Серія «Актуарна і фінансова математика»

С. І. Підкуйко

Актуарна математика: страхування життя

Страхові угоди з негайними виплатами
Страхові угоди з виплатами в кінці року
Страхові угоди з виплатами в кінці m-періоду

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2022

УДК 517
ББК 22.16
П 32

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. Дільний В.М. (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка);
д-р екон. наук, проф. Заболоцький Т.М. (Львівський національний університет імені Івана Франка);
к-т фіз.-мат. наук Каплан Богдан (Страхова компанія ТАС)

Рекомендовано Вченою Радою
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
Протокол № 10 від 24.06.2022

Серія «Актуарна і фінансова математика»

Підкуйко С. І.
П32 Страхування життя : навчальний посібник. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2022. — 261 с.

Навчальний посібник присвячено одному з основних розділів актуарної математики — страхуванню життя. Розглянуто загальне поняття страхування життя, основні його властивості (функції розподілу, зв'язок актуарних теперішніх вартостей, рекурентні формули). Розглянуто основні типи страхових угод — з негайними виплатами (неперервні страхові угоди), з виплатами в кінці року і в кінці періоду — інтервалу розбиття (дискретні страхові угоди). Для кожного з цих типів страхування життя доведено серію теорем, пов'язаних з їх ймовірнісними характеристиками. Наведено приклади обчислень актуарних теперішніх вартостей страхування життя.

Для студентів фізико-математичних та технічних спеціальностей.

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-617-10-0721-5

Зміст

Вступ

Страхові системи створюються для зменшення несприятливих наслідків випадкових подій певного типу. Учасники цих систем використовують моделі корисності для визначення своїх уподобань (преференцій), стохастичні моделі для відображення невизначеності фінансових наслідків та економічні принципи при ціноутворенні.

Моделі страхування життя призначені для зменшення несприятливих наслідків випадкової події, якою є смерть особи (зазвичай несвоєчасна або передчасна).

Розділ 1

Страхові угоди з негайними виплатами

1.1 Загальне поняття страхування життя з негайною виплатою

1.1.1 Означення

В моделях страхування життя, які розглядаються у цьому розділі, величина та час виплати за страховою угодою залежать лише від довжини інтервалу з моменту укладання угоди до моменту смерті застрахованої особи. Ці моделі називаються *моделями страхування життя з негайними виплатами*, оскільки виплата здійснюється негайно (відразу) в момент настання страхової події (в момент смерті застрахованої особи).

Модель страхування життя визначається двома функціями:

- *функцією відшкодування* (*функцією винагороди*, *функцією страхових виплат*)

$$b_t, \quad t \geq 0;$$

- *функцією дисконтування*

$$v_t, \quad t \geq 0.$$

У цій моделі v_t позначає дисконтний множник (множник дисконтування) від часу виплати назад до часу укладання угоди. Параметр t позначає довжину інтервалу від моменту укладання угоди до моменту настання страхової події. У випадку моделі страхування життя *на дожиття* (*на доживання*) t може бути більшим за довжину інтервалу від моменту укладання угоди до моменту виплати. Величина b_t — це виплата, яку здійснює страхова організація в момент часу $x+t$ згідно з укладеною страховою угодою з особою (x).

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат (відшкодувань)* z_t за формулою

$$z_t = b_t v_t, \quad t \geq 0.$$

Отже, z_t — це теперішня вартість майбутнього відшкодування (виплати) згідно з укладеною угодою з особою (x). Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Z = Z(x)$, яка називається *теперішньою вартістю втрат* (страхової організації) або *теперішньою вартістю страхування (життя)*:

$$Z(x) = z_{T(x)} = b_{T(x)} v_{T(x)}, \tag{1.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Математичне сподівання теперішньої вартості втрат $Z = Z(x)$

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \int\limits_0^\infty z_t f_{T(x)}(t)\,dt = \int\limits_0^\infty b_t v_t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\,dt$$

називається *актуарною теперішньою вартістю страхування (життя)* або *актуарною теперішньою вартістю втрат* (страхової організації). Залежно від вигляду функцій відшкодування й дисконтування отримуємо різні типи угод страхування життя (наприклад, пожиттєве, строкове, відкладене пожиттєве, відкладене строкове тощо).

Зауваження 1. Зазвичай на функцію відшкодування b_t накладають умови невід'ємності й кускової неперервності, а на функцію дисконтування v_t умови додатності, неперервності й кускової гладкості.

Зауваження 2. Позначимо

$$\delta_t = -\frac{v_t'}{v_t}, \quad t \geq 0.$$

Тоді

$$v_t = e^{-\int\limits_0^t \delta_s ds}, \quad t \geq 0.$$

Отже, формула для актуарної теперішньої вартості страхування набуває вигляду

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^\infty b_t e^{-\int\limits_0^t \delta_s ds}\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\,dt.$$

Нехай $j \in \mathbf{N},\ j > 1$. Тоді j-ий момент $\mathsf{E}\big[Z^j\big]$ випадкової величини Z обчислюється за формулами:

$$\mathsf{E}\big[Z^j\big] = \int\limits_0^\infty z_t^j f_{T(x)}(t)\,dt = \int\limits_0^\infty b_t^j v_t^j\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty b_t^j e^{-\int\limits_0^t j\delta_s ds}\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt.$$

Отже, якщо функція відшкодування b_t задовільняє умову

$$b_t^j = b_t, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.2}$$

то *j-ий момент випадкової величини Z з параметром δ_t дорівнює актуарній теперішній вартості страхування з параметром $j\delta_t$*. Зазначимо, що умова (1.2) еквівалентна умові:

$$b_t \in \{0,1\}, \quad \forall t \geq 0.$$

Зауваження 3. Зазвичай функція дисконтування матиме вигляд:

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0,$$

де $v = const \in (0,1)$. Позначимо

$$\delta = -\ln v.$$

Тоді

$$\delta_t = -\frac{(v^t)'}{v^t} = -\ln v = \delta, \quad t \geq 0.$$

Відповідно формули для математичного сподівання Z та j-го момента Z набувають вигляду:

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^\infty b_t e^{-t\delta}\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt;$$

$$\mathsf{E}\big[Z^j\big] = \int\limits_0^\infty b_t^j e^{-t(j\delta)}\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt.$$

Означення 1.1. Параметр δ_t (відповідно δ) називається ***силою (інтенсивністю) відсотку (дисконту, відсоткової ставки, нарахування відсотку)***.

1.1.2 Властивості

Теорема 1.1. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей страхування) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Нехай функція відшкодування має таку властивість: для $l \in \mathbf{N}$ *відшкодування в момент часу*

$$x + l + t$$

для страхування особи у віці x *та у віці* $x+l$ *однакове, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid T(x) \geq l\big] = v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. \tag{1.4}$$

Доведення. Нехай $b_t,\ t \geq 0$, позначає функцію відшкодування для страхування особи у віці x. Тоді з (1.1) та умови теореми (1.3) маємо:

$$Z(x) = b_{T(x)} v^{T(x)}. \tag{1.5}$$

Згідно з умовою теореми функцією відшкодування для страхування особи у віці $x + l$ є $b_{t+l},\ t \geq 0$. Отже, згідно з (1.1) і (1.3) маємо:

$$Z(x+l) = b_{T(x+l)+l} v^{T(x+l)}. \tag{1.6}$$

<u>*1-й спосіб*</u>: Оскільки

$$T(x+l) = T(x) - l, \quad T(x) \geq l, \tag{1.7}$$

то використовуючи рівності (1.5) і (1.6), при $T(x) \geq l$ маємо:

$$Z(x) = b_{T(x)} v^{T(x)} = b_{T(x+l)+l} v^{T(x+l)+l} = v^l Z(x+l).$$

Звідси отримуємо (1.4).

<u>*2-й спосіб*</u>: З (1.7) отримуємо зв'язок між функціями розподілу випадкових величин $T(x+l)$ та $T(x),\ T(x) \geq l$.

$$\begin{aligned} F_{T(x+l)}(t) &= \mathsf{Pr}\big\{T(x+l) \leq t\big\} = \\ &= \mathsf{Pr}\big\{T(x) \leq t + l \mid T(x) \geq l\big\} = F_{T(x)|T(x)\geq l}(t+l), \quad t \geq l. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи означення математичного сподівання та рівності (1.5) і (1.6), отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid T(x) \ge l\big] = \int\limits_0^\infty b_t v^t \, dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t) =$$

$$= \int\limits_l^\infty b_t v^t \, dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t) = \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^{t+l} \, dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t+l) =$$

$$= v^l \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^t \, dF_{T(x+l)}(t) = v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big].$$

У другій рівності ми скористалися тим, що згідно з означенням функції розподілу

$$F_{T(x)|T(x)\ge l}(t) = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \le t \mid T(x) \ge l\big\} = 0, \quad t < l.$$

3-й спосіб: Використовуючи означення математичного сподівання, рівності (1.5) і (1.6), співвідношення

$${}_{t+l}p_x = {}_l p_x \; {}_t p_{x+l}$$

і формули щільностей

$$f_{T(x)}(t) = {}_t p_x \, \mu(x+t), \quad f_{T(x+l)}(t) = {}_t p_{x+l} \, \mu(x+l+t),$$

отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid T(x) \ge l\big] = \frac{1}{\mathsf{Pr}\big\{T(x) \ge l\big\}} \int\limits_l^\infty b_t v^t \, f_{T(x)}(t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{{}_l p_x} \int\limits_l^\infty b_t v^t \, {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt = \frac{1}{{}_l p_x} \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^{t+l} \, {}_{t+l} p_x \, \mu(x+t+l) \, dt =$$

$$= v^l \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^t \, {}_t p_{x+l} \, \mu(x+l+t) \, dt = v^l \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^t \, f_{T(x+l)}(t) \, dt =$$

$$= v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big].$$

□

Теорема 1.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування з негайною виплатою)) *За умов теореми 1.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \int\limits_0^l b_t v^t \, {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt + v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big], \tag{1.8}$$

де b_t, $t \ge 0$, позначає функцію відшкодування для страхування особи у віці x.

Доведення. *1-й спосіб*: З означення (1.1) та умов теореми отримуємо рівність (1.5). З цієї рівності та означення математичного сподівання маємо:

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid T(x) < l\big] = \frac{1}{\mathsf{Pr}\big\{T(x) < l\big\}} \int\limits_0^l b_t v^t \,{}_t p_x \,\mu(x+t)\, dt. \tag{1.9}$$

Використовуючи формулу для математичного сподівання в термінах умовних математичних сподівань (формулу повного математичного сподівання), рівності (1.4) і (1.9) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \mathsf{E}\big[Z(x) \mid T(x) < l\big]\mathsf{Pr}\big\{T(x) < l\big\} + \\ + \mathsf{E}\big[Z(x) \mid T(x) \geq l\big]\mathsf{Pr}\big\{T(x) \geq l\big\} = \\ = \int\limits_0^l b_t v^t \,{}_t p_x \,\mu(x+t)\, dt + v^l \,{}_l p_x \,\mathsf{E}\big[Z(x+l)\big].\end{aligned}$$

2-й спосіб: З означення (1.1) та умов теореми отримуємо рівності (1.5) і (1.6). З цих рівностей та означення математичного сподівання маємо:

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \int\limits_0^\infty b_t v^t \,{}_t p_x \,\mu(x+t)\, dt; \tag{1.10}$$

$$\mathsf{E}\big[Z(x+l)\big] = \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^t \,{}_t p_{x+l} \,\mu(x+l+t)\, dt. \tag{1.11}$$

Використовуючи (1.10), адитивність інтеграла, співвідношення

$${}_{t+l}p_x = {}_l p_x \; {}_t p_{x+l}\,,$$

та рівність (1.11), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[Z(x)\big] - \int\limits_0^l b_t v^t \,{}_t p_x \,\mu(x+t)\, dt = \int\limits_l^\infty b_t v^t \,{}_t p_x \,\mu(x+t)\, dt = \\ = \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^{t+l} \,{}_{t+l} p_x \,\mu(x+t+l)\, dt = \\ = v^l \,{}_l p_x \int\limits_0^\infty b_{t+l} v^t \,{}_t p_{x+l} \,\mu(x+l+t)\, dt = v^l \,{}_l p_x \,\mathsf{E}\big[Z(x+l)\big].\end{aligned}$$

Звідси випливає (1.8). □

1.2 Функція розподілу теперішньої вартості страхування

Теорема 2.1. (перша теорема про функцію розподілу Z) *Нехай функція теперішньої вартості виплат z_t задовільняє умови:*

(i) $z_t = 0, \quad t \in [0, l)$;

(ii) $z_t > 0, \quad t \in [l, +\infty)$;

(iii) z_t *неперервна на* $[l, +\infty)$;

(iv) z_t *спадає на* $[l, +\infty)$;

(v) $z_t \to 0, \ \ t \to +\infty$.

За теоремою про обернену функцію (до строго монотонної) існує обернена до z_t функція $\varphi(z)$,

$$\varphi : (0, z_l] \to [l, +\infty),$$

яка також строго спадає і неперервна. Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_l q_x\,, & z = 0 \\ {}_l q_x \ + \ {}_{\varphi(z)} p_x\,, & z \in (0, z_l) \\ 1, & z \geq z_l \end{cases} \tag{2.1}$$

Якщо $l = 0$, то

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ {}_{\varphi(z)} p_x\,, & z \in (0, z_l) \\ 1, & z \geq z_l \end{cases}$$

Доведення. За умовою теореми і означенням функції теперішньої вартості виплат

$$Z \in [0, z_l],$$

до того ж,

$$Z = 0 \iff T < l.$$

Отже,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_l q_x\,, & z = 0 \\ 1, & z \geq z_l \end{cases}$$

Нехай $z \in (0, z_l)$. За означенням оберненої функції $z_{\varphi(z)} = z$. За умовами теореми отримуємо:

$$Z > z \iff z_{T(x)} > z_{\varphi(z)} \iff l \le T(x) < \varphi(z).$$

Отже,

$$F_Z(z) = \mathsf{Pr}\big\{Z \le z\big\} = 1 - \mathsf{Pr}\big\{Z > z\big\} = 1 - \mathsf{Pr}\big\{l \le T(x) < \varphi(z)\big\} = \\ = \mathsf{Pr}\big\{T(x) < l\big\} + \mathsf{Pr}\big\{T(x) \ge \varphi(z)\big\} = {}_l q_x + {}_{\varphi(z)} p_x\,.$$

□

Наслідок 2.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості страхування. За умов теореми 2.1:*

(i) *Нехай ${}_l q_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0, {}_l q_x\,]\quad \xi_Z^p = 0$.*

(ii) *Нехай ${}_t p_x$ строго спадає на $[\alpha, \beta] \subset [l, +\infty)$. Тоді:*

 (а) $\xi_Z^{{}_l q_x + {}_\alpha p_x} = z_\alpha$;

 (б) $\forall p \in (\,{}_l q_x + {}_\beta p_x\,, {}_l q_x + {}_\alpha p_x\,)\quad \xi_Z^p$ *є розв'язком (який існує і єдиний) рівняння*

$${}_l q_x + {}_{\varphi(z)} p_x = p, \quad z \in (z_\beta, z_\alpha).$$

 Позначимо

$$t(p) = \Big(\,{}_l q_x + 1 - F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p) = \Big(F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(\,{}_l q_x + 1 - p)$$

 розв'язок рівняння

$${}_l q_x + {}_t p_x = p, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

 Тоді

$$\xi_Z^p = \varphi^{-1}\big(t(p)\big) = z_{t(p)}.$$

Доведення. (i) Випливає з теореми про процентиль (перше твердження), оскільки

$$F_Z(0_-) = 0, \quad F_Z(0) = {}_l q_x\,.$$

(ii) Зазначимо, що за побудовою відображення φ

$$\varphi(z_\alpha) = \alpha, \quad \varphi(z_\beta) = \beta. \tag{2.2}$$

З формули (2.1) маємо:

$$F_Z(z) = {}_l q_x + {}_{\varphi(z)} p_x\,, \quad z \in (0, z_l]. \tag{2.3}$$

Оскільки ${}_tp_x$ неперервна на $\mathbf{R}$ і строго спадає на $[\alpha, \beta]$, функція φ неперервна і строго спадає на $(0, z_l]$, то композиція цих функцій ${}_{\varphi(z)}p_x$, а отже й функція F_Z неперервна і строго зростає на $[z_\beta, z_\alpha]$, до того ж, враховуючи (2.2) і (2.3), маємо:

$$F_Z(z_\beta) = {}_lq_x + {}_\beta p_x\,, \quad F_Z(z_{\alpha-}) = F_Z(z_\alpha) = {}_lq_x + {}_\alpha p_x\,.$$

Звідси й з теореми про процентиль (третє й четверте твердження) випливають обидва твердження пункту (ii) наслідку. Зокрема,

$$\xi_Z^p = \left(F_Z\Big|_{(z_\beta, z_\alpha)}\right)^{-1}(p) = \left({}_lq_x + 1 - F_T \circ \varphi\Big|_{(z_\beta, z_\alpha)}\right)^{-1}(p) =$$

$$= \varphi^{-1} \circ \left(F_T\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}({}_lq_x + 1 - p) = \varphi^{-1}\big(t(p)\big) = z_{t(p)},$$

$$p \in ({}_lq_x + {}_\beta p_x\,, {}_lq_x + {}_\alpha p_x\,).$$

□

Теорема 2.2. (друга теорема про функцію розподілу Z) *Нехай функція теперішньої вартості виплат z_t задовільняє умови:*

(i) $z_t = 0, \quad t \in [0, l)$;

(ii) $z_t > 0, \quad t \in [l, \tau)$;

(iii) z_t *неперервна на* $[l, \tau)$;

(iv) z_t *спадає на* $[l, \tau)$;

(v) $z_t = 0, \quad t \in [\tau, +\infty)$.

За теоремою про обернену функцію (до строго монотонної) існує обернена до z_t на $[l, \tau)$ функція $\varphi(z)$,

$$\varphi : (c, z_l] \to [l, \tau), \quad c = \lim_{t \to \tau_-} z_t,$$

яка також строго спадає і неперервна. Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x + {}_\tau p_x\,, & 0 \le z \le c \\ {}_lq_x + {}_{\varphi(z)}p_x\,, & z \in (c, z_l) \\ 1, & z \ge z_l \end{cases} \tag{2.4}$$

Вправа 1. *Довести теорему 2.2.*

Наслідок 2.2.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості страхування. За умов теореми 2.2:*

(i) *Нехай* ${}_{l}q_x + {}_{\tau}p_x > 0$. *Тоді* $\forall p \in (0, {}_{l}q_x + {}_{\tau}p_x]$ $\xi_Z^p = 0$.

(ii) *Нехай* ${}_{t}p_x$ *строго спадає на* $[\alpha, \beta] \subset [l, \tau)$. *Тоді:*

(а) $\xi_Z^{{}_{l}q_x + {}_{\alpha}p_x} = z_\alpha$;

(б) $\forall p \in ({}_{l}q_x + {}_{\beta}p_x, {}_{l}q_x + {}_{\alpha}p_x)$ ξ_Z^p *є розв'язком (який існує і єдиний) рівняння*

$$ {}_{l}q_x + {}_{\varphi(z)}p_x = p, \quad z \in (z_\beta, z_\alpha). $$

Позначимо

$$ t(p) = \Big({}_{l}q_x + 1 - F_T\big|_{(\alpha,\beta)} \Big)^{-1}(p) = \Big(F_T\big|_{(\alpha,\beta)} \Big)^{-1}({}_{l}q_x + 1 - p) $$

розв'язок рівняння

$$ {}_{l}q_x + {}_{t}p_x = p, \quad t \in (\alpha, \beta). $$

Тоді

$$ \xi_Z^p = \varphi^{-1}\big(t(p)\big) = z_{t(p)}. $$

Вправа 2. *Довести наслідок 2.2.1.*

Теорема 2.3. (третя теорема про функцію розподілу Z) *Нехай функція теперішньої вартості виплат* z_t *задовільняє умови:*

(i) $z_t = 0, \quad t \in [0, l)$;

(ii) $z_t > 0, \quad t \in [l, \tau]$;

(iii) z_t *неперервна на* $[l, +\infty)$;

(iv) z_t *спадає на* $[l, \tau]$;

(v) $z_t = z_\tau, \quad t \geq \tau$.

За теоремою про обернену функцію (до строго монотонної) існує обернена до z_t *на* $[l, \tau]$ *функція* $\varphi(z)$,

$$ \varphi : [z_\tau, z_l] \to [l, \tau], $$

яка також строго спадає і неперервна. Тоді

$$ F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{l}q_x, & 0 \leq z < z_\tau \\ {}_{l}q_x + {}_{\varphi(z)}p_x, & z \in [z_\tau, z_l) \\ 1, & z \geq z_l \end{cases} \tag{2.5} $$

Якщо $l = 0$, *то*

$$ F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < z_\tau \\ {}_{\varphi(z)}p_x, & z \in [z_\tau, z_l) \\ 1, & z \geq z_l \end{cases} $$

Вправа 3. *Довести теорему 2.3.*

Наслідок 2.3.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості страхування. За умов теореми 2.3:*

(i) *Нехай ${}_lq_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0, {}_lq_x\,]\quad \xi_Z^p = 0$.*

(ii) *Нехай ${}_\tau p_x > 0$. Тоді $\forall p \in (\,{}_lq_x\,, {}_lq_x\, + {}_\tau p_x\,]\quad \xi_Z^p = z_\tau$.*

(iii) *Нехай ${}_tp_x$ строго спадає на $[\alpha, \beta] \subset [l, \tau]$. Тоді:*

(а) $\xi_Z^{{}_lq_x + {}_\alpha p_x} = z_\alpha$;

(б) $\forall p \in (\,{}_lq_x\, + {}_\beta p_x\,, {}_lq_x\, + {}_\alpha p_x\,)\quad \xi_Z^p$ *є розв'язком (який існує і єдиний) рівняння*

$$ {}_lq_x\, + {}_{\varphi(z)}p_x\, = p, \quad z \in (z_\beta, z_\alpha). $$

Позначимо

$$ t(p) = \Big(\,{}_lq_x\, + 1 - F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p) = \Big(F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(\,{}_lq_x\, + 1 - p) $$

розв'язок рівняння

$$ {}_lq_x\, + {}_tp_x\, = p, \quad t \in (\alpha, \beta). $$

Тоді

$$ \xi_Z^p = \varphi^{-1}\big(t(p)\big) = z_{t(p)}. $$

Вправа 4. *Довести наслідок 2.3.1.*

1.3 Пожиттєве страхування

1.3.1 Означення

При *пожиттєвому* (безтерміновому, безстроковому) *страхуванні життя з негайною виплатою* виплачується 1 в момент смерті застрахованої особи (x), коли б вона не настала.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$ \begin{aligned} b_t &= 1, \quad t \ge 0; \\ v_t &= v^t, \quad t \ge 0; \\ z_t &= v^t, \quad t \ge 0. \end{aligned} $$

Отже, *теперішня вартість втрат пожиттевого страхування життя з негайною виплатою* $Z = Z(x)$ має вигляд:

$$Z = v^T,$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттевого страхування життя з негайною виплатою позначається $\bar{A}_x$ і визначається формулою:

$$\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^\infty v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt.$$

Позначимо ${}^2\bar{A}_x$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^\infty v^{2t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = \int\limits_0^\infty e^{-(2\delta)t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2.$$

1.3.2 Властивості

Теорема 3.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x \,, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

Доведення. Випливає з першої теореми про функцію розподілу Z, оскільки функція теперішньої вартості виплат

$$z_t = v^t, \quad t \ge 0,$$

задовільняє умови:

(i) $z_t > 0, \quad t \in [0, +\infty)$;

(ii) z_t неперервна на $[0, +\infty)$;

(iii) z_t спадає на $[0, +\infty)$;

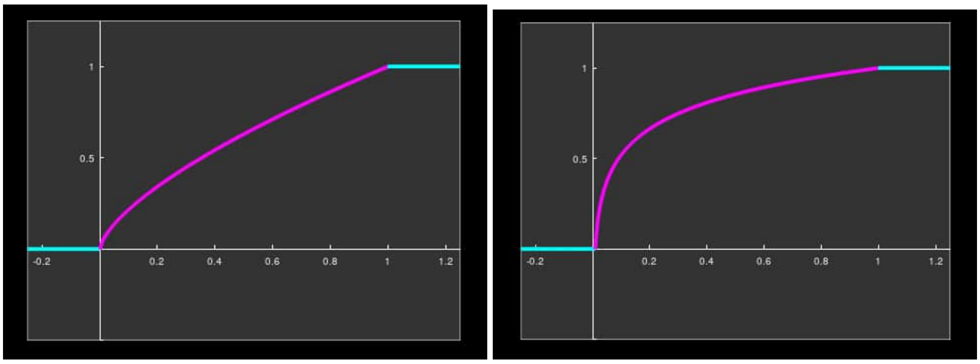
(iv) $z_t \to 0, \ \ t \to +\infty$;

(v) обернена до z_t функція $\varphi : (0,1] \to [0,+\infty)$ визначається формулою:

$$\varphi(z) = -\frac{\ln z}{\delta}.$$

$\square$

На малюнку 1.1 (стор.20) зображено приклади графіків функцій розподілу F_Z.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.1: Функція розподілу F_Z

Наслідок 3.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає p-ий процентиль теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою,* $p \in (0,1)$.

Нехай ${}_tp_x$ *строго спадає на* $[\alpha,\beta] \subset [0,+\infty)$. *Тоді:*

(i) $\xi_Z^{\,{}_\alpha p_x} = e^{-\delta\alpha}$;

(ii) $\forall p \in (\,{}_\beta p_x\,,\,{}_\alpha p_x\,)$ ξ_Z^p *є розв'язком рівняння*

$$F_Z(z) = {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = p, \quad z \in \left(e^{-\delta\beta}, e^{-\delta\alpha}\right),$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Z^p = e^{-\delta t(p)},$$

де

$$t(p) = \left(1 - F_T\big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p) = \left(F_T\big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(1-p).$$

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до першої теореми про функцію розподілу Z і теореми 3.1. □

Теорема 3.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування з негайною виплатою)

$$\bar{A}_x = \int_0^h v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt + v^h\, {}_hp_x\, \bar{A}_{x+h}, \quad h > 0.$$

Доведення. Випливає з (загальної) теореми про рекурентне співвідношення страхування життя з негайною виплатою. Перевіримо її умови. Позначимо $b_t, \widetilde{b}_t$ функції виплат для пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою осіб (x) та $(x+h)$ відповідно. Тоді згідно з означенням

$$\widetilde{b}_t = 1 = b_{t+h}, \quad t \geq 0.$$

□

Теорема 3.3. (про пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Тоді:

(i) $\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\dfrac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ z^{\frac{\mu}{\delta}}, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = p^{\frac{\delta}{\mu}}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = 2^{-\frac{\delta}{\mu}}.$$

Доведення. Згідно з умовою (3.1)

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{3.2} $$

(i) Отже, за означенням актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою, маємо:

$$ \bar{A}_x = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu\, dt = $$

$$ = -\frac{\mu}{\mu+\delta}\, e^{-(\mu+\delta)t} \Big|_0^\infty = \frac{\mu}{\mu+\delta}. $$

(ii) Використовуючи пункт (i), отримуємо:

$$ {}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta}. $$

Отже, за формулою дисперсії теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою маємо:

$$ \mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 = \frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2. $$

(iii) Це твердження отримуємо з теореми про функцію розподілу Z, оскільки:

$$ {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = e^{\frac{\ln z}{\delta}\mu} = z^{\frac{\mu}{\delta}}. $$

(iv) Згідно з (3.2) функція ${}_tp_x$ строго спадає на $[0,+\infty)$. Отже, за наслідком про процентиль для випадкової величини Z отримуємо, що

$$ \forall p \in (\, {}_{+\infty}p_x \,,\, {}_0p_x\,) = (0,1) $$

ξ_Z^p є розв'язком рівняння:

$$ z^{\frac{\mu}{\delta}} = p \implies \xi_Z^p = p^{\frac{\delta}{\mu}}. $$

□

Наслідок 3.3.1. (про пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для експоненційного розподілу) *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$ f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} $$

Тоді для особи (x), застрахованої пожиттєво:

(i) $\bar{A}_x = \dfrac{\lambda}{\lambda+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\lambda}{\lambda+2\delta} - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\delta}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ z^{\frac{\lambda}{\delta}}, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = p^{\frac{\delta}{\lambda}}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = 2^{-\frac{\delta}{\lambda}}.$$

Доведення. Випливає з теореми 3.3, оскільки $\forall x \ge 0$ випадкова величина $T(x)$ має сталу силу смертності

$$\mu(x+t) = \lambda, \quad t \ge 0.$$

□

Теорема 3.4. (про пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво з негайною виплатою, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \tag{3.3}$$

Тоді:

(i) $\bar{A}_x = \dfrac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{1-e^{-2\delta c}}{2\delta c} - \left(\dfrac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta c} \\ 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta c} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = e^{-\delta c(1-p)}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = e^{-\delta c/2}.$$

Доведення. Згідно з (3.3)

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0,c) \\ 1, & t \ge c \end{cases} \qquad {}_tp_x = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{c}, & t \in [0,c) \\ 0, & t \ge c \end{cases} \tag{3.4}$$

(i) Використовуючи (3.3) та формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою, отримуємо:

$$\bar{A}_x = \int_0^c e^{-\delta t}\frac{1}{c}\,dt = \frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}.$$

(ii) Оскільки, згідно з пунктом (i),

$${}^2\bar{A}_x = \frac{1-e^{-2\delta c}}{2\delta c},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2 = \frac{1-e^{-2\delta c}}{2\delta c} - \left(\frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right)^2.$$

(iii) Нехай $0 < z < 1$. Згідно з (3.4) отримуємо:

$${}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = \begin{cases} 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & -\frac{\ln z}{\delta} \in [0,c) \\ 0, & -\dfrac{\ln z}{\delta} \ge c \end{cases} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta c} < z < 1 \\ 0, & 0 < z \le e^{-\delta c} \end{cases}$$

Отже, за теоремою про функцію розподілу Z маємо:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta c} \\ 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta c} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

(iv) Згідно з (3.4) функція ${}_tp_x$ строго спадає на $[0, c]$. Отже, за наслідком про процентиль випадкової величини Z

$$\forall p \in (\, {}_cp_x \,,\, {}_0p_x \,) = (0, 1)$$

ξ_Z^p є розв'язком рівняння

$$1 + \frac{\ln z}{\delta c} = p, \quad z \in \left(e^{-\delta c}, 1\right) \implies \xi_Z^p = e^{-\delta c(1-p)}.$$

□

Наслідок 3.4.1. (про пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для розподілу де Муавра) *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Тоді для особи (x), застрахованої пожиттєво:

(i) $\bar{A}_x = \dfrac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{1 - e^{-2\delta(\omega - x)}}{2\delta(\omega - x)} - \left(\dfrac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta(\omega - x)} \\ 1 + \dfrac{\ln z}{\delta(\omega - x)}, & e^{-\delta(\omega - x)} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta(\omega - x)z}, & z \in [e^{-\delta(\omega - x)}, 1) \\ 0, & z \notin [e^{-\delta(\omega - x)}, 1) \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0, 1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = e^{-\delta(\omega - x)(1-p)}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = e^{-\delta(\omega - x)/2}.$$

Доведення. Випливає з теореми 3.4, оскільки $\forall x \in [0, \omega)$ випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega - x}, & t \in [0, \omega - x) \\ 0, & t \notin [0, \omega - x) \end{cases}$$

□

1.3.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x + t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) страхується пожиттєво з негайною виплатою $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 у випадку страхування однієї особи.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = Cv^T.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = C\bar{A}_x, \quad \mathsf{E}\big[Z^2\big] = C^2\, {}^2\bar{A}_x.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta}, \quad {}^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu + 2\delta}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^{0,95} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^{0,95}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\mathsf{E}[Z]^2} - 1} =$$
$$= \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^{0,95}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2\bar{A}_x}{(\bar{A}_x)^2} - 1} = 0,1645 \sqrt{\frac{(\mu+\delta)^2}{\mu(\mu+2\delta)} - 1}.$$

$$\xi_S^{0,95} = N\mathsf{E}[Z](1+\theta) = NC\bar{A}_x(1+\theta) =$$
$$= 1000\frac{\mu}{\mu+\delta}\left(1 + 0,1645\sqrt{\frac{(\mu+\delta)^2}{\mu(\mu+2\delta)} - 1}\right).$$

Відносне навантаження надійності θ_1 знаходимо з формули:

$$\theta_1 = \frac{\xi_Z^{0,95}}{C\bar{A}_x} - 1 = \frac{(0,95)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\bar{A}_x} - 1 = \frac{(0,95)^{\frac{\delta}{\mu}}(\mu+\delta)}{\mu} - 1.$$

Звідси отримуємо:

$$100\% \cdot \theta = 12,34\%;$$
$$\xi_S^{0,95} = 449,35;$$
$$100\% \cdot \theta_1 = 131,49\%.$$

□

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) страхується пожиттєво з негайною виплатою $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = Cv^T.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = C\bar{A}_x, \quad \mathsf{E}\big[Z^2\big] = C^2\,{}^2\bar{A}_x.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{A}_x = \frac{1 - e^{-80\delta}}{80\delta}, \quad {}^2\bar{A}_x = \frac{1 - e^{-160\delta}}{160\delta}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[I\big]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{\mathsf{E}\big[Z\big]^2} - 1} =$$

$$= \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{40\delta(1 - e^{-160\delta})}{(1 - e^{-80\delta})^2} - 1} = \frac{1,645}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{2,4(1 - e^{-9,6})}{(1 - e^{-4,8})^2} - 1}.$$

Отже,

$$N \geq (16,45)^2 \left[\frac{2,4(1 - e^{-9,6})}{(1 - e^{-4,8})^2} - 1\right] = 389,62 \implies N = 390.$$

Для $N = 100$ навантаження надійності (у відсотках) дорівнює:

$$100\% \cdot \theta = 100\% \cdot 0,1645 \sqrt{\frac{2,4(1 - e^{-9,6})}{(1 - e^{-4,8})^2} - 1} = 19,74\%.$$

$\square$

1.4 n-річне страхування

1.4.1 Означення

При *n-річному* (строковому n-річному) *страхуванні життя з негайною виплатою* виплачується 1 в момент смерті застрахованої особи (x), якщо вона настає протягом n років від моменту укладання страхової угоди, тобто на проміжку (півінтервалі) $[x, x+n)$. І не виплачується нічого, якщо особа (x) протягом цих n років залишається живою, тобто доживає до віку $x+n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} 1, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$
$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$
$$z_t = \begin{cases} v^t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат n-річного страхування життя з негайною виплатою* $Z = Z(x)$ має вигляд:

$$Z = \begin{cases} v^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n-річного страхування життя з негайною виплатою позначається $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt.$$

Позначимо ${}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^n e^{-(2\delta)t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}\big)^2. \tag{4.1}$$

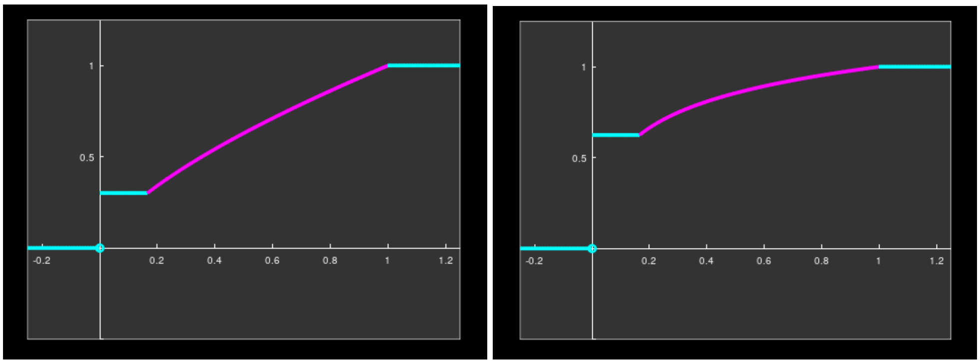
1.4.2 Властивості

Теорема 4.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_n p_x\,, & 0 \le z \le e^{-\delta n} \\ {}_{-\frac{\ln z}{\delta}} p_x\,, & e^{-\delta n} < z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 4.1.*

На малюнку 1.2 (стор.30) зображено приклади графіків функцій розподілу F_Z.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.2: Функція розподілу F_Z

Наслідок 4.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою, $p \in (0,1)$.*

(i) *Нехай ${}_n p_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0, {}_n p_x\,]$ $\xi_Z^p = 0$;*

(ii) *Нехай ${}_t p_x$ строго спадає на $[\alpha, \beta] \subset [0, n)$. Тоді:*

   (а) $\xi_Z^{{}_\alpha p_x} = e^{-\delta \alpha}$;

   (б) $\forall p \in (\,{}_\beta p_x\,,\, {}_\alpha p_x\,)$ ξ_Z^p *є розв'язком рівняння*

$$F_Z(z) = {}_{-\frac{\ln z}{\delta}} p_x = p, \quad z \in \left(e^{-\delta\beta}, e^{-\delta\alpha}\right),$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Z^p = e^{-\delta t(p)},$$

де

$$t(p) = \Big(1 - F_T\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p) = \Big(F_T\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(1-p).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 4.1.1.*

Теорема 4.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування з негайною виплатою)

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \int_0^h v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt + v^h\, {}_hp_x\, \bar{A}^1_{x+h:\,\overline{n-h}|}, \quad h \in (0,n).$$

Вправа 3. *Довести теорему 4.2.*

Теорема 4.3. (про зв'язок строкового страхування з пожиттєвим страхуванням)

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \bar{A}_x - v^n\, {}_np_x\, \bar{A}_{x+n}; \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}\big[Z\big] &= {}^2\bar{A}_x - \big(\bar{A}_x\big)^2 + 2v^n\, {}_np_x\, \bar{A}_x \bar{A}_{x+n} - \\ &- v^{2n}\, {}_np_x \Big({}^2\bar{A}_{x+n} + {}_np_x \big(\bar{A}_{x+n}\big)^2\Big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Доведення. Використовуючи означення $\bar{A}_x$, $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}$, адитивність інтеграла, заміну змінної $t = n + s$ та співвідношення

$${}_{n+s}p_x = {}_np_x\ {}_sp_{x+n}\,,$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} &= \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt - \int_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \\ &= \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int_0^\infty v^{n+s}\, {}_{n+s}p_x\, \mu(x+n+s)\, ds = \\ &= v^n\, {}_np_x \int_0^\infty v^s\, {}_sp_{x+n}\, \mu(x+n+s)\, ds = v^n\, {}_np_x\, \bar{A}_{x+n}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо (4.2). З рівності (4.2) зокрема маємо:

$$^2\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = {}^2\bar{A}_x - v^{2n}\,{}_np_x\,{}^2\bar{A}_{x+n};$$

Звідси, з (4.2) і з (4.1) отримуємо (4.3):

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}_x - v^{2n}\,{}_np_x\,{}^2\bar{A}_{x+n} - \big(\bar{A}_x - v^n\,{}_np_x\,\bar{A}_{x+n}\big)^2 = \\ = {}^2\bar{A}_x - \big(\bar{A}_x\big)^2 + 2v^n\,{}_np_x\,\bar{A}_x\bar{A}_{x+n} - \\ - v^{2n}\,{}_np_x\left({}^2\bar{A}_{x+n} + {}_np_x\,\big(\bar{A}_{x+n}\big)^2\right).\end{aligned}$$

□

Теорема 4.4. (про n-річне страхування життя з негайною виплатою для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої на n років з негайною виплатою,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{4.4}$$

Тоді:

(i) $\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{\mu\big(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{\mu+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\mu\big(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\big)}{\mu+2\delta} - \left(\dfrac{\mu\big(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{\mu+\delta}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ e^{-\mu n}, & 0 \leq z \leq e^{-\delta n} \\ z^{\frac{\mu}{\delta}}, & e^{-\delta n} < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ^p_Z випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi^p_Z = \begin{cases} 0, & p \in (0, e^{-\mu n}] \\ p^{\frac{\delta}{\mu}}, & p \in (e^{-\mu n}, 1) \end{cases} \tag{4.5}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi^{0,5}_Z = \begin{cases} 0, & \mu n \leq ln2 \\ 2^{-\frac{\delta}{\mu}}, & \mu n > \ln 2 \end{cases} \tag{4.6}$$

Доведення. Згідно з умовою (4.4)

$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{4.7}$$

(i) Отже, за означенням актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою, маємо:

$$\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int_0^n e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu\, dt =$$

$$= -\frac{\mu}{\mu+\delta}\, e^{-(\mu+\delta)t}\Big|_0^n = \frac{\mu\big(1-e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{\mu+\delta}.$$

(ii) Використовуючи пункт (i), отримуємо:

$${}^2\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mu\big(1-e^{-(\mu+2\delta)n}\big)}{\mu+2\delta}.$$

Отже, за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} - (\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|})^2 = \frac{\mu\big(1-e^{-(\mu+2\delta)n}\big)}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu\big(1-e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{\mu+\delta}\right)^2.$$

(iii) Випливає з (4.4) і теореми про функцію розподілу Z, оскільки:

$${}_np_x = e^{-\mu n}, \qquad {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = e^{\frac{\ln z}{\delta}\mu} = z^{\frac{\mu}{\delta}}.$$

(iv) Згідно з (4.7) функція ${}_tp_x$ має такі властивості:

(а) ${}_np_x = e^{-\mu n} > 0$;

(б) ${}_tp_x$ строго спадає на $[0,n)$.

Отже, за наслідком про процентиль випадкової величини Z отримуємо:

(1) $\forall p \in (0, e^{-\mu n}]\quad \xi^p_Z = 0$;

(2) $\forall p \in (\,{}_np_x\,,\,{}_0p_x\,) = \big(e^{-\mu n}, 1\big)\quad \xi^p_Z$ є розв'язком рівняння

$${}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = z^{\frac{\mu}{\delta}} = p, \quad z \in \big(e^{-\delta n}, 1\big) \implies \xi^p_Z = p^{\frac{\delta}{\mu}}.$$

Звідси отримуємо (4.5). Зокрема, оскільки

$$\mu n > \ln 2 \iff e^{-\mu n} < e^{-\ln 2} = 0,5,$$

то з (4.5) отримуємо (4.6). $\square$

Наслідок 4.4.1. (про n-річне страхування життя з негайною виплатою для експоненційного розподілу) *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Тоді для особи (x), застрахованої на n років:

(i) $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{\lambda\big(1 - e^{-(\lambda+\delta)n}\big)}{\lambda + \delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\lambda\big(1 - e^{-(\lambda+2\delta)n}\big)}{\lambda + 2\delta} - \left(\dfrac{\lambda\big(1 - e^{-(\lambda+\delta)n}\big)}{\lambda + \delta}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ e^{-\lambda n}, & 0 \leq z \leq e^{-\delta n} \\ z^{\frac{\lambda}{\delta}}, & e^{-\delta n} < z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ^p_Z випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi^p_Z = \begin{cases} 0, & p \in (0, e^{-n\lambda}] \\ p^{\frac{\delta}{\lambda}}, & p \in (e^{-n\lambda}, 1) \end{cases}$$

Зокрема, якщо $n\lambda > \ln 2$, то медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi^{0,5}_Z = 2^{-\frac{\delta}{\lambda}}.$$

Вправа 4. *Довести наслідок 4.4.1.*

Теорема 4.5. (про n-річне страхування життя з негайною виплатою для розподілу де Муавра) *Нехай для особи (x), застрахованої на $n < c$ років з негайною виплатою, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \tag{4.8}$$

Тоді:

(i) $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta c}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{1 - e^{-2\delta n}}{2\delta c} - \left(\dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta c}\right)^2$;

(iii) $$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \dfrac{n}{c}, & 0 \le z < e^{-\delta n} \\ 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta n} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, 1 - \dfrac{n}{c}\right] \\ e^{-\delta c(1-p)}, & p \in \left(1 - \dfrac{n}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{4.9}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & n \le c/2 \\ e^{-\delta c/2}, & n > c/2 \end{cases} \tag{4.10}$$

Доведення. Згідно з (4.8)

$$_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \ge c \end{cases} \qquad _tp_x = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \ge c \end{cases} \tag{4.11}$$

(i) Використовуючи (4.8) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою, отримуємо:

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \frac{1}{c}\, dt = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta c}.$$

(ii) Оскільки, згідно з пунктом (i),

$$^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-2\delta n}}{2\delta c},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатоюмаємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - (\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|})^2 = \frac{1 - e^{-2\delta n}}{2\delta c} - \left(\frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta c}\right)^2.$$

(iii) Згідно з (4.11) при $n < c$ отримуємо:

$$_np_x = 1 - \frac{n}{c}. \tag{4.12}$$

Оскільки

$$e^{-\delta n} \le z < 1 \iff 0 < -\frac{\ln z}{\delta} \le n,$$

то, враховуючи умову $n < c$, з (4.11) маємо:

$$_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = 1 + \frac{\ln z}{\delta c}. \tag{4.13}$$

Отже, за теоремою про функцію розподілу Z з (4.12) і (4.13) отримуємо твердження пункту (iii).

(iv) Згідно з (4.11), враховуючи нерівність $n < c$, функція $_tp_x$ має такі властивості:

(а) $_np_x = 1 - \dfrac{n}{c} > 0$;

(б) $_tp_x$ строго спадає на $[0, n]$.

Отже, за наслідком про процентиль випадкової величини Z отримуємо:

(1) $\forall p \in \left(0, 1 - \dfrac{n}{c}\right] \quad \xi_Z^p = 0$;

(2) $\forall p \in (\,_np_x\,,\,_0p_x\,) = \left(1 - \dfrac{n}{c}, 1\right) \quad \xi_Z^p$ є розв'язком рівняння

$$F_Z(z) = 1 + \frac{\ln z}{\delta c} = p, \quad z \in \left(e^{-\delta n}, 1\right) \implies \xi_Z^p = e^{-\delta c(1-p)}.$$

Звідси отримуємо (4.9). Зокрема, оскільки

$$n > c/2 \iff 1 - \frac{n}{c} < 0{,}5,$$

то з (4.9) отримуємо (4.10). □

Наслідок 4.5.1. (про n-річне страхування життя з негайною виплатою для розподілу де Муавра) *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Тоді для особи (x), застрахованої на $n < \omega - x$ років:

(i) $\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta(\omega - x)}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{1 - e^{-2\delta n}}{2\delta(\omega - x)} - \left(\dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta(\omega - x)}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \dfrac{n}{\omega - x}, & 0 \le z < e^{-\delta n} \\ 1 + \dfrac{\ln z}{\delta(\omega - x)}, & e^{-\delta n} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, \dfrac{n}{\omega - x}\right] \\ e^{-\delta(\omega - x)(1-p)}, & p \in \left(\dfrac{n}{\omega - x}, 1\right) \end{cases}$$

Зокрема, якщо $n > (\omega - x)/2$, то медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & n \le (\omega - x)/2 \\ e^{-\delta(\omega - x)/2}, & n > (\omega - x)/2 \end{cases}$$

Вправа 5. *Довести наслідок 4.5.1.*

1.4.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x + t) = \mu = 0,04, \quad t \ge 0$;

(iii) страхується на n років з негайною виплатою $C = 10$, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 у випадку страхування однієї особи.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = \begin{cases} Cv^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = C\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}, \quad \mathsf{E}\big[Z^2\big] = C^2\, {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mu\big(1 - e^{-n(\mu+\delta)}\big)}{\mu + \delta} = 0,4\big(1 - e^{-0,1n}\big); \tag{4.14}$$

$${}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mu\big(1 - e^{-n(\mu+2\delta)}\big)}{\mu + 2\delta} = 0,25\big(1 - e^{-0,16n}\big). \tag{4.15}$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{\mathsf{E}\big[Z\big]^2} - 1} =$$

$$= \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}}{(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|})^2} - 1} = 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}}{(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|})^2} - 1}.$$

$$\xi_S^{0,95} = N\mathsf{E}\big[Z\big](1+\theta) = NC\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}(1+\theta) =$$

$$= 1000\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} \left(1 + 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}}{(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|})^2} - 1}\right).$$

Відносне навантаження надійності θ_1 знаходимо з формули:

$$\theta_1 = \frac{\xi_Z^{0,95}}{C\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}} - 1 = \begin{cases} -1, & n \leq -\frac{1}{\mu}\ln 0,95 \\ \dfrac{(0,95)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}} - 1, & n > -\frac{1}{\mu}\ln 0,95 \end{cases}$$

Звідси, враховуючи (4.14) і (4.15), отримуємо:

n	5	7	15	30	50	60
$C\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}\rvert}$	1.57	2.01	3.11	3.80	3.97	3.99
ξ	212.66	260.19	370.23	433.00	447.22	448.57
θ	35.12%	29.21%	19.14%	13.92%	12.56%	12.42%
θ_1	488.32%	359.83%	197.97%	143.62%	133.06%	132.06%

□

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) страхується на n років з негайною виплатою $C = 10$, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = \begin{cases} Cv^T, & T < n, \\ 0, & T \geq n. \end{cases}$$

Отже,

$$\mathsf{E}[Z] = C\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}\rvert}, \quad \mathsf{E}[Z^2] = C^2\,{}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}\rvert}.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}\rvert} = \frac{1 - e^{-n\delta}}{80\delta} = \frac{1 - e^{-0,06n}}{4,8}; \tag{4.16}$$

$$
{}^2\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1-e^{-2n\delta}}{160\delta} = \frac{1-e^{-0,12n}}{9,6}. \tag{4.17}
$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$
\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\mathsf{E}[Z]^2} - 1} = \frac{1,645}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}}{(\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|})^2} - 1}.
$$

Отже, з нерівності $\theta \le 0,1$ отримуємо:

$$
N \ge (16,45)^2 \left[\frac{{}^2\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}}{(\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|})^2} - 1 \right].
$$

Звідси, враховуючи (4.16) і (4.17), маємо:

n	5	7	15	30	50	60
$C\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}$	0.54	0.71	1.24	1.74	1.98	2.03
N	4092	2868	1269	637	447	416
θ	63.96%	53.55%	35.62%	25.22%	21.14%	20.38%

□

1.5 Страхування на дожиття

1.5.1 Означення

При *n-річному страхуванні на дожиття (на доживання)* виплачується 1 в момент $x+n$, якщо застрахована особа (x) залишається живою протягом n років, тобто на проміжку (півінтервалі) $[x, x+n)$. І не виплачується нічого, якщо вона не доживає до віку $x+n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$
b_t = \begin{cases} 0, & t < n \\ 1, & t \ge n \end{cases}
$$

$$
v_t = v^n, \quad t \ge 0;
$$

$$
z_t = \begin{cases} 0, & t < n \\ v^n, & t \ge n \end{cases}
$$

Отже, *теперішня вартість втрат n-річного страхування на дожиття (на доживання)* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & T < n \\ v^n, & T \geq n \end{cases}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n-річного страхування на дожиття (на доживання) позначається $A_{x:\,\overset{\,1}{\overline{n|}}}$ і визначається формулою:

$$A_{x:\,\overset{\,1}{\overline{n|}}} = \mathsf{E}\big[Z\big] = v^n \, {}_n p_x \; = \; {}_n E_x \, .$$

Позначимо ${}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n|}}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2A_{x:\,\overset{\,1}{\overline{n|}}} = e^{-(2\delta)n} \, {}_n p_x \; = v^{2n} \, {}_n p_x \, .$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] \, = \, {}^2A_{x:\,\overset{\,1}{\overline{n|}}} - \big(A_{x:\,\overset{\,1}{\overline{n|}}}\big)^2 = v^{2n} \, {}_x p_n \, - v^{2n} \big(\, {}_x p_n \, \big)^2 = v^{2n} \, {}_x p_n \, {}_x q_n \, .$$

Оскільки

$$Z \in \{0, v^n\}, \quad Z = v^n \iff T \geq n,$$

то функція розподілу Z має вигляд:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_n q_x \, , & 0 \leq z < v^n \\ 1, & z \geq v^n \end{cases} \tag{5.1}$$

1.5.2 Властивості

Зауваження 1. При обчисленні математичного сподівання і дисперсії випадкової величини Z, а також її функції розподілу, можна міркувати дещо інакше. Нехай I позначає індикатор події, що особа (x) доживає до віку $x + n$:

$$I = \begin{cases} 0, & T < n \\ 1, & T \geq n \end{cases}$$

Тоді

$$Z = v^n I.$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[I\big] \, = \, {}_x p_n \, , \quad \mathsf{Var}\big[I\big] \, = \, {}_x p_n \, - \big(\, {}_x p_n \, \big)^2 \, = \, {}_x p_n \, {}_x q_n \, ,$$

то

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = v^n \mathsf{E}\big[I\big] = v^n\, {}_x p_n\,,$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = v^{2n}\mathsf{Var}\big[I\big] = v^{2n}\, {}_x p_n\, - (v^n\, {}_x p_n\,)^2 = {}^2A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} - \big(A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}\big)^2.$$

Функція розподілу I має вигляд:

$$F_I(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_n q_x\,, & 0 \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

Отже,

$$F_Z(z) = \mathsf{Pr}\big\{Z \le z\big\} = \mathsf{Pr}\left\{I \le \frac{z}{v^n}\right\} = F_I\left(\frac{z}{v^n}\right).$$

Звідси приходимо до формули (5.1).

Вправа 1. *Довести, що:*

(i) ${}_n q_x\, < 1 \implies \forall p \in (\,{}_n q_x\,, 1) \quad \xi_Z^p = v^n$;

(ii) ${}_n q_x\, > 0 \implies \forall p \in (0,\, {}_n q_x\,] \quad \xi_Z^p = 0.$

Теорема 5.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування на дожиття)

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} = v^h\, {}_h p_x\, A_{x+h:\,\overset{1}{\overline{n-h}|}} = {}_h E_x\, A_{x+h:\,\overset{1}{\overline{n-h}|}} = \\ = A_{x:\,\overset{1}{\overline{h}|}} A_{x+h:\,\overset{1}{\overline{n-h}|}}, \quad h \in (0, n). \quad (5.2)$$

Вправа 2. *Довести теорему 5.1.*

Зауваження 2. Формулу (5.2) можна подати у вигляді:

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{t+s}|}} = A_{x:\,\overset{1}{\overline{t}|}}\, A_{x+t:\,\overset{1}{\overline{s}|}}, \quad {}_{t+s}E_x\, = \,{}_t E_x\, {}_s E_{x+t}\,, \quad x, t, s \ge 0.$$

Теорема 5.2. (про страхування на дожиття для сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x), *застрахованої на дожиття на* n *років,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \ge 0. \quad (5.3)$$

Тоді:

(i) $A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} = e^{-(\mu+\delta)n}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = e^{-2(\mu+\delta)n}(e^{\mu n} - 1)$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\mu n}, & 0 \le z < e^{-\delta n} \\ 1, & z \ge e^{-\delta n} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0, 1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Z^p *випадкової величини* Z *дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, 1 - e^{-\mu n}] \\ e^{-\delta n}, & p \in (1 - e^{-\mu n}, 1) \end{cases} \tag{5.4}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & \mu n \ge \ln 2 \\ e^{-\delta n}, & \mu n < \ln 2 \end{cases} \tag{5.5}$$

Доведення. Згідно з умовою (5.3)

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \quad {}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

(i) Отже, за означенням

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \, {}_np_x = e^{-(\mu+\delta)n}.$$

(ii) Використовуючи пункт (i), отримуємо:

$${}^2A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = e^{-(\mu+2\delta)n}.$$

Отже, за формулою дисперсії теперішньої вартості страхування на дожиття маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = v^{2n} \, {}_np_x \, {}_nq_x = e^{-2\delta n} e^{-\mu n}(1 - e^{-\mu n}) = e^{-2(\mu+\delta)n}(e^{\mu n} - 1).$$

(iii) Випливає з (5.3) і теореми про функцію розподілу Z.

(iv) Формулу (5.4) отримуємо з твердження пункту (iii) і нерівностей:

$$0 < {}_nq_x = 1 - e^{-\mu n} < 1.$$

Оскільки

$$\mu n < \ln 2 \iff 1 - e^{-\mu n} < 0,5,$$

то з (5.4) отримуємо (5.5). □

Вправа 3. *Нехай випадкова величина* X *має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), *застрахованої на дожиття на* n *років, обчислити:*

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}}; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ p \in (0, 1).$$

Теорема 5.3. (про страхування на дожиття для випадку рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої на дожиття на $n < \omega - x$ років,*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \notin [0, c) \end{cases} \tag{5.6}$$

Тоді:

(i) $A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = e^{-\delta n}\left(1 - \dfrac{n}{c}\right)$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = e^{-2\delta n}\left(1 - \dfrac{n}{c}\right)\dfrac{n}{c}$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta n} \\ \dfrac{n}{c}, & e^{-\delta n} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0, 1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, \dfrac{n}{c}\right] \\ e^{-\delta n}, & p \in \left(\dfrac{n}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{5.7}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & n \ge 0,5c \\ e^{-\delta n}, & n < 0,5c \end{cases} \tag{5.8}$$

Вправа 4. *Довести теорему 5.3.*

Вправа 5. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на дожиття на $n < \omega - x$ років, обчислити:

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}}; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \;\; p \in (0, 1).$$

1.5.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \quad t \geq 0$;

(iii) страхується на дожиття на n років з виплатою $C = 10$, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 у випадку страхування однієї особи.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$CA_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$	ξ	θ	θ_1
20	1.35	159.98	18.21%	122.55%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) страхується на дожиття на n років з виплатою $C = 10$, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$CA^{\ 1}_{x:\overline{n}\rvert}$	θ	N
20	2.26	9.50%	91

1.6 Мішане страхування

1.6.1 Означення

При *n-річному мішаному страхуванні з негайною виплатою* виплачується 1 в момент смерті застрахованої особи (x), якщо вона не доживає до віку $x+n$, або в момент $x+n$, якщо застрахована особа (x) залишається живою протягом n років. Таке страхування є поєднанням звичайного (строкового) n-річного страхування і n-річного страхування на дожиття.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = 1, \quad t \geq 0;$$

$$v_t = \begin{cases} v^t, & t < n \\ v^n, & t \geq n \end{cases}$$

$$z_t = \begin{cases} v^t, & t < n \\ v^n, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат n-річного мішаного страхування з негайною виплатою* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} v^T, & T < n \\ v^n, & T \geq n \end{cases} \tag{6.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n-річного мішаного страхування життя з негайною виплатою позначається $\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\; dt + v^n \, {}_np_x \; = \\ = \int\limits_0^n e^{-\delta t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\; dt + e^{-\delta n} \, {}_np_x \,.$$

Позначимо ${}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^n e^{-(2\delta)t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t)\; dt + e^{-(2\delta)n} \, {}_np_x \,.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \big(\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}\big)^2 \tag{6.2}$$

1.6.2 Властивості

Теорема 6.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta n} \\ 1 - F_T\left(-\frac{\ln z}{\delta}\right), & e^{-\delta n} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta n} \\ {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x \,, & e^{-\delta n} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 6.1.*

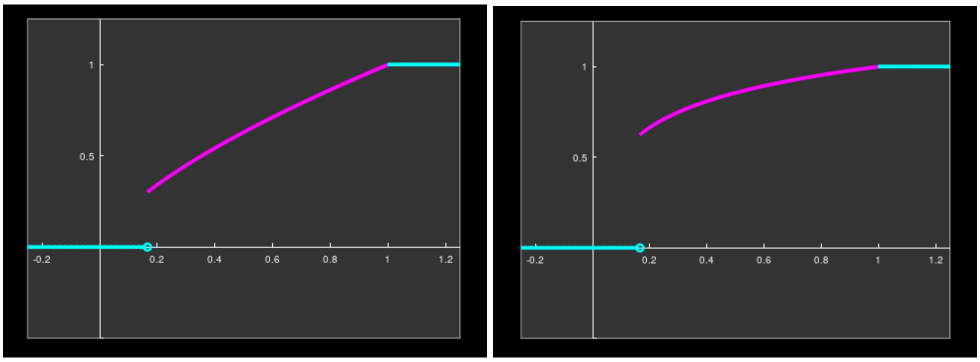
На малюнку 1.3 (стор.48) зображено приклади графіків функцій розподілу F_Z.

Наслідок 6.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою, $p \in (0,1)$.*

(i) *Нехай ${}_np_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0,\, {}_np_x\,]$ $\quad \xi_Z^p = e^{-\delta n}$;*

(ii) *Нехай ${}_tp_x$ строго спадає на $[\alpha, \beta] \subset [0, n]$. Тоді:*

(a) $\xi_Z^{\,{}_\alpha p_x} = e^{-\delta\alpha}$;



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.3: Функція розподілу F_Z

(б) $\forall p \in (\,{}_{\beta}p_x\,,\,{}_{\alpha}p_x\,)$ ξ_Z^p *є розв'язком рівняння*

$$F_Z(z) = {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = p, \quad z \in \left(e^{-\delta\beta}, e^{-\delta\alpha}\right),$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Z^p = e^{-\delta t(p)},$$

де

$$t(p) = \Big(1 - F_T\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p) = \Big(F_T\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(1-p).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 6.1.1.*

Теорема 6.2. (про зв'язок мішаного страхування з n-річним страхуванням і страхуванням на дожиття)

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}; \tag{6.3}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} - \big(A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}\big)^2 + {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}\big)^2 - 2A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}. \tag{6.4}$$

Доведення. Згідно з означенням (6.1)

$$Z = Z_1 + Z_2, \tag{6.5}$$

де

$$Z_1 = \begin{cases} 0, & T < n, \\ v^n, & T \geq n, \end{cases} \qquad Z_2 = \begin{cases} v^T, & T < n, \\ 0, & T \geq n. \end{cases}$$

З (6.5) отримуємо рівність (6.3):

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \mathsf{E}\big[Z_1\big] + \mathsf{E}\big[Z_2\big] = \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}}.$$

Звідси, зокрема, маємо:

$${}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = {}^2A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}} + {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|},$$

Отже, використовуючи формулу (6.2), отримуємо рівність (6.4):

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big] = \big({}^2A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}} + {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}\big) - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}}\big)^2 = \\ = {}^2A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}} - \big(A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}}\big)^2 + {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}\big)^2 - 2A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}}\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}.\end{aligned}$$

Цю формулу можна отримати інакше. З (6.5) маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big] = \mathsf{Var}\big[Z_1\big] + \mathsf{Var}\big[Z_2\big] + 2\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big] = \\ = {}^2A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}} - \big(A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}}\big)^2 + {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}\big)^2 + 2\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big].\end{aligned} \quad (6.6)$$

Оскільки $Z_1 Z_2 = 0$, то

$$\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big] = \mathsf{E}\big[Z_1 Z_2\big] - \mathsf{E}\big[Z_1\big]\mathsf{E}\big[Z_2\big] = -A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}}\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

Звідси й з (6.6) отримуємо (6.4). □

Теорема 6.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість мішаного страхування з негайною виплатою)

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + v^h\,{}_hp_x\,\bar{A}_{x+h:\,\overline{n-h}|}, \quad h \in (0, n).$$

Доведення. Використовуючи (6.3) і рекурентні співвідношення на актуарні теперішні вартості n-річного страхування та страхування на дожиття, отримуємо:

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overset{\;1}{\overline{n}|}} = \\ = \int\limits_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + v^h\,{}_hp_x\,\bar{A}^1_{x+h:\,\overline{n-h}|} + v^h\,{}_hp_x\,A_{x+h:\,\overset{\;1}{\overline{n-h}|}} = \\ = \int\limits_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + v^h\,{}_hp_x\left(\bar{A}^1_{x+h:\,\overline{n-h}|} + A_{x+h:\,\overset{\;1}{\overline{n-h}|}}\right) =\end{aligned}$$

$$= \int_0^h v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt + v^h \, {}_hp_x \, \bar{A}_{x+h:\,\overline{n-h|}}.$$

□

Теорема 6.4. (про мішане страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності)) *Нехай для особи* (x), *застрахованої мішано на* n *років з негайною виплатою,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{6.7}$$

Тоді:

(i) $\bar{A}_{x:\,\overline{n|}} = \dfrac{\mu + \delta e^{-(\mu+\delta)n}}{\mu+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\mu + 2\delta e^{-(\mu+2\delta)n}}{\mu+2\delta} - \left(\dfrac{\mu + \delta e^{-(\mu+\delta)n}}{\mu+\delta}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta n} \\ z^{\frac{\mu}{\delta}}, & e^{-\delta n} \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Z^p *випадкової величини* Z *дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} e^{-\delta n}, & p \in (0, e^{-\mu n}] \\ p^{\frac{\delta}{\mu}}, & p \in (e^{-\mu n}, 1) \end{cases} \tag{6.8}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} e^{-\delta n}, & \mu n \leq \ln 2 \\ 2^{-\frac{\delta}{\mu}}, & \mu n > \ln 2 \end{cases} \tag{6.9}$$

Вправа 3. *Довести теорему 6.4.*

Вправа 4. *Нехай випадкова величина* X *має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), *застрахованої мішано на* n *років з негайною виплатою, обчислити:*

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n|}}; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ p \in (0,1).$$

Теорема 6.5. (про мішане страхування життя з негайною виплатою для випадку рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої мішано на $n < c$ років з негайною виплатою,*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \notin [0, c) \end{cases} \tag{6.10}$$

Тоді:

(i) $\bar{A}_{x:\,\overline{n|}} = \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta c} + e^{-\delta n}\left(1 - \dfrac{n}{c}\right);$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{1 - e^{-2\delta n}}{2\delta c} + e^{-2\delta n}\left(1 - \dfrac{n}{c}\right) - \left(\dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta c} + e^{-\delta n}\left(1 - \dfrac{n}{c}\right)\right)^2;$

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < e^{-\delta n} \\ 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta n} \le z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0, 1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} e^{-\delta n}, & p \in \left(0, 1 - \dfrac{n}{c}\right] \\ e^{-\delta c(1-p)}, & p \in \left(1 - \dfrac{n}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{6.11}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} e^{-\delta n}, & n \le 0,5c \\ e^{-\delta c/2}, & n > 0,5c \end{cases} \tag{6.12}$$

Вправа 5. *Довести теорему 6.5.*

Вправа 6. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої мішано на $n < \omega - x$ років з негайною виплатою, обчислити:

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n|}}; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p,\ p \in (0, 1).$$

1.6.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) страхується мішано на n років з виплатою $C = 10$, де

$$n = 11, \ 13, \ 22, \ 31, \ 52, \ 63;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 у випадку страхування однієї особи.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 17$ отримуємо:

n	$C\bar{A}_{x:\overline{n}\rceil}$	ξ	θ	N	θ_1
17	5.10	542.39	6.43%	42	81.70%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується мішано на n років з негайною виплатою $C = 10$, де

$$n = 11, \ 13, \ 22, \ 31, \ 52, \ 63;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 17$ отримуємо:

n	$C\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}$	θ	N
17	4.17	5.43%	30

1.7 Відкладене (відтерміноване) страхування

1.7.1 Означення

При *відкладеному на l років пожиттєвому страхуванні життя з негайною виплатою* виплачується 1 в момент смерті застрахованої особи (x), якщо вона настає, починаючи з віку $x+l$. І не виплачується нічого, якщо особа не доживає до цього віку.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} 0, & t < l \\ 1, & t \geq l \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0$$

$$z_t = \begin{cases} 0, & t < l \\ v^t, & t \geq l \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою $Z = Z(x)$* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & T < l \\ v^T, & T \geq l \end{cases} \tag{7.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою позначається ${}_{l|}\bar{A}_x$ і визначається формулою:

$$ {}_{l|}\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_l^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_l^\infty e^{-\delta t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{7.2} $$

Позначимо ${}_{l|}{}^2\bar{A}_x$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$ {}_{l|}{}^2\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_l^\infty v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_l^\infty e^{-(2\delta)t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. $$

Отже,

$$ \mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|}{}^2\bar{A}_x - \big({}_{l|}\bar{A}_x\big)^2. \tag{7.3} $$

1.7.2 Властивості

Теорема 7.1. (про функцію розподілу Z)

$$ F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x\,, & z = 0 \\ {}_lq_x\, + {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x\,, & 0 < z < e^{-\delta l} \\ 1, & z \geq e^{-\delta l} \end{cases} $$

Вправа 1. *Довести теорему 7.1.*

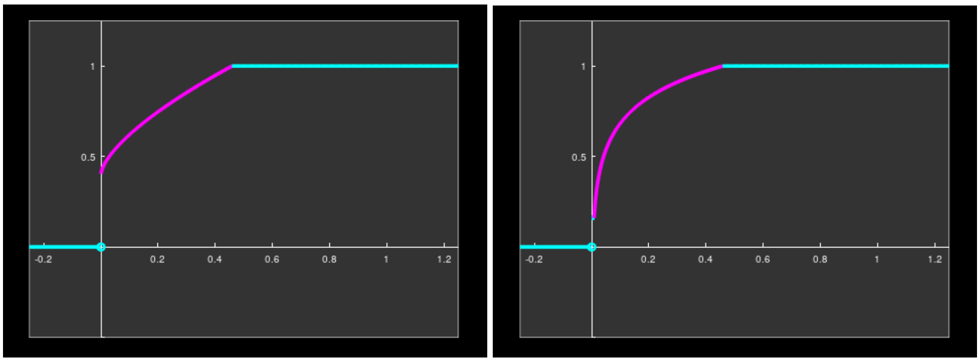
На малюнку 1.4 (стор.55) зображено приклади графіків функцій розподілу F_Z.

Наслідок 7.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою, $p \in (0,1)$.*

(i) *Нехай ${}_lq_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0,\, {}_lq_x\,]\quad \xi_Z^p = 0$.*

(ii) *Нехай ${}_tp_x$ строго спадає на $[\alpha,\beta] \subset [l,+\infty)$. Тоді:*

(a) $\xi_Z^{\,{}_lq_x\, +\, {}_\alpha p_x} = e^{-\delta\alpha}$;



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.4: Функція розподілу F_Z

(б) $\forall p \in ({}_{l}q_x + {}_{\beta}p_x\,,\, {}_{l}q_x + {}_{\alpha}p_x)$ ξ_Z^p *є розв'язком рівняння*

$$F_Z(z) = {}_{l}q_x + {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = p, \quad z \in \left(e^{-\delta\beta}, e^{-\delta\alpha}\right),$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Z^p = e^{-\delta t(p)},$$

де

$$t(p) = \left({}_{l}q_x + 1 - F_T\big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p) = \left(F_T\big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}({}_{l}q_x + 1 - p).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 7.1.1.*

Теорема 7.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою)

$${}_{l|}\bar{A}_x = v^h\, {}_{h}p_x\, {}_{l-h|}\bar{A}_{x+h}, \quad h \in (0, l).$$

Вправа 3. *Довести теорему 7.2.*

Теорема 7.3. (про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування з пожиттєвим та строковим страхуванням і страхуванням на дожиття)

$${}_{l|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}; \tag{7.4}$$

$${}_{l|}\bar{A}_x = {}_{l}E_x\,\bar{A}_x = A_{x:\,\overset{1}{\overline{l}|}}\bar{A}_x; \tag{7.5}$$

$$\mathsf{Var}\left[Z\right] = {}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2 - {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}\right)^2 + 2\bar{A}_x\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}; \tag{7.6}$$

$$\mathsf{Var}\left[Z\right] = {}^2A_{x:\,\overset{1}{\overline{l}|}}\,{}^2\bar{A}_x - \left(A_{x:\,\overset{1}{\overline{l}|}}\bar{A}_x\right)^2. \tag{7.7}$$

Доведення. Згідно з означенням (7.1)

$$Z = Z_1 - Z_2, \tag{7.8}$$

де

$$Z_1 = v^T, \qquad Z_2 = \begin{cases} v^T, & T < l \\ 0, & T \ge l \end{cases}$$

З (7.8) отримуємо рівність (7.4):

$$_{l|}\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \mathsf{E}\big[Z_1\big] - \mathsf{E}\big[Z_2\big] = \bar{A}_x - \bar{A}^1_{l:\,\overline{x}|}.$$

Зробимо в інтегралі (7.2) заміну $t = l + u$ і скористаємося співвідношенням

$$_{l+u}p_x \;=\; _lp_x \; _up_{x+l}\,.$$

Тоді отримаємо (7.5):

$$_{l|}\bar{A}_x = \int\limits_0^\infty v^{l+u}\; _{l+u}p_x\,\mu(x+l+u)\,du =$$

$$= v^l\; _lp_x \int\limits_0^\infty v^s\; _up_{x+l}\,\mu(x+l+u)\,du = \; _lE_x\,\bar{A}_x = A_{x:\,\overset{1}{\overline{l}|}}\bar{A}_x.$$

З формули (7.4), зокрема, маємо:

$$_{l|}{}^2\bar{A}_x = \;{}^2\bar{A}_x - \;{}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}.$$

Звідси й з (7.3) отримуємо рівність (7.6):

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \big({}^2\bar{A}_x - {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}\big) - \big(\bar{A}_x - \bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}\big)^2 =$$

$$= {}^2\bar{A}_x - \big(\bar{A}_x\big)^2 - {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|} - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}\big)^2 + 2\bar{A}_x\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}.$$

Цю формулу можна отримати інакше. З (7.8) маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \mathsf{Var}\big[Z_1\big] + \mathsf{Var}\big[Z_2\big] - 2\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big] =$$

$$= {}^2\bar{A}_x - \big(\bar{A}_x\big)^2 + {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|} - \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}\big)^2 - 2\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big]. \tag{7.9}$$

Оскільки $Z_1 Z_2 = Z_2^2$, то

$$\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big] = \mathsf{E}\big[Z_1 Z_2\big] - \mathsf{E}\big[Z_1\big]\mathsf{E}\big[Z_2\big] = {}^2\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|} - \bar{A}_x\bar{A}^1_{x:\,\overline{l}|}.$$

Звідси й з (7.9) отримуємо (7.6). З формули (7.5) маємо:

$$_{l|}{}^2\bar{A}_x = \;{}^2A_{x:\,\overset{1}{\overline{l}|}}\,{}^2\bar{A}_x.$$

Звідси й з (7.3) отримуємо рівність (7.7). □

Теорема 7.4. (про відкладене пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на l років з негайною виплатою,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{7.10}$$

Тоді:

(i) ${}_{l|}\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu+\delta}\, e^{-(\mu+\delta)l}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\mu}{\mu+2\delta}\, e^{-(\mu+2\delta)l} - \left(\dfrac{\mu}{\mu+\delta}\, e^{-(\mu+\delta)l}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\mu l}, & z = 0 \\ 1 - e^{-\mu l} + z^{\frac{\mu}{\delta}}, & 0 < z < v^l \\ 1, & z \geq v^l \end{cases}$

де F_Z — функція розподілу випадкової величини Z;

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, 1 - e^{-\mu l}] \\ \big(e^{-\mu l} + p - 1\big)^{\frac{\delta}{\mu}}, & p \in (1 - e^{-\mu l}, 1) \end{cases} \tag{7.11}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & \mu l \geq \ln 2 \\ \big(e^{-\mu l} - 0,5\big)^{\frac{\delta}{\mu}}, & \mu l < \ln 2 \end{cases} \tag{7.12}$$

Вправа 4. *Довести теорему 7.4.*

Вправа 5. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на l років з негайною виплатою, обчислити:

$${}_{l|}\bar{A}_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p,\ p \in (0,1).$$

Теорема 7.5. (про відкладене на l років пожиттєве страхування з негайною виплатою для випадку рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на $l < c$ років з негайною виплатою,*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \notin [0, c) \end{cases} \tag{7.13}$$

Тоді:

(i) ${}_{l|}\bar{A}_x = \dfrac{e^{-\delta l} - e^{-\delta c}}{\delta c}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta l} - e^{-2\delta c}}{2\delta c} - \left(\dfrac{e^{-\delta l} - e^{-\delta c}}{\delta c}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{l}{c}, & 0 \le z < e^{-\delta c} \\ \dfrac{l}{c} + 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta c} \le z < e^{-\delta l} \\ 1, & z \ge e^{-\delta l} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Z^p *випадкової величини* Z *дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, \dfrac{l}{c}\right] \\ \xi_Z^p = e^{-\delta(l+c(1-p))}, & p \in \left(\dfrac{l}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{7.14}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & l \ge 0,5c \\ e^{-\delta(l+c/2)}, & l < 0,5c \end{cases} \tag{7.15}$$

Вправа 6. *Довести теорему 7.5.*

Вправа 7. *Нехай випадкова величина* X *має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Для особи (x), *застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на* $l < \omega - x$ *років з негайною виплатою, обчислити:*

$${}_{l|}\bar{A}_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ \ p \in (0,1).$$

1.7.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \ge 0$;

(iii) страхується пожиттево з відтермінуванням на l років з негайною виплатою $C = 10$, де
$$l = 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40,\ 50;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 у випадку страхування однієї особи.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 10$ отримуємо:

l	$C\ {}_{l\mid}\bar{A}_x$	ξ	θ	θ_1
10	1.47	175.08	18.98%	232.02%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:
$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується пожиттево з відтермінуванням на l років, де
$$l = 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40,\ 50,$$
з негайною виплатою $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 10$ отримуємо:

l	$C\ {}_{l\|}\bar{A}_x$	θ	N
10	1.13	19.97%	399

1.8 Відкладене (відтерміноване) n-річне страхування

1.8.1 Означення

При *відкладеному на l років n-річному страхуванні життя з негайною виплатою* виплачується 1 в момент смерті застрахованої особи (x), якщо вона настає на проміжку $[x+l, x+l+n)$, тобто особа доживає до віку $x+l$, але не доживає до віку $x+l+n$. І не виплачується нічого, якщо особа не доживає до віку $x+l$, або доживає до віку $x+l+n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} 0, & t \notin [l, l+n) \\ 1, & t \in [l, l+n) \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0$$

$$z_t = \begin{cases} 0, & t \notin [l, l+n) \\ v^t, & t \in [l, l+n) \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат відкладеного на l років n-річного страхування життя з негайною виплатою* $Z = Z(x)$ має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & T \notin [l, l+n) \\ v^T, & T \in [l, l+n) \end{cases} \tag{8.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного страхування життя з негайною виплатою позначається ${}_{l|n}\bar{A}_x$ і визначається формулою:

$$ {}_{l|n}\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_l^{l+n} v^t\ {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_l^{l+n} e^{-\delta t}\ {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{8.2}$$

Позначимо ${}_{l|n}{}^2\bar{A}_x$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$ {}_{l|n}{}^2\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int_l^{l+n} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int_l^{l+n} e^{-(2\delta)t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. $$

Отже,

$$ \mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|n}{}^2\bar{A}_x - \big({}_{l|n}\bar{A}_x\big)^2. \tag{8.3} $$

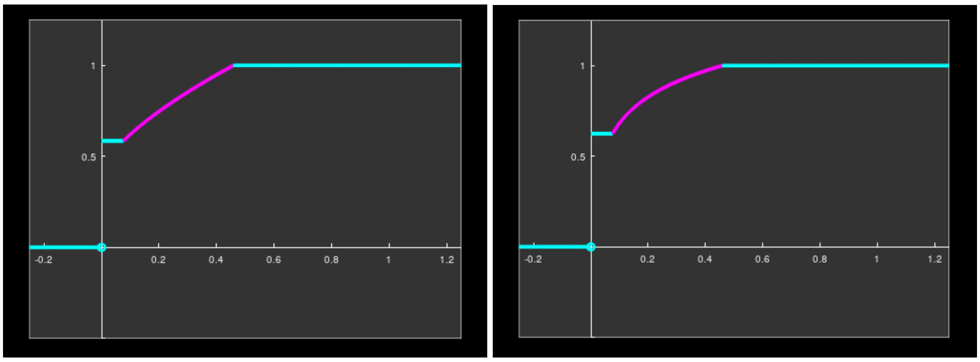
1.8.2 Властивості

Теорема 8.1. (про функцію розподілу Z)

$$ F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x + {}_{l+n}p_x\,, & 0 \le z \le e^{-\delta(l+n)} \\ {}_lq_x + {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x\,, & e^{-\delta(l+n)} < z < e^{-\delta l} \\ 1, & z \ge e^{-\delta l} \end{cases} $$

Вправа 1. *Довести теорему 8.1.*

На малюнку 1.5 (стор.61) зображено приклади графіків функцій розподілу F_Z.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.5: Функція розподілу F_Z

Наслідок 8.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою. $p \in (0,1)$.*

(i) *Нехай* ${}_{l}q_x + {}_{l+n}p_x > 0$. *Тоді* $\forall p \in (0, {}_{l}q_x + {}_{l+n}p_x]$ $\xi_Z^p = 0$;

(ii) *Нехай* ${}_{t}p_x$ *строго спадає на* $[\alpha, \beta] \subset [l, l+n)$. *Тоді:*

(а) $\xi_Z^{{}_{l}q_x + {}_{\alpha}p_x} = e^{-\delta\alpha}$;

(б) $\forall p \in ({}_{l}q_x + {}_{\beta}p_x, {}_{l}q_x + {}_{\alpha}p_x)$ ξ_Z^p *є розв'язком рівняння*

$$F_Z(z) = {}_{l}q_x + {}_{-\frac{\ln z}{\delta}}p_x = p, \quad z \in \left(e^{-\delta\beta}, e^{-\delta\alpha}\right),$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Z^p = e^{-\delta t(p)},$$

де

$$t(p) = \left({}_{l}q_x + 1 - F_T\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p) = \left(F_T\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}({}_{l}q_x + 1 - p).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 8.1.1.*

Теорема 8.2. (про зв'язок відкладеного на l років n-річного страхування зі строковим страхуванням і страхуванням на дожиття)

$$ {}_{l|n}\bar{A}_x = \bar{A}^1_{x:\overline{l+n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{l}|}; \tag{8.4}$$

$$ {}_{l|n}\bar{A}_x = {}_{l}E_x\,\bar{A}^1_{x+l:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{l}|}}\bar{A}^1_{x+l:\overline{n}|}; \tag{8.5}$$

$$ \mathsf{Var}[Z] = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{l+n}|} - {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{l}|} - \left(\bar{A}^1_{x:\overline{l+n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{l}|}\right)^2; \tag{8.6}$$

$$ \mathsf{Var}[Z] = {}^2A_{x:\overset{1}{\overline{l}|}}\,{}^2\bar{A}^1_{x+l:\overline{n}|} - \left(A_{x:\overset{1}{\overline{l}|}}\bar{A}^1_{x+l:\overline{n}|}\right)^2. \tag{8.7}$$

Вправа 3. *Довести теорему 8.2.*

Теорема 8.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років n-річного страхування життя з негайною виплатою)

$$ {}_{l|n}\bar{A}_x = v^h\,{}_{h}p_x\,{}_{l-h|n}\bar{A}_{x+h}, \quad h \in (0, l).$$

Вправа 4. *Довести теорему 8.3 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 8.4. (про відкладене на l років n-річне страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x), *застрахованої на* n *років з відтермінуванням на* l *років з негайною виплатою,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{8.8}$$

Тоді:

(i) $_{l|n}\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu+\delta}\ \left(e^{-(\mu+\delta)l} - e^{-(\mu+\delta)(l+n)}\right);$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{\mu}{\mu+2\delta}\ \left(e^{-(\mu+2\delta)l} - e^{-(\mu+2\delta)(l+n)}\right) -$

$$- \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\ \left(e^{-(\mu+\delta)l} - e^{-(\mu+\delta)(l+n)}\right)\right)^2;$$

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\mu l} + e^{-\mu(l+n)}, & 0 \le z \le v^{l+n} \\ 1 - e^{-\mu l} + z^{\frac{\mu}{\delta}}, & v^{l+n} < z < v^l \\ 1, & z \ge v^l \end{cases}$

де F_Z — функція розподілу випадкової величини Z;

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, 1 - e^{-\mu l} + e^{-\mu(l+n)}] \\ \left(e^{-\mu l} + p - 1\right)^{\frac{\delta}{\mu}}, & p \in (1 - e^{-\mu l} + e^{-\mu(l+n)}, 1) \end{cases} \tag{8.9}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & \mu l - \ln(1 - e^{-\mu n}) \ge \ln 2 \\ \left(e^{-\mu l} - 0,5\right)^{\frac{\delta}{\mu}}, & \mu l - \ln(1 - e^{-\mu n}) < \ln 2 \end{cases} \tag{8.10}$$

Вправа 5. *Довести теорему 8.4.*

Вправа 6. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l років з негайною виплатою, обчислити:

$$_{l|n}\bar{A}_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p,\ p \in (0,1).$$

Теорема 8.5. (про відкладене на l років n-річне страхування з негайною виплатою для випадку рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l років, де $l + n < c$,*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \notin [0, c) \end{cases} \tag{8.11}$$

Тоді:

(i) $_{l|n}\bar{A}_x = \dfrac{e^{-\delta l} - e^{-\delta(l+n)}}{\delta c}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta l} - e^{-2\delta(l+n)}}{2\delta c} - \left(\dfrac{e^{-\delta l} - e^{-\delta(l+n)}}{\delta c}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \dfrac{n}{c}, & 0 \le z < e^{-\delta(l+n)} \\ \dfrac{l}{c} + 1 + \dfrac{\ln z}{\delta c}, & e^{-\delta(l+n)} \le z < e^{-\delta l} \\ 1, & z \ge e^{-\delta l} \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Z^p випадкової величини Z дорівнює*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, 1 - \dfrac{n}{c}\right] \\ \xi_Z^p = e^{-\delta(l + c(1-p))}, & p \in \left(1 - \dfrac{n}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{8.12}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & n \le 0,5c \\ e^{-\delta(l + c/2)}, & n > 0,5c \end{cases} \tag{8.13}$$

Вправа 7. *Довести теорему 8.5.*

Вправа 8. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l років з негайною виплатою, де $l + n < \omega - x$, обчислити:

$$_{l|n}\bar{A}_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ \ p \in (0,1).$$

1.8.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \ge 0$;

(iii) страхується на n років з відтермінуванням на l років з негайною виплатою $C = 10$, де

l	5	10	20	30	40	50
n	50	40	20	10	7	5

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 у випадку страхування однієї особи.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 15,\ n = 25$ отримуємо:

l	n	$C\ {}_{l\|n}\bar{A}_x$	ξ	θ	θ_1
15	25	0.82	102.44	25.04%	330.02%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується на n років з відтермінуванням на l років з негайною виплатою $C = 10$, де

l	5	10	20	30	40	50
n	50	40	20	10	7	5

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 15,\ n = 25$ отримуємо:

l	n	$C\ {}_{l\|n}\bar{A}_x$	θ	N
15	25	0.66	27.42%	752

1.9 Страхування зі змінними виплатами

1.9.1 Неперервно зростаюче пожиттєве страхування життя

Означення

При *неперервно зростаючому пожиттєвому (безтерміновому, безстроковому) страхуванні життя (з негайною виплатою)* в момент смерті застрахованої особи (x) виплачується t, якщо страхова подія настає в момент часу $x + t$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплаттакого страхування визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_t &= t, \quad t \geq 0; \\ v_t &= v^t, \quad t \geq 0; \\ z_t &= tv^t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість втрат* $Z = Z(x)$ *неперервно зростаючого пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з негайною виплатою* має вигляд:

$$Z = Tv^T,$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервно зростаючого пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя (з негайною виплатою) позначається $(\bar{I}\bar{A})_x$ і визначається формулою:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int_0^\infty tv^t\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt. \tag{9.1}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int_0^\infty t^2v^{2t}\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt, \tag{9.2}$$

то дисперсія випадкової величини Z обчислюється за формулою:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \int\limits_0^\infty t^2 v^{2t}\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt - \left(\int\limits_0^\infty t v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt\right)^2 .$$

Властивості

Теорема 9.1. (про неперервно зростаюче пожиттєве страхування з негайною виплатою)

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int\limits_0^\infty {}_{u|}\bar{A}_x\, du. \tag{9.3}$$

Доведення. Використовуючи рівність

$$t = \int\limits_0^t du,$$

подамо інтеграл (9.1) у вигляді повторного, а потім змінимо у ньому порядок інтегрування:

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \int\limits_0^\infty t v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t ds\right) v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^t v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, du = \int\limits_0^\infty ds \int\limits_u^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^\infty {}_{u|}\bar{A}_x\, du.$$

Можна доводити рівність (9.3) справа наліво. Використовуючи рівність

$${}_{u|}\bar{A}_x = \int\limits_u^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt,$$

записуємо праву частину формули (9.3) у вигляді повторного інтеграла, змінюємо у ньому порядок інтегрування і обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^\infty {}_{u|}\bar{A}_x\, du = \int\limits_0^\infty du \int\limits_u^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^\infty dt \int\limits_0^t v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, du =$$

$$= \int\limits_0^\infty v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt \int\limits_0^t du = \int\limits_0^\infty t v^t\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt = (\bar{I}\bar{A})_x.$$

Зазначимо, що можливість (коректність) перестановки інтегралів випливає з неперервності та додатності підінтегральної функції, теореми про інтегрування властивого інтеграла залежного від параметра, і теореми про невластивий кратний інтеграл від невід'ємної функції (його незалежність від вибору вичерпання області інтегрування). $\square$

Теорема 9.2. (про неперервно зростаюче пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{9.4}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія неперервно зростаючого пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою для особи (x) *обчислюються за формулами:*

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}; \tag{9.5}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{2\mu}{(\mu+2\delta)^3} - \frac{\mu^2}{(\mu+\delta)^4}. \tag{9.6}$$

Вправа 1. *Довести теорему 9.2.*

Вправа 2. *Нехай випадкова величина* X *має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x)*, що має неперервно зростаюче пожиттєве страхування, обчислити*

$$(\bar{I}\bar{A})_x, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Теорема 9.3. (про неперервно зростаюче пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу) *Нехай для особи* (x) *випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \tag{9.7}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія неперервно зростаючого пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою для особи (x) *обчислюються за формулами:*

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{1-(1+\delta c)e^{-\delta c}}{\delta^2 c}; \tag{9.8}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{1-(1+2\delta c+2\delta^2c^2)e^{-2\delta c}}{4\delta^3 c} - \left(\frac{1-(1+\delta c)e^{-\delta c}}{\delta^2 c}\right)^2. \tag{9.9}$$

Вправа 3. *Довести теорему 9.2.*

Вправа 4. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), що має неперервно зростаюче пожиттєве страхування, обчислити

$$(\bar{I}\bar{A})_x, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) має неперервно зростаюче пожиттєве страхування життя з негайною виплатою;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 5. *Розв'язати приклад 1*

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має неперервно зростаюче пожиттєве страхування життя з негайною виплатою;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 6. *Розв'язати приклад 2*

1.9.2 Зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя

Означення

При *зростаючому щорічно пожиттєвому (безтерміновому, безстроковому) страхуванні життя (з негайною виплатою)* в момент смерті застрахованої особи (x) виплачується 1 при настанні страхової події протягом 1-го року страхової угоди, виплачується 2 при настанні страхової події протягом 2-го року страхової угоди і т.д.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_t &= \lfloor t+1 \rfloor, \quad t \geq 0; \\ v_t &= v^t, \quad t \geq 0; \\ z_t &= \lfloor t+1 \rfloor \, v^t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ зростаючого щорічно пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з негайною виплатою* має вигляд:

$$Z = \lfloor T+1 \rfloor \, v^T,$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість зростаючого щорічно пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з негайною виплатою позначається $(I\bar{A})_x$ і визначається формулою:

$$(I\bar{A})_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^\infty \lfloor t+1 \rfloor \, v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt. \quad (9.10)$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_{0}^{\infty} \big(\lfloor t+1 \rfloor \, v^t\big)^2 \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \int\limits_{k}^{k+1} v^{2t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt, \quad (9.11)$$

то дисперсія випадкової величини Z обчислюється за формулою:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \int\limits_{k}^{k+1} v^{2t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt -$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt \right)^2 .$$

Властивості

Теорема 9.4. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою)

$$(I\bar{A})_x = \bar{A}_x + vp_x (I\bar{A})_{x+1} =$$
$$= \big(vq_x + vp_x \bar{A}_{x+1}\big) + vp_x (I\bar{A})_{x+1}, \quad x \geq 0. \quad (9.12)$$

Доведення. Зазначимо, що друга рівність випливає з першої рівності (і навпаки) та теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою.

1-й спосіб: Використовуючи співвідношення

$${}_{1+t}p_x = p_x \, {}_tp_{x+1} \, ,$$

адитивність невластивого інтеграла, формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою

$$\bar{A}_x = \int\limits_{0}^{\infty} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt$$

і формулу (9.10), отримуємо:

$$(I\bar{A})_x - \bar{A}_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt - \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int\limits_{k+1}^{k+2} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int\limits_k^{k+1} v^{1+t}\,{}_{1+t}p_x\,\mu(x+1+t)\,dt =$$

$$= vp_x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_{x+1}\,\mu(x+1+t)\,dt = vp_x(I\bar{A})_{x+1}.$$

2-й спосіб: Використовуючи формулу повної ймовірності, отримуємо:

$$\begin{aligned}(I\bar{A})_x - \bar{A}_x &= \mathsf{E}\big[\lfloor T(x)+1\rfloor v^{T(x)}\big] - \mathsf{E}\big[v^{T(x)}\big] = \mathsf{E}\big[\lfloor T(x)\rfloor v^{T(x)}\big] = \\ &= \mathsf{E}\big[\lfloor T(x)\rfloor v^{T(x)} \mid T(x)<1\big]\mathsf{Pr}\big\{T(x)<1\big\} + \\ &\quad + \mathsf{E}\big[\lfloor T(x)\rfloor v^{T(x)} \mid T(x)\ge 1\big]\mathsf{Pr}\big\{T(x)\ge 1\big\}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Оскільки $T(x)$ невід'ємна випадкова величина, то

$$T(x) < 1 \implies \lfloor T(x)\rfloor = 0.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[\lfloor T(x)\rfloor v^{T(x)} \mid T(x)<1\big] = 0. \tag{9.14}$$

Оскільки

$$T(x+1) = T(x) - 1,\ T(x)\ge 1,$$

то

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\big[\lfloor T(x)\rfloor v^{T(x)} \mid T(x)\ge 1\big] = \\ &\qquad = \mathsf{E}\big[\lfloor T(x+1)+1\rfloor v^{T(x+1)+1}\big] = v(I\bar{A})_{x+1}. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Підставляючи (9.14) і (9.15) в (9.13), отримуємо (9.12). □

Теорема 9.5. (про зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \ge 0. \tag{9.16}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія зростаючого щорічно пожиттевого страхування життя з негайною виплатою для особи (x) *обчислюються за формулами:*

$$(I\bar{A})_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}\ \frac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}; \tag{9.17}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{\mu}{\mu+2\delta}\ \frac{1+e^{-(\mu+2\delta)}}{\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)^2} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\ \frac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2. \tag{9.18}$$

Доведення. Для виведення формул (9.17) і (9.18) нам знадобляться суми таких рядів ($|x|<1$) :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty}kx^k = \sum_{k=0}^{\infty}x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{9.19}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(x^{k+1})' = \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{k+1}\right)' = \left(-1+\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2x^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2x^k - \sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)x^k = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty}x^k =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}. \tag{9.20}$$

За умовою (9.16)

$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

Отже, згідно з (9.10) і (9.19) маємо $\big(x = e^{-(\mu+\delta)}\big)$:

$$(I\bar{A})_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\int_k^{k+1} e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu\, dt =$$

$$= \frac{\mu}{\mu+\delta}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\big(e^{-(\mu+\delta)k} - e^{-(\mu+\delta)(k+1)}\big) = \frac{\mu}{\mu+\delta}\ \frac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}.$$

Згідно з (9.11) і (9.20) маємо $\big(x = e^{-(\mu+2\delta)}\big)$:

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 \int\limits_{k}^{k+1} e^{-2\delta t}e^{-\mu t}\mu\, dt =$$

$$= \frac{\mu}{\mu+2\delta}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2\big(e^{-(\mu+2\delta)k} - e^{-(\mu+2\delta)(k+1)}\big) =$$

$$= \frac{\mu}{\mu+2\delta}\,\frac{1+e^{-(\mu+2\delta)}}{\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)^2}.$$

Звідси й з (9.17) отримуємо (9.18). □

Вправа 1. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), що має зростаюче щорічно пожиттєве страхування, обчислити

$$(I\bar{A})_x, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Теорема 9.6. (про зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x) випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \tag{9.21}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія зростаючого щорічно пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою для особи (x) обчислюються за формулами:

$$(I\bar{A})_x = \frac{1}{\delta c}\left(\frac{1-e^{-\delta(\lfloor c\rfloor+1)}}{1-e^{-\delta}} - (\lfloor c\rfloor+1)e^{-\delta c}\right); \tag{9.22}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{1}{2\delta c}\left(\frac{2(1-e^{-2\delta(\lfloor c\rfloor+2)})}{(1-e^{-2\delta})^2} - \frac{1+(2\lfloor c\rfloor+3)e^{-2\delta(\lfloor c\rfloor+1)}}{1-e^{-2\delta}} - \right.$$
$$\left. -\,(\lfloor c\rfloor+1)^2e^{-2\delta c}\right) - \frac{1}{\delta^2c^2}\left(\frac{1-e^{-\delta(\lfloor c\rfloor+1)}}{1-e^{-\delta}} - (\lfloor c\rfloor+1)e^{-\delta c}\right)^2. \tag{9.23}$$

Доведення. При виведенні формул (9.22) і (9.23) нам знадобляться такі суми:

$$\sum_{k=0}^{l-1}(k+1)(x^k - x^{k+1}) + (l+1)x^l = \sum_{k=0}^{l}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{l-1}(k+1)x^{k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{l}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{l} kx^k = \sum_{k=0}^{l} x^k = \frac{1-x^{l+1}}{1-x}, \quad x \neq 1. \quad (9.24)$$

$$\sum_{k=0}^{l-1}(k+1)^2(x^k - x^{k+1}) + (l+1)^2x^l = \sum_{k=0}^{m}(k+1)^2x^k - \sum_{k=0}^{l-1}(k+1)^2x^{k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{l}(k+1)^2x^k - \sum_{k=1}^{l} k^2x^k = \sum_{k=0}^{l}(2k+1)x^k = 2\sum_{k=0}^{l}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{l} x^k =$$
$$= 2\left(\sum_{k=0}^{l} x^{k+1}\right)' - \frac{1-x^{l+1}}{1-x} = 2\left(\frac{1-x^{l+2}}{1-x}\right)' - \frac{1-x^{l+1}}{1-x} =$$
$$= 2\frac{1-x^{l+2}}{(1-x)^2} - \frac{1+(2l+3)x^{l+1}}{1-x}, \quad x \neq 1. \quad (9.25)$$

Позначимо $l = \lfloor c \rfloor$. Використовуючи (9.10), (9.21) і (9.24), маємо:

$$(I\bar{A})_x = \sum_{k=0}^{l-1}(k+1)\int_{k}^{k+1}\frac{e^{-\delta t}}{c}\,dt + (l+1)\int_{l}^{c}\frac{e^{-\delta t}}{c}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\delta c}\left(\sum_{k=0}^{l-1}(k+1)\big(e^{-\delta k} - e^{-\delta(k+1)}\big) + (l+1)\big(e^{-\delta l} - e^{-\delta c}\big)\right) =$$
$$= \frac{1}{\delta c}\left(\frac{1-e^{-\delta(l+1)}}{1-e^{-\delta}} - (l+1)e^{-\delta c}\right).$$

Використовуючи (9.11), (9.21) і (9.25), маємо:

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{l-1}(k+1)^2\int_{k}^{k+1}\frac{e^{-2\delta t}}{c}\,dt + (l+1)^2\int_{l}^{c}\frac{e^{-2\delta t}}{c}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\delta c}\left(\sum_{k=0}^{l-1}(k+1)^2\big(e^{-2\delta k} - e^{-2\delta(k+1)}\big) + (l+1)^2\big(e^{-2\delta l} - e^{-2\delta c}\big)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\delta c}\left(\frac{2(1-e^{-2\delta(l+2)})}{\big(1-e^{-2\delta}\big)^2} - \frac{1+(2l+3)e^{-2\delta(l+1)}}{\big(1-e^{-2\delta}\big)^2} - (l+1)^2e^{-2\delta c}\right).$$

Звідси й з (9.22) отримуємо формулу (9.23). □

Вправа 2. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), що має зростаюче щорічно пожиттєве страхування, обчислити

$$(I\bar{A})_x, \quad \mathsf{Var}[Z].$$

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) має зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з негайною виплатою;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 3. *Розв'язати приклад 1*

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з негайною виплатою;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 2*

1.9.3 Неперервно зростаюче n-річне страхування життя

Означення

При *неперервно зростаючому n-річному страхуванні життя (з негайною виплатою)* в момент смерті застрахованої особи (x) виплачується t, якщо страхова подія настає в момент часу $x + t$, де $t < n$, і не виплачується нічого, якщо застрахована особа доживає до віку $x + n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$

$$z_t = \begin{cases} tv^t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ неперервно зростаючого n-річного страхування життя з негайною виплатою* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} Tv^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервно зростаючого n-річного страхування життя (з негайною виплатою) позначається $(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n tv^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt. \tag{9.26}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^n t^2 v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt, \tag{9.27}$$

то дисперсія випадкової величини Z обчислюється за формулою:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \int\limits_0^n t^2 v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt - \left(\int\limits_0^n t v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt\right)^2.$$

Властивості

Теорема 9.7. (про неперервно зростаюче n-річне страхування життя з негайною виплатою)

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n {}_{u|n-u}\bar{A}_x\, du. \tag{9.28}$$

Доведення. Використовуючи рівність

$$t = \int\limits_0^t du,$$

подамо інтеграл (9.26) у вигляді повторного, а потім змінимо у ньому порядок інтегрування:

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n t v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^n \left(\int\limits_0^t du\right) v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^n dt \int\limits_0^t v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, du = \int\limits_0^n du \int\limits_u^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^n {}_{u|n-u}\bar{A}_x\, du.$$

Можна доводити рівність (9.28) справа наліво. Використовуючи рівність

$${}_{u|n-u}\bar{A}_x = \int\limits_u^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt,$$

записуємо праву частину формули (9.28) у вигляді повторного інтеграла, змінюємо у ньому порядок інтегрування і обчислюємо внутрішній інтеграл:

$$\int\limits_0^n {}_{u|n-u}\bar{A}_x\,du = \int\limits_0^n du \int\limits_u^n v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \int\limits_0^n dt \int\limits_0^t v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,du =$$

$$= \int\limits_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt \int\limits_0^t du = \int\limits_0^n tv^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = (\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}.$$

Зазначимо, що можливість (коректність) перестановки інтегралів випливає з неперервності підінтегральної функції і теореми про інтегрування властивого інтеграла залежного від параметра (можна також скористатися теоремою Фубіні). □

Теорема 9.8. (про неперервно зростаюче n-річне страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{9.29}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія неперервно зростаючого n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) обчислюються за формулами:

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}\Big(1 - \big(1 + (\mu+\delta)n\big)e^{-(\mu+\delta)n}\Big); \tag{9.30}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big] &= \frac{2\mu}{(\mu+2\delta)^3}\left[1 - \left(1 + (\mu+2\delta)n + \frac{(\mu+2\delta)^2 n^2}{2}\right)e^{-(\mu+2\delta)n}\right] - \\ &- \left[\frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}\Big(1 - \big(1 + (\mu+\delta)n\big)e^{-(\mu+\delta)n}\Big)\right]^2.\end{aligned} \tag{9.31}$$

Вправа 1. *Довести теорему 9.8.*

Вправа 2. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), що має неперервно зростаюче n-річне страхування, обчислити

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Теорема 9.9. (про неперервно зростаюче n-річне страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x) випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \tag{9.32}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія неперервно зростаючого n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) при $n < c$ обчислюються за формулами:

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1-(1+\delta n)e^{-\delta n}}{\delta^2 c}; \tag{9.33}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{1-(1+2\delta n+2\delta^2 n^2)e^{-2\delta n}}{4\delta^3 c} - \left(\frac{1-(1+\delta n)e^{-\delta n}}{\delta^2 c}\right)^2. \tag{9.34}$$

Вправа 3. *Довести теорему 9.9.*

Вправа 4. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Для особи (x), що має неперервно зростаюче n-річне страхування, обчислити

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) має неперервно зростаюче n-річне страхування життя з негайною виплатою, де
$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 5. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}\rceil}$	ξ	θ
20	2.38	279.43	17.61%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має неперервно зростаюче n-річне страхування життя з негайною виплатою, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 6. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}\rceil}$	θ	N
20	1.17	30.94%	957

1.9.4 Зростаюче щорічно n-річне страхування життя

Означення

При *зростаючому щорічно n-річному страхуванні життя (з негайною виплатою)* в момент смерті застрахованої особи (x) виплачується 1 при настанні страхової події протягом 1-го року страхової угоди, виплачується 2 при настанні страхової події протягом 2-го року страхової угоди, $\ldots$, виплачується n протягом n-го року страхової угоди, і не виплачується нічого, якщо застрахована особа доживає до віку $x + n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} \lfloor t+1 \rfloor, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$
$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$
$$z_t = \begin{cases} \lfloor t+1 \rfloor \, v^t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} \lfloor T+1 \rfloor \, v^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою позначається $(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n \lfloor t+1 \rfloor \, v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int\limits_k^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt. \quad (9.35)$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^n \big(\lfloor t+1 \rfloor \, v^t\big)^2 \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \int\limits_k^{k+1} v^{2t} \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt, \quad (9.36)$$

то дисперсія випадкової величини Z обчислюється за формулою:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \int\limits_k^{k+1} v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt - \\ - \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int\limits_k^{k+1} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \right)^2 .$$

Властивості

Теорема 9.10. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою)

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x (I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|} = \\ = \big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{1}|} + vp_x \bar{A}^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) + vp_x (I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \qquad (9.37)$$

де

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \qquad (9.38)$$

Доведення. Зазначимо, що друга рівність випливає з першої рівності (і навпаки) та теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування життя з негайною виплатою.

Якщо $n = 1$, то за формулою (9.35)

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{1}|} = \int\limits_0^1 v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \bar{A}^1_{x:\,\overline{1}|}.$$

Отже, для $n = 1$ формула (9.37) справедлива, до того ж

$$(I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (9.38). Нехай $n > 1$.

<u>*1-й спосіб*</u>: Використовуючи співвідношення

$${}_{1+t}p_x = p_x\, {}_tp_{x+1}\,,$$

формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt$$

і формулу (9.35), отримуємо

$$
\begin{aligned}
&(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\int\limits_k^{k+1} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\int\limits_{k+1}^{k+2} v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\int\limits_k^{k+1} v^{t+1}\,{}_{1+t}p_x\,\mu(x+1+t)\,dt = \\
&= vp_x\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\int\limits_k^{k+1} v^{t+1}\,{}_tp_{x+1}\,\mu(x+1+t)\,dt = vp_x(I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}.
\end{aligned}
$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Позначимо

$$
Z_1(x) = \begin{cases} v^{T(x)}, & T(x) < n \\ 0, & T(x) \ge n \end{cases}
$$

теперішню вартість втрат n-річного страхування життя особи (x) з негайною виплатою. Тоді

$$
Z(x) - Z_1(x) = v\begin{cases} \lfloor T(x)\rfloor v^{T(x)}, & T(x) < n \\ 0, & T(x) \ge n \end{cases}
$$

Оскільки

$$
T(x+1) = T(x) - 1,\ T(x) \ge 1,
$$

то при $T(x) \ge 1$

$$
\begin{aligned}
&Z(x) - Z_1(x) = \\
&= v\begin{cases} \lfloor T(x+1)+1\rfloor v^{T(x+1)+1}, & T(x+1) < n-1 \\ 0, & T(x+1) \ge n-1 \end{cases} = vZ(x+1),
\end{aligned}
$$

де $Z(x+1)$ позначає теперішню вартість втрат щорічно зростаючого $(n-1)$-річного страхування життя особи $(x+1)$ з негайною виплатою. Отже,

$$
\mathsf{E}\big[Z(x) - Z_1(x) \mid T(x) \ge 1\big] = \mathsf{E}\big[vZ(x+1)\big] = v(I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}. \tag{9.39}
$$

Оскільки $T(x)$ невід'ємна випадкова величина, то використовуючи формулу повної ймовірності та рівність (9.39), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
(I\bar{A})^{1}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z(x)\big] - \mathsf{E}\big[Z_1(x)\big] = \mathsf{E}\big[Z(x) - Z_1(x)\big] = \\
= \mathsf{E}\big[Z(x) - Z_1(x) \mid T(x) < 1\big]\mathsf{Pr}\big\{T(x) < 1\big\} + \\
+ \mathsf{E}\big[Z(x) - Z_1(x) \mid T(x) \geq 1\big]\mathsf{Pr}\big\{T(x) \geq 1\big\} = \\
= vp_x (I\bar{A})^{1}_{x+1:\,\overline{n-1}|}.
\end{aligned}
$$

□

Теорема 9.11. (про зростаюче щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$
\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{9.40}
$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія зростаючого щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) обчислюютьcя за формулами:

$$
(I\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mu}{\mu+\delta}\,\frac{1-(n+1)e^{-(\mu+\delta)n} + ne^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}; \tag{9.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{\mu}{\mu+2\delta}\Bigg(- n^2 e^{-(\mu+2\delta)n} - \\
- \frac{1+(2n+1)e^{-(\mu+2\delta)n}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} + \frac{2(1-e^{-(\mu+2\delta)(n+1)})}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^2}\Bigg) - \\
- \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\,\frac{1-(n+1)e^{-(\mu+\delta)n} + ne^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{9.42}
$$

Доведення. Для виведення формул (9.41) і (9.42) нам знадобляться такі суми:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^{k+1} = \\
= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k - \sum_{k=1}^{n} kx^k = -nx^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \\
= -nx^n + \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1.
\end{aligned} \tag{9.43}
$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}\right)' = \left(-1 + \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' =$$
$$= -\frac{(n+1)x^n}{1-x} + \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2(x^k - x^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2x^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2x^{k+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2x^k - \sum_{k=1}^{n}k^2x^k = -n^2x^n + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)x^k =$$
$$= -n^2x^n - \sum_{k=0}^{n-1}x^k + 2\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k =$$
$$= -n^2x^n - \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{2(n+1)x^n}{1-x} + \frac{2(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} =$$
$$= -n^2x^n - \frac{1+(2n+1)x^n}{1-x} + \frac{2(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}, \quad x \neq 1. \quad (9.44)$$

За умовою (9.40)

$$_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Отже, згідно з (9.35) і (9.43) маємо $\big(x = e^{-(\mu+\delta)}\big)$:

$$(I\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\int_k^{k+1} e^{-\delta t}e^{-\mu t}\mu\,dt =$$
$$= \frac{\mu}{\mu+\delta}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\big(e^{-(\mu+\delta)k} - e^{-(\mu+\delta)(k+1)}\big) =$$
$$= \frac{\mu}{\mu+\delta}\;\frac{1-(n+1)e^{-(\mu+\delta)n} + ne^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}.$$

Згідно з (9.36) і (9.44) маємо $\big(x = e^{-(\mu+2\delta)}\big)$:

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2\int_k^{k+1} e^{-2\delta t}e^{-\mu t}\mu\,dt =$$

$$= \frac{\mu}{\mu+2\delta}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2\big(e^{-(\mu+2\delta)k} - e^{-(\mu+2\delta)(k+1)}\big) =$$

$$= \frac{\mu}{\mu+2\delta}\left(- n^2 e^{-(\mu+2\delta)n} - \frac{1+(2n+1)e^{-(\mu+2\delta)n}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2(1-e^{-(\mu+2\delta)(n+1)})}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^2}\right).$$

Звідси й з (9.41) отримуємо формулу (9.42). □

Вправа 1. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), що має зростаюче щорічно n-річне страхування, обчислити

$$(I\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Теорема 9.12. (про зростаюче щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу)) *Нехай для особи (x) випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \tag{9.45}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія зростаючого щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) при $n < c$ обчислюються за формулами:

$$(I\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1}{\delta c}\,\frac{1-(n+1)e^{-\delta n} + n e^{-\delta(n+1)}}{1-e^{-\delta}}; \tag{9.46}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{1}{2\delta c}\left(- n^2 e^{-2\delta n} - \frac{1+(2n+1)e^{-2\delta n}}{1-e^{-2\delta}} + \frac{2(1-e^{-2\delta(n+1)})}{(1-e^{-2\delta})^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{\delta^2 c^2}\left(\frac{1-(n+1)e^{-\delta n} + n e^{-\delta(n+1)}}{1-e^{-\delta}}\right)^2. \tag{9.47}$$

Вправа 2. *Довести теорему 9.12.*

Вправа 3. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Для особи (x), що має зростаюче щорічно n-річне страхування, обчислити

$$(I\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}, \quad \mathsf{Var}[Z].$$

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) має зростаюче щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою, де

$$n = 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(I\bar{A})_{x:\,\overline{n}\rvert}$	ξ	θ
20	2.55	298.62	17.02%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має зростаюче щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 5. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(I\bar{A})_{x:\overline{n}\rceil}$	θ	N
20	1.24	30.43%	927

1.9.5 Неперервно спадне n-річне страхування

Означення

При *неперервно спадному n-річному страхуванні життя (з негайною виплатою)* в момент смерті застрахованої особи (x) виплачується $n-t$, якщо страхова подія настає в момент часу $x + t$, де $t < n$, і не виплачується нічого, якщо застрахована особа доживає до віку $x + n$.

Функції відшкодування та дисконтуванняі функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} n - t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$

$$z_t = \begin{cases} (n - t)v^t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ неперервно спадного n-річного страхування життя з негайною виплатою* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} (n - T)v^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервно спадного n-річного страхування життя з негайною виплатою позначається $(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n (n-t)v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{9.48}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^n (n-t)^2 v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt, \tag{9.49}$$

то дисперсія випадкової величини Z обчислюється за формулою:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \int\limits_0^n (n-t)^2 v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt - \left(\int\limits_0^n (n-t)v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt\right)^2.$$

Безпосередньо з формул для актуарних теперішніх вартостей n-річних неперервного спадного і неперервного зростаючого страхувань життя отримуємо рівність:

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} + (\bar{I}\bar{A})_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n (n-t)v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^n t v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = n\int\limits_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = n\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

Її також можна отримати інакше. Припустимо особа (x) страхується одночасно за двома страховими угодами — неперервно спадним n-річним страхуванням життя і неперервно зростаючим n-річним страхуванням життя. Тоді функції відшкодування та дисконтування і відповідно теперішня вартість втрат для цієї застрахованої особи визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} (n-t)+t = n, & t < n \\ 0, & t \ge n \end{cases}$$
$$v_t = v^t, \quad t \ge 0;$$
$$Z = \begin{cases} nv^T, & T < n \\ 0, & T \ge n \end{cases}$$

Отже, актуарна теперішня вартість цього страхування має вигляд:

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n nv^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = n\int\limits_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = n\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

Властивості

Теорема 9.13. (про неперервно спадне n-річне страхування життя з негайною виплатою)

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n|}} = \int\limits_0^n \bar{A}^1_{x:\,\overline{n-u|}}\, du. \tag{9.50}$$

Вправа 1. *Довести теорему 9.13.*

Теорема 9.14. (про неперервно спадне n-річне страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{9.51}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія неперервно спадного n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) обчислюються за формулами:

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n|}} = \frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}\Big((\mu+\delta)n - 1 + e^{-(\mu+\delta)n}\Big); \tag{9.52}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big] &= \frac{2\mu}{(\mu+2\delta)^3}\left[\frac{(\mu+2\delta)^2 n^2}{2} - (\mu+2\delta)n + 1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right] - \\ &- \left[\frac{\mu}{(\mu+\delta)^2}\Big((\mu+\delta)n - 1 + e^{-(\mu+\delta)n}\Big)\right]^2. \end{aligned} \tag{9.53}$$

Вправа 2. *Довести теорему 9.14.*

Вправа 3. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), що має неперервно спадне n-річне страхування, обчислити

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n|}}, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Теорема 9.15. (про неперервно спадне n-річне страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x) випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \tag{9.54}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія неперервно спадного n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) при $n < c$ обчислюються за формулами:

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n|}} = \frac{\delta n - 1 + e^{-\delta n}}{\delta^2 c}; \tag{9.55}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{2\delta^2 n^2 - 2\delta n + 1 - e^{-2\delta n}}{4\delta^3 c} - \left(\frac{\delta n - 1 + e^{-\delta n}}{\delta^2 c}\right)^2. \tag{9.56}$$

Вправа 4. *Довести теорему 9.15.*

Вправа 5. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), що має неперервно спадне n-річне страхування, обчислити

$$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n|}}, \quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) має неперервно спадне n-річне страхування життя з негайною виплатою, де
$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 6. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n}\rceil}$	ξ	θ
20	4.54	552.30	21.62%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має неперервно спадне n-річне страхування життя з негайною виплатою, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 7. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(\bar{D}\bar{A})_{x:\,\overline{n}\rceil}$	θ	N
20	1.74	39.06%	1526

1.9.6 Спадне щорічно n-річне страхування життя

Означення

При *спадному щорічно n-річному страхуванні життя (з негайною виплатою)* в момент смерті застрахованої особи (x) виплачується n при настанні страхової події протягом 1-го року страхової угоди, виплачується $n-1$ при настанні страхової події протягом 2-го року страхової угоди, ..., виплачується 1 при настанні страхової події протягом n-го року страхової угоди, і не виплачується нічого, якщо застрахована особа доживає до віку $x + n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} n - \lfloor t \rfloor, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$
$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$
$$z_t = \begin{cases} \big(n - \lfloor t \rfloor\big)\, v^t, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ спадного щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} \big(n - \lfloor T \rfloor\big)\, v^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою позначається $(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \int\limits_0^n \big(n - \lfloor t \rfloor\big)\, v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \int\limits_k^{k+1} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \quad (9.57)$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \int\limits_0^n \big(n - \lfloor t \rfloor\big)^2\, v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 \int\limits_k^{k+1} v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt, \quad (9.58)$$

то дисперсія випадкової величини Z обчислюється за формулою:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 \int\limits_k^{k+1} v^{2t}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt -$$

$$- \left(\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt \right)^2 .$$

Безпосередньо з формул для актуарних теперішніх вартостей n-річних щорічно спадного і щорічно зростаючого страхувань життя отримуємо рівність:

$$\begin{aligned}(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} + (I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{k}^{k+1} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = \\ &= (n+1) \int\limits_{0}^{n} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = (n+1) \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}. \end{aligned} \tag{9.59}$$

Її також можна отримати інакше. Припустимо особа (x) страхується одночасно за двома страховими угодами — спадним щорічно n-річним страхуванням життя і зростаючим щорічно n-річним страхуванням життя. Тоді функції відшкодування та дисконтування і відповідно теперішня вартість втрат для цієї застрахованої особи визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} n - \lfloor t \rfloor + \lfloor t+1 \rfloor = n+1, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$

$$Z = \begin{cases} (n+1) \, v^T, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases}$$

Отже, актуарна теперішня вартість цього страхування має вигляд:

$$\mathsf{E}[Z] = \int\limits_{0}^{n} (n+1) \, v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt =$$

$$= (n+1) \int\limits_{0}^{n} v^t \, {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = (n+1) \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

Властивості

Теорема 9.16. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою)

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} = n\bar{A}^1_{x:\,\overline{1}|} + vp_x(D\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{9.60}$$

де

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \tag{9.61}$$

Доведення. Якщо $n = 1$, то за формулою (9.57)

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{1}|} = \int\limits_0^1 v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \bar{A}_{x:\,\overline{1}|}.$$

Отже, для $n = 1$ формула (9.60) справедлива, до того ж

$$(D\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (9.61). Для $n > 1$ твердження теореми випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з негайною виплатою, враховуючи, що

$$b_t = n, \quad t \in [0, 1).$$

Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_t$ функцію відшкодування спадного щорічно $(n-1)$-річного страхування страхування життя особи $(x+1)$ з негайною виплатою. Тоді

$$\widetilde{b}_t = \begin{cases} (n-1) - \lfloor t \rfloor, & t < n-1 \\ 0, & t \geq n-1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} n - \lfloor t+1 \rfloor, & t+1 < n \\ 0, & t+1 \geq n \end{cases} = b_{t+1}, \quad t \geq 0.$$

□

Наслідок 9.16.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою)

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{9.62}$$

де

$$(IA)^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \tag{9.63}$$

Доведення. Для доведення (9.62) і (9.63) скористаємося рівністю (9.59). Спершу доведемо (9.63).

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{0}|} = \bar{A}^1_{x:\,\overline{0}|} - (D\bar{A})^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1,$$

оскільки

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{0}|} = (D\bar{A})^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1.$$

Для доведення (9.62) скористаємося рівністю (9.59), рекурентною формулою (9.60) і рекурентною формулою для актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою:

$$\begin{aligned}
(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} &= (n+1)\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - (D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} = \\
&= (n+1)\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(n\bar{A}^1_{x:\,\overline{1}|} + vp_x(D\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) = \\
&= (n+1)\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - n\bar{A}^1_{x:\,\overline{1}|} - vp_x\big(n\bar{A}^1_{x+1:\,\overline{n-1}|} - (I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) = \\
&= n\big(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\,\overline{1}|} - vp_x\bar{A}^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) + \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|} = \\
&= \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(I\bar{A})^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}.
\end{aligned}$$

□

Зауваження 1. Аналогічно рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою можна вивести з рекурентного співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою.

Теорема 9.17. (про спадне щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{9.64}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) обчислюються за формулами:

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{\mu}{\mu+\delta}\,\frac{n-(n+1)e^{-(\mu+\delta)} + e^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}; \tag{9.65}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{\mu}{\mu+2\delta}\Bigg(&(n+1)^2 - \frac{1-e^{-(\mu+2\delta)(n+1)}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \\
&- \frac{2\big(n-(n+1)e^{-(\mu+2\delta)} + e^{-(\mu+2\delta)(n+1)}\big)}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^2}\Bigg) -
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\,\frac{n-(n+1)e^{-(\mu+\delta)}+e^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2. \tag{9.66}$$

Вправа 1. *Довести теорему 9.17.*

Вправа 2. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Для особи (x), що має спадне щорічно n-річне страхування, обчислити

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|},\quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Теорема 9.18. (про спадне щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x) випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}, & x\in[0,c)\\ 0, & x\notin[0,c)\end{cases} \tag{9.67}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія спадного щорічно n-річного страхування життя з негайною виплатою для особи (x) при $n<c$ обчислюються за формулами:

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|}=\frac{1}{\delta c}\,\frac{n-(n+1)e^{-\delta}+e^{-\delta(n+1)}}{1-e^{-\delta}}; \tag{9.68}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big]&=\frac{1}{2\delta c}\Bigg((n+1)^2-\frac{1-e^{-2\delta(n+1)}}{1-e^{-2\delta}}-\\ &-\frac{2\big(n-(n+1)e^{-2\delta}+e^{-2\delta(n+1)}\big)}{(1-e^{-2\delta})^2}\Bigg)-\\ &-\frac{1}{\delta^2c^2}\left(\frac{n-(n+1)e^{-\delta}+e^{-\delta(n+1)}}{1-e^{-\delta}}\right)^2.\end{aligned} \tag{9.69}$$

Вправа 3. *Довести теорему 9.18.*

Вправа 4. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & x\in[0,\omega)\\ 0, & x\notin[0,\omega)\end{cases}$$

Для особи (x), що має спадне щорічно n-річне страхування, обчислити

$$(D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|},\quad \mathsf{Var}\big[Z\big].$$

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \quad t \geq 0$;

(iii) має спадне щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 5. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rvert}$	ξ	θ
20	4.71	571.85	21.38%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має спадне щорічно n-річне страхування життя з негайною виплатою, де

$$n = 5,\ 7,\ 15,\ 30,\ 50,\ 60;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 6. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 20$ отримуємо:

n	$(D\bar{A})^1_{x:\overline{n}\rceil}$	θ	N
20	1.81	38.61%	1492

1.10 Диференціальні рівняння

Для виведення диференціальних рівнянь на актуарні теперішні вартості страхувань життя з негайною виплатою (і спрощення доведення відповідних теорем) нам знадобляться кілька лем.

У кожній з цих лем на функцію виживання s накладається умова її додатності в точці $x \geq 0$. Звідси, по-перше, отримуємо існування функцій ${}_tq_x$, ${}_tp_x$ $t \geq 0$. По-друге, з неперервності й додатності s в точці x випливає її додатність в деякому околі цієї точки. Отже, у цьому околі існуватиме (буде визначеною) функція μ.

Лема 10.1. *Нехай в точці $x \geq 0$ функція виживання s додатня. Тоді*

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_0^h v^t \; {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt = \mu(x). \tag{10.1}$$

Доведення. Позначимо

$$g(h) = \int_0^h v^t \; {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt, \quad h \geq 0.$$

Використовуючи рівність $g(0) = 0$, означення правої похідної функції в точці, теорему про диференціювання інтеграла зі змінною верхньою межею і неперервність справа функції μ в точці x, отримуємо:

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \, g(h) = \lim_{h \to 0_+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'_+(0) =$$

$$= \left(\int_0^h v^t \ {}_tp_x \, \mu(x+t) \, dt \right)' |_{h=0} = v^0 \ {}_0p_x \, \mu(x) = \mu(x).$$

$\square$

Лема 10.2. *Нехай в точці $x \geq 0$ функція виживання s додатня. Тоді*

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1 - v^h \ {}_hp_x}{h} = \delta + \mu(x). \tag{10.2}$$

Доведення. <u>*1-й спосіб:*</u> Позначимо

$$g(h) = v^h \ {}_hp_x \, , \quad h \geq 0.$$

Використовуючи рівність $g(0) = 1$, означення правої похідної функції в точці, існування та формулу для правої похідної ${}_hp_x$ в точці $h = 0$ і формулу для правої похідної добутку функцій, отримуємо:

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1 - g(h)}{h} = - \lim_{h \to 0_+} \frac{g(h) - g(0)}{h} = -g'(0) = -\big(v^h \ {}_hp_x\big)' |_{h=0} =$$
$$= -\big(v^h \ln v \ {}_hp_x - v^h \ {}_hp_x \, \mu(x+h)\big) |_{h=0} = \delta + \mu(x).$$

<u>*2-й спосіб:*</u> Перетворимо вираз під знаком границі в (10.2):

$$\frac{1 - v^h \ {}_hp_x}{h} = \frac{1 - v^h}{h} + v^h \frac{{}_hq_x}{h}. \tag{10.3}$$

За означенням правої похідної функції в точці

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1 - v^h}{h} = - \lim_{h \to 0_+} \frac{v^h - v^0}{h} = -(v^h)' |_{h=0} = -\ln v = \delta.$$

За теоремою про зв'язок ${}_hq_x$ з $\mu(x)$

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{{}_hq_x}{h} = \mu(x).$$

Отже, права частина (10.3) при $h \to 0_+$ прямує до $\delta + \mu(x)$. $\square$

Лема 10.3. *Нехай в точці $x \geq 0$ функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді*

$$\lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h} \int_0^h v^t \ {}_tp_{x-h} \, \mu(x-h+t) \, dt = \mu(x). \tag{10.4}$$

Доведення. Зробимо в інтегралі (10.4) заміну $t = h - u$:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h v^t \ {}_t p_{x-h}\, \mu(x-h+t)\, dt = \frac{1}{h}\int\limits_0^h v^{h-u} \ {}_{h-u}p_{x-h}\ \mu(x-u)\, du =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_0^h v^{h-u}\ \frac{s(x-u)}{s(x-h)}\mu(x-u)\, du =$$

$$= \frac{v^h}{s(x-h)}\frac{1}{h}\int\limits_0^h v^{-u}s(x-u)\mu(x-u)\, du = \frac{v^h}{s(x-h)}\frac{g(h)}{h}, \quad h > 0,$$

де

$$g(h) = \int\limits_0^h v^{-u}s(x-u)\mu(x-u)\, du, \quad h \geq 0.$$

Використовуючи рівність $g(0) = 0$, означення правої похідної функції в точці, теорему про диференціювання інтеграла зі змінною верхньою межею і неперервність функції μ в точці x (що випливає з диференційовності s в точці x), отримуємо:

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0_+}\frac{g(h)-g(0)}{h} = g'_+(0) =$$

$$= \left(\int\limits_0^h v^{-u}s(x-u)\mu(x-u)\, du\right)'\Big|_{h=0} = s(x)\mu(x).$$

Отже,

$$\exists \lim_{h\to 0_+}\frac{v^h}{s(x-h)}\frac{g(h)}{h} = \frac{s(x)\mu(x)}{s(x)} = \mu(x).$$

□

Лема 10.4. *Нехай в точці $x \geq 0$ функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді*

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{1 - v^h\ {}_h p_{x-h}}{h} = \delta + \mu(x). \tag{10.5}$$

Доведення. Перетворимо вираз під знаком границі в (10.5):

$$\frac{1 - v^h\ {}_h p_{x-h}}{h} = \frac{1-v^h}{h} + v^h\,\frac{{}_h q_{x-h}}{h} =$$

$$= \frac{1-v^h}{h} + \frac{v^h}{s(x-h)}\frac{s(x-h)-s(x)}{h}, \quad h > 0. \tag{10.6}$$

За означенням похідної

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{1-v^h}{h} = -\lim_{h\to 0_+}\frac{v^h-v^0}{h} = -(v^h)'\,\big|_{h=0} = -\ln v = \delta.$$

За умовою леми та означенням лівої похідної функції в точці

$$s'(x) = s'_-(x) = \lim_{h\to 0_+}\frac{s(x-h)-s(x)}{-h}.$$

Отже, права частина (10.6) при $h \to 0_+$ прямує до

$$\delta - \frac{s'(x)}{s(x)} = \delta + \mu(x).$$

$\square$

Теорема 10.1. (диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування з негайною виплатою)

(i) *Нехай в точці $x \geq 0$ функція виживання s додатня. Тоді існує права похідна $\bar{A}_x$ в точці x, для якої справедлива формула:*

$$\frac{d}{dx}\bar{A}_x = \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x). \tag{10.7}$$

(ii) *Нехай в точці $x \geq 0$ функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді $\bar{A}_x$ диференційовна в точці x, і для її похідної справедлива формула (10.7).*

Доведення. _1-й спосіб_: Згідно з першим твердженням теореми потрібно показати, що

$$\exists \lim_{h\to 0_+}\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x). \tag{10.8}$$

За теоремою про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою

$$\bar{A}_x = \int\limits_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + v^h\,{}_hp_x\,\bar{A}_{x+h}, \quad h>0.$$

Подамо цю рівність у вигляді:

$$\frac{\bar{A}_{x+h}-\bar{A}_x}{h} = \frac{1}{v^h\,{}_hp_x}\left(\frac{1-v^h\,{}_hp_x}{h}\,\bar{A}_x - \frac{1}{h}\int\limits_0^h v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt\right), \quad h>0.$$

Застосовуючи леми 10.1 і 10.2 та арифметичні властивості границі функції, звідси отримуємо (10.8):

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{\bar{A}_{x+h} - \bar{A}_x}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{v^h\, {}_hp_x} \left(\lim_{h\to 0_+} \frac{1 - v^h\, {}_hp_x}{h}\, \bar{A}_x - \right.$$

$$\left. - \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \int_0^h v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \right) = \big(\delta + \mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x).$$

Для доведення другого твердження теореми досить показати, що існує ліва похідна функції $\bar{A}_x$ в точці x, і вона збігається з правою похідною:

$$\exists \lim_{h\to 0_+} \frac{\bar{A}_{x-h} - \bar{A}_x}{-h} = \big(\delta + \mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x). \tag{10.9}$$

За теоремою про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою

$$\bar{A}_{x-h} = \int_0^h v^t\, {}_tp_{x-h}\, \mu(x-h+t)\, dt + v^h\, {}_hp_{x-h}\, \bar{A}_x, \quad h > 0.$$

Подамо цю рівність у вигляді:

$$\frac{\bar{A}_{x-h} - \bar{A}_x}{-h} = -\frac{1}{h} \int_0^h v^t\, {}_tp_{x-h}\, \mu(x-h+t)\, dt + \frac{1 - v^h\, {}_hp_{x-h}}{h} \bar{A}_x, \quad h > 0.$$

Застосовуючи леми 10.3 і 10.4 та арифметичні властивості границі функції, звідси отримуємо (10.9):

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{\bar{A}_{x-h} - \bar{A}_x}{-h} = -\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h} \int_0^h v^t\, {}_tp_{x-h}\, \mu(x-h+t)\, dt +$$

$$+ \lim_{h\to 0_+} \frac{1 - v^h\, {}_hp_{x-h}}{h} \bar{A}_x = \big(\delta + \mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x).$$

2-й спосіб: Використовуючи означення $\bar{A}_x$ і формулу

$${}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)},$$

отримуємо:

$$\bar{A}_x = \int\limits_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^\infty v^t \frac{s(x+t)}{s(x)}\, \mu(x+t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{s(x)} \int\limits_0^\infty v^t s(x+t)\mu(x+t)\, dt.$$

Зробимо в цьому інтегралі заміну $t = y - x$:

$$\bar{A}_x = \frac{1}{v^x s(x)} \int\limits_x^\infty v^y s(y)\mu(y)\, dy.$$

Отже, функція $\bar{A}_x$ є добутком трьох функцій:

$$v^{-x}, \quad \frac{1}{s(x)}, \quad \int\limits_x^\infty v^y s(y)\mu(y)\, dy. \tag{10.10}$$

(а) перша з (10.10) функція диференційовна в точці x і її похідна дорівнює:

$$(v^{-x})' = -v^{-x}\ln v = \frac{\delta}{v^x};$$

(б) друга з (10.10) функція має праву похідну в точці x, що випливає з неперервності й кускової гладкості функції s, і її права похідна дорівнює:

$$\left(\frac{1}{s(x)}\right)' = -\frac{s'(x)}{s^2(x)} = \frac{\mu(x)}{s(x)};$$

(в) третя з (10.10) функція має праву похідну в точці x, що випливає з теореми про диференціювання інтеграла зі змінною верхньою межею, неперервності функцій v^y і $s(y)$ та неперервності справа функції $\mu(y)$ в точці x, і її права похідна дорівнює:

$$\left(\int\limits_x^\infty v^y s(y)\mu(y)\, dy\right)' = -v^x s(x)\mu(x).$$

Отже, згідно з (a),(b),(c) та арифметичними властивостями похідної функція $\bar{A}_x$ має праву похідну в точці x і вона дорівнює:

$$(\bar{A}_x)' = \frac{\delta}{v^x}\frac{1}{s(x)} \int\limits_x^\infty v^y s(y)\mu(y)\, dy + \frac{\mu(x)}{s(x)}\frac{1}{v^x} \int\limits_x^\infty v^y s(y)\mu(y)\, dy +$$

$$+\big(-v^x s(x)\mu(x)\big)\,\frac{1}{v^x s(x)} = \frac{\delta+\mu(x)}{v^x s(x)}\int\limits_x^{\infty} v^y s(y)\mu(y)\,dy - \mu(x) =$$

$$= \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x).$$

Для доведення другого твердження теореми зазначимо, що функція $\bar{A}_x$ є добутком трьох диференційовних в точці x функцій (10.10): диференційовність першої з цих функцій не залежить від умови теореми; диференційовність другої з них випливає з умови теореми і арифметичних властивостей похідної; диференційовність третьої з цих функцій випливає з теореми про диференційовнісь інтеграла зі змінною верхньою межею, враховуючи неперервність в точці x функції $\mu(y)$, що отримуємо з умови теореми. Отже, $\bar{A}_x$ також диференційовна в точці x, і її похідна в цій точці збігається з правою похідною в цій точці. □

Теорема 10.2. (диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість страхування на дожиття)

(i) *Нехай в точці $x+n$ ($x \geq 0$; $n > 0$) функція виживання s додатня. Тоді існує права похідна $A_{x:\,\overset{1}{n|}}$ в точці x, для якої справедлива формула:*

$$\frac{d}{dx}A_{x:\,\overset{1}{n|}} = \big(\mu(x)-\mu(x+n)\big)A_{x:\,\overset{1}{n|}}. \tag{10.11}$$

Або в позначеннях ${}_nE_x$:

$$\frac{d}{dx}\,{}_nE_x = \big(\mu(x)-\mu(x+n)\big)\,{}_nE_x\,.$$

(ii) *Нехай в точках $x,\ x+n$ ($x \geq 0$; $n > 0$) функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді $A_{x:\,\overset{1}{n|}}$ диференційовна в точці x, і для її похідної справедлива формула (10.11).*

Доведення. Оскільки

$$A_{x:\,\overset{1}{n|}} = v^n\,{}_np_x = v^n\,\frac{s(x+n)}{s(x)},$$

то існування правої похідної функції $A_{x:\,\overset{1}{n|}}$ в точці x (відповідно диференційовність $A_{x:\,\overset{1}{n|}}$ в точці x) випливає з існування правих похідних фунції s в точках $x,\ x+n$ (відповідно диференційовності функції s в точках $x,\ x+n$). Для отримання формули (10.11) скористаємося арифметичними властивостями похідної і формулами

$$\mu(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)}, \quad \mu(x+n) = -\frac{s'(x+n)}{s(x+n)}.$$

Отже,

$$\frac{d}{dx}A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n\left(\frac{s(x+n)}{s(x)}\right)' = v^n\left[\frac{s'(x+n)}{s(x)} - \frac{s(x+n)s'(x)}{s^2(x)}\right] =$$
$$= v^n\left[\frac{s'(x+n)}{s(x+n)}\,\frac{s(x+n)}{s(x)} - \frac{s(x+n)}{s(x)}\,\frac{s'(x)}{s(x)}\right] =$$
$$= v^n\,{}_np_x\,\big(-\mu(x+n)+\mu(x)\big) = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\big(-\mu(x+n)+\mu(x)\big).$$

□

Теорема 10.3. (диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість n-річного страхування з негайною виплатою)

(i) *Нехай в точці* $x+n$ ($x \geq 0$; $n > 0$) *функція виживання* s *додатня. Тоді існує права похідна* $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ *в точці* x, *для якої справедлива формула:*

$$\frac{d}{dx}\,\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \mu(x) + {}_nE_x\,\mu(x+n). \tag{10.12}$$

(ii) *Нехай в точках* x, $x+n$ ($x \geq 0$; $n > 0$) *функція виживання* s *додатня й диференційовна. Тоді* $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$ *диференційовна в точці* x, *і для її похідної справедлива формула (10.12).*

Доведення. *<u>1-й спосіб</u>*: Згідно з першим твердженням теореми потрідно показати, що

$$\exists \lim_{h\to 0_+}\frac{\bar{A}^1_{x+h:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{h} = \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \mu(x) + {}_nE_x\,\mu(x+n). \tag{10.13}$$

За теоремою про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування життя з негайною виплатою

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int\limits_0^h v^t\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + v^h\,{}_hp_x\,\bar{A}^1_{x+h:\overline{n-h}|}, \quad \forall h \in (0,n).$$

Подамо цю рівність у вигляді:

$$\frac{\bar{A}^1_{x+h:\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}}{h} =$$
$$= \frac{1}{v^h\,{}_hp_x}\left(\frac{1-v^h\,{}_hp_x}{h}\ \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{h}\int\limits_0^h v^t\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt\right)+$$

$$+\frac{\bar{A}^{1}_{x+h:\,\overline{n}|}-\bar{A}^{1}_{x+h:\,\overline{n-h}|}}{h},\quad h\in(0,n).\quad (10.14)$$

Зауваження 1. $\lim\limits_{h\to 0_+}\frac{1}{h}\,(\bar{A}^{1}_{x+h:\,\overline{n}|}-\bar{A}^{1}_{x+h:\,\overline{n-h}|})={}_{n}E_x\,\mu(x+n).$

За означенням актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою

$$\frac{1}{h}\,(\bar{A}^{1}_{x+h:\,\overline{n}|}-\bar{A}^{1}_{x+h:\,\overline{n-h}|})=\frac{1}{h}\Bigg(\int\limits_0^n v^t\,{}_tp_{x+h}\,\mu(x+h+t)\,dt-$$

$$-\int\limits_0^{n-h} v^t\,{}_tp_{x+h}\,\mu(x+h+t)\,dt\Bigg)=\frac{1}{h}\int\limits_{n-h}^{n} v^t\,{}_tp_{x+h}\,\mu(x+h+t)\,dt.$$

Зробимо в інтегралі правої частини цієї рівності заміну $t=n-h+u$, скористаємося рівністю

$${}_{n-h+u}p_{x+h}=\frac{s(x+n+u)}{s(x+h)}=$$

$$=\frac{s(x+n+u)}{s(x+n)}\,\frac{s(x+n)}{s(x)}\,\frac{s(x)}{s(x+h)}=\frac{{}_up_{x+n}\ {}_np_x}{{}_hp_x}$$

і лемою 10.1. Отримаємо:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h v^{n-h+u}\ {}_{n-h+u}p_{x+h}\,\mu(x+n+u)\,du=$$

$$=\frac{{}_nE_x}{v^h\ {}_hp_x}\,\frac{1}{h}\int\limits_0^h v^u\ {}_up_{x+n}\,\mu(x+n+u)\,du\to{}_nE_x\,\mu(x+n),\quad h\to 0_+.$$

Застосовуючи тепер леми 10.1 і 10.2 та зауваження 1 до (10.14), отримуємо твердження (10.13).

Для доведення другого твердження теореми досить показати, що існує ліва похідна функції $\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}$ в точці x, і вона збігається з правою похідною:

$$\exists\lim_{h\to 0_+}\frac{\bar{A}^{1}_{x-h:\,\overline{n}|}-\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}}{-h}=\big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}-\mu(x)+{}_nE_x\,\mu(x+n).\qquad (10.15)$$

За теоремою про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування життя з негайною виплатою

$$\bar{A}^{1}_{x-h:\,\overline{n}|}=\int\limits_0^h v^t\ {}_tp_{x-h}\,\mu(x-h+t)\,dt+v^h\ {}_hp_{x-h}\,\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n-h}|},\quad h\in(0,n).$$

Подамо цю рівність у вигляді:

$$\frac{\bar{A}^1_{x-h:\,\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}}{-h} =$$

$$= \frac{1 - v^h\, {}_hp_{x-h}}{h} \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \frac{1}{h}\int\limits_0^h v^t\, {}_tp_{x-h}\, \mu(x-h+t)\, dt +$$

$$+ v^h\, {}_hp_{x-h}\, \frac{\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\,\overline{n-h}|}}{h}, \quad h \in (0, n). \quad (10.16)$$

Зауваження 2. $\lim\limits_{h \to 0_+} \frac{1}{h}\, (\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\,\overline{n-h}|}) = {}_nE_x\, \mu(x+n)$.

За означенням актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з негайною виплатою

$$\frac{1}{h}\, (\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^1_{x:\,\overline{n-h}|}) = \frac{1}{h}\left(\int\limits_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{n-h} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt\right) = \frac{1}{h}\int\limits_{n-h}^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt.$$

Зробимо в інтегралі правої частини цієї рівності заміну $t = n - h + u$, скористаємося рівністю

$${}_{n-h+u}p_x = \frac{s(x+n-h+u)}{s(x)} =$$

$$= \frac{s(x+n-h+u)}{s(x+n-h)}\, \frac{s(x+n-h)}{s(x)} = {}_up_{x+n-h}\ {}_{n-h}p_x$$

і лемою 10.3. Отримаємо:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h v^{n-h+u}\ {}_{n-h+u}p_x\, \mu(x+n-h+u)\, du =$$

$$= {}_{n-h}E_x\, \frac{1}{h}\int\limits_0^h v^u\ {}_up_{x+n-h}\, \mu(x+n-h+u)\, du \to {}_nE_x\, \mu(x+n), \quad h \to 0_+.$$

Застосовуючи тепер леми 10.3 і 10.4 та зауваження 2 до (10.16), отримуємо твердження (10.15).

<u>*2-й спосіб*</u>: Використовуючи означення $\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}$ і формулу

$$ {}_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)}, $$

отримуємо:

$$ \bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^n v^t \frac{s(x+t)}{s(x)}\, \mu(x+t)\, dt = $$

$$ = \frac{1}{s(x)} \int\limits_0^n v^t s(x+t)\mu(x+t)\, dt. $$

Зробимо в цьому інтегралі заміну $t = y - x$:

$$ \bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1}{v^x s(x)} \int\limits_x^{x+n} v^y s(y)\mu(y)\, dy. \tag{10.17} $$

Отже, функція $\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}$ є добутком трьох функцій:

$$ v^{-x}, \quad \frac{1}{s(x)}, \quad \int\limits_x^{x+n} v^y s(y)\mu(y)\, dy. $$

(а) перша з цих функцій диференційовна в точці x і її похідна дорівнює:

$$ (v^{-x})' = -v^{-x} \ln v = \frac{\delta}{v^x}; $$

(б) друга з них має праву похідну в точці x, що випливає з неперервності й кускової гладкості функції s, і її похідна дорівнює:

$$ \left(\frac{1}{s(x)}\right)' = -\frac{s'(x)}{s^2(x)} = \frac{\mu(x)}{s(x)}; $$

(в) третя з цих функцій має праву похідну в точці x, що випливає з теореми про диференціювання інтеграла зі змінною верхньою межею, неперервності функцій v^y і $s(y)$ та неперервності справа функції $\mu(y)$ в точках $x, x+n$, і її похідна дорівнює:

$$ \left(\int\limits_x^{x+n} v^y s(y)\mu(y)\, dy\right)' = -v^x s(x)\mu(x) + v^{x+n} s(x+n)\mu(x+n). $$

Отже, згідно з (a),(b),(c) та арифметичними властивостями похідної функція $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}$ має праву похідну в точці x, і вона дорівнює:

$$
\begin{aligned}
(\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|})' = \frac{\delta}{v^x}\frac{1}{s(x)}\int\limits_x^{x+n} v^y s(y)\mu(y)\,dy + \frac{\mu(x)}{s(x)}\frac{1}{v^x}\int\limits_x^{x+n} v^y s(y)\mu(y)\,dy + \\
+ \big(-v^x s(x)\mu(x) + v^{x+n} s(x+n)\mu(x+n)\big)\,\frac{1}{v^x s(x)} = \\
= \frac{\delta+\mu(x)}{v^x s(x)}\int\limits_x^{x+n} v^y s(y)\mu(y)\,dy - \mu(x) + v^n\,{}_np_x\,\mu(x+n) = \\
= \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \mu(x) + {}_nE_x\,\mu(x+n).
\end{aligned}
$$

Для доведення другого твердження теореми зазначимо, що функція $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}$ є добутком трьох диференційовних в точці x функцій (10.17): диференційовність першої з цих функцій не залежить від умови теореми; диференційовність другої з них випливає з умови теореми і арифметичних властивостей похідної; диференційовність третьої з цих функцій випливає з теореми про диференційовнісь інтеграла зі змінною верхньою межею, враховуючи неперервність в точках x та $x+n$ функції $\mu(y)$, що отримуємо з умови теореми. Отже, $\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|}$ також диференційовна в точці x, і її похідна в цій точці збігається з правою похідною в цій точці.

<u>*3-й спосіб*</u>: За теоремою про зв'язок n-річного і пожиттєвого страхувань життя

$$\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \bar{A}_x - {}_nE_x\,\bar{A}_{x+n}.$$

Використовуючи цю рівність і формули (10.7) і (10.11) (теореми 10.1 і 10.2), отримуємо формулу (10.12):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{d}{dx}\bar{A}_x - \frac{d}{dx}\big({}_nE_x\,\bar{A}_{x+n}\big) = \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x) - \\
-\big(\mu(x)-\mu(x+n)\big)\,{}_nE_x\,\bar{A}_{x+n} - {}_nE_x\,\Big(\big(\delta+\mu(x+n)\big)\bar{A}_{x+n} - \mu(x+n)\Big) = \\
= \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x) - \big(\mu(x)+\delta\big)\,{}_nE_x\,\bar{A}_{x+n} + {}_nE_x\,\mu(x+n) = \\
= \big(\delta+\mu(x)\big)\big(\bar{A}_x - {}_nE_x\,\bar{A}_{x+n}\big) - \mu(x) + {}_nE_x\,\mu(x+n) = \\
= \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} - \mu(x) + {}_nE_x\,\mu(x+n).
\end{aligned}
$$

□

Теорема 10.4. (диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість мішаного страхування з негайною виплатою)

(i) *Нехай в точці $x+n$ ($x \geq 0$; $n > 0$) функція виживання s додатня. Тоді існує права похідна $\bar{A}_{x:\,\overline{n|}}$ в точці x, для якої справедлива формула:*

$$\frac{d}{dx}\,\bar{A}_{x:\,\overline{n|}} = \big(\delta + \mu(x)\big)\bar{A}_{x:\,\overline{n|}} - \mu(x) - \delta\,{}_{n}E_x\,. \tag{10.18}$$

(ii) *Нехай в точцах x, $x+n$ ($x \geq 0$; $n > 0$) функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді $\bar{A}_{x:\,\overline{n|}}$ диференційовна в точці x, і для її похідної справедлива формула (10.18).*

Вправа 1. *Довести теорему 10.4.*

Теорема 10.5. (диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування з негайною виплатою)

(i) *Нехай в точці $x+l$ ($x \geq 0$; $l > 0$) функція виживання s додатня. Тоді існує права похідна ${}_{l|}\bar{A}_x$ в точці x, для якої справедлива формула:*

$$\frac{d}{dx}\,{}_{l|}\bar{A}_x = \big(\delta + \mu(x)\big)\,{}_{l|}\bar{A}_x - \,{}_{l}E_x\,\mu(x+l). \tag{10.19}$$

(ii) *Нехай в точках x, $x+l$ ($x \geq 0$; $l > 0$) функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді ${}_{l|}\bar{A}_x$ диференційовна в точці x, і для її похідної справедлива формула (10.19).*

Доведення. *1-й спосіб*: Твердження теореми про існування правої похідної і про диференційовність випливає з теорем 10.1 і 10.2 та рівності

$${}_{l|}\bar{A}_x = A_{x:\,\overset{1}{\overline{l|}}}\,\bar{A}_{x+l} = \,{}_{l}E_x\;\bar{A}_{x+l}. \tag{10.20}$$

Формула (10.19) випливає з рівності (10.20) та формул (10.7) і (10.11):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,{}_{l|}\bar{A}_x &= \left(\frac{d}{dx}A_{x:\,\overset{1}{\overline{l|}}}\right)\bar{A}_{x+l} + A_{x:\,\overset{1}{\overline{l|}}}\left(\frac{d}{dx}\bar{A}_{x+l}\right) = \\ &= \big(\mu(x) - \mu(x+l)\big)\,{}_{l}E_x\,\bar{A}_{x+l} + \,{}_{l}E_x\;\big((\delta + \mu(x+l))\bar{A}_{x+l} - \mu(x+l)\big) = \\ &= \big(\delta + \mu(x)\big)\,{}_{l|}\bar{A}_x - \,{}_{l}E_x\,\mu(x+l).\end{aligned}$$

2-й спосіб: Твердження теореми про існування правої похідної і про диференційовність випливає з теорем 10.1 і 10.3 та рівності

$${}_{l|}\bar{A}_x = \bar{A}_x - \bar{A}^{1}_{x:\,\overline{l|}}. \tag{10.21}$$

Формула (10.19) випливає з рівності (10.21) та формул (10.7) і (10.12):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,{}_{l|}\bar{A}_x = \left(\frac{d}{dx}\bar{A}_x\right) - \left(\frac{d}{dx}\bar{A}^{\,1}_{x:\,\overline{l}|}\right) = \\
= \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}_x - \mu(x) - \big(\delta+\mu(x)\big)\bar{A}^{\,1}_{x:\,\overline{l}|} + \mu(x) - {}_{l}E_x\,\mu(x+l) = \\
= \big(\delta+\mu(x)\big)\,{}_{l|}\bar{A}_x - {}_{l}E_x\,\mu(x+l).
\end{aligned}
$$

□

Теорема 10.6. (диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років n-річного страхування з негайною виплатою)

(i) *Нехай в точці $x+l+n$ ($x \geq 0$; $l,n>0$) функція виживання s додатня. Тоді існує права похідна ${}_{l|n}\bar{A}_x$ в точці x, для якої справедлива формула:*

$$
\frac{d}{dx}\,{}_{l|n}\bar{A}_x = \big(\delta+\mu(x)\big)\,{}_{l|n}\bar{A}_x - {}_{l}E_x\,\mu(x+l) + {}_{l+n}E_x\,\mu(x+l+n). \tag{10.22}
$$

(ii) *Нехай в точках $x,\ x+l,\ x+l+n$ ($x \geq 0,\ l,n>0$) функція виживання s додатня й диференційовна. Тоді ${}_{l|n}\bar{A}_x$ диференційовна в точці x, і для її похідної справедлива формула (10.22).*

Вправа 2. *Довести теорему 10.6 (навести два різних способи доведення).*

Розділ 2

Страхові угоди з виплатами в кінці року

2.1 Загальне поняття страхування життя з виплатою в кінці року

2.1.1 Означення

В моделях страхування життя, які розглядаються у цьому розділі, величина та час виплати за страховою угодою залежать лише від цілої кількості років від моменту укладання угоди до моменту настання страхової події (смерті застрахованої особи). Ці моделі називаються *моделями страхування життя з виплатою в кінці року*, оскільки виплата здійснюється в кінці року настання страхової події. Отже, такі моделі страхування життя описуються в термінах випадкової величини $K(x)$ — цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x). Ці моделі визначаються двома функціями (послідовностями):

- *функцією відшкодування* (*функцією винагороди*, *функцією страхових виплат*)
$$b_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
- *функцією дисконтування*
$$v_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Величина b_{k+1} є виплатою, яку здійснює страхова організація в момент часу

$$x + k + 1$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x), якщо страхова подія настає на проміжку (півінтервалі)

$$\big[x+k,\, x+k+1\big).$$

Функція дисконтування v_{k+1} зазвичай є звуженням на множину цілих невід'ємних чисел функції дисконтування

$$v_t, \quad t \ge 0.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат (відшкодувань)* z_{k+1} за формулою

$$z_{k+1} = b_{k+1} v_{k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Отже, z_{k+1} — це теперішня вартість майбутнього відшкодування (виплати) згідно з укладеною угодою. Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Z = Z(x)$, яка називається *теперішньою вартістю втрат* (страхової організації) або *теперішньою вартістю страхування* (життя):

$$Z(x) = z_{K(x)+1} = b_{K(x)+1} v_{K(x)+1}, \tag{1.1}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} z_{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v_{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} \tag{1.2}$$

випадкової величини $Z(x)$ називається *актуарною теперішньою вартістю страхування* (життя) або *актуарною теперішньою вартістю втрат* (страхової організації). Залежно від вигляду функцій відшкодування та дисконтування отримуємо різні типи угод страхування життя (наприклад пожиттєве, строкове, мішане, відкладене пожиттєве, відкладене строкове, відкладене мішане).

Зауваження 1. Позначимо

$$\delta_t = -\frac{v_t'}{v_t} = -(\ln v_t)', \quad t \ge 0.$$

Тоді

$$v_{k+1} = e^{-\int\limits_0^{k+1} \delta_t\, dt}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Отже, формула для актуарної теперішньої вартості страхування набуває вигляду

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} e^{-\int\limits_0^{k+1} \delta_t\, dt}\, {}_k p_x\, q_{x+k}.$$

Відповідно j-ий момент випадкової величини Z обчислюється за формулою

$$\mathsf{E}\big[Z^j\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}^j v_{k+1}^j \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}^j e^{-\int\limits_0^{k+1} j\delta_t dt} \, {}_kp_x \, q_{x+k}.$$

Отже, якщо функція відшкодування b_{k+1} задовільняє умову

$$b_{k+1}^j = b_{k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{1.3}$$

то *j-ий момент випадкової величини Z з параметром δ_t дорівнює актуарній теперішній вартості страхування з параметром $j\delta_t$*. Зазначимо, що умова (1.3) еквівалентна умові:

$$b_{k+1} \in \{0, 1\}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Зауваження 2. Нехай функція дисконтування має вигляд:

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0,$$

де $v \in (0, 1)$. Позначимо

$$\delta = -\ln v.$$

Тоді

$$\delta_t = -\ln v = \delta, \quad t \geq 0.$$

Відповідно

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} e^{-\delta(k+1)} \, {}_kp_x \, q_{x+k};$$

$$\mathsf{E}\big[Z^j\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}^j v^{j(k+1)} \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}^j e^{-j\delta(k+1)} \, {}_kp_x \, q_{x+k}.$$

Означення 1.1. Параметр δ_t (відповідно δ) називається ***силою (інтенсивністю) відсотку (дисконту, відсоткової ставки, нарахування відсотку)***.

2.1.2 Властивості

Теорема 1.1. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей втрат) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Нехай функція відшкодування має таку властивість: для $l \in \mathbf{N}$ відшкодування в момент часу

$$x + l + k + 1$$

для застрахованої особи у віці x та у віці $x+l$ однакове, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в момент настання страхової події на проміжку

$$[x+l+k,\ x+l+k+1)\,.$$

Тоді

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \ge l\big] = v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. \tag{1.4}$$

Доведення. Позначимо b_{k+1}, $\widetilde{b}_{k+1}$ функції відшкодування для особи, застрахованої у віці x та у віці $x+l$ відповідно. Тоді згідно з умовою теореми

$$\widetilde{b}_{k+1} = b_{l+k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Звідси та формул (1.1) і (1.2) отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Z(x+l)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{b}_{k+1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x+l) = k\big\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{l+k+1} v^{k+1}\, {}_k p_{x+l}\, q_{x+l+k}. \tag{1.5}$$

За означенням випадкової величини $Z(x)$

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \ge l\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) \ge l\big\} =$$
$$= \sum_{k=l}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) \ge l\big\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{l+k+1} v^{l+k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = l+k \mid K(x) \ge l\big\} =$$
$$= v^l \sum_{k=0}^{\infty} b_{l+k+1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = l+k \mid K(x) \ge l\big\}. \tag{1.6}$$

<u>*1-й спосіб*</u>: Оскільки

$$K(x+l) = K(x) - l, \quad K(x) \ge l,$$

то

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x+l) = k\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K(x) = l+k \mid K(x) \ge l\big\}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Звідси та рівностей (1.5) і (1.6) отримуємо формулу (1.4).

<u>*2-й спосіб*</u>: За означенням умовної ймовірності

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) \geq l\big\} = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\}}, & k \geq l \\ 0, & k < l \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{{}_kp_x\, q_{x+k}}{{}_lp_x}, & k \geq l \\ 0, & k < l \end{cases} \qquad (1.7)$$

Використовуючи (1.7) і співвідношення

$${}_{l+k}p_x \,=\, {}_lp_x \;{}_kp_{x+l}\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

маємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = l + k \mid K(x) \geq l\big\} = \frac{{}_{l+k}p_x\, q_{x+l+k}}{{}_lp_x} = {}_kp_{x+l}\, q_{x+l+k}.$$

Звідси та рівностей (1.5) і (1.6) отримуємо формулу (1.4). □

Теорема 1.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці року) *За умов теореми 1.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \sum_{k=0}^{l-1} b_{k+1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + v^l\, {}_lp_x\, \mathsf{E}\big[Z(x + l)\big], \qquad (1.8)$$

де b_{k+1}, $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$ *позначає функцію відшкодування для застрахованої особи у віці* x.

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: Згідно з умовою теореми функцією відшкодування для особи, застрахованої у віці $x + l$, є

$$b_{l+k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Звідси та формули (1.2) маємо:

$$\mathsf{E}\big[Z(x + l)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{l+k+1} v^{k+1}\, {}_kp_{x+l}\, q_{x+l+k}. \qquad (1.9)$$

Використовуючи співвідношення

$${}_{l+k}p_x \,=\, {}_lp_x \;{}_kp_{x+l}\,,$$

рівність (1.9) та формулу (1.2), отримуємо формулу (1.8):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Z(x)\big] - \sum_{k=0}^{l-1} b_{k+1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} &= \\
= \sum_{k=l}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{l+k+1} v^{l+k+1}\, {}_{l+k}p_x\, q_{x+l+k} = \\
&= v^l\, {}_lp_x \sum_{k=0}^{\infty} b_{l+k+1} v^{k+1}\, {}_kp_{x+l}\, q_{x+l+k} = v^l\, {}_lp_x\, \mathsf{E}\big[Z(x+1)\big].
\end{aligned}
$$

2-й спосіб: За формулою повної ймовірності

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) < l\big] \mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\} &+ \\
+ \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \ge l\big] \mathsf{Pr}\big\{K(x) \ge l\big\} &= \\
= \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) < l\big]\, {}_lq_x + \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \ge l\big]\, {}_lp_x\,. &\quad (1.10)
\end{aligned}
$$

Перший співмножник другого доданку правої частини (1.10) отримуємо з теореми про зв'язок актуарних теперішніх вартостей втрат:

$$
\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \ge l\big] = v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. \quad (1.11)
$$

Для обчислення першого співмножника першого доданку правої частини (1.10) скористаємося рівністю

$$
\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) < l\big\} = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\}}, & k < l \\ 0, & k \ge l \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{{}_kp_x\, q_{x+k}}{{}_lq_x}, & k < l \\ 0, & k \ge l \end{cases}
$$

та означенням математичного сподівання:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) < l\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) < l\big\} &= \\
= \frac{1}{{}_lq_x} \sum_{k=0}^{l-1} b_{k+1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. &\quad (1.12)
\end{aligned}
$$

Підставляючи (1.11) і (1.12) в (1.10), отримуємо (1.8). □

2.2 Функція розподілу теперішньої вартості страхування життя з виплатою в кінці року

Теорема 2.1. (перша теорема про функцію розподілу Z) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат) z_{k+1} задовільняє умови:*

(i) $z_1 = \ldots = z_l = 0$;

(ii) $z_{k+1},\ k \geq l$, *додатня й спадна;*

(iii) $z_{k+1} \to 0,\ \ k \to \infty$.

Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x\,, & z = 0 \\ {}_lq_x \,+\, {}_kp_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k),\ \ k \geq l+1 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{2.1}$$

Якщо $l = 0$, то

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ {}_kp_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k),\ \ k \in \mathbf{N} \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Доведення. За означенням випадкової величини Z і умовою теореми

$$Z \in [0, z_{l+1}].$$

Отже,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{2.2}$$

Згідно з умовою теореми

$$\mathsf{Pr}\big\{Z = 0\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K < l\big\} = {}_lq_x\,. \tag{2.3}$$

Нехай $0 < z < z_{l+1}$. Згідно з умовою теореми

$$(0, z_{l+1}) = \bigsqcup_{k=l+1}^{\infty} [z_{k+1}, z_k).$$

Отже,

$$z \in (0, z_{l+1}) \iff \exists! k \geq l+1 :\ z \in [z_{k+1}, z_k).$$

Нехай $z \in [z_{k+1}, z_k)$. Тоді, використовуючи умову теореми, маємо:

$$Z > z \iff z_{K+1} > z \iff z_{K+1} > z_{k+1} \iff l \leq K < k.$$

Отже,

$$F_Z(z) = \mathsf{Pr}\big\{Z \le z\big\} = 1 - \mathsf{Pr}\big\{Z > z\big\} = 1 - \mathsf{Pr}\big\{l \le K < k\big\} =$$
$$= \mathsf{Pr}\big\{K < l\big\} + \mathsf{Pr}\big\{K \ge k\big\} = {}_{l}q_x + {}_{k}p_x \,. \quad (2.4)$$

З (3.2), (2.3) і (3.3) випливає (3.5). □

Наслідок 2.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *За умов теореми 3.1:*

(i) ${}_{l}q_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_{l}q_x\,] \quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) $\forall k \ge l+1 \quad \Big({}_{k}p_x < {}_{k-1}p_x \implies$
$\implies \forall p \in (\,{}_{l}q_x + {}_{k}p_x\,, {}_{l}q_x + {}_{k-1}p_x\,] \quad \xi_Z^p = z_k \Big).$

Доведення. Обидва твердження наслідку випливають з теореми про процентиль (перше твердження). Справді, використовуючи формулу (3.5) теореми 3.1, маємо:

(i) $F_Z(0_-) = 0 < {}_{l}q_x = F_Z(0)$;

(ii) $F_Z(z_{k-}) = {}_{l}q_x + {}_{k}p_x < {}_{l}q_x + {}_{k-1}p_x = F_Z(z_k)$.

□

Теорема 2.2. (друга теорема про функцію розподілу Z) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат)* z_{k+1} *задовільняє умови:*

(i) $z_1 = \ldots = z_l = 0$;

(ii) $z_{l+1} > z_{l+2} > \ldots > z_{l+n} > 0$;

(iii) $z_{k+1} = 0, \quad k \ge l+n$.

Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{l}q_x + {}_{k}p_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k), \quad k = l+1, \ldots, l+n \\ 1, & z \ge z_{l+1} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{l}q_x + {}_{l+n}p_x\,, & z \in [0, z_{l+n}) \\ {}_{l}q_x + {}_{k}p_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k), \quad k = l+1, \ldots, l+n-1 \\ 1, & z \ge z_{l+1} \end{cases} \quad (2.5)$$

Якщо $l = 0$, *то*

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_kp_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k), \quad k = 1, \ldots, n \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_np_x\,, & z \in [0, z_{l+n}) \\ {}_kp_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k), \quad k = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 3.2.*

Наслідок 2.2.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *За умов теореми 3.2:*

(i) ${}_lq_x + {}_{l+n}p_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_lq_x + {}_{l+n}p_x\,] \quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) $\forall k \in \{l+1, \ldots, l+n\} \quad \Big({}_kp_x < {}_{k-1}p_x \implies$

$\implies \forall p \in (\,{}_lq_x + {}_kp_x\,, {}_lq_x + {}_{k-1}p_x\,] \quad \xi_Z^p = z_k \Big).$

Вправа 2. *Довести наслідок 3.2.1.*

Теорема 2.3. (третя теорема про функцію розподілу Z) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат)* z_{k+1} *задовільняє умови:*

(i) $z_1 = \ldots = z_l = 0;$

(ii) $z_{l+1} > z_{l+2} > \ldots > z_{l+n} > 0;$

(iii) $z_{k+1} = z_{l+n}, \quad k \geq l+n.$

Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x\,, & 0 \leq z < z_{l+n} \\ {}_lq_x + {}_kp_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k), \quad k = l+1, \ldots, l+n-1 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{2.6}$$

Якщо $l = 0$, *то*

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < z_n \\ {}_kp_x\,, & z \in [z_{k+1}, z_k), \quad k = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Вправа 3. *Довести теорему 3.3.*

Наслідок 2.3.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. За умов теореми 3.3:*

(i) ${}_lq_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_lq_x]\quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) ${}_{l+n-1}p_x > 0 \implies \forall p \in ({}_lq_x\,, {}_lq_x + {}_{l+n-1}p_x]\quad \xi_Z^p = z_{l+n};$

(iii) $\forall k \in \{l+1, \ldots, l+n-1\}\quad \Big({}_kp_x < {}_{k-1}p_x \implies$
$\implies \forall p \in ({}_lq_x + {}_kp_x\,, {}_lq_x + {}_{k-1}p_x]\quad \xi_Z^p = z_k \Big).$

Вправа 4. *Довести наслідок 3.3.1.*

2.3 Пожиттєве страхування

2.3.1 Означення

При *пожиттєвому (безтерміновому, безстроковому) страхуванні життя з виплатою в кінці року* виплачується 1 в кінці року смерті застрахованої особи (x), коли б вона не настала.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$z_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = v^{K+1},$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці року цього страхування позначається A_x і визначається формулою:

$$A_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_k p_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} {}_k p_x \, q_{x+k}.$$

Позначимо ${}^2A_x$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2A_x = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty} v^{2(k+1)} {}_k p_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\delta(k+1)} {}_k p_x \, q_{x+k}.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A_x - A_x^2.$$

2.3.2 Властивості

Теорема 3.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ {}_k p_x \,, & z \in [v^{k+1}, v^k),\ k \in \mathbf{N} \\ 1, & z \ge v \end{cases}$$

Доведення. Випливає з першої (загальної) теореми про функцію розподілу Z, оскільки послідовність

$$z_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

задовільняє умови:

(i) $z_{k+1},\ k \ge 0$, строго спадає;

(ii) $z_{k+1} \to 0,\ \ k \to \infty$.

□

Наслідок 3.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *Тоді:*

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \Big({}_k p_x \,<\, {}_{k-1}p_x \implies \forall p \in (\, {}_k p_x \,,\, {}_{k-1}p_x \,] \quad \xi_Z^p = v^k \Big).$$

Доведення. Випливає з наслідку до першої (загальної) теореми про функцію розподілу Z і теореми 3.1. □

Теорема 3.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року)

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}, \quad x \ge 0. \tag{3.1}$$

Доведення. Випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці року, враховуючи, що $b_1 = 1$. Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k+1}$ функцію відшкодування пожиттєвого страхування життя особи $(x+1)$ з виплатою в кінці року. Тоді

$$\widetilde{b}_{k+1} = 1 = b_{k+2}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

□

Означення 3.1. Величина

$$q_x(1 - A_{x+1}), \quad x \geq 0,$$

називається ***річною вартістю страхування*** в момент часу $x + 1$.

Наслідок 3.2.1. (про річну вартість страхування)) *Річна вартість страхування в момент часу $x + 1$ дорівнює зібраній з особи (x) сумі A_x разом з відсотками за один рік $[x, x + 1]$ мінус очікувана в момент часу $x + 1$ виплата (очікувані втрати страхування) A_{x+1} :*

$$q_x(1 - A_{x+1}) = (1 + i)A_x - A_{x+1}, \quad x \geq 0. \tag{3.2}$$

Доведення. З рівності (3.1) отримуємо:

$$(1 + i)A_x - A_{x+1} = q_x + p_x A_{x+1} - A_{x+1} = q_x(1 - A_{x+1}).$$

□

Наслідок 3.2.2.

$$(1 + i)\, l_x A_x = l_{x+1} A_{x+1} + d_x, \quad x \geq 0. \tag{3.3}$$

Доведення. Використовуючи рівності

$$l_{x+1} = p_x l_x, \quad d_x = l_x - l_{x+1} = l_x - p_x l_x = q_x l_x,$$

з (3.1) отримуємо формулу (3.3):

$$(1 + i)\, l_x A_x = p_x l_x A_{x+1} + q_x l_x = l_{x+1} A_{x+1} + d_x.$$

Цю формулу можна інтерпретувати так: разом з відсотками за один рік $[x, x+1]$ зібрана з кожної з осіб групи l_x сума A_x забезпечує очікувану виплату A_{x+1} для всіх осіб з цієї групи, які залишаються живими на момент часу $x+1$, тобто l_{x+1}, а також виплату 1 для всіх осіб з цієї групи, які не доживають до віку $x + 1$, тобто d_x. □

Наслідок 3.2.3. (про зв'язок актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року з річною вартістю страхування)

$$A_x = \sum_{y=x}^{\infty} v^{y+1-x} q_y (1 - A_{y+1}), \quad x \geq 0. \tag{3.4}$$

Доведення. Домножимо (3.2) на v^{x+1} :

$$v^{x+1} q_x (1 - A_{x+1}) = v^x A_x - v^{x+1} A_{x+1}, \quad x \geq 0.$$

Звідси зокрема маємо:

$$\sum_{y=x}^{x+n-1} v^{y+1} q_y (1 - A_{y+1}) = \sum_{y=x}^{x+n-1} \left(v^y A_y - v^{y+1} A_{y+1} \right) =$$
$$= v^x A_x - v^{x+n} A_{x+n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Оскільки

$$v^{x+n} A_{x+n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то за означеннями збіжності числового ряду та його суми отримуємо:

$$\sum_{y=x}^{\infty} v^{y+1} q_y (1 - A_{y+1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{y=x}^{x+n-1} v^{x+1} q_y (1 - A_{y+1}) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{y=x}^{x+n-1} \left(v^y A_y - v^{y+1} A_{y+1} \right) = v^x A_x.$$

Поділивши ліву й праву частини цієї формули на v^x, приходимо до формули (3.4). Ця формула показує, що актуарна теперішня вартість пожиттєвого страхування для особи (x) дорівнює сумі *теперішніх вартостей* в момент часу x річних вартостей страхування цієї особи за всі роки життя, які вона проживе у майбутньому, починаючи з віку x. □

Теорема 3.3. (про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво з виплатою в кінці року,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

Тоді:

(i) $A_x = \dfrac{e^{-\delta}(1 - e^{-\mu})}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \left(\dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2;$

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ e^{-\mu k}, & z \in [v^{k+1}, v^k),\ k \in \mathbf{N} \\ 1, & z \ge v \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$, ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль випадкової величини* Z. *Тоді*

$$\xi_Z^p = v^k, \quad p \in (e^{-\mu k}, e^{-\mu(k-1)}], \quad k \in \mathbf{N}. \tag{3.6}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = v^{\left\lfloor \frac{\ln 2}{\mu} + 1 \right\rfloor}. \tag{3.7}$$

Доведення. Згідно з умовою (3.5)

$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \ge 0. \tag{3.8}$$

Звідси, зокрема, маємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = e^{-\mu k}(1-e^{-\mu}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.9}$$

(i) Використовуючи (3.9) та формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року, отримуємо:

$$A_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} e^{-\mu k}(1-e^{-\mu}) =$$
$$= e^{-\delta}(1-e^{-\mu}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\mu+\delta)k} = \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}.$$

(ii) Оскільки

$${}^2A_x = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+2\delta)}},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A_x - (A_x)^2 = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\mu})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2.$$

(iii) Випливає з (3.8) і теореми про функцію розподілу теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року.

(iv) Формулу (3.6) отримуємо з (3.8) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року. Формула (3.7) випливає з формули (3.6), оскільки

$$0,5 \in (e^{-\mu k}, e^{-\mu(k-1)}] \iff \frac{\ln 2}{\mu} < k \le \frac{\ln 2}{\mu} + 1 \iff k = \left\lfloor \frac{\ln 2}{\mu} + 1 \right\rfloor.$$

□

Наслідок 3.3.1. (про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для експоненційного розподілу) *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Тоді для особи (x), застрахованої пожиттєво з виплатою в кінці року:

(i) $A_x = \dfrac{e^{-\delta}(1 - e^{-\lambda})}{1 - e^{-(\lambda+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta}(1 - e^{-\lambda})}{1 - e^{-(\lambda+2\delta)}} - \left(\dfrac{e^{-\delta}(1 - e^{-\lambda})}{1 - e^{-(\lambda+\delta)}}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ e^{-\lambda k}, & z \in [v^{k+1}, v^k),\ k \in \mathbf{N} \\ 1, & z \ge v \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$, ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль випадкової величини* Z. *Тоді*

$$\xi_Z^p = v^k, \quad p \in (e^{-\lambda k}, e^{-\lambda(k-1)}], \quad k \in \mathbf{N}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = v^{\left\lfloor \frac{\ln 2}{\lambda} + 1 \right\rfloor}.$$

Доведення. Випливає з теореми 3.3, оскільки $\forall x \ge 0$ випадкова величина $T(x)$ має сталу силу смертності

$$\mu(x+t) = \lambda, \quad t \ge 0.$$

□

Теорема 3.4. (про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво з виплатою в кінці року, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{3.10}$$

Тоді:

(i) $A_x = \dfrac{v(1-v^c)}{cd} = \dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta c})}{c(1-e^{-\delta})}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta c})}{c(1-e^{-2\delta})} - \left(\dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta c})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^c \\ 1 - \dfrac{k}{c}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \;\; k = 1, \ldots, c-1 \\ 1, & z \geq v \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$, ξ_Z^p позначає p-й процентиль випадкової величини Z. Тоді*

$$\xi_Z^p = v^k, \quad p \in \Big(1 - \frac{k}{c}, 1 - \frac{k-1}{c}\Big], \;\; k = 1, \ldots, c. \tag{3.11}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = v^{\lfloor \frac{c}{2}+1 \rfloor}. \tag{3.12}$$

Доведення. Згідно з (3.10)

$${}_tp_x = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \geq c \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = \frac{1}{c}, \;\; k = 0, \ldots, c-1. \tag{3.14}$$

(i) Використовуючи (3.14) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року, отримуємо:

$$A_x = \sum_{k=0}^{c-1} v^{k+1}\frac{1}{c} = \frac{v(1-v^c)}{c(1-v)} = \frac{v(1-v^c)}{cd} = \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta c})}{c(1-e^{-\delta})}.$$

(ii) Оскільки

$${}^2A_x = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta c})}{c(1-e^{-2\delta})},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\!A_x - (A_x)^2 = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta c})}{c(1-e^{-2\delta})} - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta c})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2.$$

(iii) Випливає з (3.13) і теореми про функцію розподілу теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року.

(iv) Формулу (3.11) отримуємо з (3.13) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року. Формула (3.12) випливає з формули (3.11), оскільки

$$0,5 \in \left(1-\frac{k}{c}, 1-\frac{k-1}{c}\right] \iff \frac{c}{2} < k \le \frac{c}{2}+1 \iff k = \left\lfloor \frac{c}{2}+1 \right\rfloor.$$

□

Наслідок 3.4.1. (про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для розподілу де Муавра) *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Тоді для особи (x), застрахованої пожиттєво з виплатою в кінці року:

(i) $A_x = \dfrac{v(1-v^{\omega-x})}{(\omega-x)d} = \dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta(\omega-x)})}{(\omega-x)(1-e^{-\delta})}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta(\omega-x)})}{(\omega-x)(1-e^{-2\delta})} - \left(\dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta(\omega-x)})}{(\omega-x)(1-e^{-\delta})}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^{\omega-x} \\ 1-\dfrac{k}{\omega-x}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = 1,\dots,\omega-x-1 \\ 1, & z \ge v \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$, ξ_Z^p позначає p-й процентиль випадкової величини Z. Тоді*

$$\xi_Z^p = v^k, \quad p \in \left(1-\frac{k}{\omega-x}, 1-\frac{k-1}{\omega-x}\right], \quad k = 1,\dots,\omega-x.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = v^{\left\lfloor \frac{\omega-x}{2}+1 \right\rfloor}.$$

Доведення. Випливає з теореми 3.4, оскільки $\forall x \in [0,\omega)$ випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega - x}, & x \in [0, \omega - x) \\ 0, & x \notin [0, \omega - x) \end{cases}$$

Наслідок сформульовано для випадку $\omega - x \in \mathbf{N}$. □

2.3.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) страхується пожиттєво з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = Cv^{K+1}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = CA_x, \quad \mathsf{E}\big[Z^2\big] = C^2\,{}^2\!A_x.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$A_x = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}, \quad {}^2\!A_x = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\mathsf{E}[Z]^2} - 1} = \\ = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2A_x}{A_x^2} - 1} = 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2A_x}{A_x^2} - 1} = 0,1233;$$

$$\xi^{0,95}_S = N\mathsf{E}[Z](1+\theta) = NCA_x(1+\theta) = \\ = 1000A_x\left(1 + 0,1645\sqrt{\frac{{}^2A_x}{A_x^2} - 1}\right) = 435,90.$$

Зокрема, у відсотках: $100\% \cdot \theta = 12,33\%$. □

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) страхується пожиттєво з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = Cv^{K+1}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}[Z] = CA_x, \quad \mathsf{E}[Z^2] = C^2\,{}^2A_x.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$A_x = \frac{e^{-\delta}(1-e^{-80\delta})}{80(1-e^{-\delta})}, \quad {}^2A_x = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-160\delta})}{80(1-e^{-2\delta})}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\mathsf{E}[Z]^2} - 1} =$$
$$= \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2\!A_x}{A_x^2} - 1} = \frac{1,645}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2\!A_x}{A_x^2} - 1}.$$

Отже, з нерівності $\theta \le 0,1$ отримуємо:

$$N \ge (16,45)^2 \left[\frac{{}^2\!A_x}{A_x^2} - 1\right] = 389,42 \implies N = 390.$$

Для $N = 100$ навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2\!A_x}{A_x^2} - 1} = 0,1973 \implies 100\% \cdot \theta = 19,73\%.$$

□

2.4 n-річне страхування

2.4.1 Означення

При *n-річному (строковому n-річному) страхуванні життя з виплатою в кінці року* виплачується 1 в кінці року смерті застрахованої особи (x), якщо вона настає протягом n років, тобто на проміжку (півінтервалі) $[x, x+n)$. І не виплачується нічого, якщо застрахована особа (x) протягом n років залишається живою (доживає до віку $x+n$).

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 1, & k < n \\ 0, & k \ge n \end{cases}$$
$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$z_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k < n \\ 0, & k \ge n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат* $Z = Z(x)$ *строкового* n*-річного страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n*-річного страхування життя з виплатою в кінці року* позначається $A^1_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$A^1_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \quad (4.1)$$

Позначимо ${}^2A^1_{x:\,\overline{n}|}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2A^1_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k}.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(A^1_{x:\,\overline{n}|}\big)^2.$$

2.4.2 Властивості

Теорема 4.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_np_x\,, & 0 \leq z < v^n \\ {}_kp_x\,, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & z \geq v \end{cases}$$

Доведення. Випливає з другої (загальної) теореми про функцію розподілу Z, оскільки послідовність

$$z_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

задовільняє умови:

(i) $z_1 = v > z_2 = v^2 > \ldots > z_n = v^n > 0$;

(ii) $z_{k+1} = 0, \quad k \geq n$.

$\square$

Наслідок 4.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

(i) ${}_np_x > 0 \implies \forall p \in (0,\, {}_np_x\,] \quad \xi_Z^p = 0$;

(ii) $\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \Big({}_kp_x < {}_{k-1}p_x \implies \forall p \in (\,{}_kp_x\,,\, {}_{k-1}p_x\,] \quad \xi_Z^p = v^k \Big)$.

Доведення. Випливає з наслідку до другої (загальної) теореми про функцію розподілу Z і теореми 4.1. $\square$

Теорема 4.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування життя з виплатою в кінці року)

$$A^1_{x:\,\overline{n}|} = vq_x + vp_x A^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{4.2}$$

де

$$A^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \tag{4.3}$$

Доведення. Якщо $n = 1$, то за формулою (4.1) $A^1_{x:\,\overline{1}|} = vq_x$. Отже, для $n = 1$ формула (4.2) справедлива, до того ж

$$A^1_{x+1:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (4.3). Для $n > 1$ твердження теореми випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці року, враховуючи, що $b_1 = 1$. Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k+1}$ функцію відшкодування $(n-1)$-річного страхування життя особи $(x+1)$ з виплатою в кінці року. Тоді

$$\widetilde{b}_{k+1} = \begin{cases} 1, & k < n-1 \\ 0, & k \geq n-1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & k+1 < n \\ 0, & k+1 \geq n \end{cases} = b_{k+2}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

$\square$

Наслідок 4.2.1. (рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року)

$$A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}, \quad x \geq 0. \tag{4.4}$$

Доведення. Оскільки $A^1_{x:\,\overline{n}|}$, $A^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}$ є частинними сумами відповідно порядків $n+1$ і n збіжних числових рядів

$$\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\, q_{x+k} = A_x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_{x+1}\, q_{x+1+k} = A_{x+1},$$

то переходячи до границі при $n \to \infty$ в рівності (4.2), отримуємо рівність (4.4). □

Теорема 4.3. (про n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для сталої сили смертності)) *Нехай для особи* (x), *застрахованої на* n *років,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{4.5}$$

Тоді:

(i) $A^1_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\mu})(1-e^{-(\mu+\delta)n})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta}(1-e^{-\mu})(1-e^{-(\mu+2\delta)n})}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - {}$

$$- \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\mu})(1-e^{-(\mu+\delta)n})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2;$$

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ e^{-\mu n}, & 0 \leq z < v^n \\ e^{-\mu k}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & z \geq v \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$, ξ^p_Z *позначає* p*-й процентиль випадкової величини* Z. *Тоді*

$$\xi^p_Z = \begin{cases} 0, & p \in (0, e^{-\mu n}] \\ v^k, & p \in (e^{-\mu k}, e^{-\mu(k-1)}], \quad k = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{4.6}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi^{0,5}_Z = \begin{cases} 0, & \mu n \leq \ln 2 \\ v^{\left\lfloor \frac{\ln 2}{\mu} + 1 \right\rfloor}, & \mu n > \ln 2 \end{cases} \tag{4.7}$$

Вправа 1. *Довести теорему 4.3.*

Вправа 2. *Нехай випадкова величина* X *має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на n років з виплатою в кінці року, обчислити:

$$A^{1}_{x:\,\overline{n}|};\quad \mathsf{Var}\big[Z\big];\quad F_Z(z);\quad \xi^p_Z,\ \ p\in(0,1).$$

Теорема 4.4. (про n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої на $n<c$ років з виплатою в кінці року, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}, & x\in[0,c)\\ 0, & x\notin[0,c)\end{cases}\qquad c\in\mathbf{N}. \tag{4.8}$$

Тоді:

(i) $A^{1}_{x:\,\overline{n}|}=\dfrac{v(1-v^n)}{cd}=\dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big]=\dfrac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta n})}{c(1-e^{-2\delta})}-\left(\dfrac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-\dfrac{n}{c}, & 0\le z<v^n\\ 1-\dfrac{k}{c}, & z\in[v^{k+1},v^k),\ \ k=1,\ldots,n-1\\ 1, & z\ge v\end{cases}$

(iv) *Нехай $p\in(0,1)$, ξ^p_Z позначає p-й процентиль випадкової величини Z. Тоді*

$$\xi^p_Z=\begin{cases}0, & p\in\left(0,1-\dfrac{n}{c}\right]\\ v^k, & p\in\left(1-\dfrac{k}{c},1-\dfrac{k-1}{c}\right],\ \ k=1,\ldots,n\end{cases} \tag{4.9}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi^{0,5}_Z=\begin{cases}0, & n\le\dfrac{c}{2}\\ v^{\lfloor \frac{c}{2}+1\rfloor}, & n>\dfrac{c}{2}\end{cases} \tag{4.10}$$

Доведення. Згідно з (4.8)

$$_tp_x=\begin{cases}1-\dfrac{t}{c}, & t\in[0,c)\\ 0, & t\ge c\end{cases} \tag{4.11}$$

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = \frac{1}{c}, \;\; k=0,\ldots,c-1. \qquad (4.12)$$

(i) Використовуючи (4.12) та формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя, отримуємо:

$$A^1_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\,\frac{1}{c} = \frac{v}{c}\sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{v(1-v^n)}{c(1-v)} = \frac{v(1-v^n)}{cd} = \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})}.$$

(ii) Оскільки

$${}^2A^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta n})}{c(1-e^{-2\delta})},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного страхування життя маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A^1_{x:\,\overline{n}|} - (A^1_{x:\,\overline{n}|})^2 = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta n})}{c(1-e^{-2\delta})} - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2.$$

(iii) Випливає з (4.11) і теореми про функцію розподілу теперішньої вартості n-річного страхування життя з виплатою в кінці року.

(iv) Формулу (4.9) отримуємо з (4.11) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу теперішньої вартості n-річного страхування життя з виплатою в кінці року. Формула (4.10) випливає з формули (4.9), оскільки:

$$0,5 \in \Big(0, 1-\frac{n}{c}\Big] \iff n \le \frac{c}{2};$$
$$0,5 \in \Big(1-\frac{k}{c}, 1-\frac{k-1}{c}\Big] \iff \frac{c}{2} < k \le \frac{c}{2}+1 \iff k = \Big\lfloor \frac{c}{2}+1 \Big\rfloor.$$

□

Вправа 3. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на $n < \omega - x$ років з виплатою в кінці року, обчислити:

$$A^1_{x:\,\overline{n}|};\quad \mathsf{Var}\big[Z\big];\quad F_Z(z);\quad \xi^p_Z,\;\; p \in (0,1).$$

2.4.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) страхується на $n = 5, \; 7, \; 20, \; 30, \; 60, \; 79$ років з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	ξ
40	12.93%	430.20

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) страхується на $n = 5, \; 7, \; 20, \; 30, \; 60, \; 79$ років з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	N
40	22.54%	509

2.5 Мішане страхування

2.5.1 Означення

При *n-річному мішаному страхуванні життя з виплатою в кінці року* виплачується 1 в кінці року смерті застрахованої особи (x), якщо вона не доживає до віку $x+n$, або в момент $x+n$, якщо застрахована особа (x) залишається живою протягом n років (доживає до віку $x+n$). Таке страхування є поєднанням звичайного (строкового) n-річного страхування і n-річного страхування на дожиття.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$v_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k < n \\ v^n, & k \geq n \end{cases}$$
$$z_{k+1} = \begin{cases} v^{k+1}, & k < n \\ v^n, & k \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці року позначається $A_{x:\,\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$\begin{aligned} A_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Z\big] &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} + v^n \mathsf{Pr}\big\{K \geq n\big\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} + v^n\, {}_n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\, {}_k p_x\, q_{x+k} + {}_n E_x\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Позначимо ${}^2A_{x:\,\overline{n|}}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2A_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2(k+1)}\, {}_k p_x\, q_{x+k} + v^{2n}\, {}_n p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\delta(k+1)}\, {}_kp_x\, q_{x+k} + e^{-2\delta n}\, {}_np_x\,.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\!A_{x:\,\overline{n}|} - \big(A_{x:\,\overline{n}|}\big)^2. \tag{5.2}$$

Зауваження 1. Випадкову величину Z можна подати у вигляді

$$Z = Z_1 + Z_2, \tag{5.3}$$

де Z_1, Z_2 позначають відповідно теперішні вартості звичайного n-річного страхування та n-річного страхування страхування на дожиття. Тоді

$$A_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \mathsf{E}\big[Z_1\big] + \mathsf{E}\big[Z_2\big] = A^1_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}. \tag{5.4}$$

Аналогічно

$${}^2\!A_{x:\,\overline{n}|} = {}^2\!A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} + {}^2\!A^1_{x:\,\overline{n}|}. \tag{5.5}$$

Отже, з (5.2), (5.4) і (5.5) маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\!A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}} - \big(A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}\big)^2 + {}^2\!A^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(A^1_{x:\,\overline{n}|}\big)^2 - 2A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}A^1_{x:\,\overline{n}|}. \tag{5.6}$$

Цю формулу можна отримати інакше. Згідно з формулою (5.3)

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \mathsf{Var}\big[Z_1\big] + \mathsf{Var}\big[Z_2\big] + 2\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big]. \tag{5.7}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z_1\big] = A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}, \quad \mathsf{E}\big[Z_2\big] = A^1_{x:\,\overline{n}|}, \quad Z_1Z_2 = 0,$$

то

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}\big[Z_1, Z_2\big] = \mathsf{E}\big[Z_1Z_2\big] - \mathsf{E}\big[Z_1\big]\mathsf{E}\big[Z_2\big] = \\ = -\mathsf{E}\big[Z_1\big]\mathsf{E}\big[Z_2\big] = -A_{x:\,\overset{1}{\overline{n}|}}A^1_{x:\,\overline{n}|}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

З (5.7) і (5.8) отримуємо (5.6).

2.5.2 Властивості

Теорема 5.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^n \\ {}_kp_x\,, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = 1, \dots, n-1 \\ 1, & z \geq v \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 5.1.*

Наслідок 5.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *Тоді:*

(i) ${}_{n-1}p_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_{n-1}p_x\,] \quad \xi_Z^p = v^n$;

(ii) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\} \Big({}_kp_x < {}_{k-1}p_x \implies \forall p \in (\,{}_kp_x\,,\, {}_{k-1}p_x\,] \quad \xi_Z^p = v^k \Big)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 5.1.1.*

Теорема 5.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування на дожиття)

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = vp_x A_{x+1:\,\overset{1}{\overline{n-1|}}}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{5.9}$$

де

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{0|}}} = 1, \quad x \geq 1. \tag{5.10}$$

Доведення. Якщо $n = 1$, то за означенням $A_{x:\,\overset{1}{\overline{1|}}} = vp_x$. Отже, для $n = 1$ формула (5.9) справедлива, до того ж

$$A_{x+1:\,\overset{1}{\overline{0|}}} = 1, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (5.10). Нехай $n > 1$. Використовуючи рівність

$${}_np_x = p_x\, {}_{n-1}p_{x+1}\,,$$

отримуємо

$$A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n\, {}_np_x = v^n p_x\, {}_{n-1}p_{x+1} = vp_x v^{n-1}\, {}_{n-1}p_{x+1} = vp_x A_{x+1:\,\overset{1}{\overline{n-1|}}}.$$

□

Теорема 5.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці року)

$$A_{x:\,\overline{n|}} = vq_x + vp_x A_{x+1:\,\overline{n-1|}}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{5.11}$$

де

$$A_{x:\,\overline{0|}} = 1, \quad x \geq 1. \tag{5.12}$$

Доведення. Якщо $n = 1$, то за формулою (5.1) $A_{x:\,\overline{1|}} = vq_x + vp_x$. Отже, для $n = 1$ формула (5.11) справедлива, до того ж

$$A_{x+1:\,\overline{0|}} = 1, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (5.12). Нехай $n > 1$. Використовуючи співвідношення на актуарну теперішню вартість звичайного n-річного страхування та n-річного страхування страхування на дожиття і формулу (5.4), отримуємо:

$$\begin{aligned}A_{x:\,\overline{n|}} = A^1_{x:\,\overline{n|}} + A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = vq_x + vp_x A^1_{x+1:\,\overline{n-1|}} + vp_x A_{x+1:\,\overset{1}{\overline{n-1|}}} = \\ = vq_x + vp_x\big(A^1_{x+1:\,\overline{n-1|}} + A_{x+1:\,\overset{1}{\overline{n-1|}}}\big) = \\ = vq_x + vp_x A_{x+1:\,\overline{n-1|}}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0.\end{aligned}$$

□

Зауваження 1. Рекурентні співвідношення для пожиттєвого страхування, n-річного страхування та n-річного мішаного страхування мають однаковий вигляд:

$$u(x,n) = vq_x + vp_x u(x+1, n-1).$$

Вони відрізняються лише початковими умовами (внаслідок чого і отримуємо три різних види страхувань). Отже,

$$\begin{aligned}A_x =& vq_x + vp_x A_{x+1}, \quad x = 0,\ldots,\omega-1, \quad A_\omega = 0;\\ A^1_{x:\,\overline{y-x|}} =& vq_x + vp_x A^1_{x+1:\,\overline{y-(x+1)|}}, \quad x = 0,\ldots,y-1, \quad A^1_{y:\,\overline{0|}} = 0;\\ A_{x:\,\overline{y-x|}} =& vq_x + vp_x A_{x+1:\,\overline{y-(x+1)|}}, \quad x = 0,\ldots,y-1, \quad A_{y:\,\overline{0|}} = 1.\end{aligned}$$

Теорема 5.4. (про n-річне мішане страхування життя з виплатою в кінці року для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої мішано на n років,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{5.13}$$

Тоді:

(i) $A_{x:\,\overline{n|}} = 1 - \dfrac{(1-e^{-\delta})(1-e^{-(\mu+\delta)n})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = 1 - \dfrac{(1-e^{-2\delta})(1-e^{-(\mu+2\delta)n})}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \left(1 - \dfrac{(1-e^{-\delta})(1-e^{-(\mu+\delta)n})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^n \\ e^{-\mu k}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = 1, \dots, n-1 \\ 1, & z \geq v \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0, 1)$, ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль випадкової величини* Z. *Тоді*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} v^n, & p \in (0, e^{-\mu(n-1)}] \\ v^k, & p \in (e^{-\mu k}, e^{-\mu(k-1)}], \quad k = 1, \dots, n-1 \end{cases} \tag{5.14}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} v^n, & \mu(n-1) \leq \ln 2 \\ v^{\left\lfloor \frac{\ln 2}{\mu} + 1 \right\rfloor}, & \mu(n-1) > \ln 2 \end{cases} \tag{5.15}$$

Вправа 3. *Довести теорему 5.4.*

Вправа 4. *Нехай випадкова величина* X *має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), *застрахованої мішано на* n *років з виплатою в кінці року, обчислити:*

$$A_{x:\,\overline{n}|}; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ p \in (0, 1).$$

Теорема 5.5. (про n-річне мішане страхування життя з виплатою в кінці року для рівномірного розподілу) *Нехай для особи* (x), *застрахованої мішано на* $n < c$ *років, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{5.16}$$

Тоді:

(i) $A_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{v(1 - v^n)}{cd} + v^n \left(1 - \dfrac{n}{c}\right) = \dfrac{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta n})}{c(1 - e^{-\delta})} + e^{-\delta n} \left(1 - \dfrac{n}{c}\right);$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta}(1 - e^{-2\delta n})}{c(1 - e^{-2\delta})} + e^{-2\delta n} \left(1 - \dfrac{n}{c}\right) - \left[\dfrac{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta n})}{c(1 - e^{-\delta})} + e^{-\delta n}\left(1 - \dfrac{n}{c}\right)\right]^2;$

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^n \\ 1 - \dfrac{k}{c}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = 1, \dots, n-1 \\ 1, & z \geq v \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$, ξ_Z^p позначає p-й процентиль випадкової величини Z. Тоді*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} v^n, & p \in \left(0, 1 - \dfrac{n-1}{c}\right] \\ v^k, & p \in \left(1 - \dfrac{k}{c}, 1 - \dfrac{k-1}{c}\right], \quad k = 1, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{5.17}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} v^n, & n \le 1 + \dfrac{c}{2} \\ v^{\left\lfloor \frac{c}{2} + 1 \right\rfloor}, & n > 1 + \dfrac{c}{2} \end{cases} \tag{5.18}$$

Вправа 5. *Довести теорему 5.5.*

Вправа 6. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої мішано на $n < \omega - x$ років з виплатою в кінці року, обчислити:

$$A_{x:\,\overline{n|}}; \quad \mathsf{Var}[Z]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \;\; p \in (0,1).$$

2.5.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \ge 0$;

(iii) страхується мішано на

$$n = 5, \; 7, \; 20, \; 30, \; 60, \; 79$$

років з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(a) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	ξ
40	11.44%	444.92

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується мішано на

$$n = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79$$

років з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	N
40	15.86%	252

2.6 Відкладене (відтерміноване) пожиттєве страхування

2.6.1 Означення

При *відкладеному на l років пожиттєвому страхуванні життя з виплатою в кінці року* виплачується 1 в кінці року смерті застрахованої особи (x), якщо вона настає після віку $x + l$. І не виплачується нічого, якщо особа не доживає до цього віку.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & k \geq l \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$z_{k+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ v^{k+1}, & k \geq l \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^{K+1}, & K \geq l \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року цього страхування позначається ${}_{l|}A_x$ і визначається формулою:

$$ {}_{l|}A_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=l}^{\infty} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}. \tag{6.1}$$

Зауваження 1. Згідно з означенням величин Z та ${}_{l|}A_x$ маємо:

$$ {}_{l|}A_x = \mathsf{E}\big[Z \mid K \geq l\big] \mathsf{Pr}\big\{K \geq l\big\} = \mathsf{E}\big[v^{K+1} \mid K \geq l\big]\, {}_lp_x\,.$$

Зауваження 2. Якщо у формулу (6.1) підставити $l = 0$, то отримаємо актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування. Отже,

$$ {}_{0|}A_x = A_x.$$

Позначимо ${}_{l|}{}^{2}A_x$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$ {}_{l|}{}^{2}A_x = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=l}^{\infty} v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{k=l}^{\infty} e^{-2\delta(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. $$

Отже,

$$ \mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|}{}^{2}A_x - \big({}_{l|}A_x\big)^2. $$

2.6.2 Властивості

Теорема 6.1. (про функцію розподілу Z)

$$ F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x\,, & z = 0 \\ {}_lq_x \,+\, {}_kp_x\,, & z \in [v^{k+1}, v^k),\ k \ge l+1 \\ 1, & z \ge v^{l+1} \end{cases} $$

Вправа 1. *Довести теорему 6.1.*

Наслідок 6.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

(i) ${}_lq_x > 0 \implies \forall p \in (0,\, {}_lq_x\,] \quad \xi_Z^p = 0$;

(ii) $\forall k \ge l+1 \quad \Big({}_kp_x \,<\, {}_{k-1}p_x \implies$

$\implies \forall p \in (\, {}_lq_x \,+\, {}_kp_x\,,\, {}_lq_x \,+\, {}_{k-1}p_x\,] \quad \xi_Z^p = v^k \Big).$

Вправа 2. *Довести наслідок 6.1.1.*

Теорема 6.2. (про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з пожиттєвим та l-річним страхуваннями життя з виплатою в кінці року)

$$ A_x = A^1_{x:\,\overline{l}|} + {}_{l|}A_x; \tag{6.2} $$

$$ {}_{l|}A_x = {}_lE_x\,A_{x+l}. \tag{6.3} $$

Доведення. Формула (6.2) очевидна:

$$ A_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{k=0}^{l-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} + \sum_{k=l}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = $$

$$ = A^1_{x:\,\overline{l}|} + {}_{l|}A_x. $$

Використовуючи співвідношення

$$_{l+k}p_x = {}_lp_x \ {}_kp_{x+l} \, ,$$

отримуємо формулу (6.3):

$$_{l|}A_x = \sum_{k=l}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+l+1} \, {}_{l+k}p_x \, q_{x+l+k} =$$

$$= v^l \, {}_lp_x \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \, {}_kp_{x+l} \, q_{x+l+k} = {}_lE_x \, A_{x+l}.$$

□

Теорема 6.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року)

$$_{l|}A_x = vp_x \, {}_{l-1|}A_{x+1}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0.$$

Доведення. *1-й спосіб*: Використовуючи співвідношення

$$_lE_x = v^l \, {}_lp_x = vp_x v^{l-1} \, {}_{l-1}p_{x+1} = vp_x \, {}_{l-1}E_{x+1}$$

і (двічі) формулу (6.3), отримуємо

$$_{l|}A_x = {}_lE_x \, A_{x+l} = vp_x \, {}_{l-1}E_{x+1} \, A_{(x+1)+(l-1)} = vp_x \, {}_{l-1|}A_{x+1}.$$

2-й спосіб: Випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці року, враховуючи, що $b_1 = 0$. Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k+1}$ функцію відшкодування відкладеного на $l-1$ років пожиттєвого страхування особи $(x+1)$ з виплатою в кінці року. Тоді

$$\widetilde{b}_{k+1} = \begin{cases} 0, & k < l-1 \\ 1, & k \geq l-1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k+1 < l \\ 1, & k+1 \geq l \end{cases} = b_{k+2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

□

Теорема 6.4. (про відкладене на l років пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для сталої сили смертності)) *Нехай для особи* (x), *застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на* l *років,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{6.4}$$

Тоді:

(i) $_{l|}A_x = \dfrac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}e^{-(\mu+\delta)l}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}e^{-(\mu+2\delta)l}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \left(\dfrac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}e^{-(\mu+\delta)l}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2$;

(iii) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1-e^{-\mu l}, & z = 0 \\ 1-e^{-\mu l}+e^{-\mu k}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k \geq l+1 \\ 1, & z \geq v^{l+1} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$, ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль випадкової величини* Z*. Тоді*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, 1-e^{-\mu l}] \\ v^k, & p \in (1-e^{-\mu l}+e^{-\mu k}, 1-e^{-\mu l}+e^{-\mu(k-1)}], \quad k \geq l+1 \end{cases} \tag{6.5}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & \mu l \geq \ln 2 \\ v^{\left\lfloor 1-\frac{1}{\mu}\ln(e^{-\mu l}-0,5)\right\rfloor}, & \mu l < \ln 2 \end{cases} \tag{6.6}$$

Вправа 3. *Довести теорему 6.4.*

Вправа 4. *Нехай випадкова величина* X *має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x)*, застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на* l *років з виплатою в кінці року, обчислити:*

$$_{l|}A_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ \ p \in (0,1).$$

Теорема 6.5. (про відкладене на l років пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для рівномірного розподілу) *Нехай для особи* (x)*, застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на* $l < c$ *років, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \qquad c \in \mathbf{N}. \tag{6.7}$$

Тоді:

(i) $_{l|}A_x = \dfrac{v^{l+1}(1-v^{c-l})}{cd} = \dfrac{e^{-\delta(l+1)}(1-e^{-\delta(c-l)})}{c(1-e^{-\delta})}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Z\big] = \dfrac{e^{-2\delta(l+1)}(1-e^{-2\delta(c-l)})}{c(1-e^{-2\delta})} - \left(\dfrac{e^{-\delta(l+1)}(1-e^{-\delta(c-l)})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2;$

(iii) $$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{l}{c}, & z < v^c \\ \dfrac{l-k}{c} + 1, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = l+1, \dots, c-1 \\ 1, & z \geq v^{l+1} \end{cases}$$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$, ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль випадкової величини* Z. *Тоді*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, \dfrac{l}{c}\right] \\ v^k, & p \in \left(\dfrac{l-k}{c} + 1, \dfrac{l-k+1}{c} + 1\right], \quad k = 1, \dots, c. \end{cases} \tag{6.8}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z *дорівнює*

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & l \geq \dfrac{c}{2} \\ v^{\left\lfloor \frac{c}{2} + l + 1 \right\rfloor}, & l < \dfrac{c}{2} \end{cases} \tag{6.9}$$

Вправа 5. *Довести теорему 6.5.*

Вправа 6. *Нехай випадкова величина* X *має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), *застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на* $l < \omega - x$ *років з виплатою в кінці року, обчислити:*

$${}_{l|}A_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ \ p \in (0,1).$$

2.6.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) страхується пожиттево з відтермінуванням на

$$l = 3,\ 5,\ 15,\ 20,\ 40,\ 50$$

років з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 30$ отримуємо:

l	θ	ξ
30	33.66%	25.82

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується пожиттево з відтермінуванням на

$$l = 3,\ 5,\ 15,\ 20,\ 40,\ 50$$

років з виплатою в кінці року $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 30$ отримуємо:

l	θ	N
30	21.13%	447

2.7 Відкладене (відтерміноване) n-річне страхування

2.7.1 Означення

При *відкладеному на l років n-річному страхуванні життя з виплатою в кінці року* виплачується 1 в кінці року смерті застрахованої особи (x), якщо вона настає на проміжку (півінтервалі) $[x+l,\ x+l+n)$, тобто особа доживає до віку $x+l$, але не доживає до віку $x+l+n$. І не виплачується нічого, якщо особа не доживає до віку $x+l$, або залишається живою протягом $l+n$ років.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & l \le k < l+n \\ 0, & k \ge l+n \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$z_{k+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ v^{k+1}, & l \le k < l+n \\ 0, & k \ge l+n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ відкладеного на l років n-річного страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^{K+1}, & l \le K < l+n \\ 0, & K \ge l+n \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного страхування життя з виплатою в кінці року позначається ${}_{l|n}A_x$ і визначається формулою:

$$ {}_{l|n}A_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^{k+1}\mathsf{Pr}\big\{K=k\big\} = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. \tag{7.1} $$

Позначимо ${}_{l|n}{}^2A_x$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$ {}_{l|n}{}^2A_x = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{k=l}^{l+n-1} e^{-2\delta(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. $$

Отже,

$$ \mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|n}{}^2A_x - \big({}_{l|n}A_x\big)^2. $$

Зауваження 1. Якщо у формулу (7.1) підставити $l=0$, то отримаємо актуарну теперішню вартість n-річного страхування. Отже,

$$ {}_{0|n}A_x = A^{1}_{x:\,\overline{n}|}. $$

Зауваження 2. Згідно з формулою (7.1) актуарна теперішня вартість відкладеного на l років 1-річного страхування має вигляд:

$$ {}_{l|1}A_x = v^{l+1}\,{}_lp_x\,q_{x+l}. $$

Звідси й з формули (7.1) тоді отримуємо:

$$ {}_{l|n}A_x = \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_{k|1}A_x. $$

2.7.2 Властивості

Теорема 7.1. (про функцію розподілу Z)

$$ F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ {}_lq_x \;+\; {}_{l+n}p_x\,, & 0 \le z < v^{l+n} \\ {}_lq_x \;+\; {}_kp_x\,, & z \in [v^{k+1}, v^k), \quad k = l+1,\ldots,l+n-1 \\ 1, & z \ge v^{l+1} \end{cases} $$

Вправа 1. *Довести теорему 7.1.*

Наслідок 7.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *Тоді:*

(i) ${}_lq_x \,+\, {}_{l+n}p_x > 0 \implies \forall p \in (0,\, {}_lq_x \,+\, {}_{l+n}p_x\,]\quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) $\forall k \in \{l+1, \ldots, l+n\}$ $\Big(\, {}_kp_x \,<\, {}_{k-1}p_x \implies$

$$\implies \forall p \in (\, {}_lq_x \,+\, {}_kp_x\,,\, {}_lq_x \,+\, {}_{k-1}p_x\,]\quad \xi_Z^p = v^k\Big).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 7.1.1.*

Теорема 7.2. (про зв'язок відкладеного на l років n-річного страхування життя з l-річним та $(l+n)$-річним страхуваннями життя з виплатою в кінці року)

$$ {}_{l|n}A_x = A^1_{x:\,\overline{l+n|}} - A^1_{x:\,\overline{l|}}; \tag{7.2}$$

$$ {}_{l|n}A_x = \,{}_mE_x\, A^1_{x+l:\,\overline{n|}}. \tag{7.3}$$

Вправа 3. *Довести теорему 7.2 (навести два різних способи доведення рівностей (7.2) і (7.3)).*

Теорема 7.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років n-річного страхування життя з виплатою в кінці року)

$$ {}_{l|n}A_x = vp_x\, {}_{l-1|n}A_{x+1}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0. \tag{7.4}$$

Вправа 4. *Довести теорему 7.3 (навести два різних способи доведення).*

Наслідок 7.3.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року)

$$ {}_{l|}A_x = vp_x\, {}_{l-1|}A_{x+1}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0. \tag{7.5}$$

Доведення. Оскільки ${}_{l|n}A_x$, ${}_{l-1|n}A_{x+1}$ є частинними сумами порядку n збіжних числових рядів

$$ {}_{l|}A_x = \sum_{k=l}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}, \qquad {}_{l-1|}A_{x+1} = \sum_{k=l-1}^{\infty} v^{k+1}\, {}_kp_{x+1}\, q_{x+1+k}, $$

то переходячи до границі при $n \to \infty$ в рівності (7.4), отримуємо рівність (7.5). $\square$

Зауваження 1. Рекурентні співвідношення для відкладеного на l років пожиттєвого страхування, відкладеного на l років n-річного страхування та страхування на дожиття мають однаковий вигляд:

$$u(x) = vp_x u(x+1).$$

Вони відрізняються лише початковими умовами (внаслідок чого і отримуємо три різних види страхувань). Отже,

$$\begin{aligned} {}_{y-x|}A_x &= vp_x\, {}_{y-(x+1)|}A_{x+1}, \quad x = 0,\dots,y-1, \quad {}_{0|}A_y = A_y; \\ {}_{y-x|n}A_x &= vp_x\, {}_{y-(x+1)|n}A_{x+1}, \quad x = 0,\dots,y-1, \quad {}_{0|n}A_y = A^{1}_{y:\,\overline{n|}}; \\ A_{x:\,\overset{1}{\overline{y-x|}}} &= vp_x A_{x+1:\,\overset{1}{\overline{y-(x+1)|}}}, \quad x = 0,\dots,y-1, \quad A_{y:\,\overset{1}{\overline{0|}}} = 1. \end{aligned}$$

Теорема 7.4. (про відкладене на l років n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l років,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \ge 0. \tag{7.6}$$

Тоді:

(i) $${}_{l|n}A_x = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}e^{-(\mu+\delta)l}(1-e^{-(\mu+\delta)n})}{1-e^{-(\mu+\delta)}};$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}e^{-(\mu+2\delta)l}(1-e^{-(\mu+2\delta)n})}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \\ - \left(\frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}e^{-(\mu+\delta)l}(1-e^{-(\mu+\delta)n})}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2;$$

(iii) $$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1-e^{-\mu l}+e^{-\mu(l+n)}, & 0 \le z < v^{l+n} \\ 1-e^{-\mu l}+e^{-\mu k}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \\ & \qquad k = l+1,\dots,l+n-1 \\ 1, & z \ge v^{l+1} \end{cases}$$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$, ξ_Z^p позначає p-й процентиль випадкової величини Z. Тоді*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, 1-e^{-\mu l}+e^{-\mu(l+n)}] \\ v^k, & p \in (1-e^{-\mu l}+e^{-\mu k}, 1-e^{-\mu l}+e^{-\mu(k-1)}], \\ & \qquad k = l+1,\dots,l+n \end{cases} \tag{7.7}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & e^{-\mu l}(1-e^{-\mu n}) \le \frac{1}{2} \\ v^{\left\lfloor 1-\frac{1}{\mu}\ln\left(e^{-\mu l}-\frac{1}{2}\right)\right\rfloor}, & e^{-\mu l}(1-e^{-\mu n}) > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{7.8}$$

Вправа 5. *Довести теорему 7.4.*

Вправа 6. *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l років з виплатою в кінці року, обчислити:

$${}_{l|n}A_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \ \ p \in (0,1).$$

Теорема 7.5. (про відкладене на l років n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l вроків з виплатою в кінці року, де $l + n < \omega - x$:, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \qquad c \in \mathbf{N}. \tag{7.9}$$

Тоді:

(i) $${}_{l|n}A_x = \frac{v^{l+1}(1 - v^n)}{cd} = \frac{e^{-\delta(l+1)}(1 - e^{-\delta n})}{c(1 - e^{-\delta})};$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-2\delta(l+1)}(1 - e^{-2\delta n})}{c(1 - e^{-2\delta})} - \left(\frac{e^{-\delta(l+1)}(1 - e^{-\delta n})}{c(1 - e^{-\delta})}\right)^2;$$

(iii) $$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \dfrac{n}{c}, & 0 \leq z < v^n \\ 1 + \dfrac{l-k}{c}, & z \in [v^{k+1}, v^k), \ \ k = l+1, \ldots, l+n-1 \\ 1, & z \geq v^{l+1} \end{cases}$$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$, ξ_Z^p позначає p-й процентиль випадкової величини Z. Тоді*

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, 1 - \dfrac{n}{c}\right] \\ v^k, & p \in \left(1 + \dfrac{l-k}{c}, 1 + \dfrac{l-k+1}{c}\right], \ \ k = l+1, \ldots, l+n \end{cases} \tag{7.10}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Z дорівнює

$$\xi_Z^{0,5} = \begin{cases} 0, & n \leq \dfrac{c}{2} \\ v^{\left\lfloor \frac{c}{2} + l + 1 \right\rfloor}, & n > \dfrac{c}{2} \end{cases} \tag{7.11}$$

Вправа 7. *Довести теорему 7.5.*

Вправа 8. *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0, \omega) \\ 0, & x \notin [0, \omega) \end{cases}$$

Для особи (x), застрахованої на n років з відтермінуванням на l років з виплатою в кінці року, де $l + n < \omega - x$, обчислити:

$$_{l|n}A_x; \quad \mathsf{Var}\big[Z\big]; \quad F_Z(z); \quad \xi_Z^p, \;\; p \in (0,1).$$

2.7.3 Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x + t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) страхується на n років з відтермінуванням на l років з виплатою в кінці року $C = 10$, де

$$(l, n) = (3, 60), \quad (5, 50), \quad (20, 20), \quad (25, 15), \quad (40, 7), \quad (50, 5);$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 15, \; n = 30$ отримуємо:

l	n	θ	ξ
15	30	23.99%	102.01

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується на n років з відтермінуванням на l років з виплатою в кінці року $C = 10$, де

$$(l, n) = (3, 60), \quad (5, 50), \quad (20, 20), \quad (25, 15), \quad (40, 7), \quad (50, 5);$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(a) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці року у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 15, \ n = 30$ отримуємо:

l	n	θ	N
15	30	25.21%	636

2.8 Страхування зі змінними виплатами

2.8.1 Зростаюче щорічно пожиттєве страхування

Означення

При *зростаючому щорічно пожиттєвому (безтерміновому, безстроковому) страхуванні життя (з виплатою в кінці року)* в кінці року смерті застрахованої особи (x) виплачується 1 при настанні страхової події протягом 1-го року страхової угоди, виплачується 2 при настанні страхової події протягом 2-го року страхової угоди і т.д.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$z_{k+1} = (k+1)v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отже, *теперішня вартість втрат* $Z = Z(x)$ *зростаючого щорічно пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = (K+1)v^{K+1},$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість зростаючого щорічно пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці року позначається $(IA)_x$ і визначається формулою:

$$(IA)_x = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. \tag{8.1}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2v^{2(k+1)}\mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}, \tag{8.2}$$

то дисперсія випадкової величини Z має вигляд:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\right)^2.$$

Властивості

Теорема 8.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року)

$$\begin{aligned}(IA)_x &= A_x + vp_x(IA)_{x+1} = \\ &= \big(vq_x + vp_xA_{x+1}\big) + vp_x(IA)_{x+1}, \quad x \geq 0.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Доведення. Зазначимо, що друга рівність випливає з першої рівності (і навпаки) та теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року.

<u>*1-й спосіб*</u>: Використовуючи співвідношення

$${}_{1+k}p_x = p_x\,{}_kp_{x+1}\,,$$

формулу (8.1) і формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року, отримуємо:

$$(IA)_x - A_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} kv^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+2}\,{}_{1+k}p_x\,q_{x+1+k} =$$
$$= vp_x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)v^{k+1}\,{}_kp_{x+1}\,q_{x+1+k} = vp_x(IA)_{x+1}.$$

2-й спосіб: Оскільки $K(x)$ невід'ємна цілочисельна випадкова величина, то використовуючи формулу повної ймовірності, отримуємо:

$$\begin{aligned}(IA)_x - A_x &= \mathsf{E}\big[K(x)v^{K(x)+1} \mid K(x)=0\big]\mathsf{Pr}\big\{K(x)=0\big\}+\\ &+ \mathsf{E}\big[K(x)v^{K(x)+1} \mid K(x)\ge 1\big]\mathsf{Pr}\big\{K(x)\ge 1\big\} =\\ &= vp_x\mathsf{E}\big[K(x)v^{K(x)} \mid K(x)\ge 1\big].\end{aligned} \tag{8.4}$$

Оскільки
$$K(x+1) = K(x)-1,\ K(x)\ge 1,$$
то
$$\mathsf{E}\big[K(x)v^{K(x)} \mid K(x)\ge 1\big] = \mathsf{E}\big[(K(x+1)+1)v^{K(x+1)+1}\big] = (IA)_{x+1}. \tag{8.5}$$

Підставляючи (8.5) в (8.4), отримуємо (8.3). □

Зауваження 1. Зазначимо, що рекурентні співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування і зростаючого щорічно пожиттєвого страхування мають вигляд

$$u(x) = c(x) + vp_xu(x+1)$$

і однакові початкові умови, але відрізняються доданком $c(x)$:

$$\begin{aligned} A_x &= vq_x + vp_xA_{x+1},\ \ x=0,\dots,\omega-1,\\ A_\omega &= 0;\\ (IA)_x &= \big(vq_x + vp_xA_{x+1}\big) + vp_x(IA)_{x+1},\ \ x=0,\dots,\omega-1,\\ (IA)_\omega &= 0.\end{aligned}$$

Теорема 8.2. (про зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x)

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t\ge 0. \tag{8.6}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія зростаючого щорічно по-життєвого страхування життя з виплатою в кінці року для особи (x) обчислюються за формулами:

$$(IA)_x = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{\left(1-e^{-(\mu+\delta)}\right)^2}; \tag{8.7}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}\left(1+e^{-(\mu+2\delta)}\right)}{\left(1-e^{-(\mu+2\delta)}\right)^3} - \left(\frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{\left(1-e^{-(\mu+\delta)}\right)^2}\right)^2. \tag{8.8}$$

Доведення. Для виведення формул (8.7) і (8.8) нам знадобляться суми таких рядів (при їх сумуванні використано теорему про диференціювання дійсного степеневого ряду):

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)' =$$
$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1. \tag{8.9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)x^k = \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)'' =$$
$$= \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x|<1.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k =$$
$$= \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad |x|<1. \tag{8.10}$$

За умовою (8.6)
$$_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

Зокрема,
$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = (1-e^{-\mu})e^{-\mu k}, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Отже, згідно з (8.1) і (8.9) маємо $\left(x=e^{-(\mu+\delta)}\right)$:

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-\delta(k+1)}(1-e^{-\mu})e^{-\mu k} =$$

$$= (1-e^{-\mu})e^{-\delta}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)e^{-(\mu+\delta)k} = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{\left(1-e^{-(\mu+\delta)}\right)^2}.$$

Згідно з (8.2) і (8.10) маємо $\left(x = e^{-(\mu+2\delta)}\right)$:

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-2\delta(k+1)}(1-e^{-\mu})e^{-\mu k} =$$

$$= (1-e^{-\mu})e^{-2\delta}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 e^{-(\mu 2\delta)k} = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}\left(1+e^{-(\mu+2\delta)}\right)}{\left(1-e^{-(\mu+2\delta)}\right)^3}.$$

Звідси й з (8.7) отримуємо (8.8). □

Наслідок 8.2.1. (про зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для експоненційного розподілу) *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Тоді для особи (x), що має зростаюче щорічно пожиттєве страхування з виплатою в кінці року:

$$(IA)_x = \frac{(1-e^{-\lambda})e^{-\delta}}{\left(1-e^{-(\lambda+\delta)}\right)^2};$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{(1-e^{-\lambda})e^{-2\delta}\left(1+e^{-(\lambda+2\delta)}\right)}{\left(1-e^{-(\lambda+2\delta)}\right)^3} - \left(\frac{(1-e^{-\lambda})e^{-\delta}}{\left(1-e^{-(\lambda+\delta)}\right)^2}\right)^2.$$

Вправа 1. *Довести наслідок 8.2.1.*

Теорема 8.3. (про зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року для випадку рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x) випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0,c) \\ 0, & t \notin [0,c) \end{cases} c \in \mathbf{N}. \tag{8.11}$$

Тоді актуарна теперішня вартість та дисперсія зростаючого щорічно пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року для особи (x) обчислюються за формулами:

$$(IA)_x = \frac{e^{-\delta}}{c}\,\frac{1-(c+1)e^{-\delta c}+ce^{-\delta(c+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}; \tag{8.12}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-2\delta}}{c}\left(\frac{2(1-e^{-2\delta(c+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3} - \frac{(2c+3)e^{-2\delta(c+1)}+1}{(1-e^{-2\delta})^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(c+1)^2 e^{-2\delta c}}{1-e^{-2\delta}}\right) - \left(\frac{e^{-\delta}}{c}\,\frac{1-(c+1)e^{-\delta c}+ce^{-\delta(c+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}\right)^2. \qquad (8.13)$$

Доведення. Для виведення формул (8.12) і (8.13) нам знадобляться суми ($x \neq 1$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' =$$

$$= \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n}{1-x} = \frac{1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}. \qquad (8.14)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+2)(k+1)x^k = \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)x^{k-2} = \left(\sum_{k=0}^{n+1} x^k\right)'' = \left(\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\right)'' =$$

$$= \frac{2(1-x^{n+2})}{(1-x)^3} - \frac{2(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+2)(n+1)x^n}{1-x}.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+2)(k+1)x^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k =$$

$$= \frac{2(1-x^{n+2})}{(1-x)^3} - \frac{(2n+3)x^{n+1}+1}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)^2x^n}{1-x}. \qquad (8.15)$$

За умовою (8.11)

$${}_tq_x = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{t}{c}, & 0 \le t < c \\ 1, & t \ge c \end{cases}$$

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & k<c \\ 0, & k \ge c \end{cases}$$

Отже, згідно з (8.1) і (8.14) маємо $\left(x = e^{-\delta}\right)$:

$$(IA)_x = \sum_{k=0}^{c-1}(k+1)e^{-\delta(k+1)}\frac{1}{c} =$$

$$= \frac{e^{-\delta}}{c}\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)e^{-\delta k} = \frac{e^{-\delta}}{c}\ \frac{1-(c+1)e^{-\delta c}+ce^{-\delta(c+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}.$$

Згідно з (8.2) і (8.15) маємо $\left(x = e^{-2\delta}\right)$:

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{c-1}(k+1)^2 e^{-2\delta(k+1)}\frac{1}{c} = \frac{e^{-2\delta}}{c}\sum_{k=0}^{c-1}(k+1)^2e^{-2\delta k} =$$
$$= \frac{e^{-2\delta}}{c}\left(\frac{2(1-e^{-2\delta(c+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3} - \frac{(2c+3)e^{-2\delta(c+1)}+1}{(1-e^{-2\delta})^2} - \frac{(c+1)^2e^{-2\delta c}}{1-e^{-2\delta}}\right).$$

Звідси й з (8.12) отримуємо (8.13). □

Наслідок 8.3.1. (про зростаюче щорічно пожиттєве страхування з виплатою в кінці року для розподілу де Муавра)) *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Тоді для особи (x), що має зростаюче щорічно пожиттєве страхування з виплатою в кінці року $(\omega - x \in \mathbf{N})$:

$$(IA)_x = \frac{e^{-\delta}}{\omega - x}\ \frac{1-(\omega-x+1)e^{-\delta(\omega-x)}+ce^{-\delta(\omega-x+1)}}{(1-e^{-\delta})^2};$$
$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-2\delta}}{\omega-x}\left(\frac{2(1-e^{-2\delta(\omega-x+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3} - \frac{(2(\omega-x)+3)e^{-2\delta(\omega-x+1)}+1}{(1-e^{-2\delta})^2} -\right.$$
$$\left. - \frac{(\omega-x+1)^2e^{-2\delta(\omega-x)}}{1-e^{-2\delta}}\right) -$$
$$- \left(\frac{e^{-\delta}}{\omega-x}\ \frac{1-(\omega-x+1)e^{-\delta(\omega-x)}+(\omega-x)e^{-\delta(\omega-x+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}\right)^2.$$

Вправа 2. *Довести наслідок 8.3.1.*

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04,\ \ t \geq 0$;

(iii) має зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = (K+1)v^{K+1}.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = (IA)_x = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2};$$

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \frac{(1-e^{-\mu})e^{-2\delta}\big(1+e^{-(\mu+2\delta)}\big)}{\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)^3}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{\mathsf{E}\big[Z\big]^2} - 1} =$$

$$= \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{(IA)_x^2} - 1} = 0,1645 \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{(IA)_x^2} - 1} =$$

$$= 0,1645 \sqrt{\frac{\big(1+e^{-(\mu+2\delta)}\big)\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^4}{\big(1-e^{-\mu}\big)\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)^3} - 1} = 0,0733$$

$$\Longrightarrow\ 100\% \cdot \theta = 7,33\%;$$

$$\xi_S^{0,95} = \mathsf{E}\big[S\big](1+\theta) = N\mathsf{E}\big[Z\big](1+\theta) = N(IA)_x(1+\theta) =$$

$$= 100 \frac{(1-e^{-\mu})e^{-\delta}}{\left(1-e^{-(\mu+\delta)}\right)^2}\,(1+\theta) = 437,65.$$

□

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) має зростаюче щорічно пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці року;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = (K+1)v^{K+1}.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\mathsf{E}[Z] = (IA)_x = \frac{e^{-\delta}}{80}\,\frac{1-81e^{-80\delta}+80e^{-81\delta}}{(1-e^{-\delta})^2}; \tag{8.16}$$

$$\mathsf{E}[Z^2] = \frac{e^{-2\delta}}{80}\left(\frac{2(1-e^{-164\delta})}{(1-e^{-2\delta})^3} - \frac{163e^{-162\delta}+1}{(1-e^{-2\delta})^2} - \frac{81^2e^{-160\delta}}{1-e^{-2\delta}}\right). \tag{8.17}$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\mathsf{E}[Z]^2} - 1} = \frac{1,645}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{(IA)_x^2} - 1}.$$

Отже, використовуючи (8.16) і (8.17), з нерівності $\theta \le 0,1$ отримуємо:

$$N \ge (16,45)^2 \left(\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{(IA)_x^2} - 1 \right) = 85,53 \implies N = 86.$$

Для $N = 100$ навантаження надійності (у відсотках) дорівнює:

$$100\% \cdot \theta = 100\% \cdot 0,1645 \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{(IA)_x^2} - 1} = 9,25\%.$$

□

2.8.2 Зростаюче щорічно n-річне страхування

Означення

При *зростаючому щорічно n-річному страхуванні життя (з виплатою в кінці року)* в кінці року смерті застрахованої особи (x) виплачується 1 при настанні страхової події протягом 1-го року страхової угоди, виплачується 2 при настанні страхової події протягом 2-го року страхової угоди,..., виплачується n при настанні страхової події протягом n-го року страхової угоди, і не виплачується нічого, якщо застрахована особа доживає до віку $x + n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k+1} = \begin{cases} k+1, & k < n \\ 0, & k \ge n \end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$$

$$z_{k+1} = \begin{cases} (k+1)v^{k+1}, & k < n \\ 0, & k \ge n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат* $Z = Z(x)$ *зростаючого щорічно* n*-річного страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} (K+1)v^{K+1}, & K < n \\ 0, & K \ge n \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року позначається $(IA)^1_{x:\,\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\mathsf{Pr}\big\{K=k\big\} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. \quad (8.18)$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2v^{2(k+1)}\mathsf{Pr}\big\{K=k\big\} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}, \quad (8.19)$$

то дисперсія випадкової величини Z має вигляд:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\right)^2.$$

Властивості

Теорема 8.4. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року)

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = A^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(IA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|} =$$
$$= \big(vq_x + vp_xA^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) + vp_x(IA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n\in\mathbf{N}, \quad x\geq 0, \quad (8.20)$$

де

$$(IA)^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x\geq 1. \quad (8.21)$$

Вправа 1. *Довести теорему 8.4 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 8.5. (про зростаюче щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для випадку сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), що має зростаюче щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t\geq 0.$$

Тоді:

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = (1-e^{-\mu})e^{-\delta}\,\frac{1-(n+1)e^{-(\mu+\delta)n} + ne^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2};$$
$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = (1-e^{-\mu})e^{-2\delta}\left[\frac{2(1-e^{-(\mu+2\delta)(n+2)})}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^3} - \right.$$

$$- \frac{2(n+2)e^{-(\mu+2\delta)(n+1)}}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^2} - \frac{(n+2)(n+1)e^{-(\mu+2\delta)n}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}}\Bigg] -$$
$$- \left[(1-e^{-\mu})e^{-\delta}\,\frac{1-(n+1)e^{-(\mu+\delta)n}+ne^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{\left(1-e^{-(\mu+\delta)}\right)^2}\right]^2.$$

Вправа 2. *Довести теорему 8.5.*

Наслідок 8.5.1. (про зростаюче щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для експоненційного розподілу) *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Тоді для особи (x), що має зростаюче щорічно n-річне страхування з виплатою в кінці року:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = (1-e^{-\lambda})e^{-\delta}\,\frac{1-(n+1)e^{-(\lambda+\delta)n}+ne^{-(\lambda+\delta)(n+1)}}{\left(1-e^{-(\lambda+\delta)}\right)^2};$$
$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = (1-e^{-\lambda})e^{-2\delta}\Bigg[\frac{2(1-e^{-(\lambda+2\delta)(n+2)})}{(1-e^{-(\lambda+2\delta)})^3} -$$
$$- \frac{2(n+2)e^{-(\lambda+2\delta)(n+1)}}{(1-e^{-(\lambda+2\delta)})^2} - \frac{(n+2)(n+1)e^{-(\lambda+2\delta)n}}{1-e^{-(\lambda+2\delta)}}\Bigg] -$$
$$- \left[(1-e^{-\lambda})e^{-\delta}\,\frac{1-(n+1)e^{-(\lambda+\delta)n}+ne^{-(\lambda+\delta)(n+1)}}{\left(1-e^{-(\lambda+\delta)}\right)^2}\right]^2.$$

Вправа 3. *Довести наслідок 8.5.1.*

Теорема 8.6. (про зростаюче щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для випадку рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), що має зростаюче щорічно n-річне ($n < c$) страхування з виплатою в кінці року, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases}$$

Тоді:

$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{e^{-\delta}}{c}\,\frac{1-(n+1)e^{-\delta n}+ne^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2};$$

$$\mathsf{Var}[Z] = \frac{e^{-2\delta}}{c}\left[\frac{2(1-e^{-2\delta(n+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3} - \frac{(2n+3)e^{-2\delta(n+1)}+1}{(1-e^{-2\delta})^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(n+1)^2 e^{-2\delta n}}{1-e^{-2\delta}}\right] - \left[\frac{e^{-\delta}}{c}\ \frac{1-(n+1)e^{-\delta n}+ne^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}\right]^2.$$

Вправа 4. *Довести теорему 8.6.*

Наслідок 8.6.1. (про зростаюче щорічно n-річне з виплатою в кінці року для розподілу де Муавра) *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & x \in [0,\omega) \\ 0, & x \notin [0,\omega) \end{cases}$$

Тоді для особи (x), що має зростаюче щорічно n-річне $(n < \omega - x)$ страхування з виплатою в кінці року:

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-\delta}}{\omega - x}\ \frac{1-(n+1)e^{-\delta n}+ne^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2};$$

$$\mathsf{Var}[Z] = \frac{e^{-2\delta}}{\omega - x}\left[\frac{2(1-e^{-2\delta(n+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3} - \frac{(2n+3)e^{-2\delta(n+1)}+1}{(1-e^{-2\delta})^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(n+1)^2 e^{-2\delta n}}{1-e^{-2\delta}}\right) - \left(\frac{e^{-\delta}}{\omega - x}\ \frac{1-(n+1)e^{-\delta n}+ne^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}\right]^2.$$

Вправа 5. *Довести наслідок 8.6.1.*

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04,\ \ t \geq 0$;

(iii) має зростаюче щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року, де
$$n = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(a) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 6. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	$(IA)^1_{x:\overline{n}\rvert}$	ξ	θ
40	3.72	414.77	11.54%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має зростаюче щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року, де

$$n = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Вправа 7. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	$(IA)^1_{x:\overline{n}\rvert}$	θ	N
20	1.21	30.43%	926

2.8.3 Спадне щорічно n-річне страхування

Означення

При *спадному щорічно n-річному страхуванні життя (з виплатою в кінці року)* в кінці року смерті застрахованої особи (x) виплачується n при настанні страхової події протягом 1-го року страхової угоди, виплачується $n-1$ при настанні страхової події протягом 2-го року страхової угоди,..., виплачується 1 при настанні страхової події протягом n-го року страхової угоди, і не виплачується нічого, якщо застрахована особа доживає до віку $x+n$.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$
\begin{aligned}
b_{k+1} &= \begin{cases} n-k, & k<n \\ 0, & k \geq n \end{cases} \\
v_{k+1} &= v^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \\
z_{k+1} &= \begin{cases} (n-k)v^{k+1}, & k<n \\ 0, & k \geq n \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ спадного щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року* має вигляд:

$$
Z = \begin{cases} (n-K)v^{K+1}, & K<n \\ 0, & K \geq n \end{cases}
$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року позначається $(DA)^{1}_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$
(DA)^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\mathsf{Pr}\big\{K=k\big\} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. \quad (8.22)
$$

Оскільки

$$
\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2v^{2(k+1)}\mathsf{Pr}\big\{K=k\big\} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k}, \quad (8.23)
$$

то

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2 v^{2(k+1)}\,{}_kp_x\,q_{x+k} - \left(\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}\right)^2.$$

Безпосередньо з формул для актуарних теперішніх вартостей

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|}, \quad (IA)^1_{x:\,\overline{n}|}$$

отримуємо рівність:

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} + (IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = (n+1)A^1_{x:\,\overline{n}|}. \tag{8.24}$$

Її також можна отримати інакше. Припустимо, що особа (x) страхується одночасно за двома страховими угодами — спадним щорічно n-річним страхуванням життя і зростаючим щорічно n-річним страхуванням життя з виплатами в кінці року. Тоді функції відшкодування та дисконтування і відповідно теперішня вартість втрат для такого страхування мають вигляд:

$$b_{k+1} = \begin{cases}(n-k)+(k+1) = n+1, & k<n\\ 0, & k \ge n\end{cases}$$

$$v_{k+1} = v^{k+1}, \quad k = 0,\,1,\,2,\,\ldots;$$

$$Z = \begin{cases}(n+1)\;v^{K+1}, & K<n\\ 0, & K \ge n\end{cases}$$

Отже, актуарна теперішня вартість цього страхування визначається формулою:

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1}(n+1)\;v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = (n+1)\sum_{k=0}^{n-1}v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = (n+1)A^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

Зауваження 1. Оскільки актуарна теперішня вартість відкладеного на k років однорічного страхування життя з виплатою в кінці року має вигляд

$${}_{k|1}A_x = v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k},$$

то з формули (8.22) отримуємо:

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,{}_{k|1}A_x.$$

Властивості

Теорема 8.7. (про зображення актуарної теперішньої вартості спадного щорічно страхування життя з виплатою в кінці року)

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\,\overline{n-j}|}. \tag{8.25}$$

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: Записуючи число $n-k$ як суму $n-k$ одиниць

$$n-k = \sum_{j=0}^{n-k-1} 1,$$

і використовуючи формулу (8.22), маємо:

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}. \tag{8.26}$$

Змінюючи порядок сумування у правій частині (8.26), отримуємо праву частину формули (8.25):

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\,\overline{n-j}|}.$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Підставляючи у праву частину (8.25) формулу

$$A^1_{x:\,\overline{n-j}|} = \sum_{k=0}^{n-j-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k}, \quad j = 0,\ldots,n-1,$$

і змінюючи порядок сумування, отримуємо:

$$\sum_{j=0}^{n-1} A^1_{x:\,\overline{n-j}|} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-1} v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}\,{}_kp_x\,q_{x+k} = (DA)^1_{x:\,\overline{n}|}.$$

□

Теорема 8.8. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року)

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} = nvq_x + vp_x(DA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{8.27}$$

де

$$(DA)^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \tag{8.28}$$

Доведення. Якщо $n = 1$, то за формулою (8.22)

$$(DA)^1_{x:\,\overline{1}|} = vq_x.$$

Отже, для $n = 1$ формула (8.27) справедлива, до того ж

$$(DA)^1_{x+1:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (8.28). Для $n > 1$ твердження теореми випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці року, враховуючи, що $b_1 = n$. Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k+1}$ функцію відшкодування спадного щорічно $(n-1)$-річного страхування життя особи $(x+1)$ з виплатою в кінці року. Тоді

$$\widetilde{b}_{k+1} = \begin{cases} (n-1)-k, & k < n-1 \\ 0, & k \geq n-1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} n-(k+1), & k+1 < n \\ 0, & k+1 \geq n \end{cases} = b_{k+2}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

□

Наслідок 8.8.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року)

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = A^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(IA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \tag{8.29}$$

де

$$(IA)^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \tag{8.30}$$

Доведення. Для доведення (8.29) і (8.30) скористаємося рівністю (8.24). Спершу доведемо (8.30).

$$(IA)^1_{x:\,\overline{0}|} = A^1_{x:\,\overline{0}|} - (DA)^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1,$$

оскільки

$$A^1_{x:\,\overline{0}|} = (DA)^1_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1.$$

Для доведення (8.29) скористаємося рівністю (8.24), рекурентною формулою (8.27) і рекурентною формулою для актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з виплатою в кінці року:

$$(IA)^1_{x:\,\overline{n}|} = (n+1)A^1_{x:\,\overline{n}|} - (DA)^1_{x:\,\overline{n}|} =$$

$$= (n+1)A^1_{x:\,\overline{n}|} - \big(nvq_x + vp_x(DA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) =$$

$$= (n+1)A^1_{x:\,\overline{n}|} - nvq_x - vp_x\big(nA^1_{x+1:\,\overline{n-1}|} - (IA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) =$$
$$= n\big(A^1_{x:\,\overline{n}|} - vq_x - vp_xA^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}\big) + A^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(IA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|} =$$
$$= A^1_{x:\,\overline{n}|} + vp_x(IA)^1_{x+1:\,\overline{n-1}|}.$$

□

Зауваження 2. Аналогічно рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість спадного щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року можна вивести з рекурентного співвідношення на актуарну теперішню вартість зростаючого щорічно n-річного страхування життя з виплатою в кінці року.

Зауваження 3. Зазначимо, що рекурентні співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування, зростаючого щорічно n-річного страхування і спадного щорічно n-річного страхування мають вигляд

$$u(x,n) = c(x) + vp_x u(x+1, n-1)$$

і однакові початкові умови, але відрізняються доданком $c(x)$:

$$A^1_{x:\,\overline{y-x}|} = vq_x + vp_xA^1_{x+1:\,\overline{y-(x+1)}|}, \quad x = 0,\dots,y-1,$$
$$A^1_{y:\,\overline{0}|} = 0;$$
$$(IA)^1_{x:\,\overline{y-x}|} = A^1_{x:\,\overline{y-x}|} + vp_x(IA)^1_{x+1:\,\overline{y-(x+1)}|}, \quad x = 0,\dots,y-1,$$
$$(IA)^1_{y:\,\overline{0}|} = 0;$$
$$(DA)^1_{x:\,\overline{y-x}|} = (y-x)vq_x + vp_x(DA)^1_{x+1:\,\overline{y-(x+1)}|}, \quad x = 0,\dots,y-1,$$
$$(DA)^1_{y:\,\overline{0}|} = 0.$$

Теорема 8.9. (про спадне щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для випадку сталої сили смертності)) *Нехай для особи (x), що має спадне щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{8.31}$$

Тоді:

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} = (1-e^{-\mu})e^{-\delta}\left(\frac{n+1}{1-e^{-(\mu+\delta)}} - \frac{1-e^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{(1-e^{-(\mu+\delta)})^2}\right); \tag{8.32}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = (1-e^{-\mu})e^{-2\delta}\left[\frac{(n+1)^2}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{(2n+3)+e^{-(\mu+2\delta)(n+1)}}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^2} + \frac{2(1-e^{-(\mu+2\delta)(n+2)})}{(1-e^{-(\mu+2\delta)})^3}\right] -$$

$$-\left[(1-e^{-\mu})e^{-\delta}\,\left(\frac{n+1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}-\frac{1-e^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{(1-e^{-(\mu+\delta)})^2}\right)\right]^2. \tag{8.33}$$

Доведення. Для виведення формул (8.32) і (8.33) нам знадобляться такі суми:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x};$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^n}{1-x};$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+2)(k+1)x^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{k+2}\right)' = \left(\frac{1-x^{n+2}}{1-x}\right)'' = = \frac{2(1-x^{n+2})}{(1-x)^3} - \frac{2(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+2)(n+1)x^n}{1-x}.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)x^k = (n+1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = = \frac{n+1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}. \tag{8.34}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)^2x^k = (n+1)^2\sum_{k=0}^{n-1} x^k - (2n+3)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k + \sum_{k=0}^{n-1}(k+2)(k+1)x^k = = \frac{(n+1)^2}{1-x} - \frac{(2n+3)+x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{2(1-x^{n+2})}{(1-x)^3}. \tag{8.35}$$

За умовою (8.31)

$$_tp_x \;= e^{-\mu t}, \quad t \geq 0;$$
$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = \;_kp_x \;-\; _{k+1}p_x \;= (1-e^{-\mu})e^{-\mu k}, \quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

Отже, згідно з (8.22) і (8.34) маємо $\left(x=e^{-(\mu+\delta)}\right)$:

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)e^{-\delta(k+1)}(1-e^{-\mu})e^{-\mu k} =$$

$$= (1 - e^{-\mu})e^{-\delta} \left(\frac{n+1}{1 - e^{-(\mu+\delta)}} - \frac{1 - e^{-(\mu+\delta)(n+1)}}{(1 - e^{-(\mu+\delta)})^2} \right).$$

Згідно з (8.23) і (8.35) маємо $\left(x = e^{-(\mu+2\delta)}\right)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[Z^2\big] &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)^2 e^{-2\delta(k+1)} (1 - e^{-\mu}) e^{-\mu k} = \\ &= (1 - e^{-\mu}) e^{-2\delta} \left[\frac{(n+1)^2}{1 - e^{-(\mu+2\delta)}} - \frac{(2n+3) + e^{-(\mu+2\delta)(n+1)}}{(1 - e^{-(\mu+2\delta)})^2} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{2(1 - e^{-(\mu+2\delta)(n+2)})}{(1 - e^{-(\mu+2\delta)})^3} \right]. \end{aligned}$$

Звідси й з (8.32) отримуємо (8.33). □

Наслідок 8.9.1. (про спадне щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для експоненційного розподілу)) *Нехай випадкова величина X має експоненційний розподіл:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Тоді для особи (x), що має спадне щорічно n-річне страхування з виплатою в кінці року:

$$\begin{aligned} (DA)^1_{x:\,\overline{n}|} &= (1 - e^{-\lambda}) e^{-\delta}\, \frac{n - (n+1)e^{-(\lambda+\delta)} + e^{-(\lambda+\delta)(n+1)}}{(1 - e^{-(\lambda+\delta)})^2}; \\ \mathsf{Var}\big[Z\big] &= (1 - e^{-\lambda}) e^{-2\delta} \left[\frac{(n+1)^2}{1 - e^{-(\lambda+2\delta)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2n+3) + e^{-(\lambda+2\delta)(n+1)}}{(1 - e^{-(\lambda+2\delta)})^2} + \frac{2(1 - e^{-(\lambda+2\delta)(n+2)})}{(1 - e^{-(\lambda+2\delta)})^3} \right] - \\ &\quad - \left[(1 - e^{-\lambda}) e^{-\delta}\, \frac{n - (n+1)e^{-(\lambda+\delta)} + e^{-(\lambda+\delta)(n+1)}}{(1 - e^{-(\lambda+\delta)})^2} \right]^2. \end{aligned}$$

Вправа 1. *Довести наслідок 8.9.1.*

Теорема 8.10. (про спадне щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року для випадку рівномірного розподілу)) *Нехай для особи (x), що має спадне щорічно n-річне $(n < c)$ страхування життя з виплатою в кінці року, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & t \in [0, c) \\ 0, & t \notin [0, c) \end{cases} \tag{8.36}$$

Тоді:

$$(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-\delta}}{c}\,\frac{n-(n+1)e^{-\delta}+e^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}; \tag{8.37}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}\big[Z\big] &= \frac{e^{-2\delta}}{c}\left[\frac{(n+1)^2}{1-e^{-2\delta}}-\frac{(2n+3)+e^{-2\delta(n+1)}}{(1-e^{-2\delta})^2}+\frac{2(1-e^{-2\delta(n+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3}\right]-\\ &-\left[\frac{e^{-\delta}}{c}\,\frac{n-(n+1)e^{-\delta}+e^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}\right]^2.\end{aligned} \tag{8.38}$$

Вправа 2. *Довести теорему 8.10.*

Наслідок 8.10.1. (про спадне щорічно n-річне з виплатою в кінці року для розподілу де Муавра)) *Нехай випадкова величина X має розподіл де Муавра:*

$$f_X(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & x\in[0,\omega)\\ 0, & x\notin[0,\omega)\end{cases}$$

Тоді для особи (x), що має спадне щорічно n-річне $(n<\omega-x)$ страхування з виплатою в кінці року:

$$\begin{aligned}(DA)^1_{x:\,\overline{n}|} &= \frac{e^{-\delta}}{\omega-x}\,\frac{n-(n+1)e^{-\delta}+e^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2};\\ \mathsf{Var}\big[Z\big] &= \frac{e^{-2\delta}}{\omega-x}\left[\frac{(n+1)^2}{1-e^{-2\delta}}-\frac{(2n+3)+e^{-2\delta(n+1)}}{(1-e^{-2\delta})^2}+\right.\\ &\left.+\frac{2(1-e^{-2\delta(n+2)})}{(1-e^{-2\delta})^3}\right]-\left[\frac{e^{-\delta}}{\omega-x}\,\frac{n-(n+1)e^{-\delta}+e^{-\delta(n+1)}}{(1-e^{-\delta})^2}\right]^2.\end{aligned}$$

Вправа 3. *Довести наслідок 8.10.1.*

Приклади

Приклад 1. Розглядається $N=100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t)=\mu=0,04,\ \ t\geq 0$;

(iii) має спадне щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року, де
$$n = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta=0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	$(DA)^1_{x:\overline{n}\vert}$	ξ	θ
40	11.90	1386.84	16.54%

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має спадне щорічно n-річне страхування життя з виплатою в кінці року, де

$$n = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79;$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити негайну страхову виплату у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності, якщо $N = 100$.

Вправа 5. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	$(DA)^1_{x:\overline{n}\vert}$	θ	N
40	5.11	29.12%	848

2.9 Співвідношення між страхуваннями з негайною виплатою і з виплатою в кінці року

Теорема 9.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування з негайною виплатою)

$$\bar{A}_x = \bar{A}^{1}_{x:\,\overline{1|}} + vp_x\bar{A}_{x+1}. \tag{9.1}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, vq_x + vp_x\bar{A}_{x+1}. \tag{9.2}$$

Доведення. Використовуючи адитивність невластивого інтеграла, співвідношення

$$_{1+t}p_x = p_x\, {_tp_{x+1}}$$

і формули для актуарних теперішніх вартостей пожиттєвого та 1-річного страхувань з негайною виплатою, отримуємо формулу (9.1):

$$\bar{A}_x - \bar{A}^{1}_{x:\,\overline{1|}} = \int\limits_0^\infty v^t\, {_tp_x}\, \mu(x+t)\, dt - \int\limits_0^1 v^t\, {_tp_x}\, \mu(x+t)\, dt =$$

$$= \int\limits_1^\infty v^t\, {_tp_x}\, \mu(x+t)\, dt = \int\limits_0^\infty v^{1+t}\, {_{1+t}p_x}\, \mu(x+1+t)\, dt =$$

$$= vp_x \int\limits_0^\infty v^t\, {_tp_{x+1}}\, \mu(x+1+t)\, dt = vp_x\bar{A}_{x+1}.$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$_tp_x\, \mu(x+t) = q_x, \quad t \in [0,1).$$

Отже, використовуючи рівності

$$v = e^{-\delta} = \frac{1}{1+i},$$

маємо:

$$\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{1|}} = \int\limits_0^1 v^t\, {_tp_x}\, \mu(x+t)\, dt = q_x \int\limits_0^1 v^t\, dt = q_x\, \frac{v^t}{\ln v}\Big|_0^1 =$$

$$= q_x\, \frac{1-v}{\delta} = q_x\, \frac{(1+i)v - v}{\delta} = q_x v\, \frac{i}{\delta}. \tag{9.3}$$

Підставляючи (9.3) в (9.1) отримуємо формулу (9.2). □

У подальшому нам знадобиться така лема.

Лема 9.1. *За припущення лінійної інтерполяції*

$$\mathsf{E}\big[v^{S-1}\big] = \frac{i}{\delta}; \tag{9.4}$$

$$\mathsf{E}\big[(S-1)\, v^{S-1}\big] = -\frac{i}{\delta}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right). \tag{9.5}$$

Доведення. За припущення лінійної інтерполяції випадкова величина S має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$. Отже, за означенням математичного сподівання маємо:

$$\mathsf{E}\big[v^{S-1}\big] = \int\limits_0^1 v^{t-1} dt = \frac{v^{t-1}}{\ln v}\Big|_0^1 = \frac{1-v^{-1}}{\ln v} = \frac{1-(1+i)}{-\delta} = \frac{i}{\delta}.$$

$$\mathsf{E}\big[(S-1)v^{S-1}\big] = \int\limits_0^1 (t-1)v^{t-1}\, dt = (t-1)\, \frac{v^{t-1}}{\ln v}\Big|_0^1 - \frac{1}{\ln v}\int\limits_0^1 v^{t-1}\, dt =$$
$$= -\frac{1}{v\delta} + \frac{i}{\delta^2} = -\frac{i}{d\delta} + \frac{i}{\delta^2} = -\frac{i}{\delta}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right).$$

□

Теорема 9.2. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей пожиттєвих страхувань життя з негайною виплатою і з виплатою в кінці року) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, A_x. \tag{9.6}$$

Доведення. *<u>1-й спосіб</u>*: Згідно з формулою (9.2)

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta}\, vq_x + vp_x\bar{A}_{x+1}, \quad x = 0,\dots,\omega-1, \quad \bar{A}_\omega = 0, \tag{9.7}$$

де ω позначає максимальний вік життя особи.

Використовуючи рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року

$$A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}, \quad x = 0,\dots,\omega-1, \quad A_\omega = 0,$$

отримуємо:

$$\frac{i}{\delta}\, A_x = \frac{i}{\delta}\, vq_x + vp_x\frac{i}{\delta}\, A_{x+1}, \quad x = 0,\dots,\omega-1, \quad \frac{i}{\delta}\, A_\omega = 0. \tag{9.8}$$

Отже, $\bar{A}_x$ та $\dfrac{i}{\delta}\, A_x$ задовільняють однакові рекурентні співвідношення (9.7) і (9.8) з однаковими початковими умовами. Звідси отримуємо рівність (9.6).

2-й спосіб: За означенням

$$T = K + S = (K+1) + (S-1).$$

За припущення лінійної інтерполяції випадкові величини K і S незалежні. Отже, незалежними також є випадкові величини v^{K+1} та v^{S-1}, до того ж згідно з лемою 9.1 справедлива формула (9.4). Використовуючи це, отримуємо:

$$\bar{A}_x = \mathsf{E}\big[v^T\big] = \mathsf{E}\big[v^{(K+1)+(S-1)}\big] = \mathsf{E}\big[v^{K+1}v^{S-1}\big] =$$
$$= \mathsf{E}\big[v^{K+1}\big]\mathsf{E}\big[v^{S-1}\big] = A_x\mathsf{E}\big[v^{S-1}\big] = \frac{i}{\delta}\, A_x.$$

□

Теорема 9.3. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей зростаючих щорічно страхувань життя з негайною виплатою і з виплатою в кінці року) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$(I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}\, (IA)^1_{x:\,\overline{n|}}.$$

Вправа 1. *Довести теорему 9.3.*

Твердження попередніх двох теорем можна узагальнити.

Теорема 9.4. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей страхувань життя з негайною виплатою і з виплатою в кінці року) *Нехай теперішні вартості*

$$Z = b_T v^T, \quad W = b_{K+1}v^{K+1}$$

страхування життя з негайною виплатою і страхування життя з виплатою в кінці року мають однакові (рівні) функції виплат:

$$b_T = b_{K+1}.$$

Тоді за припущення лінійної інтерполяції актуарні теперішні вартості цих страхувань задовільняють рівність:

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \frac{i}{\delta}\, \mathsf{E}\big[W\big].$$

Доведення. Оскільки

$$T = K + S = (K+1) + (S-1),$$

то

$$Z = b_T v^T = b_{K+1} v^{(K+1)+(S-1)} = v^{S-1} W.$$

За припущення лінійної інтерполяції випадкові величини K і S незалежні. Отже, незалежними також є випадкові величини W та v^{S-1}, до того ж згідно з лемою 9.1 справедлива формула (9.4). Використовуючи це, отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \mathsf{E}\big[v^{S-1}W\big] = \mathsf{E}\big[v^{S-1}\big]\mathsf{E}\big[W\big] = \frac{i}{\delta}\ \mathsf{E}\big[W\big].$$

□

Наслідок 9.4.1. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей страхувань життя з негайною виплатою і з виплатою в кінці року) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \frac{i}{\delta}\ A_x; \\ (I\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\ (IA)^1_{x:\,\overline{n}|}; \\ \bar{A}^1_{x:\,\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\ A^1_{x:\,\overline{n}|}; \qquad (9.9)\\ (D\bar{A})^1_{x:\,\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\ (DA)^1_{x:\,\overline{n}|}; \\ (I\bar{A})_x &= \frac{i}{\delta}\ (IA)_x. \qquad (9.10) \end{aligned}$$

Доведення. Для обгрунтування тверджень наслідку перевіримо умови теореми 9.4.

(i) Пожиттєве страхування:

$$b_T = 1 = b_{K+1}.$$

(ii) Зростаюче щорічно n-річне страхування:

$$b_T = \begin{cases} \lfloor T+1 \rfloor, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases} = \begin{cases} K+1, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} = \ b_{K+1}.$$

(iii) (Строкове) n-річне страхування:

$$b_T = \begin{cases} 1, & T < n \\ 0, & T \geq n \end{cases} = \begin{cases} 1, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} = \ b_{K+1}.$$

(iv) Спадне щорічно n-річне страхування:

$$b_T = \begin{cases} \lfloor n-T \rfloor, & T < n \\ 0, & T \ge n \end{cases} = \begin{cases} n-K, & K < n \\ 0, & K \ge n \end{cases} = b_{K+1}.$$

(v) Зростаюче щорічно пожиттєве страхування:

$$b_T = \lfloor T+1 \rfloor = K+1 = b_{K+1}.$$

□

Наслідок 9.4.2. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей мішаного страхування життя з негайною виплатою і з виплатою в кінці року) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}\, A_{x:\,\overline{n|}} + \left(1 - \frac{i}{\delta}\right) A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{i}{\delta}\, A_{x:\,\overline{n|}} + \left(1 - \frac{i}{\delta}\right)\, {}_nE_x\,.$$

Вправа 2. *Довести наслідок 9.4.2.*

Теорема 9.5. (про актуарну теперішню вартість неперервно зростаючого пожиттєвого страхування життя з негайною виплатою) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{i}{\delta}\, \left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x \right].$$

Доведення. Оскільки

$$T = K + S = (K+1) + (S-1),$$

то теперішню вартість неперервно зростаючого пожиттєвого страхування життя можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} Tv^T &= (K+1)v^T + (S-1)v^T = \\ &= (K+1)v^T + (S-1)v^{(K+1)+(S-1)} = \\ &= (K+1)v^T + (S-1)v^{S-1}v^{K+1}. \qquad (9.11) \end{aligned}$$

За припущення лінійної інтерполяції випадкові величини K і S незалежні. Отже, незалежними також є випадкові величини v^{K+1} та $(S-1)v^{S-1}$, до того ж згідно з лемою 9.1 справедлива формула (9.5). Використовуючи це і рівності (9.10) та (9.11), маємо:

$$\begin{aligned} (\bar{I}\bar{A})_x &= \mathsf{E}\big[Tv^T\big] = \mathsf{E}\big[(K+1)v^T\big] + \mathsf{E}\big[(S-1)v^{S-1}v^{K+1}\big] = \\ &= (I\bar{A})_x + \mathsf{E}\big[(S-1)v^{S-1}\big]\mathsf{E}\big[v^{K+1}\big] = \\ &= \frac{i}{\delta}\,(IA)_x - \frac{i}{\delta}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x = \frac{i}{\delta}\,\left[(IA)_x - \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x\right]. \end{aligned}$$

□

Розділ 3

Страхові угоди з виплатами в кінці періоду

3.1 Випадкові величини $J(x), H(x)$

Нехай $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. Для особи (x) поділимо кожен (цілий) рік

$$[x+k, x+k+1), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

на m однакових півінтервалів

$$\Big[x+k+\frac{j}{m}, x+k+\frac{j+1}{m}\Big), \quad j = 0, \ldots, m-1$$

(для $m = 12,\ 2,\ 3$, це відповідно місяці, півріччя, квартали). Ці півінтервали називаються *періодами* або *m-періодами*.

Визначимо випадкову величину $J = J(x)$ цілої кількості m-періодів, яку проживає особа (x) протягом останнього року життя. Тоді

$$\frac{J}{m} \le T - K = S < \frac{J+1}{m}. \tag{1.1}$$

Отже,

$$J = \lfloor (T-K)m \rfloor = \lfloor Sm \rfloor .$$

Згідно з означенням $J(x)$ є цілочисельною випадковою величиною, яка набуває значення з множини $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

Теорема 1.1. (про спільний розподіл K, J) *Нехай*

$$k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\} = {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = \\ = {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x = {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \quad (1.2)$$

Доведення. Використовуючи (1.1) і співвідношення

$${}_{k+t}p_x = {}_kp_x\ {}_tp_{x+k}\,,$$

отримуємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\} = \mathsf{Pr}\left\{k+\frac{j}{m} \le T(x) < k+\frac{j+1}{m}\right\} = \\ = {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x = \\ = {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} - {}_kp_x\ {}_{\frac{j+1}{m}}p_{x+k} = {}_kp_x\left({}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} - {}_{\frac{j+1}{m}}p_{x+k}\right) = \\ = {}_kp_x\,\mathsf{Pr}\left\{\frac{j}{m} \le T(x+k) < \frac{j+1}{m}\right\} = {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

□

Визначимо випадкову величину

$$H = H(x) = mK(x) + J(x) \quad (1.3)$$

цілої кількості періодів (m-періодів), яку проживе особа (x) у майбутньому. Цю випадкову величину будемо називати *цілою кількістю періодів майбутньої тривалості життя особи* (x).

Зауваження 1. Згідно з означенням $H(x)$

$$K(x) \ge n \iff H(x) \ge nm; \\ K(x) < n \iff H(x) < nm.$$

Звідси, зокрема, отримуємо:

$${}_np_x = \mathsf{Pr}\big\{K(x) \ge n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \ge nm\big\} = \sum_{h=nm}^{\infty} \mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\}; \\ {}_nq_x = \mathsf{Pr}\big\{K(x) < n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) < nm\big\} = \sum_{h=0}^{nm-1} \mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\}.$$

Наслідок 1.1.1. (про функцію розподілу H)

(i) *Нехай* $h \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. *Тоді*

$$\mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x\,. \tag{1.4}$$

Позначимо

$$k = \lfloor h/m \rfloor\,, \quad j = h - km. \tag{1.5}$$

Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \tag{1.6}$$

(ii) *Функція розподілу F_H випадкової величини $H(x)$ визначається формулою:*

$$F_H(y) = {}_{\frac{\lfloor y \rfloor + 1}{m}}q_x\,, \quad y \ge 0. \tag{1.7}$$

Зокрема,

$$F_H(h) = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, \quad h = 0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

Доведення. (i) Згідно з означенням (1.3)

$$H(x) = h \iff K(x) = k,\ J(x) = j,$$

де k, j визначаються формулами (1.5). Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\ J(x) = j\big\}.$$

Звідси й з (1.2) отримуємо (1.6), а також (1.4), враховуючи рівність

$$h = km + j.$$

(ii) Оскільки випадкова величина $H(x)$ невід'ємна й цілочисельна, то використовуючи (1.4), отримуємо (1.7):

$$F_H(y) = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \le y\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \le \lfloor y \rfloor\,\big\} =$$

$$= \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} \Big({}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x \Big) = {}_{\frac{\lfloor y \rfloor + 1}{m}}q_x\,.$$

□

Зауваження 2. Оскільки

$$K(x+n) = K(x) - n, \quad K(x) \ge n, \qquad T(x+n) = T(x) - n, \quad K(x) \ge n,$$

то

$$J(x+n) = J(x), \quad K(x) \ge n.$$

Отже,

$$K(x+n) + \frac{J(x+n)+1}{m} = K(x) + \frac{J(x)+1}{m} - n, \quad K(x) \ge n.$$

Зокрема,

$$\frac{H(x+n)+1}{m} = \frac{H(x)+1}{m} - n, \quad H(x) \ge nm.$$

3.2 Загальне поняття страхування життя з виплатою в кінці періоду

В моделях страхування життя, які розглядаються у цьому розділі, величина та час виплати за страховою угодою залежить лише від цілої кількості років від моменту укладання угоди до моменту смерті застрахованої особи та від цілої кількості періодів (m-періодів), прожитих застрахованою особою протягом останнього року життя. Ці моделі називаються *моделями страхування життя з виплатами в кінці періоду (m-періоду)*, оскільки виплата здійснюється в кінці періоду (m-періоду) настання страхової події. Такі моделі страхування життя описуються в термінах випадкових величин $K(x)$ та $J(x)$, або в термінах випадкової величини $H(x)$.

У термінах випадкових величин $K(x)$ та $J(x)$ ці моделі визначаються двома функціями (послідовностями):

- *функцією відшкодування* (*функцією винагороди*, *функцією страхових виплат*)
$$b_{k,j+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1;$$
- *функцією дисконтування*
$$v_{k,j+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Величина $b_{k,j+1}$ — це виплата, яку здійснює страхова організація в момент часу
$$x + k + \frac{j+1}{m} \tag{2.1}$$
згідно з укладеною страховою угодою з особою (x), якщо страхова подія настає на проміжку (півінтервалі)
$$\Big[x + k + \frac{j}{m},\, x + k + \frac{j+1}{m}\Big).$$
Величина $v_{k,j+1}$ зазвичай пов'язана з функцією дисконтування
$$v_t, \quad t \geq 0,$$
формулою
$$v_{k,j+1} = v_{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1.$$
Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат (відшкодувань)* $z_{k,j+1}$ за формулою
$$z_{k,j+1} = b_{k,j+1} v_{k,j+1}.$$

Отже, $z_{k,j+1}$ — це теперішня вартість майбутнього відшкодування (виплати) згідно з укладеною угодою в момент часу (2.1). Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Z = Z(x)$, яка називається *теперішньою вартістю втрат* (страхової організації) або *теперішньою вартістю страхування*:

$$Z(x) = z_{K(x),J(x)+1} = b_{K(x),J(x)+1}\ v_{K(x),J(x)+1}.$$

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}[Z(x)] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}v_{k,j+1}\mathsf{Pr}\big\{K = k,\ J = j\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}v_{k,j+1}\ {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} \qquad (2.2)$$

теперішньої вартості втрат називається *актуарною теперішньою вартістю страхування* або *актуарною теперішньою вартістю втрат* (страхової організації). Залежно від вигляду функцій відшкодування й дисконтування отримуємо різні типи угод страхування життя (наприклад, пожиттєве, строкове, мішане, відкладене пожиттєве, відкладене строкове).

У термінах випадкової величини $H(x)$ моделі страхування життя з виплатами в кінці періоду визначаються двома функціями (послідовностями):

- *функцією відшкодування* (*функцією винагороди*, *функцією страхових виплат*)

$$\widetilde{b}_{h+1}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots;$$

- *функцією дисконтування*

$$\widetilde{v}_{h+1}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots.$$

Величина $\widetilde{b}_{h+1}$ — це виплата, яку здійснює страхова організація в момент часу

$$x + \frac{h+1}{m} \qquad (2.3)$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x), якщо страхова подія настає на проміжку (півінтервалі)

$$\Big[x + \frac{h}{m},\, x + \frac{h+1}{m}\Big).$$

Величина $\widetilde{v}_{h+1}$ зазвичай пов'язана з функцією дисконтування

$$v_t, \quad t \geq 0,$$

формулою

$$\widetilde{v}_{h+1} = v_{\frac{h+1}{m}}, \quad h = 0, 1, 2, \dots .$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат (відшкодувань)* $\widetilde{z}_{h+1}$ за формулою

$$\widetilde{z}_{h+1} = \widetilde{b}_{h+1}\widetilde{v}_{h+1}.$$

Отже, $\widetilde{z}_{h+1}$ — це теперішня вартість майбутнього відшкодування (виплати) згідно з укладеною угодою в момент часу (2.3). Використовуючи її, будуємо випадкову величину $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}(x)$, яка називається *теперішньою вартістю втрат* (страхової організації) або *теперішньою вартістю страхування*:

$$\widetilde{Z}(x) = \widetilde{z}_{H(x)+1} = \widetilde{b}_{H(x)+1}\, \widetilde{v}_{H(x)+1}.$$

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}[\widetilde{Z}(x)] = \sum_{h=0}^{\infty} \widetilde{b}_{h+1}\widetilde{v}_{h+1}\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} \tag{2.4}$$

теперішньої вартості втрат називається *актуарною теперішньою вартістю страхування* або *актуарною теперішньою вартістю втрат* (страхової організації).

Нехай k, j — результат ділення з остачею h на m, тобто

$$h = mk + j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Тоді

$$\widetilde{b}_{h+1} = b_{k,j+1}, \quad \widetilde{v}_{h+1} = v_{k,j+1}, \quad \widetilde{z}_{h+1} = z_{k,j+1}.$$

Крім того, згідно з означенням

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\, J(x) = j\big\}.$$

Використовуючи ці рівності і групуючи доданки в (2.4), що мають однакову цілу частину $[h/m]$, отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\widetilde{Z}(x)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{[h/m]=k} \widetilde{b}_{h+1}\widetilde{v}_{h+1}\mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}v_{k,j+1}\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\, J(x) = j\big\} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}v_{k,j+1}\, {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.
\end{aligned}$$

Зауваження 1. Позначимо

$$\delta_t = -\frac{v_t'}{v_t}, \quad t \geq 0.$$

Тоді

$$v_t = e^{-\int\limits_0^t \delta_s ds}, \quad t \geq 0.$$

Оскільки

$$v_{k,j+1} = v_{k+\frac{j+1}{m}} = e^{-\int\limits_0^{k+\frac{j+1}{m}} \delta_s ds},$$

то формула для актуарної теперішньої вартості страхування набуває вигляду

$$\mathsf{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} e^{-\int\limits_0^{k+\frac{j+1}{m}} \delta_s ds} {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}.$$

Відповідно r-ий момент ($r > 1$) випадкової величини Z обчислюється за формулою

$$\mathsf{E}[Z^r] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}^r v_{k,j+1}^r \, {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}^r e^{-\int\limits_0^{k+\frac{j+1}{m}} r\delta_s ds} {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}.$$

Отже, якщо функція відшкодування $b_{k,j+1}$ задовільняє умову

$$b_{k,j+1}^r = b_{k,j+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1, \qquad (2.5)$$

то *r-ий момент випадкової величини Z з параметром δ_t дорівнює актуарній теперішній вартості страхування з параметром $r\delta_t$*. Зазначимо, що умова (2.5) еквівалентна умові:

$$b_{k,j+1} \in \{0, 1\}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Зауваження 2. Нехай функція дисконтування має вигляд:

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0,$$

де $v = const \in (0, 1)$. Позначимо

$$\delta = -\ln v.$$

Тоді

$$\delta_t = -\frac{(v^t)'}{v^t} = -\ln v = \delta, \quad t \geq 0.$$

Відповідно

$$\mathsf{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} e^{-\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} {}_k p_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k};$$

$$\mathsf{E}[Z^r] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1}^r e^{-r\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} {}_k p_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}.$$

Позначимо $i^{(m)}$ річну відсоткову ставку, яка відповідає нарахуванню відсотків m разів на рік і пов'язана з відсотковою ставкою i співвідношенням

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i,$$

де

$$v = \frac{1}{1+i}, \quad i = v^{-1} - 1 = v^{-1}(1-v) = v^{-1}d.$$

Тоді

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right) = m\big(v^{-\frac{1}{m}} - 1\big) = mv^{-\frac{1}{m}}\big(1 - v^{\frac{1}{m}}\big) = v^{-\frac{1}{m}} d^{(m)}.$$

Означення 2.1. Відсоткова ставка i називається ***ефективною річною відсотковою ставкою***, а відсоткова ставка $i^{(m)}$ називається (відповідною) ***номінальною (заявленою) річною відсотковою ставкою***.

Зауваження 3. Нехай $l \in \mathbf{N}$. Оскільки

$$K(x+l) = K(x) - l, \ \ K(x) \geq l, \quad T(x+l) = T(x) - l, \ \ K(x) \geq l, \tag{2.6}$$

то

$$T(x+l) - K(x+l) = T(x) - K(x), \ \ K(x) \geq l.$$

Отже,

$$J(x+l) = J(x), \ \ K(x) \geq l. \tag{2.7}$$

Теорема 2.1. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей втрат) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_{k,j+1} = v^{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Нехай функція відшкодування має таку властивість: для $l \in \mathbf{N}$ відшкодування в момент часу

$$x + l + k + \frac{j+1}{m}$$

для застрахованої особи у віці x та у віці $x+l$ однакове, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в момент настання страхової події на проміжку

$$\left[x + l + k + \frac{j}{m},\ x + l + k + \frac{j+1}{m}\right).$$

Тоді

$$\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \geq l\big] = v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big].$$

Доведення. Позначимо $b_{k,j+1}$, $\widetilde{b}_{k,j+1}$ функції відшкодування для особи, застрахованої у віці x та у віці $x+l$ відповідно. Тоді згідно з умовою теореми

$$\widetilde{b}_{k,j+1} = b_{k+l,j+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{2.8}$$

<u>*1-й спосіб*</u>: Згідно з (2.6) і (2.7)

$$\begin{aligned} &\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\ J(x) = j \mid K(x) \geq l\big\} = \\ &\qquad = \mathsf{Pr}\big\{K(x+l) = k-l,\ J(x+l) = j\big\}, \quad k \geq l. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Використовуючи (2.8) і (2.9), маємо:

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \geq l\big] = \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\ J(x) = j \mid K(x) \geq l\big\} = \\ &\quad = \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\ J(x) = j \mid K(x) \geq l\big\} = \\ &\quad = \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x+l) = k-l,\ J(x+l) = j\big\} = \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k+l,j+1} v^{k+l+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x+l) = k,\ J(x+l) = j\big\} = \\ &\quad = v^l \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{b}_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x+l) = k,\ J(x+l) = j\big\} = \\ &\qquad\qquad = v^l \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. \end{aligned}$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Використовуючи співвідношення

$$ {}_kp_x = {}_lp_x \ {}_{k-l}p_{x+l}\,, \quad k \ge l, $$

формулу функції спільного розподілу $K(x)$, $J(x)$, і означення умовної ймовірності, маємо:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j \mid K(x)\ge l\big\} = \\
&\qquad = \begin{cases} \dfrac{\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{K(x)\ge l\big\}}, & k\ge l, \\ 0, & k<l. \end{cases} = \\
&= \begin{cases} \dfrac{{}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}}{{}_lp_x}, & k\ge l, \\ 0, & k<l. \end{cases} = \begin{cases} {}_{k-l}p_{x+l} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}, & k\ge l, \\ 0, & k<l. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

З (2.8) і (2.10) отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x)\ge l\big] &= \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \ {}_{k-l}p_{x+l} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k+l,j+1} v^{k+l+\frac{j+1}{m}} \ {}_kp_{x+l} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l+k} = \\
&= v^l \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{b}_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \ {}_kp_{x+l} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l+k} = v^l\mathsf{E}\big[Z(x+l)\big].
\end{aligned}
$$

$\square$

Лема 2.1. (про припущення лінійної інтерполяції) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$ \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x = vq_x\frac{i}{i^{(m)}}; \tag{2.11} $$

$$ \mathsf{E}\left[v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}\right] = \frac{i}{i^{(m)}}. \tag{2.12} $$

Доведення. За припущення лінійної інтерполяції

$$ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x = {}_{\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{\frac{j}{m}}q_x = \frac{j+1}{m}\,q_x - \frac{j}{m}\,q_x = \frac{1}{m}\,q_x, \quad j=0,\dots,m-1. $$

Отже,

$$\sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x = \frac{1}{m}\, q_x v^{\frac{1}{m}} \frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} = vq_x \frac{v^{-1}-1}{m(v^{-\frac{1}{m}}-1)} = vq_x \frac{i}{i^{(m)}}.$$

За означенням $J(x) = [S(x)m]$. За припущення лінійної інтерполяції випадкова величина $S(x)$ рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$. Отже,

$$\mathsf{E}\left[v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}\right] = \mathsf{E}\left[v^{\frac{[S(x)m]+1}{m}-1}\right] = \int\limits_0^1 v^{\frac{[sm]+1}{m}-1}\, ds =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^{\frac{[sm]+1}{m}-1}\, ds = \sum_{j=0}^{m-1} \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^{\frac{j+1}{m}-1}\, ds = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}-1} = \frac{i}{i^{(m)}}.$$

Можна формулу (2.12) отримати інакше. Оскільки $S(x)$ рівномірно розподілена на відрізку $[0,1]$, то

$$\mathsf{Pr}\big\{J(x)=j\big\} = \mathsf{Pr}\left\{\frac{j}{m} \le S(x) < \frac{j+1}{m}\right\} =$$

$$= \frac{j+1}{m} - \frac{j}{m} = \frac{1}{m}, \quad j = 0,\ldots,m-1.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\left[v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}\right] = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}-1} = \frac{i}{i^{(m)}}.$$

□

Теорема 2.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці періоду) *За умов теореми 2.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \sum_{k=0}^{l-1} v^k\, {}_kp_x \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + v^l\, {}_lp_x\, \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. \qquad (2.13)$$

Нехай $b_{0,j+1}$ *не залежить від* j*. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = b_{0,1} \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + vp_x \mathsf{E}\big[Z(x+1)\big]. \qquad (2.14)$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = b_{0,1} vq_x \frac{i}{i^{(m)}} + vp_x \mathsf{E}\big[Z(x+1)\big]. \qquad (2.15)$$

Доведення. *1-й спосіб*: Використовуючи означення актуарної теперішньої вартості, співвідношення

$$ {}_{k+l}p_x = p_x \, {}_k p_{x+l} \, , $$

і рівність (2.8) (умову теореми), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Z(x)\big] - \sum_{k=0}^{l-1} v^k \, {}_k p_x \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{\frac{j+1}{m}} \, {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} &= \\
= \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_k p_x \, {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} &= \\
= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k+l,j+1} v^{k+l+\frac{j+1}{m}} \, {}_{k+l} p_x \, {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k+l} &= \\
= v^l \, {}_l p_x \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \widetilde{b}_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_k p_{x+l} \, {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+l+k} &= v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Z(x+1)\big].
\end{aligned}
$$

2-й спосіб: Нехай $\mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\} = 0$. Тоді рівність (2.13) очевидна і випливає з теореми 2.1 (перший доданок правої частини цієї рівності дорівнює нулю):

$$ \mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \geq l\big] = v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. $$

Нехай $\mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\} > 0$. За формулою повної ймовірності і теоремою 2.1 маємо:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Z(x)\big] = \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) < l\big] \mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\} &+ \\
+ \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) \geq l\big] \mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\} &= \\
= \mathsf{E}\big[Z(x) \mid K(x) < l\big] \, {}_l q_x + v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Z(x+l)\big]. & \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Оскільки

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j \mid K(x) < l\big\} = \\
&= \begin{cases} \dfrac{\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\}}, & k < l \\ 0, & k \geq l \end{cases} = \frac{1}{{}_l q_x} \begin{cases} {}_k p_x \, {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}, & k < l \\ 0, & k \geq l \end{cases}
\end{aligned}
$$

то перший співмножник першого доданку правої частини (2.16) дорівнює:

$$ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j \mid K(x) < l\big\} = $$

$$= \frac{1}{{}_lq_x} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \frac{1}{{}_lq_x} \sum_{k=0}^{l-1} v^k \, {}_kp_x \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{\frac{j+1}{m}} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \quad (2.17)$$

Підставляючи (2.17) в (2.16), отримуємо (2.13). □

Теорема 2.3. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей втрат з виплатами в кінці року і в кінці періоду) *Нехай* $Z, Z^{(m)}$ *позначають теперішні вартості втрат з виплатами в кінці року і в кінці періоду і функціями відшкодування й дисконтування* b_{k+1}, v^{k+1} *та* $b_{k,j+1}, v^{k+\frac{j+1}{m}}$ *відповідно, і нехай відшкодування в кінці кожного періоду збігається з відшкодуванням в кінці відповідного року:*

$$b_{k,j+1} = b_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Тоді за припущення лінійної інтерполяції справедлива рівність:

$$\mathsf{E}\big[Z^{(m)}\big] = \frac{i}{i^{(m)}} \, \mathsf{E}\big[Z\big].$$

Доведення. *1-й спосіб*: За умовою теореми і лемою 2.1 (рівність (2.11)) отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Z^{(m)}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k+1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^k \, {}_kp_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \frac{i}{i^{(m)}} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k} = \frac{i}{i^{(m)}} \, \mathsf{E}\big[Z\big].$$

2-й спосіб: За умовою теореми і за означенням теперішніх вартостей втрат

$$Z^{(m)} = b_{K(x),J(x)+1} v^{K(x)+\frac{J(x)+1}{m}} =$$

$$= v^{\frac{J(x)+1}{m}-1} b_{K(x)+1} v^{K(x)+1} = v^{\frac{J(x)+1}{m}-1} Z. \quad (2.18)$$

За припущення лінійної інтерполяції випадкові величини $K(x)$ та $S(x)$ незалежні. Отже, незалежними є випадкові величини $K(x)$ та $J(x)$. А тоді й випадкові величини $v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}$ та Z. Враховуючи це, з (2.18) і за лемою 2.1 (рівність (2.12)) маємо:

$$\mathsf{E}\big[Z^{(m)}\big] = \mathsf{E}\left[v^{\frac{J(x)+1}{m}-1}\right]\mathsf{E}\big[Z\big] = \frac{i}{i^{(m)}}\mathsf{E}\big[Z\big].$$

□

3.3 Функція розподілу теперішньої вартості страхування життя

Теорема 3.1. (перша теорема про функцію розподілу Z) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат) z_{h+1} задовільняє умови:*

(i) $z_1 = \ldots = z_l = 0$;

(ii) $z_{h+1},\ h \geq l$, *додатня й спадна;*

(iii) $z_{h+1} \to 0,\ \ h \to \infty$.

Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x\,, & z = 0 \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x \, + \, {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h \geq l+1 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{3.1}$$

Якщо $l = 0$, то

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h \in \mathbf{N} \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Доведення. За означенням випадкової величини Z і умовою теореми

$$Z \in [0, z_{l+1}].$$

До того ж

$$Z = z_{H+1} = 0 \iff H < l.$$

Отже,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x\,, & z = 0 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{3.2}$$

Нехай $0 < z < z_{l+1}$. Згідно з умовою теореми

$$(0, z_{l+1}) = \bigsqcup_{h=l+1}^{\infty} [z_{h+1}, z_h).$$

Отже,

$$z \in (0, z_{l+1}) \iff \exists! h \geq l+1 : \ z \in [z_{h+1}, z_h).$$

Нехай $z \in [z_{h+1}, z_h)$. Тоді, використовуючи умову теореми, маємо:

$$Z > z \iff z_{H+1} > z \iff z_{H+1} > z_{h+1} \iff l \leq H < h.$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_Z(z) = \mathsf{Pr}\{Z \leq z\} = 1 - \mathsf{Pr}\{Z > z\} = 1 - \mathsf{Pr}\{l \leq H < h\} = \\ = \mathsf{Pr}\{H < l\} + \mathsf{Pr}\{H \geq h\} = {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x \,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

З (3.2) і (3.3) випливає (3.5). □

Наслідок 3.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. За умов теореми 3.1:*

(i) ${}_{\frac{l}{m}}q_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_{\frac{l}{m}}q_x\,] \quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) $\forall h \geq l+1 \quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies$
$\implies \forall p \in (\, {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x \,, {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h-1}{m}}p_x\,] \quad \xi_Z^p = z_h \Big).$

Доведення. Обидва твердження наслідку випливають з теореми про процентиль (перше твердження). Справді, використовуючи формулу (3.5) теореми 3.1, маємо:

(i) $F_Z(0_-) = 0 < {}_{\frac{l}{m}}q_x = F_Z(0);$

(ii) $F_Z(z_{h-}) = {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h-1}{m}}p_x = F_Z(z_h).$

□

Теорема 3.2. (друга теорема про функцію розподілу Z) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат) z_{h+1} задовільняє умови:*

(i) $z_1 = \ldots = z_l = 0;$

(ii) $z_{l+1} > z_{l+2} > \ldots > z_{l+n} > 0;$

(iii) $z_{h+1} = 0, \quad h \geq l+n.$

Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x \,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \ \ h = l+1, \ldots, l+n \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{l+n}{m}}p_x\,, & z \in [0, z_{l+n}) \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h = l+1, \ldots, l+n-1 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{3.4}$$

Якщо $l = 0$, *то*

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h = 1, \ldots, n \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{n}{m}}p_x\,, & z \in [0, z_n) \\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h = 1, \ldots, n-1 \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 3.2.*

Наслідок 3.2.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *За умов теореми 3.2:*

(i) ${}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{l+n}{m}}p_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{l+n}{m}}p_x] \quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) $\forall h \in \{l+1, \ldots, l+n\} \quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies$
$\implies \forall p \in ({}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h-1}{m}}p_x] \quad \xi_Z^p = z_h \Big).$

Вправа 2. *Довести наслідок 3.2.1.*

Теорема 3.3. (третя теорема про функцію розподілу Z) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат)* z_{h+1} *задовільняє умови:*

(i) $z_1 = \ldots = z_l = 0;$

(ii) $z_{l+1} > z_{l+2} > \ldots > z_{l+n} > 0;$

(iii) $z_{h+1} = z_{l+n}, \quad h \geq l+n.$

Тоді

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x\,, & 0 \leq z < z_{l+n} \\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h = l+1, \ldots, l+n-1 \\ 1, & z \geq z_{l+1} \end{cases} \tag{3.5}$$

Якщо $l = 0$, *то*

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < z_n \\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [z_{h+1}, z_h), \quad h = 1, \dots, n-1 \\ 1, & z \geq z_1 \end{cases}$$

Вправа 3. *Довести теорему 3.3.*

Наслідок 3.3.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Z, $p \in (0,1)$. *За умов теореми 3.3:*

(i) ${}_{\frac{l}{m}}q_x > 0 \implies \forall p \in (0,\ {}_{\frac{l}{m}}q_x\,] \quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) ${}_{\frac{l+n-1}{m}}p_x > 0 \implies \forall p \in (\ {}_{\frac{l}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{l+n-1}{m}}p_x\,] \quad \xi_Z^p = z_{l+n};$

(iii) $\forall h \in \{l+1, \dots, l+n-1\} \quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies$
$\implies \forall p \in (\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x\,,\ {}_{\frac{l}{m}}q_x + {}_{\frac{h-1}{m}}p_x\,] \quad \xi_Z^p = z_h \Big).$

Вправа 4. *Довести наслідок 3.3.1.*

3.4 n-річне страхування

3.4.1 Означення

При *n-річному (строковому n-річному) страхуванні життя з виплатою в кінці періоду* виплачується 1 в кінці періоду (m-періоду) настання страхової події, якщо вона настає протягом n років (застрахована особа (x) до віку $x+n$ не доживає), тобто на проміжку (півінтервалі) $[x, x+n)$. І не виплачується нічого, якщо застрахована особа (x) протягом n років залишається живою.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k,j+1} = \begin{cases} 1, & k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}, \quad j = 0, \dots, m-1;$$

$$v_{k,j+1} = v^{k+\frac{j+1}{m}} v^{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \quad j = 0, \dots, m-1;$$

$$z_{k,j+1} = \begin{cases} v^{k+\frac{j+1}{m}}, & k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ n-річного (строкового n-річного) страхування життя з виплатою в кінці періоду* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} v^{K+\frac{J+1}{m}}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases}$$

де $K = K(x)$, $J = J(x)$ позначають відповідно випадкові величини цілочисельної майбутньої тривалості життя та цілої кількості періодів останнього року життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n-річного (строкового n-річного) страхування життя з виплатою в кінці періоду позначається $A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,\mathsf{Pr}\big\{K=k, J=j\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\ {}_k p_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}}\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} {}_k E_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}}\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \qquad (4.1)$$

Позначимо ${}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{2\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\ {}_k p_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-2\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\ {}_k p_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \Big(A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|}\Big)^2.$$

Зауваження 1. У термінах випадкової величини $H(x)$ теперішня вартість втрат та актуарна теперішня вартість n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду визначаються формулами:

$$Z(x) = \begin{cases} v^{\frac{H(x)+1}{m}}, & H(x) < nm \\ 0, & H(x) \geq nm \end{cases}$$

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \Pr\{H(x) = h\} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \,{}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.$$

Зауваження 2. Згідно з формулою (4.1) актуарна теперішня вартість однорічного страхування життя особи (x) визначається формулою:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{1}|} = \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} \,{}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x. \tag{4.2}$$

З (4.1) і (4.2) отримуємо:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \,{}_kp_x\, A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x\, A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|}. \tag{4.3}$$

3.4.2 Властивості

Теорема 4.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_np_x\,, & 0 \le z < v^n \\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}),\quad h = 1, \dots, nm-1 \\ 1, & z \ge v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

Доведення. Випливає з другої (загальної) теореми про функцію розподілу Z, оскільки послідовність

$$z_{h+1} = \begin{cases} v^{\frac{h+1}{m}}, & h < nm \\ 0, & h \ge nm \end{cases}$$

задовільняє умови:

(i) $z_1 = v^{\frac{1}{m}} > z_2 = v^{\frac{2}{m}} > \ldots > z_{nm} = v^n > 0$;

(ii) $z_{h+1} = 0,\ \ h \ge nm.$

□

Наслідок 4.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ^p_Z позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

(i) ${}_np_x > 0 \implies \forall p \in (0,\, {}_np_x\,]\quad \xi^p_Z = 0$;

(ii) $\forall h \in \{1, \dots, nm\}\quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies$

$$\implies \forall p \in (\,{}_{\frac{h}{m}}p_x\,,\ {}_{\frac{h-1}{m}}p_x\,]\quad \xi^p_Z = v^{\frac{h}{m}}\Big).$$

Доведення. Випливає з наслідку до другої (загальної) теореми про функцію розподілу Z і теореми 4.1. □

Лема 4.1. (про актуарну теперішню вартість однорічного страхування життя з виплатою в кінці періоду) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{1}|} = vq_x \frac{i}{i^{(m)}}.$$

Доведення. Випливає з леми про припущення лінійної інтерполяції (перше твердження). □

Теорема 4.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного страхування з виплатою в кінці періоду))

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = A^{1(m)}_{x:\,\overline{1}|} + vp_x A^{1(m)}_{x+1:\,\overline{n-1}|} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x + vp_x A^{1(m)}_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0, \quad (4.4)$$

де

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 1. \quad (4.5)$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = vq_x \frac{i}{i^{(m)}} + vp_x A^{1(m)}_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0.$$

Доведення. Для $n = 1$ формула (4.4) є очевидною, до того ж

$$A^{1(m)}_{x+1:\,\overline{0}|} = 0, \quad x \geq 0,$$

що еквівалентне (4.5). Для $n > 1$ твердження теореми випливають з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці періоду, враховуючи, що

$$b_{0,j+1} = 1, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k,j+1}$ функцію відшкодування $(n-1)$-річного страхування життя особи $(x+1)$ з виплатою в кінці періоду. Тоді

$$\widetilde{b}_{k,j+1} = \begin{cases} 1, & k < n-1 \\ 0, & k \geq n-1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & k+1 < n \\ 0, & k+1 \geq n \end{cases} = b_{k+1,j+1},$$
$$k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

□

Теорема 4.3. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями n-річних страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: Використовуючи формулу (4.3) і лему про однорічне страхування з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \,{}_k p_x \, v q_{x+k} \frac{i}{i^{(m)}} = \frac{i}{i^{(m)}} \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \,{}_k p_x \, q_{x+k} = \frac{i}{i^{(m)}} A^{1}_{x:\,\overline{n}|}.$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Випливає з загальної теореми про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду, оскільки згідно з означенням відповідних страхувань

$$b_{k,j+1} = \begin{cases} 1, & k < n \\ 0, & k \ge n \end{cases} = b_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

□

Теорема 4.4. (про n-річне страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності) *Нехай для особи (x), застрахованої на n років з виплатою в кінці періоду,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \ge 0. \tag{4.6}$$

Тоді:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}};$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \\ - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)^2;$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ e^{-\mu n}, & 0 \le z < v^n \\ e^{-\mu \frac{h}{m}}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = 1, \ldots, nm-1 \\ 1, & z \ge v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi^p_Z = \begin{cases} 0, & p \in (0, e^{-\mu n}] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in (e^{-\mu \frac{h}{m}}, e^{-\mu \frac{h-1}{m}}], \quad h = 1, \ldots, nm \end{cases}$$

Доведення. Згідно з умовою (4.6)

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{4.7} $$

Звідси, зокрема, маємо:

$$ \begin{aligned} \mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} &= {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x = \\ &= e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)} - e^{-\mu\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} = e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big), \\ &\qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\quad j=0,\ldots,m-1. \end{aligned} \tag{4.8} $$

Використовуючи (4.8) та формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя, отримуємо:

$$ \begin{aligned} A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big) = \\ &= e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\sum_{k=0}^{n-1} e^{-(\mu+\delta)k}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\frac{(\mu+\delta)j}{m}} = \\ &= e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\frac{1-e^{-(\mu+\delta)n}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\,\frac{1-e^{-(\mu+\delta)}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\big(1-e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}. \end{aligned} $$

Оскільки

$$ {}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\big(1-e^{-(\mu+2\delta)n}\big)}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}}, $$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$ \begin{aligned} \mathsf{Var}\big[Z\big] &= {}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \Big(A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|}\Big)^2 = \\ &= \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\big(1-e^{-(\mu+2\delta)n}\big)}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\big(1-e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)^2. \end{aligned} $$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$ \begin{aligned} \mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} &= {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_{=}\, e^{-\mu\,\frac{h}{m}} - e^{-\mu\,\frac{h+1}{m}} = \\ &= e^{-\mu\,\frac{h}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big), \quad h=0,\,1,\,2,\,\ldots. \end{aligned} $$

Отже,

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \sum_{h=0}^{nm-1} e^{-\delta\,\frac{h+1}{m}} e^{-\mu\,\frac{h}{m}} \Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big) =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big)\sum_{h=0}^{nm-1} e^{-(\mu+\delta)\,\frac{h}{m}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big)\Big(1-e^{-(\mu+\delta)n}\Big)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}.$$

Формула для F_Z випливає з (4.7) і теореми про функцію розподілу для n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ^p_Z випливає з (4.7) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду. $\square$

Теорема 4.5. (про n-річне страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої на $n < c$ років з виплатою в кінці періоду, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \qquad c \in \mathbf{N}. \tag{4.9}$$

Тоді:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}\left(1-v^n\right)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\delta n}\right)}{cm\left(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\right)};$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1-e^{-2\delta n}\right)}{cm\left(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\right)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\delta n}\right)}{cm\left(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\right)}\right)^2;$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ 1-\frac{n}{c}, & 0 \le z < v^n \\ 1-\frac{h}{cm}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h=1,\ldots,nm-1 \\ 1, & z \ge v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi^p_Z = \begin{cases} 0, & p \in (0, 1-\frac{n}{c}] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in (1-\frac{h}{cm}, 1-\frac{h-1}{cm}], \quad h=1,\ldots,nm \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (4.9)

$${}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t\in[0,c) \\ 1, & t \ge c \end{cases} \tag{4.10}$$

Звідси, зокрема, маємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} = {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = \\ = \frac{1}{c}\left(k+\frac{j+1}{m}-k-\frac{j}{m}\right) = \frac{1}{cm}, \quad k=0,\ldots,c-1. \quad (4.11)$$

Використовуючи (4.11) та формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,\frac{1}{cm} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}} = \\ = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\,\frac{1-v^n}{1-v}\,\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^n)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}.$$

Оскільки

$${}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A^{1(m)}_{x:\,\overline{n|}} - \Big(A^{1(m)}_{x:\,\overline{n|}}\Big)^2 = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}\right)^2.$$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = \frac{1}{cm}, \quad h=0,1,\ldots,cm-1.$$

Отже,

$$A^{1(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}}\,\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h}{m}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^n)}{cm(1-v^{\frac{1}{m}})}.$$

Формула для F_Z випливає з (4.10) і теореми про функцію розподілу для n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ^p_Z випливає з (4.10) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Приклад 1. Розглядається $N=100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) страхується на $n = 5, \ 7, \ 20, \ 30, \ 60, \ 79$ років з виплатою $C = 10$ в кінці періоду $(m = 12)$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 1. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	ξ
40	12.94%	442.37

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується на $n = 5, \ 7, \ 20, \ 30, \ 60, \ 79$ років з виплатою $C = 10$ в кінці періоду $(m = 12)$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	N
40	22.55%	509

3.5 Пожиттєве страхування

3.5.1 Означення

При *пожиттєвому (безтерміновому, безстроковому) страхуванні життя з виплатою в кінці періоду* виплачується 1 в кінці періоду (m-періоду) настання страхової події, коли б вона не настала.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_{k,j+1} &= 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1; \\ v_{k,j+1} &= v^{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1; \\ z_{k,j+1} &= v^{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці періоду* має вигляд:

$$Z = v^{K+\frac{J+1}{m}} v^{K+\frac{J+1}{m}},$$

де $K = K(x)$, $J = J(x)$ позначають відповідно випадкові величини цілочисельної майбутньої тривалості життя та цілої кількості періодів останнього року життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці періоду позначається $A_x^{(m)}$ і визначається формулою:

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Z\big] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K = k, J = j\big\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k E_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}. \end{aligned}$$

Позначимо ${}^2\!A_x^{(m)}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$
\begin{aligned}
{}^2\!A_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{2\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\, {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \\
= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-2\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\, {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.
\end{aligned}
$$

Отже,

$$
\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\!A_x^{(m)} - \big(A_x^{(m)}\big)^2.
$$

Зауваження 1. У термінах випадкової величини $H(x)$ теперішня вартість втрат та актуарна теперішня вартість пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду визначаються формулами:

$$
\begin{aligned}
&Z(x) = v^{\frac{H(x)+1}{m}};\\
&A_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{\infty} v^{\frac{h+1}{m}}\,\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \sum_{h=0}^{\infty} v^{\frac{h+1}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.
\end{aligned}
$$

Зауваження 2. Використовуючи формулу для однорічного страхування з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$
A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x\, A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x\, A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|}. \tag{5.1}
$$

3.5.2 Властивості

Теорема 5.1. (про функцію розподілу Z)

$$
F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0\\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}),\ h \in \mathbf{N}\\ 1, & z \ge v^{\frac{1}{m}} \end{cases}
$$

Вправа 1. *Довести теорему 5.1.*

Наслідок 5.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

$$
\forall h \in \mathbf{N} \quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies \forall p \in (\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\ ,\ {}_{\frac{h-1}{m}}p_x\ ] \quad \xi_Z^p = v^{\frac{h}{m}} \Big).
$$

Вправа 2. *Довести наслідок 5.1.1.*

Теорема 5.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування з виплатою в кінці періоду)

$$A_x^{(m)} = A^{1(m)}_{x:\,\overline{1}|} + vp_x A_{x+1}^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x + vp_x A_{x+1}^{(m)}, \quad x \geq 0.$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$A_x^{(m)} = vq_x \frac{i}{i^{(m)}} + vp_x A_{x+1}^{(m)}, \quad x \geq 0.$$

Вправа 3. *Довести теорему 5.2.*

Теорема 5.3. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвих страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.$$

Вправа 4. *Довести теорему 5.3 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 5.4. (про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x), *застрахованої пожиттєво з виплатою в кінці періоду,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{5.2}$$

Тоді:

$$A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}};$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)^2;$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ e^{-\mu\frac{h}{m}}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}),\ h \in \mathbf{N} \\ 1, & z \geq v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi_Z^p = v^{\frac{h}{m}}, \quad p \in \left(e^{-\mu\frac{h}{m}}, e^{-\mu\frac{h-1}{m}}\right], \quad h \in \mathbf{N}.$$

Доведення. *<u>1-й спосіб</u>*: Згідно з умовою (5.2)

$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{5.3}$$

Отже,

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} = {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x = $$
$$= e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)} - e^{-\mu\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} = e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right),$$
$$k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\quad j=0,\ldots,m-1. \quad (5.4)$$

Використовуючи (5.4) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right) =$$
$$= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\mu+\delta)k}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\frac{(\mu+\delta)j}{m}} =$$
$$= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\frac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\,\frac{1-e^{-(\mu+\delta)}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}.$$

Оскільки

$$ {}^2A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A_x^{(m)} - \left(A_x^{(m)}\right)^2 = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)^2.$$

2-й спосіб: Оскільки актуарна теперішня вартість n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду є частинною сумою порядка n збіжного числового ряду — актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду, то переходом до границі при $n\to\infty$ отримуємо потрібну формулу:

$$A_x^{(m)} = \lim_{n\to\infty} A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1-e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} =$$
$$= \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}.$$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_= e^{-\mu\,\frac{h}{m}} - e^{-\mu\,\frac{h+1}{m}} =$$

$$= e^{-\mu\frac{h}{m}}\Big(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\Big), \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Отже,

$$A_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{\infty} v^{\frac{h+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=0}^{\infty} e^{-\delta\frac{h+1}{m}} e^{-\mu\frac{h}{m}}\Big(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\Big) =$$

$$= e^{-\frac{\delta}{m}}\Big(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\Big)\sum_{h=0}^{\infty} e^{-(\mu+\delta)\frac{h}{m}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\Big(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\Big)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}.$$

Формула для F_Z випливає з (5.3) і теореми про функцію розподілу для пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ_Z^p випливає з (5.3) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Теорема 5.5. (про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу) *Нехай для особи* (x), *застрахованої пожиттєво з виплатою в кінці періоду, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{5.5}$$

Тоді:

$$A_x^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^c)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1 - e^{-\delta c}\big)}{cm\big(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\big)};$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1 - e^{-2\delta c}\big)}{cm\big(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1 - e^{-\delta c}\big)}{cm\big(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}\right)^2.$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^c \\ 1 - \frac{h}{cm}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = 1, \ldots, cm - 1 \\ 1, & z \geq v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi_Z^p = v^{\frac{h}{m}}, \quad p \in \left(1 - \frac{h}{cm}, 1 - \frac{h-1}{cm}\right], \quad h = 1, \ldots, cm.$$

Доведення. Згідно з (5.5)

$${}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{5.6}$$

Отже,

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} = {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = \\ = \frac{1}{c}\left(k+\frac{j+1}{m}-k-\frac{j}{m}\right) = \frac{1}{cm},\quad k=0,\dots,c-1.$$

Звідси, використовуючи формулу обчислення актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{c-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,\frac{1}{cm} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{k=0}^{c-1} v^k \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}} = \\ = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\,\frac{1-v^c}{1-v}\,\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^c)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}.$$

Оскільки

$${}^2\!A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2\!A_x^{(m)} - \Big(A_x^{(m)}\Big)^2 = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}\right)^2.$$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = \frac{1}{cm},\quad h=0,1,\dots,cm-1.$$

Отже,

$$A_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{cm-1} v^{\frac{h+1}{m}}\,\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{h=0}^{cm-1} v^{\frac{h}{m}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^c)}{cm(1-v^{\frac{1}{m}})}.$$

Формула для F_Z випливає з (5.6) і теореми про функцію розподілу для пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ_Z^p випливає з (5.6) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Приклад 1. Розглядається $N=100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) страхується пожиттєво з виплатою $C = 10$ в кінці періоду ($m = 12$);

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = Cv^{K+\frac{J+1}{m}}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = CA_x^{(m)}, \quad \mathsf{E}\big[Z^2\big] = C^2\, {}^2\!A_x^{(m)}.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}, \qquad {}^2\!A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^{0,95} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]} = \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^{0,95}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{\mathsf{E}\big[Z\big]^2} - 1} =$$

$$= \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^{0,95}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2\!A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1} = 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2\!A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1} = 0,1234;$$

$$\xi_S^{0,95} = N\mathsf{E}\big[Z\big](1+\theta) = NCA_x^{(m)}(1+\theta) =$$

$$= 1000 A_x^{(m)} \left(1 + 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1} \right) = 448,23.$$

Зокрема, у відсотках: $100\% \cdot \theta = 12,34\%$. □

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) страхується пожиттєво з виплатою $C = 10$ в кінці періоду ($m = 12$);

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Z має вигляд:

$$Z = Cv^{K + \frac{J+1}{m}}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = CA_x^{(m)}, \quad \mathsf{E}\big[Z^2\big] = C^2\, {}^2A_x^{(m)}.$$

З умови (ii) отримуємо:

$$A_x^{(m)} = \frac{e^{-\delta}(1 - e^{-80\delta})}{80(1 - e^{-\delta})}, \quad {}^2A_x^{(m)} = \frac{e^{-2\delta}(1 - e^{-160\delta})}{80(1 - e^{-2\delta})}.$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Z^2]}{\mathsf{E}[Z]^2} - 1} =$$

$$= \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1} = \frac{1,645}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{{}^2A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1}.$$

Отже, з нерівності $\theta \leq 0,1$ отримуємо:

$$N \geq (16,45)^2 \left[\frac{{}^2A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1\right] = 389,62 \implies N = 390.$$

Для $N = 100$ навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = 0,1645 \sqrt{\frac{{}^2A_x^{(m)}}{\left(A_x^{(m)}\right)^2} - 1} = 0,1974 \implies 100\% \cdot \theta = 19,74\%.$$

□

3.6 Мішане страхування

3.6.1 Означення

При *n-річному мішаному страхуванні життя з виплатою в кінці періоду* виплачується 1 або в кінці періоду (m-періоду) настання страхової події, якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+n$, або в момент $x+n$, якщо застрахована особа (x) залишається живою протягом n років. Таке страхування є поєднанням звичайного n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду і n-річного страхування на дожиття.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k,j+1} = 1, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$v_{k,j+1} = \begin{cases} v^{k+\frac{j+1}{m}}, & k < n \\ v^n, & k \geq n \end{cases}, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$z_{k,j+1} = \begin{cases} v^{k+\frac{j+1}{m}}, & k < n \\ v^n, & k \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат* $Z = Z(x)$ *-річнп мішанп страхування життя з виплатою в кінці періоду* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} v^{K+\frac{J+1}{m}}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$$

де $K = K(x), J = J(x)$ позначають відповідно випадкові величини цілочисельної майбутньої тривалості життя та цілої кількості періодів останнього року життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість -річнп мішанп страхування життя з виплатою в кінці періоду позначається $A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$\begin{aligned} A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} &= \mathsf{E}\big[Z\big] = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} + v^n \mathsf{Pr}\big\{K(x)\geq n\big\} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\ {}_k p_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + v^n\ {}_n p_x\ = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_k p_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}}\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + v^n\ {}_n p_x\ = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_k E_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}}\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + v^n\ {}_n p_x\,. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Випадкову величину Z можна подати у вигляді

$$Z = Z_1 + Z_2,$$

де Z_1, Z_2 позначають відповідно теперішні вартості n-річного страхування з виплатами m разів на рік та страхування на дожиття. З цієї рівності отримуємо:

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \mathsf{E}\big[Z_1\big] + \mathsf{E}\big[Z_2\big] = A^{1(m)}_{x:\,\overline{n|}} + A_{x:\,\overset{1}{\overline{n|}}}. \tag{6.1}$$

Позначимо ${}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{2\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\ {}_k p_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + v^{2n}\ {}_n p_x\ =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-2\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\ {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + e^{-2\delta n}\ {}_np_x\,.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} - \left(A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}\right)^2.$$

Зауваження 2. У термінах випадкової величини $H(x)$ теперішня вартість втрат та актуарна теперішня вартість n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду визначаються формулами:

$$Z(x) = \begin{cases} v^{\frac{H(x)+1}{m}}, & H(x) < nm \\ v^n, & H(x) \geq nm \end{cases}$$

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}}\,\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} + v^n \mathsf{Pr}\big\{H(x) \geq nm\big\} =$$

$$= \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + v^n\ {}_np_x\,.$$

Зауваження 3. Використовуючи формулу для однорічного страхування з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\ {}_kp_x\ A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1|}} + v^n\ {}_np_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x\ A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1|}} + v^n\ {}_np_x\,.$$

3.6.2 Властивості

Теорема 6.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^n \\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = 1, \ldots, nm-1 \\ 1, & z \geq v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 6.1.*

Наслідок 6.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ^p_Z позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

(i) ${}_{\frac{nm-1}{m}}p_x > 0 \implies \forall p \in (0,\ {}_{\frac{nm-1}{m}}p_x\,] \quad \xi^p_Z = v^n$;

(ii) $\forall h \in \{1, \ldots, nm-1\} \left({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies \right.$

$$\left. \implies \forall p \in (\ {}_{\frac{h}{m}}p_x\,,\ {}_{\frac{h-1}{m}}p_x\,] \quad \xi^p_Z = v^{\frac{h}{m}} \right).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 6.1.1.*

Теорема 6.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість n-річного мішаного страхування з виплатою в кінці періоду)

$$A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = A^{1(m)}_{x:\overline{1}|} + vp_x A^{(m)}_{x+1:\overline{n-1}|} = \\ = \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x + vp_x A^{(m)}_{x+1:\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0. \quad (6.2)$$

де

$$A^{(m)}_{x:\overline{0}|} = 1, \quad x \geq 1. \quad (6.3)$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = vq_x \frac{i}{i^{(m)}} + vp_x A^{(m)}_{x+1:\overline{n-1}|}. \quad (6.4)$$

Вправа 3. *Довести теорему 6.2.*

Теорема 6.3. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями n-річних мішаних страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{n}|} + \left(1 - \frac{i}{i^{(m)}}\right) A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{i}{i^{(m)}} A_{x:\overline{n}|} + \left(1 - \frac{i}{i^{(m)}}\right) {}_nE_x\,.$$

Вправа 4. *Довести теорему 6.3.*

Теорема 6.4. (про n-річне мішане страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x), *застрахованої мішано на* n *років з виплатою в кінці періоду,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \quad (6.5)$$

Тоді:

$$A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} + e^{-(\mu+\delta)n};$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} + e^{-(\mu+2\delta)n} - \\ - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} + e^{-(\mu+\delta)n}\right)^2.$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^n \\ e^{-\mu \frac{h}{m}}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = 1, \ldots, nm-1 \\ 1, & z \geq v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi_Z^p = \begin{cases} v^n, & p \in \left(0, e^{-\mu \frac{nm-1}{m}}\right] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in \left(e^{-\mu \frac{h}{m}}, e^{-\mu \frac{h-1}{m}}\right], \quad h = 1, \ldots, nm-1 \end{cases}$$

Доведення. Згідно з умовою (6.5)

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{6.6}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\} &= {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x = \\ &= e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)} - e^{-\mu\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} = e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right), \\ &\qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Використовуючи (6.7) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості n-річного мішаного страхування життя, отримуємо:

$$\begin{aligned} A_{x:\,\overline{n|}}^{(m)} &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right) + e^{-(\mu+\delta)n} = \\ &= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\sum_{k=0}^{n-1} e^{-(\mu+\delta)k}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\frac{(\mu+\delta)j}{m}} + e^{-(\mu+\delta)n} = \\ &= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}\,\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)}}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} + e^{-(\mu+\delta)n} = \\ &= \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} + e^{-(\mu+\delta)n}. \end{aligned}$$

Оскільки

$${}^2A_{x:\,\overline{n|}}^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} + e^{-(\mu+2\delta)n},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}\big[Z\big] &= {}^2A_{x:\,\overline{n|}}^{(m)} - \left(A_{x:\,\overline{n|}}^{(m)}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1 - e^{-(\mu+2\delta)n}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} + e^{-(\mu+2\delta)n} - \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\big)\big(1-e^{-(\mu+\delta)n}\big)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}+e^{-(\mu+\delta)n}\right)^2.$$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_= e^{-\mu\,\frac{h}{m}} - e^{-\mu\,\frac{h+1}{m}} =$$
$$= e^{-\mu\,\frac{h}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right), \quad h=0,\,1,\,2,\,\ldots .$$

Отже,

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}}\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} + v^n\mathsf{Pr}\big\{H(x)\ge nm\big\} =$$
$$= \sum_{h=0}^{nm-1} e^{-\delta\,\frac{h+1}{m}} e^{-\mu\,\frac{h}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right) + e^{-(\mu+\delta)n} =$$
$$= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\sum_{h=0}^{nm-1} e^{-(\mu+\delta)\,\frac{h}{m}} + e^{-(\mu+\delta)n} =$$
$$= \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1-e^{-(\mu+\delta)n}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} + e^{-(\mu+\delta)n}.$$

Формула для F_Z випливає з (6.6) і теореми про функцію розподілу для n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ_Z^p випливає з (6.6) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Теорема 6.5. (про n-річне мішане страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу) *Нехай для особи* (x), *застрахованої мішано на* $n < c$ *років з виплатою в кінці періоду, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x\in[0,c) \\ 0, & x\notin[0,c) \end{cases} \qquad c\in\mathbf{N}. \tag{6.8}$$

Тоді:

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^n)}{cd^{(m)}} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right);$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right) - \\ - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)^2.$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < v^n \\ 1-\frac{h}{cm}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = 1,\ldots,nm-1 \\ 1, & z \geq v^{\frac{1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi_Z^p = \begin{cases} v^n, & p \in \big(0, 1-\frac{nm-1}{cm}\big] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in \big(1-\frac{h}{cm}, 1-\frac{h-1}{cm}\big], \quad h = 1,\ldots,nm-1 \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (6.8)

$$_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0,c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \qquad _tp_x = \begin{cases} 1-\dfrac{t}{c}, & t \in [0,c) \\ 0, & t \geq c \end{cases} \tag{6.9}$$

Отже,

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} = {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = \\ = \frac{1}{c}\left(k+\frac{j+1}{m}-k-\frac{j}{m}\right) = \frac{1}{cm}, \quad k = 0,\ldots,c-1.$$

Звідси, використовуючи формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A_{x:\,\overline{n}|}^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,\frac{1}{cm} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \\ = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{k=0}^{n-1} v^k \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \\ = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\,\frac{1-v^n}{1-v}\,\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^n)}{cd^{(m)}} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \\ = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right).$$

Оскільки

$$^2A_{x:\,\overline{n}|}^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right),$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} - \Big(A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}\Big)^2 = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(1-e^{-2\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right) - \\ - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(1-e^{-\delta n}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)^2.$$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = \frac{1}{cm}, \quad h=0,1,\ldots,cm-1.$$

Отже,

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}}\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} + v^n\mathsf{Pr}\big\{H(x)\geq nm\big\} = \\ = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h}{m}} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}\big(1-v^n\big)}{cm\big(1-v^{\frac{1}{m}}\big)} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right).$$

Формула для F_Z випливає з (6.9) і теореми про функцію розподілу для n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ^p_Z випливає з (6.6) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Приклад 1. Розглядається $N=100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t)=\mu=0,04,\ \ t\geq 0$;

(iii) страхується мішано на

$$n=5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79$$

років з виплатою $C=10$ в кінці періоду ($m=12$);

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta=0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 5. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	ξ
40	11.48%	457.08

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується мішано на

$$n = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79$$

років з виплатою в кінці періоду $C = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 6. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 40$ отримуємо:

n	θ	N
40	16.01%	257

3.7 Відкладене (відтерміноване) пожиттєве страхування

3.7.1 Означення

При *відкладеному на l років пожиттєвому (безтерміновому, безстроковому) страхуванні життя з виплатою в кінці періоду* виплачується 1 в кінці періоду (m-періоду) настання страхової події, якщо вона настає після віку $x + l$. І не виплачується нічого, якщо застрахована особа (x) не доживає до цього віку.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k,j+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & k \geq l \end{cases}, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$v_{k,j+1} = v^{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$z_{k,j+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ v^{k+\frac{j+1}{m}}, & k \geq l \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ відкладеного на l років пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці періоду* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^{K+\frac{J+1}{m}}, & K \geq l \end{cases}$$

де $K = K(x)$, $J = J(x)$ позначають відповідно випадкові величини цілочисельної майбутньої тривалості життя та цілої кількості періодів останнього року життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого (безтермінового, безстрокового) страхування життя з виплатою в кінці періоду позначається ${}_{l|}A_x^{(m)}$ і визначається формулою:

$$\begin{aligned} {}_{l|}A_x^{(m)} &= \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K = k, J = j\big\} = \\ &= \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\, {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \sum_{k=l}^{\infty} v^k\, {}_kp_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \\ &= \sum_{k=l}^{\infty} {}_kE_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Позначимо ${}_{l|}{}^{2}A_x^{(m)}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$
{}_{l|}{}^{2}A_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{2\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\,{}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \\
= \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-2\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}\,{}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.
$$

Отже,

$$
\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|}{}^{2}A_x^{(m)} - \big({}_{l|}A_x^{(m)}\big)^2.
$$

Зауваження 1. У термінах випадкової величини $H(x)$ теперішня вартість втрат та актуарна теперішня вартість n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду визначаються формулами:

$$
Z(x) = \begin{cases} 0, & H(x) < lm \\ v^{\frac{H(x)+1}{m}}, & H(x) \ge lm \end{cases}
$$

$$
{}_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{h=lm}^{\infty} v^{\frac{h+1}{m}}\,\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \sum_{h=lm}^{\infty} v^{\frac{h+1}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.
$$

Зауваження 2. Якщо у праву частину формули (7.1) підставити $l = 0$, то отримаємо актуарну теперішню вартість пожиттєвого страхування. Отже,

$$
{}_{0|}A_x^{(m)} = A_x^{(m)}.
$$

Зауваження 3. Використовуючи формулу для однорічного страхування з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$
{}_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{k=l}^{\infty} v^k\,{}_kp_x\,A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|} = \sum_{k=l}^{\infty} {}_kE_x\,A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|}.
$$

3.7.2 Властивості

Теорема 7.1. (про функцію розподілу Z)

$$
F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x\,, & z = 0 \\ {}_lq_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x\,, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}),\ h \ge lm+1 \\ 1, & z \ge v^{\frac{lm+1}{m}} \end{cases}
$$

Вправа 1. *Довести теорему 7.1.*

Наслідок 7.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай ξ_Z^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

(i) ${}_lq_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_lq_x] \quad \xi_Z^p = 0$;

(ii) $\forall h \geq lm+1 \quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x < {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies$

$$\implies \forall p \in ({}_lq_x + {}_{\frac{h}{m}}p_x \,,\, {}_lq_x + {}_{\frac{h-1}{m}}p_x] \quad \xi_Z^p = v^{\frac{h}{m}} \Big).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 7.1.1.*

Теорема 7.2. (про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування з пожиттєвим та l-річним страхуваннями з виплатами в кінці періоду)

$$A_x^{(m)} = A^{1(m)}_{x:\overline{l}|} + {}_{l|}A_x^{(m)}; \tag{7.2}$$

$${}_{l|}A_x^{(m)} = {}_lE_x \, A_{x+l}^{(m)}. \tag{7.3}$$

Доведення. Формула (7.2) очевидна:

$$A_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{l-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$
$$= A^{1(m)}_{x:\overline{l}|} + {}_{l|}A_x^{(m)}.$$

Використовуючи співвідношення

$${}_{l+k}p_x = {}_lp_x \; {}_kp_{x+l} \,,$$

отримуємо формулу (7.3):

$${}_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{l+k+\frac{j+1}{m}} \, {}_{l+k}p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l+k} =$$
$$= v^l \, {}_lp_x \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \, {}_kp_{x+l} \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l+k} = {}_lE_x \, A_{x+l}^{(m)}.$$

□

Теорема 7.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду)

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = vp_x \, {}_{l-1|}A_{x+1}^{(m)}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \geq 0. $$

Доведення. *<u>1-й спосіб</u>*: Використовуючи співвідношення

$$ {}_lE_x = v^l \, {}_lp_x = vp_x v^{l-1} \, {}_{l-1}p_{x+1} = vp_x \, {}_{l-1}E_{x+1} $$

і (двічі) формулу (7.3), отримуємо

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = {}_lE_x \, A_{x+l}^{(m)} = vp_x \, {}_{l-1}E_{x+1} \, A_{(x+1)+(l-1)}^{(m)} = vp_x \, {}_{l-1|}A_{x+1}^{(m)}. $$

<u>2-й спосіб</u>: Випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість страхування життя з виплатою в кінці періоду, враховуючи, що

$$ b_{0,j+1} = 0, \quad j = 0, \ldots, m-1. $$

Перевіримо умови цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k,j+1}$ функцію відшкодування відкладеного на l років пожиттєвого страхування особи $(x+1)$ з виплатою в кінці періоду. Тоді

$$ \widetilde{b}_{k,j+1} = \begin{cases} 0, & k < l-1 \\ 1, & k \geq l-1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & k+1 < l \\ 1, & k+1 \geq l \end{cases} = b_{k+1,j+1}, $$

$$ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1. $$

□

Теорема 7.4. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладених пожиттєвих страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} \, {}_{l|}A_x. $$

Доведення. *<u>1-й спосіб</u>*: Твердження теореми отримуємо з таких формул (перша з них використовує припущення лінійної інтерполяції):

$$ A_{x+l}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_{x+l}, \quad {}_{l|}A_x^{(m)} = {}_lE_x \, A_{x+l}^{(m)}, \quad {}_{l|}A_x = {}_lE_x \, A_{x+l}. $$

<u>2-й спосіб</u>: Випливає з загальної теореми про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду, оскільки згідно з означенням відповідних страхувань

$$ b_{k,j+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & k \geq l \end{cases} = b_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1. $$

□

Теорема 7.5. (про відкладене на l років пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x), *застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на* l *років з виплатою в кінці періоду,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{7.4}$$

Тоді:

$$
\begin{aligned}
{}_{l|}A_x^{(m)} &= \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+\delta)l}}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}};\\
\mathsf{Var}\big[Z\big] &= \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+2\delta)l}}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+\delta)l}}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)^2.\\
F_Z(z) &= \begin{cases} 0, & z < 0\\ 1 - e^{-\mu\frac{l}{m}}, & z = 0\\ 1 - e^{-\mu\frac{l}{m}} + e^{-\mu\frac{h}{m}}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}),\ h \geq lm+1\\ 1, & z \geq v^{\frac{lm+1}{m}} \end{cases}\\
\xi_Z^p &= \begin{cases} 0, & p \in \left(0, 1 - e^{\mu l}\right]\\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in \left(1 - e^{\mu l} + e^{-\mu\frac{h}{m}}, 1 - e^{\mu l} + e^{-\mu\frac{h-1}{m}}\right], \quad h \geq lm+1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Доведення. *<u>1-й спосіб</u>*: Згідно з умовою (7.4)

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{7.5}$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\} &= {}_{k+\frac{j}{m}}p_x - {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x =\\
&= e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)} - e^{-\mu\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} = e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right),\\
&\qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

Використовуючи (7.6) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного страхування життя, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
{}_{l|}A_x^{(m)} &= \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)}e^{-\mu\left(k+\frac{j}{m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right) =\\
&= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\sum_{k=l}^{\infty} e^{-(\mu+\delta)k}\sum_{j=0}^{m-1} e^{-\frac{(\mu+\delta)j}{m}} =\\
&= e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\frac{e^{-(\mu+\delta)l}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}\,\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)}}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+\delta)l}}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}.
\end{aligned}
$$

Оскільки
$$ {}_{l|}{}^2A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+2\delta)l}}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}}, $$
то за формулою дисперсії теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого життя з виплатою в кінці періоду маємо:
$$ \mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|}{}^2A_x^{(m)} - \left({}_{l|}A_x^{(m)}\right)^2 = \\ = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+2\delta)l}}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+\delta)l}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)^2. $$

2-й спосіб: Скористаємося теоремою про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування з пожиттєвим та l-річним страхуваннями з виплатами в кінці періоду (друге твердження) і теоремою про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності.
$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = {}_lE_x\,A_{x+l}^{(m)} = e^{-(\mu+\delta)l}\,\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}. $$

3-й спосіб: Скористаємося теоремою про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування з пожиттєвим та l-річним страхуваннями з виплатами в кінці періоду (перше твердження), теоремою про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності і теоремою про l-річне страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності.
$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = A_x^{(m)} - A_{x:\overline{l}|}^{1(m)} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} - \\ - \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(1-e^{-(\mu+\delta)l}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} = e^{-(\mu+\delta)l}\,\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}. $$

4-й спосіб: Оскільки актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду є частинною сумою порядка n збіжного числового ряду — актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду, то переходом до границі при $n \to \infty$ отримуємо потрібну формулу:
$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = \lim_{n\to\infty} {}_{l|n}A_x^{(m)} = \\ = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(e^{-(\mu+\delta)l} - e^{-(\mu+\delta)(l+n)}\right)}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} = \\ = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)e^{-(\mu+\delta)l}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}. $$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_= e^{-\mu\,\frac{h}{m}} - e^{-\mu\,\frac{h+1}{m}} = \\ = e^{-\mu\,\frac{h}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big), \quad h=0,\,1,\,2,\,\ldots .$$

Отже,

$$_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{h=lm}^{\infty} v^{\frac{h+1}{m}}\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \sum_{h=lm}^{\infty} e^{-\delta\,\frac{h+1}{m}}e^{-\mu\,\frac{h}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big) = \\ = e^{-\frac{\delta}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big)\sum_{h=lm}^{\infty} e^{-(\mu+\delta)\,\frac{h}{m}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\Big(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\Big)e^{-(\mu+\delta)l}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}.$$

Формула для F_Z випливає з (7.5) і теореми про функцію розподілу для відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ_Z^p випливає з (7.5) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Теорема 7.6. (про відкладене на l років пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу) *Нехай для особи (x), застрахованої пожиттєво з відтермінуванням на $l < c$ років з виплатою в кінці періоду, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x\in[0,c) \\ 0, & x\notin[0,c) \end{cases} \qquad c\in\mathbf{N}. \tag{7.7}$$

Тоді:

$$_{l|}A_x^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}\big(v^l-v^c\big)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(e^{-\delta l}-e^{-\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}$$

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\big(e^{-2\delta l}-e^{-2\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{2\delta}{m}}\big)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\big(e^{-\delta l}-e^{-\delta c}\big)}{cm\big(1-e^{-\frac{\delta}{m}}\big)}\right)^2.$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z<0 \\ \frac{l}{c}, & 0\le z<v^c \\ \frac{l}{c}+1-\frac{h}{cm}, & z\in[v^{\frac{h+1}{m}},v^{\frac{h}{m}}), \quad h=lm+1,\ldots,cm-1 \\ 1, & z\ge v^{\frac{lm+1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, \frac{l}{c}\right] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in \left(\frac{l}{c} + 1 - \frac{h}{cm}, \frac{l}{c} + 1 - \frac{h-1}{cm}\right], \quad h = lm+1, \ldots, cm \end{cases}$$

Доведення. *1-й спосіб*: Згідно з (7.7)

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{7.8}$$

Отже,

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k, J(x) = j\big\} = {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x - {}_{k+\frac{j}{m}}q_x = \\ = \frac{1}{c}\left(k + \frac{j+1}{m} - k - \frac{j}{m}\right) = \frac{1}{cm}, \quad k = 0, \ldots, c-1.$$

Звідси, використовуючи формулу обчислення актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{k=l}^{c-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,\frac{1}{cm} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\sum_{k=l}^{c-1} v^k \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j}{m}} = \\ = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm}\,\frac{v^l - v^c}{1-v}\,\frac{1-v}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}\left(v^l - v^c\right)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(e^{-\delta l} - e^{-\delta c}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)}.$$

Оскільки

$$ {}_{l|}{}^2A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(e^{-2\delta l} - e^{-2\delta c}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}}\right)},$$

то за формулою дисперсії теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|}{}^2A_x^{(m)} - \left({}_{l|}A_x^{(m)}\right)^2 = \\ = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(e^{-2\delta l} - e^{-2\delta c}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}}\right)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(e^{-\delta l} - e^{-\delta c}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)}\right)^2.$$

2-й спосіб: Скористаємося теоремою про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування з пожиттєвим та l-річним страхуваннями з виплатами в кінці періоду (друге твердження) і теоремою про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу.

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = {}_lE_x\, A_{x+l}^{(m)} = v^l\left(1 - \frac{l}{c}\right)\frac{v^{\frac{1}{m}}\left(1 - v^{c-l}\right)}{(c-l)d^{(m)}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}\left(v^l - v^c\right)}{cd^{(m)}}.$$

<u>*3-й спосіб*</u>: Скористаємося теоремою про зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого страхування з пожиттєвим та l-річним страхуваннями з виплатами в кінці періоду (перше твердження), теоремою про пожиттєве страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу і теоремою про l-річне страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу.

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = A_x^{(m)} - A_{x:\,\overline{l}|}^{1(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^c)}{cd^{(m)}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^l)}{cd^{(m)}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(v^l - v^c)}{cd^{(m)}}. $$

Обчислення в термінах випадкової величини $H(x)$:

$$ \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = \frac{1}{cm}, \quad h = 0, 1, \ldots, cm-1. $$

Отже,

$$ {}_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{h=lm}^{cm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{cm} \sum_{h=lm}^{cm-1} v^{\frac{h}{m}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(v^l - v^c)}{cm(1 - v^{\frac{1}{m}})}. $$

Формула для F_Z випливає з (7.8) і теореми про функцію розподілу для відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду.

Формула для ξ_Z^p випливає з (7.8) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу для відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду. □

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) страхується пожиттєво з відтермінуванням на

$$ l = 5, \ 7, \ 20, \ 30, \ 60, \ 79 $$

років з виплатою $C = 10$ в кінці періоду ($m = 12$);

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(a) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 3. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 40$ отримуємо:

l	θ	ξ
40	42.70%	10.43

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується пожиттево з відтермінуванням на

$$l = 5,\ 7,\ 20,\ 30,\ 60,\ 79$$

років з виплатою $C = 10$ в кінці періоду $(m = 12)$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(a) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 40$ отримуємо:

l	θ	N
40	22.55%	509

3.8 Відкладене (відтерміноване) n-річне страхування

3.8.1 Означення

При *відкладеному на l років n-річному страхуванні з виплатою в кінці періоду* виплачується 1 в кінці періоду (m-періоду) настання страхової події, якщо вона настає на проміжку (півінтервалі) $[x+l, x+l+n)$. І не виплачується нічого, якщо особа не доживає до віку $x+l$, або залишається живою протягом $l+n$ років.

Функції відшкодування та дисконтування і функція теперішньої вартості виплат такого страхування визначаються формулами:

$$b_{k,j+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & l \le k < l+n \\ 0, & k \ge l+n \end{cases}, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$v_{k,j+1} = v^{k+\frac{j+1}{m}}, \quad k = 0,\,1,\,2,\,\ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$z_{k,j+1} = \begin{cases} 0, & k < l \\ v^{k+\frac{j+1}{m}}, & l \le k < l+n \\ 0, & k \ge l+n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість втрат $Z = Z(x)$ відкладеного на l років n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду* має вигляд:

$$Z = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^{K+\frac{J+1}{m}}, & l \le K < l+n \\ 0, & K \ge l+n \end{cases}$$

де $K = K(x), J = J(x)$ позначають відповідно випадкові величини цілочисельної майбутньої тривалості життя та цілої кількості періодів останнього року життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного страхування життя з виплатою в кінці періоду позначається ${}_{l|n}A_x^{(m)}$ і визначається формулою:

$${}_{l|n}A_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Z\big] = \sum_{k=l}^{l+n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{K(x)=k, J(x)=j\big\} =$$

$$= \sum_{k=l}^{l+n-1}\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_kp_x\;{}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^k\,{}_kp_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}}\;{}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_kE_x \sum_{j=0}^{m-1} v^{\frac{j+1}{m}} {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \quad (8.1)$$

Позначимо ${}_{l|n}{}^2A_x^{(m)}$ актуарну теперішню вартість цього страхування з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$${}_{l|n}{}^2A_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Z^2\big] = \sum_{k=l}^{l+n-1} \sum_{j=0}^{m-1} v^{2\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=l}^{l+n-1} \sum_{j=0}^{m-1} e^{-2\delta\left(k+\frac{j+1}{m}\right)} {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Z\big] = {}_{l|n}{}^2A_x^{(m)} - \left({}_{l|n}A_x^{(m)}\right)^2.$$

Зауваження 1. У термінах випадкової величини $H(x)$ теперішня вартість втрат та актуарна теперішня вартість n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду визначаються формулами:

$$Z(x) = \begin{cases} 0, & H(x) < lm \\ v^{\frac{H(x)+1}{m}}, & lm \le H(x) < (l+n)m \\ 0, & H(x) \ge (l+n)m \end{cases}$$

$${}_{l|n}A_x^{(m)} = \sum_{h=lm}^{(l+n)m-1} v^{\frac{h+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=lm}^{(l+n)m-1} v^{\frac{h+1}{m}} {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.$$

Зауваження 2. Якщо у праву частину формули (8.1) підставити $l = 0$, то отримаємо актуарну теперішню вартість l-річного страхування. Отже,

$${}_{0|n}A_x^{(m)} = A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Зауваження 3. Використовуючи формулу для однорічного страхування з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$${}_{l|n}A_x^{(m)} = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^k \, {}_kp_x \, A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|} = \sum_{k=l}^{l+n-1} {}_kE_x \, A^{1(m)}_{x+k:\,\overline{1}|}.$$

3.8.2 Властивості

Теорема 8.1. (про функцію розподілу Z)

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ {}_lq_x \; + \; {}_{l+n}p_x \, , & 0 \le z < v^{l+n} \\ {}_lq_x \; + \; {}_{\frac{h}{m}}p_x \, , & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = lm+1, \ldots, (l+n)m-1 \\ 1, & z \ge v^{\frac{lm+1}{m}} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 8.1.*

Наслідок 8.1.1. (про процентиль випадкової величини Z) *Нехай* ξ_Z^p *позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Z, $p \in (0,1)$. Тоді:*

(i) ${}_lq_x \; + \; {}_{l+n}p_x > 0 \implies \forall p \in (0, {}_lq_x \; + \; {}_{l+n}p_x\,] \quad \xi_Z^p = 0;$

(ii) $\forall h \in \{lm+1, \ldots, (l+n)m\} \quad \Big({}_{\frac{h}{m}}p_x \; < \; {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \implies$
$$\implies \forall p \in (\, {}_lq_x \; + \; {}_{\frac{h}{m}}p_x \, , \, {}_lq_x \; + \; {}_{\frac{h-1}{m}}p_x \,] \quad \xi_Z^p = v^{\frac{h}{m}} \Big).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 8.1.1.*

Теорема 8.2. (про зв'язок відкладеного на l років n-річного страхування з $(l+n)$-річним та l-річним страхуваннями з виплатами в кінці періоду) *Справедливі формули:*

$$A^{1(m)}_{x:\overline{l+n|}} = A^{1(m)}_{x:\overline{l|}} + {}_{l|n}A^{(m)}_x; \tag{8.2}$$

$${}_{l|n}A^{(m)}_x = {}_lE_x \, A^{1(m)}_{x+l:\overline{n|}}. \tag{8.3}$$

Вправа 3. *Довести теорему 8.2.*

Теорема 8.3. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного страхування з виплатою в кінці періоду)

$${}_{l|n}A^{(m)}_x = vp_x \, {}_{l-1|n}A^{(m)}_{x+1}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \ge 0. \tag{8.4}$$

Вправа 4. *Довести теорему 8.3 (навести два різних способи доведення).*

Наслідок 8.3.1. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років пожиттєвого страхування з виплатою в кінці періоду)

$${}_{l|}A^{(m)}_x = vp_x \, {}_{l-1|}A^{(m)}_{x+1}, \quad l \in \mathbf{N}, \quad x \ge 0. \tag{8.5}$$

Доведення. Оскільки ${}_{l|n}A_x^{(m)}$, ${}_{l-1|n}A_{x+1}^{(m)}$ є частинними сумами порядку n збіжних числових рядів

$$
{}_{l|}A_x^{(m)} = \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \; {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k};
$$

$$
{}_{l-1|}A_{x+1}^{(m)} = \sum_{k=l-1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} \; {}_k p_{x+1} \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+1+k},
$$

то переходячи до границі при $n \to \infty$ в рівності (8.4), отримуємо рівність (8.5). □

Теорема 8.4. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладених страхувань з виплатами в кінці року і в кінці періоду) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$
{}_{l|n}A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} \, {}_{l|n}A_x.
$$

Вправа 5. *Довести теорему 8.4 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 8.5. (про відкладене на l років n-річне страхування життя з виплатою в кінці періоду для сталої сили смертності) *Нехай для особи* (x), *застрахованої на* n *з відтермінуванням на* l *років з виплатою в кінці періоду,*

$$
\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{8.6}
$$

Тоді:

$$
{}_{l|n}A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(e^{-(\mu+\delta)l} - e^{-(\mu+\delta)(l+n)}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}};
$$

$$
\mathsf{Var}\big[Z\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(e^{-(\mu+2\delta)l} - e^{-(\mu+2\delta)(l+n)}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} -
$$

$$
- \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)\left(e^{-(\mu+\delta)l} - e^{-(\mu+\delta)(l+n)}\right)}{1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}} \right)^2.
$$

$$
F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - e^{-\mu l} + e^{-\mu(l+n)}, & 0 \leq z < v^{l+n} \\ 1 - e^{-\mu l} + e^{-\mu \frac{h}{m}}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = lm+1, \ldots, (l+n)m - 1 \\ 1, & z \geq v^{\frac{lm+1}{m}} \end{cases}
$$

$$
\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, 1 - e^{\mu l} + e^{\mu(l+n)}\right] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in \left(1 - e^{\mu l} + e^{-\mu \frac{h}{m}}, 1 - e^{\mu l} + e^{-\mu \frac{h-1}{m}}\right], \quad h = lm+1, \ldots, (l+n)m \end{cases}
$$

Вправа 6. *Довести теорему 8.5. Навести три різних способи доведення формули для* $_{l|n}A_x^{(m)}$ *і вивести цю формулу в термінах випадкової величини* $H(x)$.

Теорема 8.6. (про відкладене на l років n-річне страхування життя з виплатою в кінці періоду для рівномірного розподілу) *Нехай для особи* (x), *застрахованої на* $n < c - l$ *років з відтермінуванням на* $l < c$ *років з виплатою в кінці періоду, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{8.7}$$

Тоді:

$$_{l|n}A_x^{(m)} = \frac{v^{\frac{1}{m}}\left(v^l - v^{l+n}\right)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(e^{-\delta l} - e^{-\delta(l+n)}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)};$$

$$\mathsf{Var}\left[Z\right] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}\left(e^{-2\delta l} - e^{-2\delta(l+n)}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}}\right)} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}\left(e^{-\delta l} - e^{-\delta(l+n)}\right)}{cm\left(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}\right)}\right)^2.$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1 - \frac{n}{c}, & 0 \le z < v^{l+n} \\ \frac{l}{c} + 1 - \frac{h}{cm}, & z \in [v^{\frac{h+1}{m}}, v^{\frac{h}{m}}), \quad h = lm+1, \dots, (l+n)m - 1 \\ 1, & z \ge v^{\frac{lm+1}{m}} \end{cases}$$

$$\xi_Z^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, 1 - \frac{n}{c}\right] \\ v^{\frac{h}{m}}, & p \in \left(\frac{l}{c} + 1 - \frac{h}{cm}, \frac{l}{c} + 1 - \frac{h-1}{cm}\right], \quad h = lm+1, \dots, (l+n)m \end{cases}$$

Вправа 7. *Довести теорему 8.6. Навести три різних способи доведення формули для* $_{l|n}A_x^{(m)}$ *і вивести цю формулу в термінах випадкової величини* $H(x)$.

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x + t) = \mu = 0,04$, $t \ge 0$;

(iii) страхується на n років з відтермінуванням на l років з виплатою $C = 10$ в кінці періоду ($m = 12$), де

$$(l, n) = (3, 60), \quad (5, 50), \quad (20, 20), \quad (25, 15), \quad (40, 7), \quad (50, 5);$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом.

Вправа 8. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 15,\ n = 25$ отримуємо:

l	n	θ	ξ
15	25	25.04%	102.18

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) страхується на n років з відтермінуванням на l років з виплатою $C = 10$ в кінці періоду $(m = 12)$, де

$$(l, n) = (3, 60), \quad (5, 50), \quad (20, 20), \quad (25, 15), \quad (40, 7), \quad (50, 5);$$

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснити страхову виплату в кінці періоду у випадку настання страхової події для кожної застрахованої особи;

(б) відносне становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 9. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 15,\ n = 25$ отримуємо:

l	n	θ	N
15	25	27.42%	752

Додаток A

Процентиль, нормальне наближення

A.1 Процентиль

Означення 1.1. Нехай $p \in (0,1)$, Z довільна випадкова величина з функцією розподілу
$$F(z) = \mathsf{Pr}\{Z \le z\}, \quad z \in \mathbf{R}.$$

Тоді ***p-им процентилем*** випадкової величини Z називається

$$\xi_Z^p = \min\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) \ge p\}.$$

Зауваження 1. Якщо випадкова величина Z невід'ємна, то

$$\xi_Z^p = \min\{\xi \ge 0 \mid F(\xi) \ge p\}.$$

Зауваження 2.
$$\xi_Z^p = \min\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) = p\}, \tag{1.1}$$

якщо множина у правій частині рівності (1.1) непорожня. Це отримуємо з таких двох тверджень:

$$\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) \ge p\} = \{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) = p\} \bigsqcup \{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) > p\};$$
$$\forall \xi_1 \in \{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) = p\} \quad \forall \xi_2 \in \{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) > p\} \quad (\xi_1 < \xi_2).$$

Зокрема,
$$\big(\exists! \xi \in \mathbf{R} : \ F(\xi) = p\big) \implies \big(\xi_Z^p = \xi\big). \tag{1.2}$$

Зауваження 3.

$$\exists(\alpha,\beta) \subset \mathbf{R} \quad \big(\exists!\xi \in (\alpha,\beta):\ F(\xi) = p\big) \implies \xi_Z^p = \xi. \tag{1.3}$$

Виберемо

$$a, b \in \mathbf{R}: \quad \alpha < a < \xi < b < \beta.$$

Використовуючи неспадання функції розподілу F, маємо:

$$\begin{gathered} F(a) < F(\xi) < F(b); \\ \forall z \le a \quad F(z) \le F(a) < F(\xi) = p; \\ \forall z \ge b \quad F(z) \ge F(b) > F(\xi) = p. \end{gathered}$$

Звідси отримуємо:

$$\exists!\xi \in \mathbf{R}:\ F(\xi) = p.$$

Тоді з (1.2) маємо (1.3).

Зауваження 4. Оскільки функція розподілу F неспадна, то

$$\forall \beta \in \mathbf{R} \quad \big(F(\beta) \ge F(\beta_-)\big) \implies \xi_Z^{F(\beta_-)} \le \beta. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. (про процентиль) *Нехай Z довільна випадкова величина з функцією розподілу F. Тоді:*

(i) $\forall \beta \in \mathbf{R} \Big(F(\beta) > F(\beta_-) \implies \forall p \in \big(F(\beta_-), F(\beta)\big] \quad \xi_Z^p = \beta\Big)$;

(ii) $\forall \beta \in \mathbf{R} \Big(Z \ge \beta \wedge F(\beta) > 0 \implies \forall p \in \big(0, F(\beta)\big] \quad \xi_Z^p = \beta\Big)$;

(iii) $\forall \beta \in \mathbf{R} \Big(\exists \alpha < \beta : F$ *строго зростає на* $(\alpha,\beta) \Longrightarrow \xi_Z^{F(\beta_-)} = \beta\Big)$;

(iv) *якщо на інтервалі $(\alpha,\beta) \subset \mathbf{R}$ функція розподілу F неперервна і строго зростає, то $\forall p \in \big(F(\alpha), F(\beta_-)\big)$ p-ий процентиль ξ_Z^p є розв'язком (який існує і єдиний) рівняння*

$$F(\xi) = p, \quad \xi \in (\alpha,\beta). \tag{1.5}$$

Тобто

$$\xi_Z^p = \Big(F\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p).$$

Доведення. (i) Нехай $F(\beta) > F(\beta_-)$, $p \in \big(F(\beta_-), F(\beta)\big]$. Тоді

$$F(\beta) \ge p \implies \xi_Z^p \le \beta. \tag{1.6}$$

З неспадання функції розподілу F маємо:

$$\forall \xi < \beta \quad F(\xi) \le F(\beta_-) < p \implies \xi_Z^p \ge \beta. \tag{1.7}$$

З (1.6) і (1.7) отримуємо рівність: $\xi_Z^p = \beta$.
(ii) Випливає з твердження (i). Нехай $Z \ge \beta,\ F(\beta) > 0$. Тоді

$$\forall z < \beta \quad F(z) = \mathsf{Pr}\big\{Z \le z\big\} = 0 \implies F(\beta_-) = \lim_{z \to \beta_-} F(z) = 0 < F(\beta).$$

(iii) Нехай F строго зростає на (α, β). Тоді

$$\forall z \in (\alpha, \beta) \quad F(z) < F(\beta_-).$$

Звідси, враховуючи неспадання функції розподілу F, маємо:

$$\forall z < \beta \quad F(z) < F(\beta_-) \implies \xi_Z^{F(\beta_-)} \ge \beta. \tag{1.8}$$

З (1.4) і (1.8) отримуємо рівність: $\xi_Z^{F(\beta_-)} = \beta$.

(iv) Нехай $p \in \big(F(\alpha), F(\beta_-)\big)$. Оскільки функція розподілу F неперервна справа, то $F(\alpha_+) = F(\alpha)$. Отже,

$$p \in \big(F(\alpha_+), F(\beta_-)\big).$$

Тоді з теореми Больцано-Коші про проміжне значення і зі строгої монотонності функції розподілу F на інтервалі (α, β) отримуємо:

$$\exists! \xi \in (\alpha, \beta) : \quad F(\xi) = p. \tag{1.9}$$

Отже, ξ — розв'язок (який існує і єдиний) рівняння (1.5). Тоді з (1.3) і (1.9) отримуємо: $\xi_Z^p = \xi$. $\square$

A.2 Нормальне наближення

Постановка задачі. Розглядається N осіб (x_i), $i = 1, \ldots, N$, які укладають (одночасно) однакові страхові угоди страхування життя. Нехай

(i) особи (x_i) незалежні;

(ii) випадкові величини $T(x_i)$ однаково розподілені (мають однакові функції розподілу);

(iii) $Z(x_i)$ — теперішня вартість страхування особи (x_i).

Позначимо

$$S = \sum_{i=1}^{N} Z(x_i)$$

(загальну) теперішню вартість втрат страхування цих N осіб. Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати страховий фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за страховою угодою (у випадку настання страхової події) для кожної з N застрахованих осіб становила не менше, ніж $p \in (0, 1)$;

(б) відносне навантаження надійності (навантаження безпеки, надбавку надійності, надбавку безпеки, security loading) θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) мінімальну кількість осіб, яку потрібно застрахувати, щоб відносне навантаження надійності не перевищувало $\theta_0 > 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що згідно з (а) потрібно обчислити

$$\min\Big\{\xi \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathsf{Pr}\big\{S \le \xi\big\} \ge p\Big\} = \xi_S^p. \tag{2.1}$$

Для застосування нормального наближення подамо (2.1) у вигляді:

$$\min\left\{\xi \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\left\{\frac{S - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}} \le \frac{\xi - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}\right\} \ge p\right\} = \xi_S^p.$$

Нехай $\mathcal{N}(0, 1)$ позначає випадкову величину, що має стандартний нормальний розподіл з параметрами $0, 1$. Застосовуючи нормальне наближення

$$\frac{S - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

отримуємо:

$$\min\left\{\xi \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\left\{\mathcal{N}(0, 1) \le \frac{\xi - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}\right\} \ge p\right\} = \xi_S^p. \tag{2.2}$$

Позначимо

$$\eta = \frac{\xi - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}.$$

Тоді (2.2) набуває вигляду:

$$\min\left\{\mathsf{E}\big[S\big] + \eta\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]} \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{N}(0,1) \le \eta\big\} \ge p\right\} = \xi_S^p.$$

Оскільки $\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]} > 0$, то ця рівність еквівалентна такій:

$$\min\left\{\eta \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{N}(0,1) \le \eta\big\} \ge p\right\} = \frac{\xi_S^p - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}. \tag{2.3}$$

Величина зліва є p-им процентилем випадкової величини $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\min\left\{\eta \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{N}(0,1) \le \eta\big\} \ge p\right\} = \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p,$$

Отже, з (2.3) отримуємо:

$$\begin{aligned}\xi_S^p = \mathsf{E}\big[S\big] + \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]} = \\ = \mathsf{E}\big[S\big]\left(1 + \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]}\right) = \mathsf{E}\big[S\big](1+\theta),\end{aligned} \tag{2.4}$$

де відносне навантаження надійності θ обчислюється за формулою:

$$\theta = \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]}.$$

Згідно з умовою (припущенням) випадкові величини

$$Z(x_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.5}$$

незалежні і мають однакові розподіли. Нехай $\mathcal{Z}$ позначає випадкову величину, однаково розподілену з випадковими величинами (2.5). Тоді маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[S\big] &= \sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}\big[Z(x_i)\big] = N\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big];\\ \mathsf{Var}\big[S\big] &= \sum_{i=1}^{N}\mathsf{Var}\big[Z(x_i)\big] = N\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big].\end{aligned}$$

Отже, з (2.4) отримуємо (пункти (а) і (б) задачі):

$$\xi_S^p = N\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big] + \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p \sqrt{N}\sqrt{\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]} =$$
$$= N\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]\left(1 + \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]}}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]}\right) =$$
$$= N\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]\left(1 + \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big]}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]^2} - 1}\right) = N\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big](1+\theta),$$

де відносне навантаження надійності θ обчислюється за формулою:

$$\theta = \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]}}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]} = \frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big]}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]^2} - 1}.$$

Згідно з формулою (**??**) для знаходження мінімальної кількості осіб (пункт (в) задачі) отримуємо нерівність:

$$\frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big]}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]^2} - 1} \le \theta_0 \implies N \ge \left(\frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\theta_0}\right)^2 \left(\frac{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}^2\big]}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]^2} - 1\right).$$

Або в термінах дисперсії $\mathcal{Z}$:

$$\frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]}}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]} \le \theta_0 \implies N \ge \left(\frac{\xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p}{\theta_0}\right)^2 \frac{\mathsf{Var}\big[\mathcal{Z}\big]}{\mathsf{E}\big[\mathcal{Z}\big]^2}.$$

□

A.2.1 Приклад застосування нормального наближення

Формулювання. Розглядається $N = 100$ осіб $(x_i),\ i = 1,\dots,N$, які укладають (одночасно) однакові страхові угоди страхування життя. Нехай

(i) особи (x_i) незалежні;

(ii) випадкові величини $T(x_i)$ однаково розподілені і мають узагальнений розподіл де Муавра

$$f_{T(x_i)}(t) = \begin{cases} \frac{2}{c^2}(c-t), & t \in [0,c) \\ 0, & t \notin [0,c) \end{cases} \quad c = 50;$$

(iii) теперішня вартість ануїтету $Z(x_i)$ особи (x_i) визначається формулою (пожиттєве страхування життя з негайною виплатою):

$$Z(x_i) = e^{-\delta T(x_i)}, \quad \delta = 0,1;$$

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати страховий фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за страховою угодою (у випадку настання страхової події) для кожної з N застрахованих осіб становила не менше, ніж $p = 0,9$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) мінімальну кількість осіб, яку потрібно застрахувати, щоб відносне навантаження надійності не перевищувало $\theta_0 = 0,1$.

Розв'язання. Для обчислення математичних сподівань $\mathsf{E}\big[Z\big], \mathsf{E}\big[Z^2\big]$ скористаємося інтегралом:

$$\int\limits_0^1 e^{at} t\,dt = \frac{1}{a} t e^{at}\Big|_0^1 - \frac{1}{a}\int\limits_0^1 e^{at}\,dt = \frac{e^a}{a} - \frac{e^a - 1}{a^2}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Z\big] = \frac{2}{c^2}\int\limits_0^c e^{-\delta t}(c-t)\,dt = 2e^{-\delta c}\int\limits_0^1 e^{\delta c t} t\,dt = \frac{2}{\delta c} - \frac{2(1-e^{-\delta c})}{(\delta c)^2}.$$

$$\mathsf{E}\big[Z^2\big] = \frac{2}{c^2}\int\limits_0^c e^{-2\delta t}(c-t)\,dt = \frac{1}{\delta c} - \frac{1-e^{-2\delta c}}{2(\delta c)^2}.$$

Використовуючи результати попереднього параграфа, а також значення

$$\xi^{0,9}_{\mathcal{N}(0,1)} = 1,282,$$

отримуємо:

$$\theta = 0,1282\sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{\mathsf{E}\big[Z\big]^2} - 1} = 0,1112 \implies 100\% \cdot \theta = 11,12\%;$$

$$\xi^{0,9}_S = 100\mathsf{E}\big[Z\big](1+\theta) = 35,62;$$

$$N \geq (12,82)^2\left(\frac{\mathsf{E}\big[Z^2\big]}{\mathsf{E}\big[Z\big]^2} - 1\right) = 123,58 \implies N = 124.$$

Зазначимо, що актуарна теперішня вартість страхування життя для кожної зі 100 застрахованих осіб становить:

$$\mathsf{E}\big[Z(x_i)\big] = 0,3205.$$

Проте для кожної з цих осіб страхування буде коштувати на $11,12\%$ більше, а саме: $0,3562$. □

Література

[1] *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial mathematics*, Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries, 1979, 622 p.

[2] *Billingsley P. Probability and Measure*, New York: John Wiley & Sons, 1986, 753 p.

[3] *Підкуйко С.І. Математичний аналіз*, Т. 1. Львів: Галицька Видавнича Спілка, 2004, 544 с.

Навчальне видання

ПІДКУЙКО Сергій Іванович

Актуарна математика: страхування життя

Навчальний посібник

Редагування *Н. Й. Плиса*
Комп'ютерний набір і верстання *С. І. Підкуйко*

Підп. до друку ??.??.2022. Формат ??×??/??
Папір друк. Друк офсет. Гарнітура TEX
Умовн. друк. арк. 15,17. Обл.-вид. арк. ??,??.
Тираж ??? прим.

Видавець та виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

СВІДОЦТВО
про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.