertz)

Сила смертності $\mu(x)$ визначена $\forall x \geq 0$ і визначається формулою:

$$\mu(x) = BC^x, \quad x \geq 0, \quad 0 < B < 1, \quad C > 1.$$

Використовуючи формулу (7.4), отримуємо формули для функції виживання, функції розподілу та щільності випадкової величини (тривалості життя новонародженого) X :

$$\begin{aligned}
s(x) &= e^{-\frac{B}{\ln(C)}(C^x - 1)};\\
F(x) &= 1 - e^{-\frac{B}{\ln(C)}(C^x - 1)};\\
f(x) &= BC^x e^{-\frac{B}{\ln(C)}(C^x - 1)}.
\end{aligned}$$

Застосовуючи формули (7.2) або (7.3), $\forall x \geq 0$ маємо:

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= e^{\frac{B}{\ln(C)}(C^x - C^{x+t})}, \quad t \geq 0;\\
{}_tq_x &= 1 - e^{\frac{B}{\ln(C)}(C^x - C^{x+t})}, \quad t \geq 0;\\
f_{T(x)}(t) &= \begin{cases} BC^{x+t} e^{\frac{B}{\ln(C)}(C^x - C^{x+t})}, & t \geq 0\\ 0, & t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

1.7.6 Закон Мейкхема (Makeham)

Сила смертності $\mu(x)$ визначена $\forall x \geq 0$ і визначається формулою:

$$\mu(x) = A + BC^x, \quad x \geq 0, \quad A > 0, \quad 0 < B < 1, \quad C > 1.$$

Використовуючи формулу (7.4), отримуємо формули для функції виживання, функції розподілу та щільності випадкової величини (тривалості життя новонародженого) X :

$$\begin{aligned} s(x) &= e^{-Ax-\frac{B}{\ln(C)}(C^x-1)}; \\ F(x) &= 1-e^{-Ax-\frac{B}{\ln(C)}(C^x-1)}; \\ f(x) &= (A+BC^x)e^{-Ax-\frac{B}{\ln(C)}(C^x-1)}. \end{aligned}$$

Застосовуючи формули (7.2) або (7.3), $\forall x \geq 0$ маємо:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= e^{-At+\frac{B}{\ln(C)}(C^x-C^{x+t})}, \quad t \geq 0; \\ {}_tq_x &= 1-e^{-At+\frac{B}{\ln(C)}(C^x-C^{x+t})}, \quad t \geq 0; \\ f_{T(x)}(t) &= \begin{cases} \left(A+BC^{x+t}\right)e^{-At+\frac{B}{\ln(C)}(C^x-C^{x+t})}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Розділ 2

Таблиці життя

2.1 Функції таблиці життя

Означення 1.1. Для групи з l_0 новонароджених, що мають однакову функцію виживання, $\mathcal{L}(x)$ позначає випадкову величину кількості осіб з цієї групи, що доживають до віку x, а l_x — математичне сподівання $\mathcal{L}(x)$:

$$l_x = \mathsf{E}\big[\mathcal{L}(x)\big].$$

Означення 1.2. Для групи з l_0 новонароджених, що мають однакову функцію виживання, ${}_t\mathcal{D}_x$, $t > 0$, позначає випадкову величину кількості осіб з цієї групи, що померли у проміжку між x і $x + t$, а ${}_td_x$ — математичне сподівання ${}_t\mathcal{D}_x$:

$${}_td_x = \mathsf{E}\big[\,{}_t\mathcal{D}_x\,\big].$$

Теорема 1.1. (про зв'язок l_x з функцією виживання та силою смертності)

$$l_x = l_0 s(x) = l_0 e^{-\int\limits_0^x \mu(y)\,dy}; \tag{1.1}$$

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = {}_tp_x = e^{-\int\limits_x^{x+t} \mu(y)\,dy}, \quad t \geq 0; \tag{1.2}$$

$$l_x - l_{x+t} = \int\limits_x^{x+t} l_y \mu(y)\,dy, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Доведення. Зазначимо, що другі рівності у формулах (1.1) і (1.2) отримуємо з теореми про зв'язок $s(x)$, ${}_tp_x$ з силою смертності.

Для виведення (першої рівності) формули (1.1) занумеруємо $1, 2, \ldots, l_0$ новонароджених з групи l_0. Нехай X_j позначає випадкову величину тривалості життя (новонародженої) особи (з номером) j. Згідно з означенням 1.1 випадкові величини X_j мають однакову функцію виживання, яку позначимо $s(x)$. Визначимо випадкову величину I_j — індикатор події $X_j > x$ (новонароджена особа j доживає до віку x):

$$I_j = \begin{cases} 1, & X_j > x; \\ 0, & X_j \le x. \end{cases}$$

Тоді випадкову величину $\mathcal{L}(x)$ можна подати у вигляді:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_{j=1}^{l_0} I_j.$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[I_j\big] = \mathsf{Pr}\big\{X_j > x\big\} = s(x),$$

то

$$l_x = \mathsf{E}\big[\mathcal{L}_x\big] = \mathsf{E}\left[\sum_{j=1}^{l_0} I_j\right] = \sum_{j=1}^{l_0} \mathsf{E}\big[I_j\big] = \sum_{j=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x).$$

З формули (1.1) та теореми про зв'язок ${}_tp_x$ з функцією виживання отримуємо першу рівність формули (1.2):

$$\frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_0 s(x+t)}{l_0 s(x)} = \frac{s(x+t)}{s(x)} = {}_tp_x\,.$$

Формулу (1.3) отримуємо з формули (1.1), теореми про зв'язок $s(x)$, ${}_tp_x$ з силою смертності та формули Ньютона-Лейбніца:

$$\frac{l'_x}{l_x} = \frac{s'(x)}{s(x)} = -\mu(x) \implies -l'_x = l_x \mu(x) \implies$$
$$\implies \int\limits_x^{x+t} l_y \mu(y)\, dy = -\int\limits_x^{x+t} l'_y\, dy = -l_y \Big|_x^{x+t} = l_x - l_{x+t}.$$

Можливість застосування формули Ньютона-Лейбніца випливає з властивостей функції l_x (неперервність та кускова гладкість), які вона успадковує згідно з формулою (1.1) від функції $s(x)$.

Формулу (1.3) можна довести інакше. Використовуючи формулу (1.1) і наслідок про зв'язок F_X, f_X з силою смертності, маємо:

$$l_y \mu(y) = l_0 s(y) \mu(y) = l_0 f_X(y).$$

Інтегруючи цю рівність по проміжку $[x, x+t]$ і застосовуючи формулу (1.1), отримуємо формулу (1.3):

$$\int\limits_x^{x+t} l_y \mu(y)\, dy = l_0 \int\limits_x^{x+t} f_X(y)\, dy = l_0(s(x) - s(x+t)) = l_x - l_{x+t}.$$

□

Зауваження 1. Згідно з формулою (1.3) функцію $l_x\mu(x)$ можна інтерпретувати як щільність очікуваної кількості смертей осіб з групи l_0 новонароджених на проміжку $(x, x+dx)$.

Наслідок 1.1.1. (про зв'язок ${}_t d_x$ з l_x, функцією виживання та силою смертності)

$$ {}_t d_x = l_0\big(s(x) - s(x+t)\big); \tag{1.4}$$

$$ {}_t d_x = l_x - l_{x+t}; \tag{1.5}$$

$$ {}_t d_x = \int\limits_x^{x+t} l_y \mu(y)\, dy. \tag{1.6}$$

Доведення. За теоремою 1.1 праві частини формул (1.4), (1.5) і (1.6) рівні. Отже, досить довести одну з цих формул. Згідно з означеннями 1.1 і 1.2 маємо рівність:

$${}_t\mathcal{D}_x = \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x+t).$$

Якщо з кількості осіб з групи l_0 новонароджених, що доживають до віку x, відняти кількість осіб, що доживають до віку $x+t$, отримаємо кількість осіб з групи l_0 новонароджених, що доживають до віку x, але не доживають до віку $x+t$. Звідси отримуємо (1.5):

$$\begin{aligned} {}_t d_x &= \mathsf{E}\big[\,{}_t\mathcal{D}_x\,\big] = \mathsf{E}\big[\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x+t)\big] = \\ &= \mathsf{E}\big[\mathcal{L}(x)\big] - \mathsf{E}\big[\mathcal{L}(x+t)\big] = l_x - l_{x+t}. \end{aligned}$$

□

Приклад 1. Нехай частина таблиці життя має такі дані:

x	44	45	46	47
l_x	91981,47	91640,50	91274,25	90880,48
$10^3 q_x$	**?**	**?**	**?**	

Потрібно заповнити комірки зі знаками питання (з точністю до 4 знаків після коми).

Розв'язання. Застосовуючи формулу (1.2), отримуємо:

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Отже,

$$10^3 q_{44} = 10^3 \left(1 - \frac{91640,50}{91981,47}\right) = 3,7070;$$
$$10^3 q_{45} = 10^3 \left(1 - \frac{91274,25}{91640,50}\right) = 3,9966;$$
$$10^3 q_{46} = 10^3 \left(1 - \frac{90880,48}{91274,25}\right) = 4,3141;$$

і таблиця набуває вигляду:

x	44	45	46	47
l_x	91981,47	91640,50	91274,25	90880,48
$10^3 q_x$	**3,7070**	**3,9966**	**4,3141**	

□

Вправа 1. *Заповнити комірки зі знаками питання в частині таблиці життя:*

x	*44*	*45*	*46*	*47*
l_x	**?**	*91640,50*	**?**	*90880,48*
$10^3 q_x$	*3,7070*	**?**	*4,3141*	

Приклад 2. Нехай частина таблиці життя має такі дані:

x	71	72	73	74
l_x	**?**	**?**	**?**	**?**
$10^3 q_x$	36,2608	39,6240	43,2982	

Розглядається група зі 100000 новонароджених. Відомо, що

$$\mathsf{Pr}\{X \le 71\} = 0,93603392.$$

Потрібно заповнити комірки зі знаками питання (з точністю до 2 знаків після коми).

Розв'язання. Спершу обчислимо l_{71}. Застосовуючи формулу (1.1), отримуємо:

$$l_{71} = l_0 s(71) = l_0 \mathsf{Pr}\big\{X > 71\big\} = l_0(1 - \mathsf{Pr}\big\{X \leq 71\big\}) = \\ = 100000 \cdot 0,06396608 = 63966,08.$$

Застосовуючи формулу (1.2), отримуємо:

$$l_{x+1} = p_x l_x = (1 - q_x) l_x.$$

Отже,

$$l_{72} = (1 - q_{71}) l_{71} = (1 - 0,0362608) \cdot 63966,08 = 61646,62;$$
$$l_{73} = (1 - q_{72}) l_{72} = (1 - 0,0396240) \cdot 61646,62 = 59203,93;$$
$$l_{74} = (1 - q_{73}) l_{73} = (1 - 0,0432982) \cdot 59203,93 = 56640,51;$$

і таблиця набуває вигляду:

x	71	72	73	74
l_x	**63966,08**	**61646,62**	**59203,93**	**56640,51**
$10^3 q_x$	36,2608	39,6240	43,2982	

□

Вправа 2. *Розглядається група зі* 100000 *новонароджених. Відомо, що*

$$\mathsf{Pr}\big\{X \leq 74\big\} = 0,94335949.$$

Заповнити комірки зі знаками питання в частині таблиці життя:

x	*71*	*72*	*73*	*74*
l_x	*63966,08*	**?**	*59203,93*	**?**
$10^3 q_x$	**?**	*39,6240*	**?**	

2.2 Невід'ємні неперервні випадкові величини

Теорема 2.1. (про математичне сподівання неперервної невід'ємної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx.$$

Доведення. Оскільки $\mathcal{Z}$ невід'ємна неперервна випадкова величина, то за означенням

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \int\limits_0^\infty x\, dF(x) = -\int\limits_0^\infty x\, d\big(1 - F(x)\big) =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^t x\, d\big(1 - F(x)\big). \quad (2.1)$$

Інтегруючи частинами, маємо:

$$-\int\limits_0^t x\, d\big(1 - F(x)\big) = -x\,\big(1 - F(x)\big)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \big(1 - F(x)\big)\, dx =$$

$$= -t\,\big(1 - F(t)\big) + \int\limits_0^t \big(1 - F(x)\big)\, dx, \quad t > 0.$$

Отже,

$$t\,\big(1 - F(t)\big) - \int\limits_0^t x\, d\big(1 - F(x)\big) = \int\limits_0^t \big(1 - F(x)\big)\, dx, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] < +\infty$. Тоді, використовуючи означення та адитивність (збіжного) невластивого інтеграла, отримуємо:

$$\int\limits_t^\infty x\, dF(x) = \int\limits_0^\infty x\, dF(x) - \int\limits_0^t x\, dF(x) =$$

$$= \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] - \int\limits_0^t x\, dF(x) \to \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] - \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = 0,\ t \to +\infty. \quad (2.3)$$

Зауваження 1. $\exists \lim\limits_{t\to+\infty} t\,\big(1 - F(t)\big) = 0$.
Випливає з (2.3), властивостей границі функції і таких нерівностей:

$$0 \le t\,\big(1 - F(t)\big) = t\int\limits_t^\infty dF(x) \le \int\limits_t^\infty x\, dF(x), \quad t > 0.$$

Зауваження 2. $\int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx = \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]$.

Випливає з рівності (2.2) та означення (збіжного) невластивого інтеграла, оскільки згідно із зауваженням 1 та рівністю (2.1) ліва частина (2.2) при $t \to +\infty$ має границю і ця границя дорівнює $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]$.

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = +\infty$.
Зауваження 3. $\int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx = +\infty.$
Використовуючи (2.1), (2.2) та означення невластивого інтеграла, маємо:

$$\int\limits_0^t \big(1 - F(x)\big)\, dx \geq -\int\limits_0^t x\, d\big(1 - F(x)\big) \to +\infty, \;\; t \to +\infty \implies$$

$$\implies \int\limits_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_0^t \big(1 - F(x)\big)\, dx = +\infty.$$

□

Теорема 2.2. (про дисперсію неперервної невід'ємної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = 2\int\limits_0^\infty x\big(1 - F(x)\big)\, dx. \tag{2.4}$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] < +\infty$. Тоді $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] < +\infty$ і справедлива рівність:

$$\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big] = 2\int\limits_0^\infty x\big(1 - F(x)\big)\, dx - \left[\int\limits_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx\right]^2. \tag{2.5}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 2.1 до невід'ємної неперервної випадкової величини $\mathcal{Z}^2$, отримаємо:

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = \int\limits_0^\infty \big(1 - F_{\mathcal{Z}^2}(y)\big)\, dy, \tag{2.6}$$

де $F_{\mathcal{Z}^2}$ позначає функцію розподілу випадкової величини $\mathcal{Z}^2$.
Зауваження 1. $F_{\mathcal{Z}^2}(y) = F(\sqrt{y}), \quad y \geq 0.$
Оскільки випадкова величина $\mathcal{Z}$ невід'ємна, то

$$\mathcal{Z}^2 \leq y \iff \mathcal{Z} \leq \sqrt{y}, \quad y \geq 0.$$

Звідси й з означення функції розподілу маємо:

$$F_{\mathcal{Z}^2}(y) = \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z}^2 \le y\big\} = \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le \sqrt{y}\big\} = F(\sqrt{y}), \quad y \ge 0.$$

З (2.6) і зауваження 1 отримуємо (2.4):

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = \int\limits_0^\infty \big(1 - F(\sqrt{y})\big)\, dy = 2\int\limits_0^\infty x\big(1 - F(x)\big)\, dx.$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] < +\infty$.

Зауваження 2. $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \int_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx < +\infty$.

Згідно з теоремою 2.1 досить довести, що $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] < +\infty$. Застосовуючи формулу повного математичного сподівання, маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \mathsf{E}\big[\mathcal{Z} \mid \mathcal{Z} \le 1\big]\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le 1\big\} + \mathsf{E}\big[\mathcal{Z} \mid \mathcal{Z} > 1\big]\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} > 1\big\} \le \\ \le F(1) + \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2 \mid \mathcal{Z} > 1\big](1 - F(1)) \le \\ \le F(1) + \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2 \mid \mathcal{Z} > 1\big](1 - F(1)) + \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2 \mid \mathcal{Z} \le 1\big]F(1) = \\ \le F(1) + \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] < +\infty.\end{aligned}$$

З (2.4) та зауваження 2 отримуємо (2.5). □

Зауваження 1. Нехай функція розподілу F невід'ємної неперервної випадкової величини $\mathcal{Z}$ задовільняє умову:

$$\exists z > 0 : \quad F(z) = 1.$$

Тоді за теоремами 2.1 і 2.2

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \int\limits_0^\infty \big(1 - F(x)\big)\, dx = \int\limits_0^z \big(1 - F(x)\big)\, dx < +\infty;$$

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = 2\int\limits_0^\infty x\big(1 - F(x)\big)\, dx = 2\int\limits_0^z x\big(1 - F(x)\big)\, dx < +\infty;$$

$$\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big] = 2\int\limits_0^z x\big(1 - F(x)\big)\, dx - \left[\int\limits_0^z \big(1 - F(x)\big)\, dx\right]^2.$$

Приклад 1. Нехай випадкова величина $\mathcal{Z}$ має функцію розподілу (експоненційний розподіл)

$$F(\mathcal{Z}) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

Потрібно обчислити $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]$, $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big]$, $\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]$.

Розв'язання. Застосовуючи теореми 2.1 і 2.2, отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda};$$
$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = 2\int\limits_0^\infty xe^{-\lambda x}\,dx = -\frac{2xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2};$$
$$\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

□

2.3 Невід'ємні дискретні випадкові величини

Теорема 3.1. (про математичне сподівання невід'ємної дискретної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна цілочисельна дискретна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\big(1 - F(k)\big).$$

Доведення. Спершу зазначимо (використовуючи цілочисельність випадкової величини $\mathcal{Z}$), що

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} = k\big\} &= \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le k\big\} - \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} < k\big\} = \\ &= \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le k\big\} - \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le k-1\big\} = \\ &= F(k) - F(k-1), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.\end{aligned}$$

Зауваження 1. $1 - F(n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}[F(k) - F(k-1)], \quad n \in \mathbf{N}.$

Це твердження можна обгрунтувати по-різному, наприклад так:

$$\begin{aligned}1 - F(n) &= 1 - \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} > n\big\} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} = k\big\} = \sum_{k=n+1}^{\infty}[F(k) - F(k-1)].\end{aligned}$$

Або використовуючи означення суми числового ряду і властивості функції розподілу:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}[F(k)-F(k-1)] = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}[F(k)-F(k-1)] =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\big(F(m)-F(n)\big) = 1-F(n).$$

Позначимо

$$g(k) = 1-F(k-1), \quad k\in\mathbf{N}.$$

За умовою теореми з означення математичного сподівання отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z}=k\big\} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,[F(k)-F(k-1)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\,[g(k)-g(k+1)] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} k\,[g(k)-g(k+1)]\,. \quad (3.1)$$

Перетворимо суму в правій частині (3.1):

$$\sum_{k=1}^{n} k\,[g(k)-g(k+1)] = \sum_{k=1}^{n} kg(k) - \sum_{k=1}^{n} kg(k+1) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n} kg(k+1) =$$
$$= -(n+1)g(n+1) + \sum_{k=0}^{n}(k+1)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n} kg(k+1) =$$
$$= -(n+1)g(n+1) + \sum_{k=0}^{n} g(k+1).$$

Отже,

$$(n+1)g(n+1) + \sum_{k=1}^{n} k\,[g(k)-g(k+1)] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} g(k+1) = \sum_{k=0}^{n}\big(1-F(k)\big), \quad n\in\mathbf{N}. \quad (3.2)$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] < +\infty$. Тоді з критерію збіжності числового ряду (в термінах залишку числового ряду) отримуємо:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k[F(k)-F(k-1)] \to 0, \;\; n\to\infty. \quad (3.3)$$

Зауваження 2. $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)g(n+1) = 0.$
Випливає з (3.3), властивостей границі числової послідовності, зауваження 1 і таких нерівностей:

$$0 \le (n+1)g(n+1) = (n+1)[1-F(n)] =$$
$$= (n+1)\sum_{k=n+1}^{\infty}[F(k)-F(k-1)] \le \sum_{k=n+1}^{\infty}k[F(k)-F(k-1)], \quad n\in\mathbf{N}.$$

Зауваження 3. Числовий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big(1-F(k)\big)$ *збіжний і його сума дорівнює* $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]$.
Випливає з рівності (3.2) та означення суми збіжного числового ряду, оскільки згідно із зауваженням 2 та рівністю (3.1) ліва частина рівності (3.2) при $n\to\infty$ має границю, яка дорівнює $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]$.

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = +\infty$.
Зауваження 4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\big(1-F(k)\big) = +\infty.$
Використовуючи (3.1), (3.2) та означення суми числового ряду, маємо:

$$\sum_{k=0}^{n}\big(1-F(k)\big) \ge \sum_{k=1}^{n}k\,[g(k)-g(k+1)] \to +\infty,\;\; n\to\infty \implies$$
$$\implies \sum_{k=0}^{\infty}\big(1-F(k)\big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\big(1-F(k)\big) = +\infty.$$

□

Теорема 3.2. (про дисперсію невід'ємної дискретної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна цілочисельна дискретна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\big(1-F(k)\big). \tag{3.4}$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] < +\infty$. Тоді $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] < +\infty$ і справедлива рівність:

$$\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\big(1-F(k)\big) - \left[\sum_{k=0}^{\infty}\big(1-F(k)\big)\right]^2. \tag{3.5}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 3.1 до невід'ємної цілочисельної дискретної випадкової величини $\mathcal{Z}^2$, отримаємо:

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = \sum_{n=0}^{\infty}\big(1-F_{\mathcal{Z}^2}(n)\big), \tag{3.6}$$

де $F_{\mathcal{Z}^2}$ позначає функцію розподілу випадкової величини $\mathcal{Z}^2$.
Зауваження 1. $F_{\mathcal{Z}^2}(n) = F(k), \quad k^2 \le n < (k+1)^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$
Оскільки випадкова величина $\mathcal{Z}$ невід'ємна і цілочисельна, то

$$\mathcal{Z}^2 \le n \iff \mathcal{Z} \le \sqrt{n} \iff \mathcal{Z} \le k, \qquad k^2 \le n < (k+1)^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Звідси й з означення функції розподілу маємо:

$$F_{\mathcal{Z}^2}(n) = \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z}^2 \le n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z} \le k\big\} = F(k), \qquad k^2 \le n < (k+1)^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

З (3.6) і зауваження 1, групуючи члени ряду, отримуємо (3.4):

$$\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \big(1 - F_{\mathcal{Z}^2}(n)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \big(1 - F(k)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\big(1 - F(k)\big).$$

Зазначимо, що оскільки ряд (3.6) складається з невід'ємних членів, то довільне його згрупування не впливає на суму цього ряду.

Нехай $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] < +\infty$.
Зауваження 2. $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \big(1 - F(k)\big) < +\infty.$
Згідно з теоремою 3.1 досить довести, що $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] < +\infty$. Оскільки $\mathcal{Z}$ невід'ємна цілочисельна випадкова величина, то:

$$0 \le \mathcal{Z} \le \mathcal{Z}^2 \implies \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] \le \mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] < +\infty.$$

З (3.4) та зауваження 2 отримуємо (3.5). $\square$

Зауваження 1. Нехай функція розподілу F невід'ємної цілочисельної дискретної випадкової величини $\mathcal{Z}$ задовільняє умову:

$$\exists n \in \mathbf{N}: \quad F(n) = 1.$$

Тоді за теоремами 3.1 і 3.2

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] &= \sum_{k=0}^{\infty}\big(1-F(k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1}\big(1-F(k)\big) < +\infty;\\
\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\big(1-F(k)\big) = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\big(1-F(k)\big) < +\infty;\\
\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big] &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\big(1-F(k)\big) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\big(1-F(k)\big)\right]^2.
\end{aligned}$$

Приклад 1. Нехай випадкова величина $\mathcal{Z}$ визначається ймовірнісною функцією (геометричний розподіл)

$$\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{Z}=k\big\} = (1-q)q^k, \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots, \quad q\in(0,1).$$

Потрібно обчислити $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]$, $\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big]$, $\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]$.

Розв'язання. Згідно з умовою

$$F_{\mathcal{Z}}(k) = \sum_{j=0}^{k}(1-q)q^j = 1-q^{k+1}, \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

Отже, застосовуючи теореми 3.1 і 3.2, маємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} = \frac{q}{1-q};\\
\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big] &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q^{k+1} = 2q^2\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1} + \frac{q}{1-q} =\\
&= 2q^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}q^k\right)'_q + \frac{q}{1-q} = \frac{2q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{1-q} = \frac{q+q^2}{(1-q)^2};\\
\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big] &= \frac{q+q^2}{(1-q)^2} - \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 = \frac{q}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Інші характеристики таблиці життя

Означення 4.1. ***Повною очікуваною тривалістю життя*** особи (x) називається

$$\mathring{e}_x = \mathsf{E}\big[T(x)\big], \quad x \ge 0.$$

Теорема 4.1. (про повну очікувану тривалість життя)

$$\mathring{e}_x = \mathsf{E}\big[T(x)\big] = \int\limits_0^\infty {}_tp_x \ dt.$$

Доведення. Випливає з теореми про математичне сподівання невід'ємної неперервної випадкової величини, оскільки

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - F_{T(x)}(t).$$

□

Теорема 4.2. (про дисперсію майбутньої тривалості життя)

$$\mathsf{E}\big[T^2(x)\big] = 2\int\limits_0^\infty t\,{}_tp_x\,dt.$$

Нехай $\mathsf{E}\big[T^2(x)\big] < +\infty$. *Тоді* $\mathring{e}_x < +\infty$ *і справедлива рівність:*

$$\mathsf{Var}\big[T(x)\big] = 2\int\limits_0^\infty t\,{}_tp_x\,dt - \left(\mathring{e}_x\right)^2.$$

Доведення. Випливає з теореми про дисперсію невід'ємної неперервної випадкової величини, оскільки

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - F_{T(x)}(t).$$

□

Зауваження 1. Нехай $\exists h > 0 : {}_hq_x = 1$. Застосовуючи теореми 4.1 і 4.2, отримуємо:

$$\mathring{e}_x = \mathsf{E}\big[T(x)\big] = \int\limits_0^h {}_tp_x \ dt < +\infty;$$

$$\mathsf{E}\big[T^2(x)\big] = 2\int\limits_0^h t\,{}_tp_x \ dt < +\infty;$$

$$\mathsf{Var}\big[T(x)\big] = 2\int\limits_0^h t\,{}_tp_x \ dt - \left(\mathring{e}_x\right)^2.$$

Означення 4.2. ***Цілою очікуваною тривалістю життя*** особи (x) називається

$$e_x = \mathsf{E}\big[K(x)\big], \quad x \geq 0.$$

Теорема 4.3. (про цілу очікувану тривалість життя)

$$e_x = \mathsf{E}\big[K(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{k}p_x \,.$$

Доведення. Випливає з теореми про математичне сподівання невід'ємної дискретної цілочисельної випадкової величини, оскільки

$${}_{k+1}p_x = 1 - {}_{k+1}q_x = 1 - F_{K(x)}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

□

Теорема 4.4. (про дисперсію цілочисельної майбутньої тривалості життя)

$$\mathsf{E}\big[K^2(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\, {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\, {}_{k}p_x \,.$$

Нехай $\mathsf{E}\big[K^2(x)\big] < +\infty$*. Тоді* $e_x < +\infty$ *і справедлива рівність:*

$$\mathsf{Var}\big[K(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\, {}_{k+1}p_x - e_x^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\, {}_{k}p_x - e_x^2.$$

Доведення. Випливає з теореми про дисперсію невід'ємної дискретної цілочисельної випадкової величини, оскільки

$${}_{k+1}p_x = 1 - {}_{k+1}q_x = 1 - F_{K(x)}(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

□

Зауваження 2. Нехай $\exists n \in \mathbf{N} : {}_{n}q_x = 1$. Застосовуючи теореми 4.3 і 4.4, отримуємо:

$$e_x = \mathsf{E}\big[K(x)\big] = \sum_{k=0}^{n-2} {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n-1} {}_{k}p_x < +\infty;$$

$$\mathsf{E}\big[K^2(x)\big] = \sum_{k=0}^{n-2}(2k+1)\, {}_{k+1}p_x = \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\, {}_{k}p_x < +\infty;$$

$$\mathsf{Var}\big[K(x)\big] = \sum_{k=0}^{n-2}(2k+1)\, {}_{k+1}p_x - (e_x)^2 = \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)\, {}_{k}p_x - (e_x)^2.$$

Означення 4.3. Очікувана кількість років, яку проживають (разом) особи з групи l_0 новонароджених на проміжку $[x, x+t]$, $t > 0$, позначається ${}_t\mathcal{L}_x$. Якщо $t = 1$, то ${}_1\mathcal{L}_x = \mathcal{L}_x$.

Означення 4.4. Очікувана кількість років, яку проживають особи з групи l_0 новонароджених, починаючи від x років, тобто на проміжку $[x, +\infty)$, позначається $\mathcal{T}_x$. Отже,

$$\mathcal{T}_x = \lim_{t\to+\infty} {}_t\mathcal{L}_x\,. \tag{4.1}$$

Теорема 4.5. (про властивості ${}_t\mathcal{L}_x$)

(i) ${}_t\mathcal{L}_x$ *неспадна як функція від* t *на* $[0, +\infty)$;

(ii) *Нехай* $s(x) = 0$. *Тоді* $\forall t > 0 \;\; {}_t\mathcal{L}_x = 0$.

(iii) *Нехай* $\exists h > 0 : \; s(x+h) = 0$. *Тоді* $\forall t \geq h \;\; {}_t\mathcal{L}_x = {}_h\mathcal{L}_x$.

(iv) $\forall t, u > 0 \quad {}_{t+u}\mathcal{L}_x = {}_t\mathcal{L}_x + {}_u\mathcal{L}_{x+t}$.

Доведення. *1-й спосіб:* (i) Випливає з самого означення 4.3. Справді, нехай $0 \leq t < u$. Тоді внесок до ${}_t\mathcal{L}_x$ особи, що не доживає до віку $x+t$, збігається із внеском цієї особи до ${}_u\mathcal{L}_x$. Тоді як внесок до ${}_t\mathcal{L}_x$ особи, що доживає до віку $x+t$, завжди не більше, ніж внесок цієї особи до ${}_u\mathcal{L}_x$. Отже, ${}_t\mathcal{L}_x \leq {}_u\mathcal{L}_x$.

(ii) Випливає з того, що $l_x = l_0 s(x) = 0$. Внесок до ${}_t\mathcal{L}_x$ кожної особи з групи l_x дорівнює 0.

(iii) Випливає з того, що $l_{x+h} = l_0 s(x+h) = 0$. Внесок до ${}_h\mathcal{L}_x$ кожної особи з групи l_x збігається із внеском цієї особи до ${}_t\mathcal{L}_x$ $(t > h)$.

(iv) Особа, що не доживає до віку $x+t$, дає однакові внески до ${}_{t+u}\mathcal{L}_x$ та ${}_t\mathcal{L}_x$, і не дає жодного внеску до ${}_u\mathcal{L}_{x+t}$. Натомість внесок до ${}_{t+u}\mathcal{L}_x$ особи, що доживає до віку $x+t$, можна подати у вигляді суми внесків цієї особи до ${}_t\mathcal{L}_x$ (тобто t) та до ${}_u\mathcal{L}_{x+t}$.

2-й спосіб: Пункт (iii) випливає з пунктів (ii) і (iv):

$$\forall t, h \geq 0 \quad \Big(t > h \implies {}_t\mathcal{L}_x = {}_h\mathcal{L}_x + {}_{t-h}\mathcal{L}_{x+h} = {}_h\mathcal{L}_x\Big).$$

Пункт (i) випливає з пункту (iv):

$$\forall t, h \geq 0 \quad \Big(t > h \implies {}_t\mathcal{L}_x = {}_h\mathcal{L}_x + {}_{t-h}\mathcal{L}_{x+h} \geq {}_h\mathcal{L}_x\Big),$$

оскільки згідно з означенням 4.3

$$\forall t, x \geq 0 \quad {}_t\mathcal{L}_x \geq 0.$$

Занумеруємо $1, 2, \ldots, l_0$ новонароджених з групи l_0, позначимо X_j випадкову величиину тривалості життя новонародженої особи j і визначимо випадкову величину ${}_{x|t}Y_j$ її тривалості життя на проміжку між x і $x + t$:

$$ {}_{x|t}Y_j = \begin{cases} 0, & X_j \le x \\ X_j - x, & x < X_j \le x + t \\ t, & X_j \le x + t \end{cases} $$

Тоді згідно з означенням 4.3 маємо:

$$ {}_t\mathcal{L}_x = \mathsf{E}\left[\sum_{j=1}^{l_0} {}_{x|t}Y_j\right] = \sum_{j=1}^{l_0} \mathsf{E}\left[{}_{x|t}Y_j\right]. \tag{4.2} $$

Оскільки

$$ \mathsf{E}\left[{}_{x|t}Y_j\right] \le t\mathsf{Pr}\{X_j > x\} = ts(x), \quad j = 1, \ldots, l_0, $$

то з (4.2) отримуємо твердження пункту (ii):

$$ 0 \le {}_t\mathcal{L}_x \le l_0 s(x) = 0 \implies {}_t\mathcal{L}_x = 0. $$

Згідно з означенням випадкових величин ${}_{x|t}Y_j$, маємо:

$$ {}_{x|t+u}Y_j - {}_{x|t}Y_j = \begin{cases} 0, & X_j \le x \\ 0, & x < X_j \le x + t \\ X_j - x - t, & x + t < X_j \le x + t + u \\ u, & X_j \le x + t + u \end{cases} = $$

$$ = \begin{cases} 0, & X_j \le x + t \\ X_j - (x + t), & x + t < X_j \le x + t + u \\ u, & X_j \le x + t + u \end{cases} = {}_{x+t|u}Y_j. $$

Звідси й з (4.2) отримуємо твердження пункту (iv):

$$ {}_{t+u}\mathcal{L}_x = \sum_{j=1}^{l_0} \mathsf{E}\left[{}_{x|t+u}Y_j\right] = \sum_{j=1}^{l_0} \mathsf{E}\left[{}_{x|t}Y_j + {}_{x+t|u}Y_j\right] = $$

$$ = \sum_{j=1}^{l_0} \mathsf{E}\left[{}_{x|t}Y_j\right] + \sum_{j=1}^{l_0} \mathsf{E}\left[{}_{x+t|u}Y_j\right] = {}_t\mathcal{L}_x + {}_u\mathcal{L}_{x+t}. $$

□

Наслідок 4.5.1. (про властивості $\mathcal{T}_x$)

(i) $\mathcal{T}_x = \lim\limits_{n\to\infty} {}_x\mathcal{L}_n = \sup\limits_{n>0} {}_n\mathcal{L}_x$.

(ii) *Нехай* $s(x) = 0$. *Тоді* $\mathcal{T}_x = 0$.

(iii) *Нехай* $s(x+h) = 0$. *Тоді* $\mathcal{T}_x = {}_h\mathcal{L}_x$.

(iv) $\forall t > 0 \quad \mathcal{T}_x = {}_t\mathcal{L}_x + \mathcal{T}_{x+t}$.

Доведення. (i) Перша рівність випливає з критерію існування границі монотонної функції в термінах послідовностей. Друга рівність випливає з теореми про границю монотонної послідовності.

(ii) Випливає з твердження (ii) теореми 4.5 і означення (4.1) $\mathcal{T}_x$.

(iii) Випливає з твердження (iii) теореми 4.5 і означення (4.1) $\mathcal{T}_x$.

(iv) Випливає з твердження (iv) теореми 4.5 і означення (4.1) $\mathcal{T}_x$. □

Теорема 4.6. (формули для ${}_t\mathcal{L}_x$)

$$ {}_t\mathcal{L}_x = tl_{x+t} - \int\limits_0^t u\,dl_{x+u}; \tag{4.3} $$

$$ {}_t\mathcal{L}_x = \int\limits_0^t l_{x+u}\,du. \tag{4.4} $$

Нехай $s(x+u) > 0 \ \ \forall u \in [0,t)$. *Тоді*

$$ {}_t\mathcal{L}_x = tl_{x+t} + \int\limits_0^t ul_{x+u}\mu(x+u)\,du. \tag{4.5} $$

Доведення. Застосуємо поняття інтеграла Стільтьєса та теорему про зв'язок інтеграла Стільтьєса з інтегралом Рімана. Нехай

$$ P = \{0 = t_0 < \ldots < t_m = t\} $$

довільне розбиття відрізку $[0,t]$. Очікувана кількість смертей осіб з групи l_0 на проміжку $[x+t_{i-1}, x+t_i]$ становить

$$ l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}, \quad i = 1,\ldots,m. $$

Очікувана кількість років, яку проживають (разом) особи з групи l_0, що помирають на проміжку $[x+t_{i-1}, x+t_i]$, перебуває на проміжку

$$ \big[t_{i-1}(l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}),\, t_i(l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i})\big], \quad i = 1,\ldots,m. $$

Очікувана кількість років, яку проживають (разом) особи з групи l_0, що помирають на проміжку $[x, x+t]$, дорівнює ${}_t\mathcal{L}_x - tl_{x+t}$. Отже,

$$\sum_{i=1}^{m} t_{i-1}(l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}) \le {}_t\mathcal{L}_x - tl_{x+t} \le \sum_{i=1}^{m} t_i(l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}). \tag{4.6}$$

Зліва й справа в цих нерівностях стоять інтегральні суми Стільтьєса для інтеграла

$$\int_0^t f(u)\, dg(u), \quad f(u) = u, \quad g(u) = -l_{x+u}, \quad u \in [0, t]. \tag{4.7}$$

Оскільки функції $f(u) = u$, $g(u) = l_{x+u}$ монотонні й неперервні, то інтеграл Стільтьєса (4.7) для такої пари існує (для його існування досить неперервності однієї з них і монотонності другої). Отже,

$$\sum_{i=1}^{m} t_{i-1}(l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}) \to -\int_0^t u\, dl_{x+u}, \quad \lambda(P) \to 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_i(l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}) \to -\int_0^t u\, dl_{x+u}, \quad \lambda(P) \to 0.$$

Переходячи до границі в (4.6) при $\lambda(P) \to 0$, отримуємо рівність, еквівалентну (4.3):

$${}_t\mathcal{L}_x - tl_{x+t} = -\int_0^t u\, dl_{x+u}. \tag{4.8}$$

Інтегруючи частинами інтеграл Стільтьєса праворуч в (4.8), маємо:

$$\int_0^t u\, dl_{x+u} = ul_{x+u}\Big|_0^t - \int_0^t l_{x+u}\, du = tl_{x+t} - \int_0^t l_{x+u}\, du.$$

Звідси й з (4.8) отримуємо рівність (4.4). Оскільки функція l_{x+u} неперервна й кусково-гладка відносно u, що випливає з формули $l_{x+u} = l_0 s(x+u)$, то застосовуючи теорему про зв'язок інтеграла Стільтьєса з інтегралом Рімана і рівність

$$l'_{x+u} = -l_{x+u}\mu(x+u), \quad u \in [0, t),$$

маємо:

$$\int_0^t u\; dl_{x+u} = \int_0^t ul'_{x+u}\, du = -\int_0^t ul_{x+u}\mu(x+u)\, du. \tag{4.9}$$

З (4.8) і (4.9) отримуємо рівність (4.5). $\square$

Зауваження 3. У доведенні теореми 4.6 зокрема отримано, що очікувана кількість років, яку проживають особи з групи l_0 новонароджених на проміжку між x та $x+t$, які помирають на цьому проміжку, дорівнює:

$$-\int\limits_0^t u\,dl_{x+u} = \int\limits_0^t ul_{x+u}\mu(x+u)\,du.$$

Теорема 4.7. (формули для $\mathcal{T}_x$)

$$\mathcal{T}_x = \int\limits_0^\infty l_{x+t}\,dt; \tag{4.10}$$

$$\mathcal{T}_x = l_x \mathring{e}_x; \tag{4.11}$$

$$\mathcal{T}_x = -\int\limits_0^\infty t dl_{x+t}; \tag{4.12}$$

Нехай

$$s(x+t) > 0 \ \ \forall t > 0. \tag{4.13}$$

Тоді

$$\mathcal{T}_x = \int\limits_0^\infty t\,l_{x+t}\mu(x+t)\,dt. \tag{4.14}$$

Нехай

$$s(x+t) > 0 \ \ \forall t \in [0,h), \quad s(x+h) = 0. \tag{4.15}$$

Тоді

$$\mathcal{T}_x = \int\limits_0^h t\,l_{x+t}\mu(x+t)\,dt. \tag{4.16}$$

Доведення. Формулу (4.10) отримуємо з означення (4.1) $\mathcal{T}_x$ і формули (4.4):

$$\mathcal{T}_x = \lim_{t\to+\infty} {}_t\mathcal{L}_x = \lim_{t\to+\infty} \int\limits_0^t l_{x+u}\,du = \int\limits_0^\infty l_{x+t}\,dt.$$

За теоремою 4.1

$$\mathring{e}_x = \mathsf{E}\big[T(x)\big] = \int\limits_0^\infty {}_tp_x \ dt.$$

Звідси, використовуючи рівність

$$l_{x+t} = l_x \, {}_tp_x \,, \quad t \geq 0, \tag{4.17}$$

і формулу (4.10), отримуємо формулу (4.11):

$$\mathcal{T}_x = \int\limits_0^\infty l_{x+t}\, dt = l_x \int\limits_0^\infty {}_tp_x \; dt = l_x \mathsf{E}\big[T(x)\big] = l_x \overset{\circ}{e}_x .$$

За означенням математичного сподівання

$$\overset{\circ}{e}_x = \mathsf{E}\big[T(x)\big] = \int\limits_0^\infty t\, d\, {}_tq_x \,. \tag{4.18}$$

Звідси, використовуючи рівність (4.17) і формулу (4.11), отримуємо формулу (4.12):

$$\mathcal{T}_x = l_x \overset{\circ}{e}_x = l_x \int\limits_0^\infty t\, d\, {}_tq_x \; = -l_x \int\limits_0^\infty t\, d\, {}_tp_x \; = -\int\limits_0^\infty t\, dl_{x+t} .$$

Формулу (4.14) отримуємо з (4.18) і, з урахуванням умови (4.13), формули

$$(\, {}_tq_x \,)'_t = \, {}_tp_x \, \mu(x+t), \quad t \geq 0.$$

Формулу (4.16) отримуємо з (4.18) і, з урахуванням умови (4.15), формули

$$(\, {}_tq_x \,)'_t = \begin{cases} {}_tp_x \, \mu(x+t), & t \in [0, h) \\ 0, & t \geq h \end{cases}$$

□

Означення 4.5. Середня кількість років, яку проживає особа з групи $l_x > 0$ на проміжку між x та $x+n$ називається ***n-річною (обмеженою) повною очікуваною тривалістю життя*** особи (x) і позначається

$$\overset{\circ}{e}_{x:\,\overline{n|}} = \frac{{}_n\mathcal{L}_x}{l_x} .$$

Наслідок 4.7.1. (формула для $\overset{\circ}{e}_{x:\,\overline{n|}}$)

$$\overset{\circ}{e}_{x:\,\overline{n|}} = \int\limits_0^n {}_tp_x \; dt.$$

Доведення. Випливає з формули (4.4):

$$\mathring{e}_{x:\overline{n}|} = \frac{\int_0^n l_{x+t}\,dt}{l_x} = \int\limits_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x}\,dt = \int\limits_0^n {}_tp_x\,dt.$$

□

Означення 4.6. ***Центральним коефіцієнтом смертності*** на проміжку між x та $x+1$ називається

$$m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{\mathcal{L}_x} = \frac{\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}\,dt}.$$

Зауваження 4. m_x — це *середня очікувана кількість смертей на проміжку між x та $x+1$, яка припадає на один рік*, прожитий в цьому проміжку групою новонароджених осіб l_0 (тобто очікувана кількість смертей на проміжку між x та $x+1$, поділена на очікувану кількість прожитих років у цьому проміжку цією групою). Аналогічно визначається *середня очікувана кількість смертей на проміжку між x та $x+n$, яка припадає на один рік*,

$${}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{{}_n\mathcal{L}_x} = \frac{\int_0^n l_{x+t}\mu(x+t)\,dt}{\int_0^n l_{x+t}\,dt}.$$

Означення 4.7. Середня очікувана кількість років, яку проживають особи з групи l_x на проміжку між x та $x+1$, які помирають на цьому проміжку, позначається

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{\int_0^1 t l_{x+t}\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt}. \tag{4.19}$$

Теорема 4.8. (формули для $\mathfrak{a}(x)$)

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{\mathcal{L}_x - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}} = \frac{\mathcal{L}_x - l_{x+1}}{d_x}; \tag{4.20}$$

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{\int_0^1 t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt}; \tag{4.21}$$

$$\mathfrak{a}(x) = \mathsf{E}\big[T(x) \mid T(x) < 1\big]. \tag{4.22}$$

Доведення. Формула (4.20) випливає з (4.9) і формули (теорема про зв'язок l_x з функцією виживання і силою смертності)

$$l_x - l_{x+1} = \int_0^1 l_{x+t}\mu(x+t)\,dt.$$

Формула (4.21) випливає з (4.19) і формули

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}.$$

Для виведення формули (4.22) обчислимо функцію розподілу $T(x)$, $T(x) < 1$:

$$F_{T(x)|T(x)<1}(t) = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \le t \mid T(x) < 1\big\} = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{{}_tq_x}{q_x}, & 0 \le t < 1, \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

Оскільки ця функція розподілу неперервна й кусково гладка, то

$$\mathsf{E}\big[T(x) \mid T(x) < 1\big] = \int_0^1 t \left(\frac{{}_tq_x}{q_x}\right)'_t dt =$$

$$= \frac{1}{q_x}\int_0^1 t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \frac{\int_0^1 t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt}{\int_0^1 {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt} = \mathfrak{a}(x).$$

□

Зауваження 5. Якщо випадкова величина $\mathcal{D}_x$ кількості смертей на проміжку між x та $x+1$ розподілена рівномірно, тобто її щільність стала (отже, дорівнює d_x)

$$l_{x+t}\mu(x+t) = d_x, \quad t \in (0,1),$$

то

$$\mathfrak{a}(x) = \frac{\int_0^1 t\,dt}{\int_0^1 dt} = \frac{1}{2}.$$

Розділ 3

Припущення для нецілих значень віку особи

3.1 Лінійна інтерполяція

Означення 1.1. Припущення ***лінійної інтерполяції***:

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1), \quad 0 \le t \le 1, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Припущення лінійної інтерполяції називається також припущенням про ***рівномірний розподіл смертей*** (протягом року).

Теорема 1.1. (про основні характеристики для припущення лінійної інтерполяції) *За припущення лінійної інтерполяції:*

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= tq_x; \\
{}_tp_x &= 1 - tq_x; \\
\mu(x+t) &= \frac{q_x}{1-tq_x}; \\
{}_tp_x\,\mu(x+t) &= q_x; \\
{}_{1-t}q_{x+t} &= \frac{(1-t)q_x}{1-tq_x}; \\
{}_yq_{x+t} &= \frac{yq_x}{1-tq_x};
\end{aligned}$$

де $0 \le t \le 1, \quad 0 \le y \le 1-t, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$

Доведення. За припущення лінійної інтерполяції

$$\frac{s(x+t)}{s(x)} = (1-t) + t\frac{s(x+1)}{s(x)} = 1 - t + tp_x = 1 - tq_x; \tag{1.1}$$

$$s'(x+t) = -s(x) + s(x+1) = -s(x)\left(1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}\right) = -s(x)q_x. \tag{1.2}$$

Використовуючи (1.1) і (1.2), отримуємо:

$$\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{s(x+t)}{s(x)} = 1 - tq_x; && (1.3)\\
{}_tq_x &= 1 - {}_tp_x = 1 - (1 - tq_x) = tq_x; && (1.4)\\
\mu(x+t) &= -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = \frac{s(x)q_x}{s(x+t)} = \frac{q_x}{1 - tq_x}; && (1.5)\\
{}_tp_x\,\mu(x+t) &= (1 - tq_x)\frac{q_x}{1 - tq_x} = q_x; && (1.6)\\
{}_{1-t}q_{x+t} &= \frac{q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x} = \frac{(1-t)q_x}{1 - tq_x}; && (1.7)\\
{}_yq_{x+t} &= \frac{{}_{t+y}q_x - {}_tq_x}{{}_tp_x} = \frac{yq_x}{1 - tq_x}. && (1.8)
\end{aligned}$$

Рівність (1.3) отримуємо з теореми про зв'язок ${}_tp_x$ з функцією виживання $s(x)$. Рівність (1.4) отримуємо з означення ${}_tp_x$. Рівність (1.5) випливає з теореми про формули для сили смертності (формула зв'язку з функцією виживання). Рівність (1.6) випливає з рівностей (1.3) і (1.5). Рівності (1.7) і (1.8) отримуємо з теореми про зображення ${}_yq_{x+t}$. □

Вправа 1. *Який вигляд має графік функції виживання на кожному відрізку*

$$[x, x+1], \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

(відрізок прямої, опукла вгору функція, опукла вниз функція, жоден з цих трьох)?

Означення 1.2. Нехай $x = 0, 1, 2, \ldots$. Визначимо випадкову величину

$$S(x) = T(x) - K(x)$$

дробової частини (року) майбутньої тривалості життя особи (x) (частина року, яку проживає особа (x) протягом свого останнього року життя).

Зауваження 1. З означення $S(x)$ випливає, що ця випадкова величина набуває значення з відрізку $[0, 1]$.

Теорема 1.2. (про дробову частину року майбутньої тривалості життя) *За припущення лінійної інтерполяції*

(i) *випадкові величини $K(x)$ та $S(x)$ — незалежні;*

(ii) *випадкова величина $S(x)$ рівномірно розподілена на відрізку* $[0, 1]$;

(iii) $\overset{\circ}{e}_x = e_x + \dfrac{1}{2}$;

(iv) $\mathsf{Var}\big[T(x)\big] = \mathsf{Var}\big[K(x)\big] + \dfrac{1}{12}$.

Доведення. (i),(ii) Розглянемо спільний розподіл $K(x)$ та $S(x)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big\{\big(K(x)=k\big)\wedge\big(S(x)\le s\big)\big\} &= \mathsf{Pr}\big\{k\le T(x)\le k+s\big\} = \\ &= \mathsf{Pr}\big\{k< T(x)\le k+s\big\} = {}_{k|s}q_x \;=\; {}_kp_x\;{}_sq_{x+k} \;=\; {}_kp_x\, sq_{x+k} = \\ &= s\;{}_{k|}q_x \;=\; s\,\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\},\quad 0\le s\le 1,\quad k=0,1,2,\ldots. \end{aligned}\tag{1.9}$$

Перша рівність випливає з означення випадкових величин $K(x)$ і $S(x)$. Друга рівність випливає з неперервності випадкової величини $T(x)$. Четверту й шосту рівності отримуємо з наслідку теореми про зв'язок ${}_{t|u}q_x$ з функцією виживання. П'ята рівність випливає з теореми **??** (припущення лінійної інтерполяції). Сьому рівність отримуємо з означення випадкової величини $K(x)$.

Оскільки ймовірність $\mathsf{Pr}\big\{\big(K(x)=k\big)\wedge\big(S(x)\le s\big)\big\}$ розпадається в добуток двох функцій — однієї лише від k, другої лише від s, то звідси отримуємо і незалежність випадкових величин $K(x)$ та $S(x)$, і формулу для функції розподілу випадкової величини $S(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{S(x)\le s\big\} = s,\quad s\in[0,1].\tag{1.10}$$

Можна міркувати інакше. Спершу отримаємо формулу (1.10), використовуючи (1.9) та цілочисельність та невід'ємність випадкової величини $K(x)$:

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big\{S(x)\le s\big\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{Pr}\big\{\big(K(x)=k\big)\cap\big(S(x)\le s\big)\big\} = \\ &= s\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = s,\quad 0\le s\le 1.\end{aligned}$$

Звідси отримуємо незалежність випадкових величин $K(x)$ та $S(x)$, знову застосовуючи (1.9) і формулу (1.10), оскільки:

$$\mathsf{Pr}\big\{\big(K(x)=k\big)\wedge\big(S(x)\le s\big)\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\}\;\mathsf{Pr}\big\{S(x)\le s\big\},\quad 0\le s\le 1,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

(iii) За твердженням пункту (ii) маємо:

$$\mathsf{E}\big[S(x)\big] = \int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\overset{\circ}{e}_x = \mathsf{E}\big[T(x)\big] = \mathsf{E}\big[K(x)\big] + \mathsf{E}\big[S(x)\big] = e_x + \frac{1}{2}.$$

(iv) За твердженням пункту (i) маємо:

$$\mathsf{Var}\big[T(x)\big] = \mathsf{Var}\big[K(x) + S(x)\big] = \mathsf{Var}\big[K(x)\big] + \mathsf{Var}\big[S(x)\big].$$

Використовуючи твердження пунктів (ii) і (iii), отримуємо:

$$\mathsf{Var}\big[S(x)\big] = \int\limits_0^1 s^2\,ds - \big(\mathsf{E}\big[S(x)\big]\big)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[T(x)\big] = \mathsf{Var}\big[K(x)\big] + \frac{1}{12}.$$

□

3.2 Експоненційна інтерполяція

Означення 2.1. Припущення ***експоненційної інтерполяції***:

$$\ln s(x+t) = (1-t)\ln s(x) + t\ln s(x+1), \quad 0 \le t \le 1, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Припущення експоненційної інтерполяції називається також припущенням лінійної інтерполяції для $\ln s(x)$, або припущенням ***сталої сили смертності***.

Теорема 2.1. (про основні характеристики для припущення експоненційної інтерполяції) *За припущення експоненційної інтерполяції справедливі формули:*

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= 1 - p_x^t;\\
{}_tp_x &= p_x^t;\\
\mu(x+t) &= -\ln p_x;\\
{}_tp_x\,\mu(x+t) &= -p_x^t \ln p_x;\\
{}_{1-t}q_{x+t} &= 1 - p_x^{1-t};\\
{}_yq_{x+t} &= 1 - p_x^y;
\end{aligned}$$

де $0 \le t \le 1, \quad 0 \le y \le 1-t, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$

Доведення. За припущення експоненційної інтерполяції

$$\frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{s^{1-t}(x)s^t(x+1)}{s(x)} = \left[\frac{s(x+1)}{s(x)}\right]^t = p_x^t; \tag{2.1}$$

$$\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = -\ln s(x) + \ln s(x+1) = \ln\frac{s(x+1)}{s(x)} = \ln p_x. \tag{2.2}$$

Використовуючи (2.1) і (2.2), отримуємо:

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = p_x^t; \tag{2.3}$$

$$ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - p_x^t; \tag{2.4}$$

$$\mu(x+t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = -\ln p_x; \tag{2.5}$$

$$ {}_tp_x\,\mu(x+t) = -p_x^t \ln p_x; \tag{2.6}$$

$$ {}_{1-t}q_{x+t} = 1 - \frac{p_x}{{}_tp_x} = 1 - p_x^{1-t}; \tag{2.7}$$

$$ {}_yq_{x+t} = 1 - \frac{{}_{y+t}p_x}{{}_tp_x} = 1 - p_x^y. \tag{2.8}$$

Рівність (2.3) отримуємо з теореми про зв'язок ${}_tp_x$ з функцією виживання $s(x)$. Рівність (2.4) отримуємо з означення ${}_tp_x$. Рівність (2.5) випливає з теореми про формули для сили смертності (формула зв'язку з функцією виживання). Рівність (2.6) випливає з рівностей (2.3) і (2.5). Рівності (2.7) і (2.8) отримуємо з теореми про зображення ${}_yq_{x+t}$. □

Вправа 1. *Який вигляд має графік функції виживання на кожному відрізку*

$$[x, x+1], \quad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

(відрізок прямої, опукла вгору функція, опукла вниз функція, жоден з цих трьох)?

3.3 Гармонійна інтерполяція

Означення 3.1. Припущення ***гармонійної інтерполяції***:

$$\frac{1}{s(x+t)} = (1-t)\frac{1}{s(x)} + t\frac{1}{s(x+1)}, \quad 0 \le t \le 1, \quad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Припущення гармонійної інтерполяції називається також ***припущенням Бальдуччі***.

Теорема 3.1. (про основні характеристики для припущення гармонійної інтерполяції) *За припущення гармонійної інтерполяції справедливі формули:*

$$\begin{aligned}
{}_tq_x &= \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x};\\
{}_tp_x &= \frac{p_x}{1-(1-t)q_x};\\
\mu(x+t) &= \frac{q_x}{1-(1-t)q_x};\\
{}_tp_x\,\mu(x+t) &= \frac{q_xp_x}{[1-(1-t)q_x]^2};\\
{}_{1-t}q_{x+t} &= (1-t)q_x;\\
{}_yq_{x+t} &= \frac{yq_x}{1-(1-t-y)q_x};
\end{aligned}$$

де $0 \le t \le 1, \quad 0 \le y \le 1-t, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$

Доведення. За припущення гармонійної інтерполяції

$$\frac{s(x)}{s(x+t)} = 1-t+t\frac{s(x)}{s(x+1)} = 1-t+\frac{t}{p_x} = \\ = \frac{(1-t)p_x+t}{p_x} = \frac{1-(1-t)q_x}{p_x}. \quad (3.1)$$

$$-\frac{s'(x+t)}{s^2(x+t)} = -\frac{1}{s(x)} + \frac{1}{s(x+1)} = \frac{1}{s(x)}\left(-1+\frac{s(x)}{s(x+1)}\right) = \\ = \frac{1}{s(x)}\left(-1+\frac{1}{p_x}\right) = \frac{q_x}{s(x)p_x}. \quad (3.2)$$

Використовуючи (3.1) і (3.2), отримуємо:

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{p_x}{1-(1-t)q_x}; \quad (3.3)$$

$${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - \frac{p_x}{1-(1-t)q_x} = \\ = \frac{1-(1-t)q_x-p_x}{1-(1-t)q_x} = \frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}; \quad (3.4)$$

$$\mu(x+t) = -\frac{s'(x+t)}{s(x+t)} = s(x+t)\frac{q_x}{s(x)p_x} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}; \quad (3.5)$$

$${}_tp_x\,\mu(x+t) = \frac{q_xp_x}{[1-(1-t)q_x]^2}; \quad (3.6)$$

$$
{}_{1-t}q_{x+t} = 1 - \frac{p_x}{{}_tp_x} = 1 - \bigl(1 - (1-t)q_x\bigr) = (1-t)q_x; \tag{3.7}
$$

$$
{}_yq_{x+t} = 1 - \frac{{}_{t+y}p_x}{{}_tp_x} = 1 - \frac{1-(1-t)q_x}{1-(1-t-y)q_x} = \\
= \frac{yq_x}{1-(1-t-y)q_x}. \tag{3.8}
$$

Рівність (3.3) отримуємо з теореми про зв'язок ${}_tp_x$ з функцією виживання $s(x)$. Рівність (3.4) отримуємо з означення ${}_tp_x$. Рівність (3.5) випливає з теореми про формули для сили смертності (формула зв'язку з функцією виживання). Рівність (3.6) випливає з рівностей (3.3) і (3.5). Рівності (3.7) і (3.8) отримуємо з теореми про зображення ${}_yq_{x+t}$. □

Вправа 1. *Який вигляд має графік функції виживання на кожному відрізку*

$$
[x, x+1], \quad x = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots
$$

(відрізок прямої, опукла вгору функція, опукла вниз функція, жоден з цих трьох)?

Література

[1] *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial mathematics*, Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries, 1979, 622 p.

[2] *Billingsley P. Probability and Measure*, New York: John Wiley & Sons, 1986, 753 p.

[3] *Підкуйко С.І. Математичний аналіз*, Т. 1. Львів: Галицька Видавнича Спілка, 2004, 544 с.

Навчальне видання

ПІДКУЙКО Сергій Іванович

Вступ до актуарної математики

Навчальний посібник

Редагування *Н. Й. Плиса*
Комп'ютерний набір і верстання *С. І. Підкуйко*

Підп. до друку ??.??.2022. Формат ??×??/??
Папір друк. Друк офсет. Гарнітура TEX
Умовн. друк. арк. 3,78. Обл.-вид. арк. ??,??.
Тираж ??? прим.

Видавець та виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

СВІДОЦТВО
про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.