Серія «Актуарна і фінансова математика»

С. І. Підкуйко

Актуарна математика: страхові ануїтети

Неперервні страхові ануїтети
Дискретні страхові ануїтети зі щорічними виплатами
Дискретні страхові ануїтети з виплатами m разів на рік

Навчальний посібник

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
2022

УДК 517
ББК 22.16
П 32

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. Дільний В.М. (Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка);
д-р екон. наук, проф. Заболоцький Т.М. (Львівський національний університет імені Івана Франка);
к-т фіз.-мат. наук Каплан Богдан (Страхова компанія ТАС)

Рекомендовано Вченою Радою
механіко-математичного факультету
Львівського національного університету
імені Івана Франка
Протокол № 10 від 24.06.2022

Серія «Актуарна і фінансова математика»

Підкуйко С. І.
П32 Страхові ануїтети : навчальний посібник. — Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2022. — 220 с.

Навчальний посібник присвячено одному з основних розділів актуарної математики — страховим ануїтетам. Розглянуто загальне поняття страхового ануїтету, основні його властивості (зв'язок актуарних теперішніх вартостей, рекурентні формули). Розглянуто основні типи страхових ануїтетів — неперервні, дискретні зі щорічними виплатами і з виплатами, що здійснюються кілька разів на рік. Для кожного з цих типів ануїтетів доведено серію теорем, пов'язаних з їх ймовірнісними характеристиками. Наведено приклади обчислень ануїтетів.

Для студентів фізико-математичних та технічних спеціальностей.

УДК 517
ББК 22.16

ISBN 978-617-10-0719-2

Зміст

Вступ

У моделях *страхування життя* вивчаються виплати, які зумовлені такою подією, як настання смерті. Моделі, в яких вивчаються виплати, що здійснюються, допоки особа залишається живою, називаються *страховими ануїтетами.*

Страховий ануїтет — це серія виплат, що здійснюється неперервно, або через рівні проміжки часу — періоди (роки, місяці, квартали), допоки застрахована особа залишається живою. Ануїтет може бути *строковим* (тимчасовим, обмеженим у часі), або *пожиттєвим* (безтерміновим, безстроковим). Виплати можуть починатися негайно після укладання угоди, або бути *відкладеними (відтермінованими) у часі.* Виплати можуть здійснюватись на початку (*ануїтети пренумерандо*) або в кінці (*ануїтети постнумерандо*) кожного проміжку часу виплат (кінець року, кінець періоду).

Ануїтети відіграють особливо важливу роль у пенсійних схемах. Насправді пенсійну схему можна розглядати як певний відкладений (відтермінований) пожиттєвий ануїтет, виплати за яким здійснюється, коли особа йде на пенсію. А оплатою за пенсію (відкладений пожиттєвий ануїтет) виступає інший строковий ануїтет, виплати за яким здійснює особа протягом своєї трудової діяльності, допоки не досягає пенсійного віку.

Розділ 1

Неперервні страхові ануїтети

1.1 Загальне поняття ануїтету

1.1.1 Означення

У цьому розділі розглядаються ануїтети, які виплачуються неперервно з певною заданою інтенсивністю. Такі ануїтети називаються *неперервними ануїтетами*. Неперервний ануїтет — це абстрактна модель, що є добрим наближенням ануїтетів зі щомісячними виплатами.

Загальний неперервний ануїтет для особи (x) визначається двома функціями:

- *інтенсивністю виплат*
$$b_t, \quad t \geq 0;$$
- *функцією дисконтування*
$$v_t, \quad t \geq 0.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат* y_t за формулою

$$y_t = \int_0^t b_s v_s \, ds.$$

Отже, y_t — це теперішня вартість неперервного ануїтету, який сплачується особі (x) протягом часу t. Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю неперервного ануїтету*:

$$Y(x) = y_{T(x)} = \int_0^{T(x)} b_s v_s \, ds, \tag{1.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int\limits_0^\infty y_t f_{T(x)}(t)\, dt = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t b_s v_s\, ds \right)\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt \tag{1.2}$$

теперішньої вартості неперервного ануїтету називається *актуарною теперішньою неперервного вартістю ануїтету.* Залежно від вигляду функцій інтенсивності виплат та дисконтування отримуємо різні види неперервних ануїтетів (наприклад пожиттєвий, строковий, відкладений пожиттєвий, відкладений строковий, пожиттєвий з гарантією тощо).

Зауваження 1. Зазвичай на функцію інтенсивності виплат b_t накладають умови невід'ємності й кускової неперервності, а на функцію дисконтування v_t умови додатності, неперервності й кускової гладкості.

1.1.2 Властивості

Теорема 1.1. (про зв'язок теперішніх вартостей неперервних ануїтетів) *Нехай функція дисконтування визначається формулою (незалежно від віку особи)*

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0. \tag{1.3}$$

Нехай для $l \in \mathbf{N}$ інтенсивність виплат в момент часу

$$x + l + t$$

за неперервним ануїтетом для особи у віці x та у віці $x + l$ однакова, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid T(x) \geq l\big] = \int\limits_0^l b_s v^s\, ds + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big], \tag{1.4}$$

де b_t, $t \geq 0$, позначає інтенсивність виплат ануїтету для особи у віці x.

Доведення. За означенням (1.1) та умовою (1.3) теореми

$$Y(x) = \int\limits_0^{T(x)} b_s v^s\, ds. \tag{1.5}$$

За умовою теореми інтенсивністю виплат ануїтету для особи у віці $x+l$ є функція $b_{t+l},\ t\ge 0$. Отже, за означенням (1.1) та умовою (1.3) теореми теперішня вартість ануїтету $Y(x+l)$ для особи $(x+l)$ визначається формулою:

$$Y(x+l) = \int\limits_0^{T(x+l)} b_{s+l} v^s\, ds. \tag{1.6}$$

*1-й спосіб*: Оскільки

$$T(x+l) = T(x) - l, \quad T(x) \ge l, \tag{1.7}$$

то використовуючи рівності (1.5) і (1.6) та адитивність інтеграла, при $T(x)\ge l$ маємо:

$$Y(x) - \int\limits_0^l b_s v^s\, ds = \int\limits_l^{T(x)} b_s v^s\, ds = \int\limits_0^{T(x)-l} b_{s+l} v^{s+l}\, ds = \\ = v^l \int\limits_0^{T(x+l)} b_{s+l} v^s\, ds = v^l Y(x+l).$$

Звідси отримуємо (1.4).

*2-й спосіб*: З (1.7) отримуємо зв'язок між функціями розподілу випадкових величин $T(x+l)$ та $T(x),\ T(x)\ge l$.

$$F_{T(x+l)}(t) = \mathsf{Pr}\big\{T(x+l)\le t\big\} = \\ = \mathsf{Pr}\big\{T(x)\le t+l \mid T(x)\ge l\big\} = F_{T(x)|T(x)\ge l}(t+l), \quad t\ge 0.$$

Звідси, використовуючи означення математичного сподівання, адитивність інтеграла та рівності (1.5) і (1.6), отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)\ge l\big] = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t b_s v^s\, ds\right) dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t) = \\ = \int\limits_l^\infty \left(\int\limits_0^l b_s v^s\, ds + \int\limits_l^t b_s v^s\, ds\right) dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t) = \\ = \int\limits_0^l b_s v^s\, ds + \int\limits_l^\infty \left(\int\limits_0^{t-l} b_{s+l} v^{s+l}\, ds\right) dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t) =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\,ds + v^l \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t b_{s+l} v^s\,ds \right)\, dF_{T(x)|T(x)\ge l}(t+l) =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\,ds + v^l \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t b_{s+l} v^s\,ds \right)\, dF_{T(x+l)}(t) =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\,ds + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big].$$

<u>*3-й спосіб*</u>: Оскільки щільність $f_{T(x+l)}(t)$ розподілу випадкової величини $T(x+l)$ визначається формулою

$$f_{T(x+l)}(t) = {}_t p_{x+l}\,\mu(x+l+t), \quad t \ge 0,$$

то за означенням математичного сподівання і згідно з (1.6)

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t b_{s+l} v^s\,ds \right)\, {}_t p_{x+l}\,\mu(x+l+t)\,dt. \tag{1.8}$$

Використовуючи (1.5), означення математичного сподівання, формулу щільності $f_{T(x)}(t)$ розподілу випадкової величини $T(x)$

$$f_{T(x)}(t) = {}_t p_x\,\mu(x+t), \quad t \ge 0,$$

рівність

$${}_l p_x = \mathsf{Pr}\big\{T(x) \ge l\big\} = \int\limits_l^\infty f_{T(x)}(t)\,dt = \int\limits_l^\infty {}_t p_x\,\mu(x+t)\,dt,$$

адитивність інтеграла, співвідношення

$${}_{l+t} p_x = {}_l p_x\ {}_t p_{x+l}\,,$$

і рівність (1.8), маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid T(x) \ge l\big] = \frac{1}{\mathsf{Pr}\big\{T(x) \ge l\big\}} \int\limits_l^\infty \left(\int\limits_0^t b_s v^s\,ds \right)\, f_{T(x)}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{{}_l p_x} \int\limits_l^\infty \left(\int\limits_0^l b_s v^s\,ds + \int\limits_l^t b_s v^s\,ds \right)\, {}_t p_x\,\mu(x+t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\, ds + \frac{1}{{}_lp_x} \int\limits_l^\infty \left(\int\limits_0^{t-l} b_{s+l} v^{s+l}\, ds \right) {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\, ds + \frac{v^l}{{}_lp_x} \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{t} b_{s+l} v^{s}\, ds \right) {}_{l+t}p_x\, \mu(x+l+t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\, ds + v^l \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{t} b_{s+l} v^{s}\, ds \right) {}_tp_{x+l}\, \mu(x+l+t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^l b_s v^s\, ds + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big].$$

□

Теорема 1.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість неперервного ануїтету) *За умов теореми 1.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int\limits_0^l b_s v^s\, {}_sp_x\; ds + v^l\, {}_lp_x\, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{1.9}$$

Доведення. З (1.1), (1.2) та умов теореми отримуємо формули (1.5) і (1.6) для теперішніх вартостей $Y(x)$ та $Y(x+l)$, і відповідно для актуарних теперішніх вартостей

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{t} b_s v^{s}\, ds \right)\; {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt; \tag{1.10}$$

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{t} b_{s+l} v^{s}\, ds \right) {}_tp_{x+l}\, \mu(x+l+t)\, dt. \tag{1.11}$$

1-й спосіб: Використовуючи рівність

$${}_sp_x\; = \int\limits_s^\infty {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt,$$

адитивність інтеграла і теорему про перестановку (рівність) повторних інтегралів, отримуємо:

$$\int_0^l b_s v^s \, {}_s p_x \, ds = \int_0^l \left(\int_s^\infty {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt \right) b_s v^s \, ds =$$

$$= \int_0^l \left(\int_s^l {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt + \int_l^\infty {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt \right) b_s v^s \, ds =$$

$$= \int_0^l \left(\int_0^t b_s v^s \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt + \int_l^\infty \left(\int_0^l b_s v^s \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt. \quad (1.12)$$

Використовуючи (1.10) та адитивність інтеграла, маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int_0^l \left(\int_0^t b_s v^s \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt +$$

$$+ \int_l^\infty \left(\int_0^t b_s v^s \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt. \quad (1.13)$$

З рівностей (1.12) та (1.13), використовуючи співвідношення

$${}_{l+t} p_x = {}_l p_x \; {}_t p_{x+l} \, ,$$

та рівність (1.11), маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] - \int_0^l b_s v^s \, {}_s p_x \, ds = \int_l^\infty \left(\int_l^t b_s v^s \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt =$$

$$= \int_l^\infty \left(\int_0^{t-l} b_{s+l} v^{s+l} \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^t b_{s+l} v^{s+l} \, ds \right) {}_{l+t} p_x \, \mu(x+l+t) \, dt =$$

$$= v^l \, {}_l p_x \int_0^\infty \left(\int_0^t b_{s+l} v^s \, ds \right) {}_t p_{x+l} \, \mu(x+l+t) \, dt = v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big].$$

Звідси випливає (1.9).

2-й спосіб: За формулою повної ймовірності

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \mathsf{E}\big[Y(x) \mid T(x) < l\big] \mathsf{Pr}\big\{T(x) < l\big\} +$$

$$+\,\mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)\ge l\big]\,\mathsf{Pr}\big\{T(x)\ge l\big\} =$$
$$= \mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)< l\big]\;{}_lq_x + \mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)\ge l\big]\;{}_lp_x\,. \quad (1.14)$$

Другий доданок правої частини цієї рівності отримуємо з теореми про зв'язок теперішніх вартостей неперервних ануїтетів:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)\ge l\big]\;{}_lp_x \;=\; {}_lp_x \int\limits_0^l b_s v^s\,ds + v^l\;{}_lp_x\,\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \qquad (1.15)$$

Використовуючи (1.5) та означення математичного сподівання, маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)< l\big] = \frac{1}{\mathsf{Pr}\big\{T(x)<l\big\}}\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t b_s v^s\,ds\right) f_{T(x)}(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{{}_lq_x}\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t b_s v^s\,ds\right)\;{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt.$$

Отже, перший доданок правої частини рівності (1.14), використовуючи теорему про перестановку (рівність) повторних інтегралів та рівність

$$\int\limits_s^l\;{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \;{}_sp_x\;-\;{}_lp_x\,,$$

можна подати у вигляді:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\mid T(x)< l\big]\;{}_lq_x \;= \int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t b_s v^s\,ds\right)\;{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt =$$
$$= \int\limits_0^l\left(\int\limits_s^l\;{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt\right) b_s v^s\,ds = \int\limits_0^l\big(\;{}_sp_x\;-\;{}_lp_x\,\big) b_s v^s\,ds =$$
$$= \int\limits_0^l b_s v^s\;{}_sp_x\;ds - \;{}_lp_x\int\limits_0^l b_s v^s\,ds. \quad (1.16)$$

Підставляючи (1.15) і (1.16) у праву частину рівності (1.1), отримуємо рівність (1.9). □

1.2 Загальне поняття ануїтету з гарантією

1.2.1 Означення

Поряд зі звичайними неперервними ануїтетами існують (і розглядаються) *неперервні ануїтети з (n-річною) гарантією*. Такий ануїтет гарантовано сплачується протягом n років незалежно від часу настання страхової події (смерті застрахованої особи).

Функція теперішньої вартості виплат y_t для особи (x) за таким ануїтетом визначається формулою:

$$y_t = \begin{cases} \int\limits_0^n b_s v_s \, ds, & t < n \\ \int\limits_0^t b_s v_s \, ds, & t \geq n \end{cases}$$

Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю неперервного ануїтету з n-річною гарантією*:

$$Y(x) = y_{T(x)} = \begin{cases} \int\limits_0^n b_s v_s \, ds, & T(x) < n \\ \int\limits_0^{T(x)} b_s v_s \, ds, & T(x) \geq n \end{cases} \tag{2.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int\limits_0^\infty y_t f_{T(x)}(t) \, dt = \\ = {}_n q_x \int\limits_0^n b_s v_s \, ds + \int\limits_n^\infty \left(\int\limits_0^t b_s v_s \, ds \right) {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt \tag{2.2}$$

теперішньої вартості неперервного ануїтету з n-річною гарантією називається *актуарною теперішньою вартістю неперервного ануїтету з n-річною гарантією*. Залежно від вигляду функцій відшкодування та дисконтування отримуємо різні види неперервних ануїтетів з гарантією (наприклад пожиттєвий, строковий).

1.2.2 Властивості

Теорема 2.1. (про зв'язок теперішніх вартостей неперервних ануїтетів з гарантією) *Нехай функція дисконтування визначається формулою (незалежно від віку особи)*

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Нехай для $l, n \in \mathbf{N}: \ l < n$, *інтенсивність виплат в момент часу*

$$x + l + t$$

за неперервним ануїтетом з n*-річною гарантією для особи у віці* x *та за неперервним ануїтетом з* $(n-l)$*-річною гарантією для особи у віці* $x+l$ *однакова, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid T(x) \geq l\big] = \int\limits_0^l b_s v^s \, ds + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big], \tag{2.4}$$

де $b_t, \ t \geq 0$, *позначає інтенсивність виплат ануїтету для особи у віці* x.

Вправа 1. *Довести теорему 2.1 (навести три різних способи доведення).*

Теорема 2.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість неперервного ануїтету з гарантією) *За умов теореми 2.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int\limits_0^l b_s v^s \, ds + {}_l q_x \int\limits_l^n b_s v^s \, ds + v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{2.5}$$

Вправа 2. *Довести теорему 2.2 (навести два різних способи доведення).*

1.3 Неперервний ануїтет зі сталою інтенсивністю виплат

Розглянемо неперервний ануїтет зі сталою інтенсивністю виплат 1 і зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $\delta = -\ln v$. Функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету позначається $\bar{a}_{\overline{t}|}$ і визначається формулою:

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \int\limits_0^t 1 \cdot v^s \, ds = \frac{1 - v^t}{\delta}, \quad t \geq 0.$$

Зазначимо, що без урахування дисконту теперішня вартість такого ануїтету, виплаченого протягом року $[t, t+1]$, дорівнює 1:

$$\int_t^{t+1} 1 \cdot ds = 1.$$

Розглянемо неперервний ануїтет зі сталою інтенсивністю виплат 1 і зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $2\delta = -2\ln v$. Функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету позначається ${}^2\bar{a}_{\overline{t}|}$ і визначається формулою:

$${}^2\bar{a}_{\overline{t}|} = \int_0^t 1 \cdot v^{2s}\, ds = \frac{1 - v^{2t}}{2\delta}.$$

Лема 3.1. (про зв'язок $\bar{a}_{\overline{t}|}$ та ${}^2\bar{a}_{\overline{t}|}$)

$$\frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_{\overline{t}|} - {}^2\bar{a}_{\overline{t}|}\right) - \bar{a}_{\overline{t}|}^{\,2} = 0, \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Доведення. Оскільки

$$(1 - v^t)^2 = 2(1 - v^t) - (1 - v^{2t}),$$

то

$$\bar{a}_{\overline{t}|}^{\,2} = \frac{(1 - v^t)^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\,\frac{1 - v^t}{\delta} - \frac{2}{\delta}\,\frac{1 - v^{2t}}{2\delta} = \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_{\overline{t}|} - {}^2\bar{a}_{\overline{t}|}\right).$$

Звідси отримуємо (3.1). □

1.4 Інтегрування частинами

Теорема 4.1. (про математичне сподівання функції від неперервної невід'ємної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(x)$ — невід'ємна неперервна кусково-гладка функція. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = +\infty \implies \int_0^\infty \varphi'(x)\big(1 - F(x)\big)\, dx = +\infty. \tag{4.1}$$

Нехай функції F, φ задовільняють умову:

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \varphi(x)\, \big(1 - F(x)\big) = 0. \tag{4.2}$$

Тоді

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] < +\infty \iff \exists \int\limits_0^\infty \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx, \tag{4.3}$$

до того ж справедлива рівність:

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \varphi(0) + \int\limits_0^\infty \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx. \tag{4.4}$$

Доведення. З умов теореми маємо:

$$\forall t \ge 0 \quad \exists \int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) < +\infty.$$

Оскільки

$$\int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) = -\int\limits_0^t \varphi(x)\,d\big(1-F(x)\big), \quad t \ge 0,$$

то інтегруючи частинами інтеграл у правій частині цієї рівності, отримуємо:

$$-\int\limits_0^t \varphi(x)\;d\big(1-F(x)\big) = -\varphi(x)\;\big(1-F(x)\big)\Big|_0^t + \int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\;dx =$$

$$= -\varphi(t)\;\big(1-F(t)\big) + \varphi(0) + \int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx, \quad t \ge 0.$$

Отже,

$$\varphi(t)\;\big(1-F(t)\big) + \int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) =$$

$$= \varphi(0) + \int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx, \quad t \ge 0. \tag{4.5}$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = +\infty$. Тоді

$$\int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) \to \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dF(x) = \mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = +\infty, \;\; t \to +\infty. \tag{4.6}$$

За умовами теореми і згідно з (4.5)

$$\int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx \geq \int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) - \varphi(0), \quad t \geq 0.$$

Звідси й з (4.6) та означення невластивого інтеграла отримуємо твердження (4.1):

$$\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx = +\infty.$$

Нехай справджується умова (4.2). Тоді з рівності (4.5) випливає, що

$$\exists \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) \iff \exists \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx, \tag{4.7}$$

до того ж

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x) = \varphi(0) + \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx. \tag{4.8}$$

За означенням математичного сподівання та означенням невластивого інтеграла

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dF(x) = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi(x)\,dF(x); \tag{4.9}$$

$$\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \varphi'(x)\big(1-F(x)\big)\,dx. \tag{4.10}$$

З (4.7), (4.8), (4.9) і (4.10) випливають твердження теореми (4.3) і (4.4). □

Наслідок 4.1.1. (про математичне сподівання й дисперсію функції від неперервної невід'ємної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(x)$ — невід'ємна неперервна кусково-гладка обмежена функція. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] < +\infty, \quad \mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] < +\infty, \tag{4.11}$$

до того ж справедливі рівності:

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \varphi(0) + \int\limits_0^1 \varphi'(x)\big(1 - F(x)\big)dx; \tag{4.12}$$

$$\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] = \varphi^2(0) + 2\int\limits_0^1 \varphi'(x)\varphi(x)\big(1 - F(x)\big)dx. \tag{4.13}$$

Зокрема,

$$\mathsf{Var}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \varphi^2(0) + 2\int\limits_0^1 \varphi'(x)\varphi(x)\big(1 - F(x)\big)dx - \\ - \left(\varphi(0) + \int\limits_0^1 \varphi'(x)\big(1 - F(x)\big)dx\right)^2. \tag{4.14}$$

Доведення. Спершу використовуючи обмеженість функції $\varphi(x)$ отримуємо твердження (4.11) і умову (4.2) теореми 4.1. Внаслідок цього з теореми 4.1, застосовуючи її до функцій φ та φ^2, отримуємо формули (4.12) і (4.13). А з цих формул випливає формула (4.14). □

Теорема 4.2. (про математичне сподівання функції від неперервної невід'ємної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна неперервна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(x)$ — невід'ємна монотонна неперервна кусково-гладка функція. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \varphi(0) + \int\limits_0^\infty \varphi'(x)\big(1 - F(x)\big)\,dx. \tag{4.15}$$

Доведення. Якщо функція φ обмежена, то твердження теореми випливає з наслідку 4.1.1. Нехай φ необмежена. Тоді за умовами теореми (невід'ємність і монотонність) φ неспадна.

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = +\infty$. Тоді згідно з твердженням (4.1) теореми 4.1 права частина рівності (4.15) також дорівнює $+\infty$.

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] < +\infty$. Для доведення рівності (4.15) досить обгрунтувати умову (4.2) теореми 4.1. З невід'ємності і неспадання функції φ маємо:

$$0 \le \varphi(x)\big(1 - F(x)\big) = \varphi(x)\int\limits_x^\infty dF(t) \le \int\limits_x^\infty \varphi(t)\,dF(t), \quad x > 0. \tag{4.16}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \int\limits_0^\infty \varphi(t)\, dF(t) < +\infty,$$

то

$$\int\limits_x^\infty \varphi(t)\, dF(t) \to 0, \;\; x \to +\infty. \tag{4.17}$$

З (4.16), (4.17) та властивостей границі функції отримуємо:

$$\varphi(x)\big(1 - F(x)\big) \to 0, \;\; x \to +\infty.$$

$\square$

Наслідок 4.2.1. (про дисперсію функції від неперервної невід'ємної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{Z}$ — невід'ємна неперервна випадкова величина з функцією розподілу F. Нехай $\varphi(x)$ — невід'ємна монотонна неперервна кусково-гладка функція. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] = \varphi^2(0) + 2\int\limits_0^\infty \varphi(x)\varphi'(x)\big(1 - F(x)\big)dx. \tag{4.18}$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] < +\infty$. Тоді $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] < +\infty$. Зокрема,

$$\mathsf{Var}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] - \mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big]^2,$$

де $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big]$, $\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big]$ визначаються формулами (4.15) і (4.18).

Доведення. Якщо функція φ обмежена, то твердження наслідку випливає з наслідку 4.1.1. Нехай φ необмежена. Тоді за умовами теореми (невід'ємність і монотонність) φ неспадна.
Зауваження 1. Функція $\varphi^2(x)$ невід'ємна монотонна неперервна кусково-гладка.
Невід'ємність очевидна, а монотонність, неперервність та кускова гладкість $\varphi^2(x)$ випливають з невід'ємності, монотонності, неперервності та кускової гладкості $\varphi(x)$.

Із зауваження 1 і теореми 4.2 випливає перше твердження наслідку — рівність (4.18). Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] < +\infty$.
Зауваження 2. $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] < +\infty$, *до того ж справедлива формула (4.15).*
Зазначимо, що досить довести скінченність $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big]$, оскільки рівність (4.15) випливає з теореми 4.2. З неспадання та необмеженості функції $\varphi(x)$ отримуємо:

$$\exists x_0 \in \mathbf{R} \quad \forall x > x_0 \quad \varphi(x) > 1.$$

Тоді
$$\forall x > x_0 \quad 0 \le \varphi(x) < \varphi^2(x). \tag{4.19}$$
За критерієм Коші збіжності невластивого інтеграла
$$\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] = \int\limits_0^\infty \varphi^2(x)\,dF(x) < +\infty$$
маємо:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C(\varepsilon) > x_0 : \ \forall a > C(\varepsilon) \ \forall \delta > 0 \quad 0 \le \int\limits_a^{a+\delta} \varphi^2(x)\,dF(x) < \varepsilon.$$
Тоді з (4.19) отримуємо:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C(\varepsilon) > x_0 : \ \forall a > C(\varepsilon) \ \forall \delta > 0 \quad 0 \le \int\limits_a^{a+\delta} \varphi(x)\,dF(x) < \varepsilon.$$
Отже, знову застосовуючи критерій Коші збіжності невластивого інтеграла (у зворотньому напрямку), отримуємо збіжність невластивого інтеграла (скінченність математичного сподівання)
$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] = \int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dF(x) < +\infty.$$
□

Теорема 4.3. (про зображення актуарної теперішньої вартості неперервного ануїтету у формі поточних виплат) *Нехай $Y(x)$ позначає теперішню вартість неперервного ануїтету з кусково-неперервною інтенсивністю виплат b_t і неперервною функцією дисконтування v_t. Тоді*
$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \int\limits_0^\infty b_t v_t \, {}_t p_x \, dt.$$
Доведення. Визначимо функцію
$$\varphi(t) = \int\limits_0^t b_s v_s \, ds, \quad t \ge 0. \tag{4.20}$$

За умов теореми $\varphi(t)$ невід'ємна неспадна неперервна кусково-гладка функція. Згідно з означенням неперервного ануїтету

$$Y(x) = \varphi(T(x)).$$

Застосуємо теорему 4.2 до неперервної невід'ємної випадкової величини $T(x)$ та функції (4.20). Оскільки

$$_tp_x = 1 - F_{T(x)}(t), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(t) = b_t v_t, \quad t > 0,$$

то за теоремою 4.2

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \mathsf{E}\big[\varphi(T(x))\big] = \varphi(0) + \int\limits_0^\infty \varphi'(t)\, {}_tp_x\, dt = \int\limits_0^\infty b_t v_t\, {}_tp_x\, dt.$$

□

1.5 Функція розподілу неперервного ануїтету

Теорема 5.1. (перша теорема про функцію розподілу Y) *Нехай*

(i) $y_t = y_0 \quad \forall t \in [0, l]$;

(ii) функція y_t *строго зростає на* $[l, +\infty)$;

(iii) $y_t \to c, \; t \to +\infty$.

За теоремою про обернену функцію (до строго монотонної) існує обернена до y_t *функція* $\varphi(y)$,

$$\varphi : [y_l, c) \to [l, +\infty),$$

яка також строго зростає і неперервна. Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ F_T\big(\varphi(y)\big), & y_l \le y < c \\ 1, & y \ge c \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\varphi(y)}q_x\,, & y_l \le y < c \\ 1, & y \ge c \end{cases} \tag{5.1}$$

Доведення. За означенням випадкової величини Y та умовою теореми

$$Y \in [y_l, c).$$

Отже,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l, \\ 1, & y \ge c. \end{cases} \tag{5.2}$$

Нехай

$$y_l \le y < c.$$

Звідси, зокрема, отримуємо:

$$\varphi(y) \ge l. \tag{5.3}$$

Використовуючи умови теореми, означення випадкової величини Y, формулу повної ймовірності і (5.3), маємо:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \mathsf{Pr}\big\{Y \le y\big\} = \mathsf{Pr}\big\{y_l \le Y \le y\big\} = \\
= \mathsf{Pr}\big\{y_l \le Y \le y \mid T < l\big\}\mathsf{Pr}\big\{T < l\big\} + \\
+ \mathsf{Pr}\big\{y_l \le Y \le y \mid T \ge l\big\}\mathsf{Pr}\big\{T \ge l\big\} = \\
= \mathsf{Pr}\big\{T < l\big\} + \mathsf{Pr}\left\{y_l \le y_{_T} \le y \mid T \ge l\right\}\mathsf{Pr}\big\{T \ge l\big\} = \\
= \mathsf{Pr}\big\{T < l\big\} + \mathsf{Pr}\left\{\varphi(y_l) \le \varphi\big(y_{_T}\big) \le \varphi(y) \mid T \ge l\right\}\mathsf{Pr}\big\{T \ge l\big\} = \\
== \mathsf{Pr}\big\{T < l\big\} + \mathsf{Pr}\left\{l \le T \le \varphi(y) \mid T \ge l\right\}\mathsf{Pr}\big\{T \ge l\big\} = \\
== \mathsf{Pr}\big\{T < l\big\} + \mathsf{Pr}\left\{l \le T \le \varphi(y)\right\} = \mathsf{Pr}\left\{T \le \varphi(y)\right\} = F_T\big(\varphi(y)\big).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

З (5.2) і (5.4) отримуємо (5.1).

Зазначимо, що $F_Y(y)$ має ймовірнісну масу (стрибок) в точці $y = y_l$, який дорівнює ${}_lq_x$ (за умови, що ця ймовірність додатня):

$$F_Y(y_l) - \lim_{y \to y_{l\,-}} F_Y(y) = F_Y(y_l) = {}_lq_x\,.$$

В решті точок $F_Y(y)$ неперервна, оскільки $F_T \in \mathcal{C}\big(\mathbf{R}\big)$, $\varphi \in \mathcal{C}\big([0,c)\big)$ і в точці $y = c$ функція $F_Y(y)$ неперервна:

$$\lim_{y \to c_-} F_Y(y) = F_T(+\infty) = 1 = F_Y(c).$$

$\square$

Наслідок 5.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості неперервного ануїтету. За умов теореми 5.1:*

(i) *Нехай ${}_lq_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0, {}_lq_x\,]$ $\quad \xi_Y^p = y_l$.*

(ii) *Нехай ${}_tq_x$ строго зростає на $[\alpha, \beta] \subset [l, +\infty)$. Тоді:*

(а) $\xi_Y^{{}_\beta q_x} = y_\beta$;

(б) $\forall p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\, {}_\beta q_x\,)$ ξ_Y^p є розв'язком рівняння

$${}_{\varphi(y)}q_x = p, \quad y \in (y_\alpha, y_\beta), \tag{5.5}$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Y^p = y_{t(p)}, \quad t(p) = \Big(F_T\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p).$$

Зокрема, якщо ${}_tq_x$ *строго зростає на* $[l, +\infty)$, *то* $\forall p \in (0,1)$ ξ_Y^p *є розв'язком рівняння (5.5).*

Доведення. (i) Випливає з теореми про процентиль (перше твердження), оскільки

$$F_Y(y_{l\,-}) = 0, \quad F_Y(y_l) = {}_lq_x\,.$$

(ii) Зазначимо, що за побудовою відображення φ

$$\varphi(y_\alpha) = \alpha, \quad \varphi(y_\beta) = \beta. \tag{5.6}$$

З формули (5.1) маємо:

$$F_Y(y) = F_T \circ \varphi(y) = {}_{\varphi(y)}q_x\,, \quad y \in [y_l, c). \tag{5.7}$$

Оскільки F_T неперервна на $\mathbf{R}$ і строго зростає на $[\alpha, \beta]$, функція φ неперервна і строго зростає на $[y_l, c)$, то композиція цих функцій F_Y неперервна і строго зростає на $[y_\alpha, y_\beta]$, до того ж, враховуючи (5.6) і (5.7), маємо:

$$F_Y(y_\alpha) = {}_\alpha q_x\,, \quad F_Y(y_{\beta\,-}) = F_Y(y_\beta) = {}_\beta q_x\,.$$

Звідси й з теореми про процентиль (третє й четверте твердження) випливають обидва твердження пункту (ii) наслідку. Зокрема,

$$\xi_Y^p = \Big(F_Y\,\big|_{(y_\alpha, y_\beta)}\Big)^{-1}(p) = \Big(F_T \circ \varphi\,\big|_{(y_\alpha, y_\beta)}\Big)^{-1}(p) =$$
$$= \varphi^{-1} \circ \Big(F_T\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p) = \varphi^{-1}\big(t(p)\big) = y_{t(p)}, \quad p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\,{}_\beta q_x\,).$$

$\square$

Теорема 5.2. (друга теорема про функцію розподілу Y) *Нехай*

(i) $y_t = y_0 \quad \forall t \in [0, l]$;

(ii) функція y_t *строго зростає на* $[l, \tau]$;

(iii) $y_t = y_\tau \quad \forall t \geq \tau$.

За теоремою про обернену функцію (до строго монотонної) існує обернена до y_t *функція* $\varphi(y)$,

$$\varphi : [y_l, y_\tau] \to [l, \tau],$$

яка також строго зростає і неперервна. Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ F_T\big(\varphi(y)\big), & y_l \le y < y_\tau \\ 1, & y \ge y_\tau \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\varphi(y)}q_x\,, & y_l \le y < y_\tau \\ 1, & y \ge y_\tau \end{cases} \tag{5.8}$$

Вправа 1. *Довести теорему 5.2.*

Наслідок 5.2.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає p-ий процентиль теперішньої вартості неперервного ануїтету. За умов теореми 5.2:*

(i) *Нехай* ${}_lq_x > 0$. *Тоді* $\forall p \in (0, {}_lq_x\,]\quad \xi_Y^p = y_l$.

(ii) *Нехай* ${}_\tau q_x < 1$. *Тоді* $\forall p \in ({}_\tau q_x\,, 1)\quad \xi_Y^p = y_\tau$;

(iii) *Нехай* ${}_tq_x$ *строго зростає на* $[\alpha, \beta] \subset [l, \tau]$. *Тоді:*

  (а) $\xi_Y^{{}_\beta q_x} = y_\beta$;

  (б) $\forall p \in ({}_\alpha q_x\,, {}_\beta q_x\,)$ ξ_Y^p *є розв'язком рівняння*

$$ {}_{p(y)}q_x = p, \quad y \in \big(y_\alpha, y_\beta\big),$$

  який можна подати у вигляді:

$$\xi_Y^p = y_{t(p)}, \quad t(p) = \Big(F_T\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 5.2.1.*

1.6 Пожиттєвий ануїтет

1.6.1 Означення

Неперервний пожиттєвий ануїтет виплачується застрахованій особі (x) допоки вона залишається живою. Інтенсивність виплат, функція дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_t = 1, \quad t \ge 0;$$
$$v_t = v^t, \quad t \ge 0;$$

$$y_t = \int\limits_0^t v^s\,ds = \frac{1-v^t}{\delta} = \bar{a}_{\overline{t|}}, \quad t \ge 0.$$

Отже, *теперішня вартість неперервного пожиттєвого ануїтету* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \frac{1-v^T}{\delta} = \bar{a}_{\overline{T|}}, \tag{6.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервного пожиттєвого ануїтету позначається $\bar{a}_x$ і визначається формулою:

$$\bar{a}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \int\limits_0^\infty \bar{a}_{\overline{t|}}\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt. \tag{6.2}$$

Зауваження 1. З (6.2) отримуємо, що актуарна теперішня вартість неперервного пожиттєвого ануїтету $\bar{a}_x$ задовільняє нерівності:

$$0 < \bar{a}_x < \frac{1}{\delta}.$$

1.6.2 Властивості

Теорема 6.1. (про функцію розподілу Y)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_T\big(-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)\big), & 0 \le y < \frac{1}{\delta} \\ 1, & y \ge \frac{1}{\delta} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x\,, & 0 \le y < \frac{1}{\delta} \\ 1, & y \ge \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

Доведення. Випливає з першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості Y неперервного ануїтету. Справді, функція теперішньої вартості виплат y_t задовільняє умови:

(i) y_t строго зростає на $[0, +\infty)$;

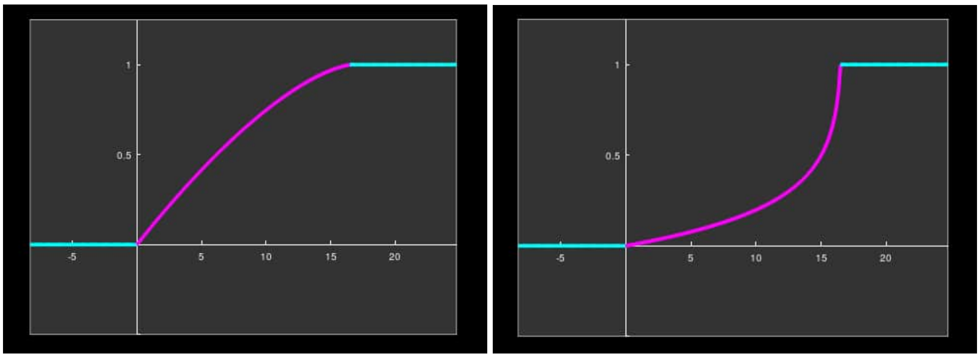
(ii) $y_t \to \dfrac{1}{\delta}, \ \ t \to +\infty$;

(iii) обернена до y_t функція $\varphi(y)$ визначається формулою:

$$\varphi(y) = -\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y), \quad y \in \left(0, \frac{1}{\delta}\right). \tag{6.3}$$

$\square$

На малюнку 1.1 (стор.28) зображено приклади графіків функцій розподілу.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.1: Функція розподілу F_Y

Наслідок 6.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ${}_tq_x$ строго зростає на $[\alpha, \beta] \subset [0, +\infty)$, ξ_Y^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості Y неперервного пожиттєвого ануїтету. Тоді:*

(i) $\xi_Y^{{}_\beta q_x} = \dfrac{1-e^{-\delta\beta}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{\beta|}}$;

(ii) $\forall p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\,{}_\beta q_x\,)$ ξ_Y^p *є розв'язком рівняння*

$${}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = p, \tag{6.4}$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Y^p = \frac{1-e^{-\delta t(p)}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{t(p)|}}, \quad t(p) = \left(F_T\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p).$$

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості Y неперервного ануїтету, теореми 6.1 і формул для y_t і (6.3). $\square$

Теорема 6.2. (про властивості неперервного пожиттєвого ануїтету)

(i) *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету у формі поточних виплат*

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t \, {}_tp_x \; dt = \int_0^\infty {}_tE_x \; dt; \tag{6.5}$$

(ii) *зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування та пожиттєвого ануїтету*

$$1 = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x; \tag{6.6}$$

(iii) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету*

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\,\overline{1}|} + v p_x \bar{a}_{x+1} = \bar{a}_{x:\,\overline{1}|} + E_x \bar{a}_{x+1};$$

(iv) *диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість пожиттєвого ануїтету*

$$\frac{d}{dx}\, \bar{a}_x = \big(\delta + \mu(x)\big) \bar{a}_x - 1. \tag{6.7}$$

Доведення. (i) Випливає з загальної теореми про зображення актуарної теперішньої вартості неперервного ануїтету у формі поточних виплат.

(ii) Оскільки теперішня вартість Z пожиттєвого страхування визначається формулою:

$$Z = v^T,$$

то з формули (6.1) маємо:

$$Y = \frac{1 - v^T}{\delta} = \frac{1 - Z}{\delta}. \tag{6.8}$$

Звідси отримуємо твердження (ii) теореми:

$$1 = \delta Y + Z \implies 1 = \delta \mathsf{E}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Z\big] = \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x.$$

(iii) Випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість неперервного ануїтету.

(iv) Для виведення формули (6.7) скористаємося диференціальним рівнянням на $\bar{A}_x$:

$$\frac{d}{dx}\, \bar{A}_x = \big(\delta + \mu(x)\big) \bar{A}_x - \mu(x)$$

і формулою зв'язку (6.6). Отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\, (1 - \delta \bar{a}_x) = \big(\delta + \mu(x)\big)(1 - \delta \bar{a}_x) - \mu(x).$$

Розкривши дужки і поділивши обидві частини рівності на $(-\delta)$, приходимо до формули (6.7). $\square$

Теорема 6.3. (про дисперсію неперервного пожиттєвого ануїтету)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\big) - \bar{a}_x^2, \tag{6.9}$$

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2 + (1-\bar{A}_x)^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\big), \tag{6.10}$$

де ${}^2\bar{a}_x$ *позначає актуарну теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з інтенсивністю відсоткової ставки* 2δ.

Доведення. *1-й спосіб*: Використовуючи (6.8), отримуємо першу формулу (6.9):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{Var}\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] = \frac{\mathsf{Var}\big[Z\big]}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2}. \tag{6.11}$$

За формулою (6.6) маємо:

$$1 = \delta\bar{a}_x + \bar{A}_x, \quad 1 = 2\delta\,{}^2\bar{a}_x + {}^2\bar{A}_x.$$

Звідси й з (6.11) отримуємо другу формулу (6.9):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{(1-2\delta\,{}^2\bar{a}_x) - (1-\delta\bar{a}_x)^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\big) - \bar{a}_x^2.$$

З рівностей

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \mathsf{Var}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \mathsf{Var}\big[Y\big] + \bar{a}_x^2 = \mathsf{Var}\big[Y\big] + \left(\frac{1-\bar{A}_x}{\delta}\right)^2$$

отримуємо формули (6.10).

2-й спосіб: Згідно з означенням $Y(x) = \varphi\big(T(x)\big)$, де

$$\varphi(t) = \bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1-v^t}{\delta}.$$

Оскільки функція $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ невід'ємна неперервна кусково-гладка й обмежена, то за теоремою про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної неперервної випадкової величини та формулою (6.5) маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y^2(x)\big] = \mathsf{E}\big[\varphi^2\big(T(x)\big)\big] = \varphi^2(0) + 2\int\limits_0^\infty \varphi'(t)\varphi(t)\,{}_tp_x\,dt =$$

$$= \frac{2}{\delta}\int\limits_0^\infty (v^t - v^{2t})\,{}_tp_x\; dt = \frac{2}{\delta}\left[\int\limits_0^\infty v^t\,{}_tp_x\; dt - \int\limits_0^\infty v^{2t}\,{}_tp_x\; dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\big).$$

Звідси, зокрема, отримуємо другу формулу (6.9):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{E}\big[Y^2\big] - \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\big) - \bar{a}_x^2. \tag{6.12}$$

За формулою (6.6) маємо:

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta}, \quad {}^2\bar{a}_x = \frac{1-{}^2\bar{A}_x}{2\delta}.$$

Звідси й з (6.12) отримуємо:

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\left(\frac{1-\bar{A}_x}{\delta} - \frac{1-{}^2\bar{A}_x}{2\delta}\right) - \left(\frac{1-\bar{A}_x}{\delta}\right)^2 = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2};$$

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} + \left(\frac{1-\bar{A}_x}{\delta}\right)^2 = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2 + (1-\bar{A}_x)^2}{\delta^2}.$$

$\square$

1.6.3 Приклади

Теорема 6.4. (про неперервний пожиттєвий ануїтет для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має пожиттєвий ануїтет,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \ge 0. \tag{6.13}$$

Тоді:

(i) $\bar{a}_x = \dfrac{1}{\mu+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{\mu}{(\mu+2\delta)(\mu+\delta)^2}$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1-(1-\delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}, & 0 \le y < \frac{1}{\delta} \\ 1, & y \ge \frac{1}{\delta} \end{cases}$

(iv) $\mathsf{Pr}\big\{\bar{a}_{\overline{Y}|} > \bar{a}_x\big\} = \left(\dfrac{\mu}{\mu+\delta}\right)^{\frac{\mu}{\delta}}$.

(v) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \frac{1-(1-p)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \frac{1-2^{-\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}.$$

Доведення. (i) Оскільки за умови (6.13)

$$_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \ge 0, \tag{6.14}$$

то використовуючи формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету у формі поточних виплат, отримуємо:

$$\bar{a}_x = \int\limits_0^\infty v^t \, _tp_x \, dt = \int\limits_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \, dt = -\frac{e^{-(\mu+\delta)t}}{\mu+\delta}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\mu+\delta}.$$

(ii) За теоремою про дисперсію неперервного пожиттєвого ануїтету і пунктом (i) теореми

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x\big) - \bar{a}_x^2 = \frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\mu+\delta} - \frac{1}{\mu+2\delta}\right) - \left(\frac{1}{\mu+\delta}\right)^2 =$$

$$= \frac{2}{(\mu+\delta)(\mu+2\delta)} - \left(\frac{1}{\mu+\delta}\right)^2 = \frac{\mu}{(\mu+2\delta)(\mu+\delta)^2}.$$

(iii) Нехай $0 \le y < \frac{1}{\delta}$. За формулою (6.14)

$$_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = 1 - \, _{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}p_x = 1-(1-\delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}.$$

Звідси й з теореми про функцію розподілу Y випливає твердження пункту (iii) теореми.

(iv) Оскільки

$$0 < \bar{a}_x = \frac{1}{\mu+\delta} < \frac{1}{\delta},$$

то використовуючи пункт (iii) теореми, отримуємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{\bar{a}_{\overline{T|}} > \bar{a}_x\big\} = (1-\delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}\Big|_{y=\bar{a}_x} = \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^{\frac{\mu}{\delta}}.$$

(v) Оскільки
$$ {}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0, $$
строго зростає на $[0, +\infty)$, то за наслідком про процентиль теореми про функцію розподілу Y отримуємо, що $\forall p \in (0,1)$ ξ_Y^p є розв'язком рівняння:
$$ F_Y(y) = 1 - (1 - \delta y)^{\frac{\mu}{\delta}} = p \implies \xi_Y^p = \frac{1 - (1-p)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}. $$
□

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04$, $t \geq 0$;

(iii) має неперервний пожиттєвий ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$;

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму (навантаження надійності), яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 для страхування однієї особи.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Y має вигляд:
$$ Y = c\bar{a}_{\overline{T}|}. $$
Отже,
$$ \mathsf{E}[Y] = c\bar{a}_x, \quad \mathsf{E}[Y^2] = c^2 \frac{2}{\delta}(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x). $$
З умови (ii) отримуємо:
$$ \bar{a}_x = \frac{1}{\mu + \delta} = \frac{1}{0,1} = 10; \tag{6.15} $$
$$ {}^2\bar{a}_x = \frac{1}{\mu + 2\delta} = \frac{1}{0,16} = 6,25. \tag{6.16} $$
Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне

навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Y^2\big]}{\mathsf{E}\big[Y\big]^2} - 1} =$$

$$= 0,1645 \sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \frac{{}^2\bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}\right) - 1}.$$

$$\xi^{0,95}_S = \mathsf{E}\big[S\big](1+\theta) = N\mathsf{E}\big[Y\big](1+\theta) = Nc\bar{a}_x(1+\theta) =$$

$$= 1000\bar{a}_x\left(1 + 0,1645\sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \frac{{}^2\bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}\right) - 1}\right).$$

Відносне навантаження надійності θ_1 знаходимо з формули:

$$\theta_1 = \frac{\xi^{0,95}_Y}{c\bar{a}_x} - 1 = \frac{1 - 20^{-\frac{\delta}{\mu}}}{\delta\bar{a}_x} - 1.$$

Звідси, враховуючи (6.15) і (6.16), отримуємо:

$$100\% \cdot \theta = 8,23\%;$$
$$\xi^{0,95}_S = 10822,50;$$
$$100\% \cdot \theta_1 = 64,80\%.$$

□

Теорема 6.5. (про неперервний пожиттєвий ануїтет для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має пожиттєвий ануїтет, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \tag{6.17}$$

Тоді:

(i) $\bar{a}_x = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\bar{a}_{\overline{c}|}}{c}\right) = \frac{e^{-\delta c} - (1-\delta c)}{\delta^2 c}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\bar{a}_{\overline{2c}|}}{2c} - \left(1 - \frac{\bar{a}_{\overline{c}|}}{c}\right)^2\right] = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{1-e^{-2\delta c}}{2\delta c} - \left(\frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right)^2\right]$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ -\dfrac{1}{\delta c}\ln(1-\delta y), & 0 \le y < \bar{a}_{\overline{c}|} \\ 1, & y \ge \bar{a}_{\overline{c}|} \end{cases}$

(iv) $\mathsf{Pr}\{Y > \bar{a}_x\} = 1 + \dfrac{1}{\delta c}\ln\left(\dfrac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right)$;

(v) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \frac{1-e^{-\delta cp}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{cp}|}.$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \frac{1-e^{-\delta c/2}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{c/2}|}.$$

Доведення. Згідно з (6.17)

$$_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0,c) \\ 1, & t \ge c \end{cases} \tag{6.18}$$

(i) Використовуючи (6.17) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування, отримуємо:

$$\bar{A}_x = \int_0^c e^{-\delta t}\frac{1}{c}\,dt = \frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c} = \frac{\bar{a}_{\overline{c}|}}{c}.$$

Звідси й за формулою про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування та пожиттєвого ануїтету

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} = \frac{1}{\delta}\left(1-\frac{\bar{a}_{\overline{c}|}}{c}\right) = \frac{1}{\delta}\left(1-\frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right) = \frac{e^{-\delta c}-(1-\delta c)}{\delta^2 c}.$$

(ii) Оскільки

$$^2\bar{A}_x = \frac{1-e^{-2\delta c}}{2\delta c} = \frac{\bar{a}_{\overline{2c}|}}{2c},$$

то за теоремою про дисперсію неперервного пожиттєвого ануїтету маємо:

$$\mathsf{Var}[Y] = \frac{^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\bar{a}_{\overline{2c}|}}{2c} - \left(1-\frac{\bar{a}_{\overline{c}|}}{c}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{1-e^{-2\delta c}}{2\delta c} - \left(\frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right)^2\right].$$

(iii) Нехай $0 \le y < \frac{1}{\delta}$. Оскільки

$$-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y) < c \iff y < \frac{1-e^{-\delta c}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{c}|},$$

то з формули (6.17) отримуємо:

$$_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = \begin{cases} -\frac{1}{\delta c}\ln(1-\delta y), & 0 \le y < \bar{a}_{\overline{c}|} \\ 1, & y \ge \bar{a}_{\overline{c}|} \end{cases}$$

Звідси й з теореми про функцію розподілу Y випливає твердження пункту (iii) теореми.

(iv) Покажемо, що

$$\bar{a}_x < \bar{a}_{\overline{c}|}. \tag{6.19}$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = 1 - e^{-x}(1+x), \quad x \ge 0.$$

Оскільки

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(x) = xe^{-x} > 0 \quad \forall x > 0,$$

то

$$\varphi(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Звідси отримуємо (6.19):

$$\bar{a}_x = \frac{e^{-\delta c} - (1-\delta c)}{\delta^2 c} < \frac{1-e^{-\delta c}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{c}|},$$

оскільки ця нерівність еквівалентна такій:

$$0 < 1 - e^{-\delta c}(1+\delta c) = \varphi(\delta c).$$

Використовуючи (6.19) і формулу (iii), маємо:

$$\mathsf{Pr}\{Y > \bar{a}_x\} = 1 + \frac{1}{\delta c}\ln(1-\delta\bar{a}_x) = 1 + \frac{1}{\delta c}\ln\left(\frac{1-e^{-\delta c}}{\delta c}\right).$$

(v) Згідно з (6.18) $_tq_x$ строго зростає на $[0,c]$, до того ж

$$(\,_0q_x\,,\,_cq_x\,) = (0,1).$$

Тоді за наслідком про процентиль теореми про функцію розподілу Y отримуємо, що $\forall p \in (0,1)$ ξ_Y^p є розв'язком рівняння:

$$F_Y(y) = {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = -\frac{1}{\delta c}\ln(1-\delta y) = p \implies \xi_Y^p = \frac{1-e^{-\delta cp}}{\delta}.$$

□

Приклад 2. Розглядається N незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) має неперервний пожиттєвий ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$;

(iv) виплати здійснюються зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Y має вигляд:

$$Y = c\bar{a}_{\overline{T|}}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}[Y] = c\bar{a}_x, \quad \mathsf{E}[Y^2] = c^2\frac{2}{\delta}(\bar{a}_x - {}^2\bar{a}_x).$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{a}_x = \frac{e^{-80\delta} - (1-80\delta)}{80\delta^2} = \frac{e^{-4,8} - 3,8}{0,288}; \tag{6.20}$$

$$^2\bar{a}_x = \frac{e^{-160\delta} - (1-160\delta)}{320\delta^2} = \frac{e^{-9,6} - 8,6}{1,152}. \tag{6.21}$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)} \frac{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}{\mathsf{E}[S]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\mathsf{E}[Y^2]}{\mathsf{E}[Y]^2} - 1} =$$

$$= \frac{1,645}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \frac{{}^2\bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}\right) - 1}.$$

Отже, з нерівності $\theta \leq 0,1$ отримуємо:

$$N \geq (16,45)^2 \left[\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_x} - \frac{{}^2\bar{a}_x}{\bar{a}_x^2}\right) - 1\right].$$

Звідси, враховуючи (6.20) і (6.21), маємо:

$$\theta = 0,1 \implies N = 27;$$
$$N = 100 \implies 100\% \cdot \theta = 5,14\%.$$

$\square$

1.7 Строковий ануїтет

1.7.1 Означення

Неперервний (строковий) n-річний ануїтет виплачується застрахованій особі (x) протягом n років, допоки вона залишається живою. Інтенсивність виплат, функція дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} 1, & t < n \\ 0, & t \geq n \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \geq 0;$$

$$y_t = \begin{cases} \int\limits_0^t v^s\,ds, & t < n \\ \int\limits_0^n v^s\,ds, & t \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^t}{\delta}, & t < n \\ \dfrac{1 - v^n}{\delta}, & t \geq n \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{t|}}, & t < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}}, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість неперервного (строкового) n-річного ануїтету* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} \dfrac{1-v^T}{\delta}, & T < n \\ \dfrac{1-v^n}{\delta}, & T \geq n \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geq n \end{cases} \tag{7.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервного (строкового) n-річного ануїтету позначається $\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \int\limits_0^n \bar{a}_{\overline{t}|}\ {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt + v^n\ {}_np_x\,.$$

Зауваження 1. З (7.1) отримуємо, що актуарна теперішня вартість неперервного (строкового) n-річного ануїтету $\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}$ задовільняє нерівності:

$$0 < \bar{a}_{x:\,\overline{n}|} \leq \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_nq_x\ + v^n\ {}_np_x\,.$$

1.7.2 Властивості

Теорема 7.1. (про функцію розподілу Y)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_T\big(-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)\big), & 0 \leq y < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ 1, & y \geq \bar{a}_{\overline{n}|} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x\,, & 0 \leq y < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ 1, & y \geq \bar{a}_{\overline{n}|} \end{cases}$$

Доведення. Випливає з другої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості Y неперервного ануїтету. Справді, функція теперішньої вартості виплат y_t задовільняє умови:

(i) y_t строго зростає на $[0, n]$;

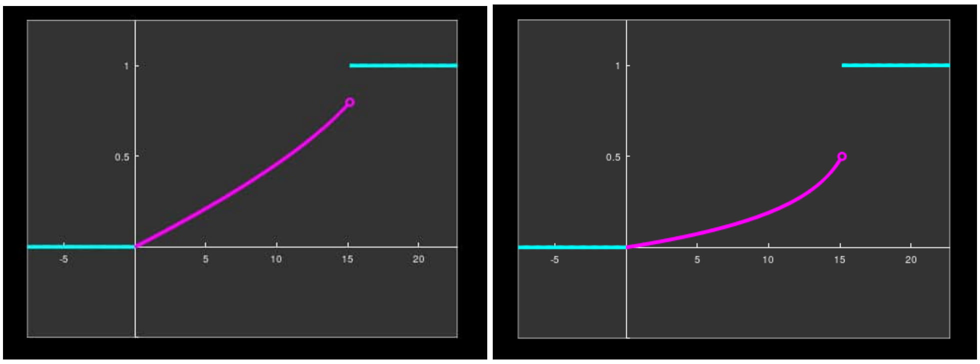
(ii) $y_t = y_n,\ \ y \geq n$;

(iii) обернена до y_t функція $\varphi(y)$ визначається формулою:

$$\varphi(y) = -\frac{1}{\delta}\ \ln(1-\delta y), \quad y \in \Big[0, \frac{1}{\delta}\Big). \tag{7.2}$$

$\square$

На малюнку 1.2 (стор.40) зображено приклади графіків функцій розподілу.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.2: Функція розподілу F_Y

Наслідок 7.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає* p*-ий процентиль теперішньої вартості неперервного* n*-річного ануїтету,* $p \in (0,1)$.

(i) *Нехай* ${}_nq_x < 1$. *Тоді* $\forall p \in (\,{}_nq_x\,, 1) \quad \xi_Y^p = \bar{a}_{\overline{n}|}$;

(ii) *Нехай* ${}_tq_x$ *строго зростає на* $[\alpha, \beta] \subset [0, n]$. *Тоді:*

(а) $\xi_Y^{\,{}_\beta q_x} = \bar{a}_{\overline{\beta}|}$;

(б) $\forall p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\, {}_\beta q_x\,)$ ξ_Y^p *є розв'язком рівняння*

$$ {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = p, \quad y \in \left(\bar{a}_{\overline{\alpha}|}, \bar{a}_{\overline{\beta}|}\right), $$

який можна подати у вигляді:

$$ \xi_Y^p = \frac{1 - e^{-\delta t(p)}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{t(p)}|}, \quad t(p) = \left(F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p). $$

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості Y неперервного ануїтету, теореми 7.1 і формул для y_t і (7.2). $\square$

Теорема 7.2. (про властивості неперервного n-річного ануїтету)

(i) *актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету у формі поточних виплат*

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt = \int\limits_0^n {}_tE_x\,dt; \tag{7.3}$$

(ii) *зв'язок між актуарними теперішніми вартостями мішаного n-річного страхування та n-річного ануїтету*

$$1 = \delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\,\overline{n}|}; \tag{7.4}$$

(iii) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості n-річного ануїтету*

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \bar{a}_{x:\,\overline{1}|} + vp_x\bar{a}_{x+1:\,\overline{n-1}|} = \bar{a}_{x:\,\overline{1}|} + E_x\bar{a}_{x+1:\,\overline{n-1}|}.$$

(iv) *диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість n-річного ануїтету*

$$\frac{d}{dx}\,\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \big(\delta + \mu(x)\big)\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - (1 - {}_nE_x\,). \tag{7.5}$$

Доведення. (i) Випливає з загальної теореми про зображення актуарної теперішньої вартості неперервного ануїтету у формі поточних виплат.

(ii) Оскільки теперішня вартість Z мішаного n-річного страхування життя визначається формулою:

$$Z = \begin{cases} v^T, & T < n \\ v^n, & T \geq n \end{cases}$$

то використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$Y = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\begin{cases} v^T, & T < n \\ v^n, & T \geq n \end{cases} = \frac{1-Z}{\delta}. \tag{7.6}$$

Звідси отримуємо твердження (ii) теореми:

$$1 = \delta Y + Z \implies 1 = \delta\mathsf{E}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Z\big] = \delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\,\overline{n}|}.$$

(iii) Випливає з загальної теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість неперервного ануїтету.

(iv) Для виведення формули (7.5) скористаємося диференціальним рівнянням на $\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}$:

$$\frac{d}{dx}\,\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \big(\delta + \mu(x)\big)\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \mu(x) - \delta\,{}_nE_x$$

і формулою зв'язку (7.4). Отримаємо:

$$\frac{d}{dx}\,(1-\delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}) = \big(\delta+\mu(x)\big)(1-\delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}) - \mu(x) - \delta\,{}_nE_x\,.$$

Розкриваючи дужки і ділячи обидві частини цієї рівності на $-\delta$, приходимо до формули (7.5). □

Теорема 7.3. (про дисперсію неперервного n-річного ануїтету)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\,\overline{n}|}}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big) - \bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}; \tag{7.7}$$

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\,\overline{n}|} + (1-\bar{A}_{x:\,\overline{n}|})^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big), \tag{7.8}$$

де ${}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}$ *позначає актуарну теперішню вартість неперервного n-річного ануїтету з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.*

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: З формул (7.4) і (7.6) отримуємо (7.7):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{Var}\left[\frac{1-Z}{\delta}\right] = \frac{\mathsf{Var}\big[Z\big]}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\,\overline{n}|}}{\delta^2} =$$
$$= \frac{1-2\delta\,{}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - (1-\delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|})^2}{\delta^2} = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big) - \bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}.$$

Формули (7.8) випливають з формул (7.7) і рівностей:

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \mathsf{Var}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \mathsf{Var}\big[Y\big] + \bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{Var}\big[Y\big] + \left(\frac{1-\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta}\right)^2.$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Згідно з означенням $Y(x) = \varphi\big(T(x)\big)$, де

$$\varphi(t) = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{t}|}, & t<n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & t\ge n \end{cases}$$

Оскільки функція $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ невід'ємна неперервна кусково-гладка й обмежена, то за теоремою про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної неперервної випадкової величини та формулою (7.3) маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y^2(x)\big] = \mathsf{E}\big[\varphi^2\big(T(x)\big)\big] = \varphi^2(0) + 2\int\limits_0^\infty \varphi'(t)\varphi(t)\,{}_tp_x\,dt =$$

$$= \frac{2}{\delta}\int_0^n (v^t - v^{2t})\,{}_tp_x\,dt = \frac{2}{\delta}\left[\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt - \int_0^n v^{2t}\,{}_tp_x\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big).$$

Звідси, зокрема, випливає друга формула (7.7):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{E}\big[Y^2\big] - \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big) - \bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}. \tag{7.9}$$

За формулою (7.4) маємо:

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta}, \qquad {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - {}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{2\delta}.$$

Звідси й з (7.9) отримуємо:

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\left(\frac{1 - \bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta} - \frac{1 - {}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{2\delta}\right) - \left(\frac{1 - \bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta}\right)^2 =$$

$$= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\,\overline{n}|}}{\delta^2};$$

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\,\overline{n}|}}{\delta^2} + \left(\frac{1 - \bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta}\right)^2 =$$

$$= \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - \bar{A}^2_{x:\,\overline{n}|} + (1 - \bar{A}_{x:\,\overline{n}|})^2}{\delta^2}.$$

□

1.7.3 Приклади

Теорема 7.4. (про неперервний n-річний ануїтет для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має* n*-річний ануїтет,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{7.10}$$

Тоді:

(i) $\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{1 - e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu + \delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{2}{\delta}\left(\dfrac{1-e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu+\delta} - \dfrac{1-e^{-n(\mu+2\delta)}}{\mu+2\delta}\right) - \left(\dfrac{1-e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu+\delta}\right)^2$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1-(1-\delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}, & 0 \le y < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ 1, & y \ge \bar{a}_{\overline{n}|} \end{cases}$

(iv) $\mathsf{Pr}\big\{Y > \bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big\} = \left[\dfrac{\mu+\delta e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu+\delta}\right]^{\frac{\mu}{\delta}}$.

(v) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \dfrac{1-(1-p)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}, & p \in \big(0, 1-e^{-\mu n}\big) \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & p \in \big[1-e^{-\mu n}, 1\big) \end{cases} \tag{7.11}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \begin{cases} \dfrac{1-2^{-\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}, & \mu n > \ln 2 \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & \mu n \le \ln 2 \end{cases}$$

Доведення. (i) З умови (7.10) маємо:

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad t \ge 0. \tag{7.12}$$

Звідси й з формули для актуарної теперішньої вартості n-річного ануїтету у формі поточних виплат отримуємо:

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n e^{-\delta t}e^{-\mu t}\,dt = -\frac{e^{-(\mu+\delta)t}}{\mu+\delta}\Big|_0^n = \frac{1-e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu+\delta}.$$

(ii) Випливає з теореми про дисперсію n-річного ануїтету, пункту (i) теореми і рівності

$$ {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1-e^{-n(\mu+2\delta)}}{\mu+2\delta}.$$

(iii) Нехай $0 \le y < \bar{a}_{\overline{n}|}$. За формулою (7.12)

$$ {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = 1 - {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}p_x = 1-(1-\delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}.$$

Звідси й з теореми про функцію розподілу Y випливає твердження пункту (iii) теореми.

(iv) Для подальшого нам знадобляться нерівності

$$0 < \bar{a}_{x:\,\overline{n|}} < \bar{a}_{\overline{n|}}. \tag{7.13}$$

Ці нерівності можна переписати так:

$$0 < \frac{1 - e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu + \delta} < \frac{1 - e^{-n\delta}}{\delta}. \tag{7.14}$$

Ліва нерівність очевидна. Для обгрунтування правої нерівності (7.14) розглянемо функцію

$$g(t) = e^{-nt}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7.15}$$

Оскільки ця функція строго опукла вниз, то

$$0 < \delta < \mu + \delta \implies \frac{g(\mu+\delta) - g(0)}{(\mu+\delta) - 0} > \frac{g(\delta) - g(0)}{\delta - 0}.$$

Остання нерівність для функції (7.15) — це права нерівність (7.14). Використовуючи тепер (7.13) і пункт (iii) теореми, отримуємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{Y > \bar{a}_{x:\,\overline{n|}}\big\} = 1 - \mathsf{Pr}\big\{Y \le \bar{a}_{x:\,\overline{n|}}\big\} = (1 - \delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}\Big|_{y=\bar{a}_{x:\,\overline{n|}}} =$$

$$= \left[1 - \frac{\delta(1 - e^{-n(\mu+\delta)})}{\mu+\delta}\right]^{\frac{\mu}{\delta}} = \left[\frac{\mu + \delta e^{-n(\mu+\delta)}}{\mu+\delta}\right]^{\frac{\mu}{\delta}}.$$

(v) Згідно з (7.12)

$${}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

Ця функція має такі властивості:

(а) ${}_nq_x = 1 - e^{-\mu n} < 1$;

(б) ${}_tq_x$ строго зростає на $[0, n]$.

Отже, з наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y отримуємо:

(1) $\forall p \in (\,{}_nq_x\,, 1) \quad \xi_Y^p = \bar{a}_{\overline{n|}}$;

(2) $\xi_Y^{\,{}_nq_x} = \bar{a}_{\overline{n|}}$;

(3) $\forall p \in (\,{}_0q_x\,,\,{}_nq_x\,) = (0,\,{}_nq_x\,) \quad \xi_Y^p$ є розв'язком рівняння

$${}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = 1 - (1 - \delta y)^{\frac{\mu}{\delta}} = p \implies \xi_Y^p = \frac{1 - (1-p)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}.$$

Звідси отримуємо (7.11). □

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \;\; t \geq 0$;

(iii) має неперервний n-річний ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$, де $n = 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 79$;

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 для страхування однієї особи.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Y має вигляд:

$$Y = c\begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geq n \end{cases}$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = c\bar{a}_{x:\overline{n}|}, \quad \mathsf{E}\big[Y^2\big] = c^2\frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}\big).$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-e^{-(\mu+\delta)n}}{\mu+\delta} = \frac{1-e^{-0,1n}}{0,1}; \tag{7.16}$$

$${}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1-e^{-(\mu+2\delta)n}}{\mu+2\delta} = \frac{1-e^{-1,6n}}{0,16}. \tag{7.17}$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Згідно з умовою прикладу потрібно обчислити процентиль $\xi_S^{0,95}$ та відносне навантаження надійності θ. Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Y^2\big]}{\mathsf{E}\big[Y\big]^2} - 1} =$$

$$= 0,1645\sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - \frac{{}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}}{\bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}}\right) - 1}.$$

$$\xi_S^{0,95} = \mathsf{E}\big[S\big](1+\theta) = N\mathsf{E}\big[Y\big](1+\theta) = Nc\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}(1+\theta) =$$
$$= 1000\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\left(1 + 0,1645\sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - \frac{{}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}}{\bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}}\right) - 1}\right).$$

Відносне навантаження надійності θ_1 знаходимо з формули:

$$\theta_1 = \frac{\xi_Y^{0,95}}{c\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - 1 = \begin{cases} \dfrac{1 - 20^{-\frac{\delta}{\mu}}}{\delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - 1, & n > \frac{1}{\mu}\ln 20 \\ \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - 1, & n \le \frac{1}{\mu}\ln 20 \end{cases}$$

Звідси, враховуючи (7.16) і (7.17), отримуємо:

n	$c\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}$	ξ	θ	θ_1
5	39.35	4095.15	4.08%	9.78%
7	50.34	5272.75	4.74%	13.54%
10	63.21	6669.30	5.51%	18.96%
15	77.69	8266.84	6.41%	27.31%
20	86.47	9253.65	7.02%	34.70%
30	95.02	10234.63	7.71%	46.41%
40	98.17	10603.53	8.01%	54.37%
50	99.33	10741.30	8.14%	59.44%
60	99.75	10792.48	8.19%	62.52%
79	99.96	10817.99	8.22%	64.86%

□

Теорема 7.5. (про неперервний n-річний ануїтет для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи (x), що має n-річний ануїтет ($n < c$), випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \tag{7.18}$$

Тоді:

(i) $\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)-(1-\delta c)}{\delta^2 c}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{1-e^{-2\delta n}\big(1-2\delta(c-n)\big)}{2\delta^3 c} - \left(\dfrac{1-e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)}{\delta^2 c}\right)^2$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ -\dfrac{1}{\delta c}\ln(1-\delta y), & 0\le y<\bar{a}_{\overline{n}|} \\ 1, & y\ge \bar{a}_{\overline{n}|} \end{cases}$

(iv) $\mathsf{Pr}\big\{Y > \bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big\} = 1+\dfrac{1}{\delta c}\ln\left(\dfrac{1-e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)}{\delta c}\right)$;

(v) *Нехай $p\in(0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{cp}|}, & p\in\left(0,\dfrac{n}{c}\right) \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & p\in\left[\dfrac{n}{c},1\right) \end{cases} \tag{7.19}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{c/2}|}, & n\ge 0,5c \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & n<0,5c \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (7.18)

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t\in[0,c) \\ 1, & t\ge c \end{cases} \tag{7.20}$$

(i) Використовуючи (7.18) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості n-річного страхування життя, отримуємо:

$$\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \int\limits_0^n e^{-\delta t}\frac{1}{c}\,dt + v^n\,{}_np_x = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta c} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right) =$$
$$= \frac{1-e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)}{\delta c}.$$

Звідси й за формулою про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями n-річного страхування життя та n-річного ануїтету

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1-\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}}{\delta} = \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{1-e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)}{\delta c}\right) =$$
$$= \frac{e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)-(1-\delta c)}{\delta^2 c}.$$

(ii) Оскільки

$${}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1-e^{-2\delta n}\big(1-2\delta(c-n)\big)}{2\delta c},$$

то за теоремою про дисперсію неперервного n-річного ануїтету маємо:

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2\bar{A}_{x:\,\overline{n}|}-(\bar{A}_{x:\,\overline{n}|})^2}{\delta^2} =$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{1-e^{-2\delta n}\big(1-2\delta(c-n)\big)}{2\delta c} - \left(\frac{1-e^{-\delta n}\big(1-\delta(c-n)\big)}{\delta c}\right)^2\right].$$

(iii) Оскільки

$$0 \le y < \bar{a}_{\overline{n}|} \iff 0 \le -\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y) < n,$$

то з формули (7.20), враховуючи нерівність $n < c$, отримуємо:

$${}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = -\frac{1}{\delta c}\ln(1-\delta y), \quad 0 \le y < \bar{a}_{\overline{n}|}.$$

Звідси й з теореми про функцію розподілу Y випливає твердження (iii) теореми.

(iv) Покажемо, що

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} < \bar{a}_{\overline{n}|}. \tag{7.21}$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(x) = 1-e^{-x}(1+x), \quad x \ge 0.$$

Оскільки

$$\varphi(0)=0, \quad \varphi'(x) = xe^{-x} > 0 \quad \forall x>0,$$

то

$$\varphi(x) > 0 \quad \forall x > 0.$$

Звідси отримуємо (7.21):

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-\delta n}(1-\delta(c-n))-(1-\delta c)}{\delta^2 c} < \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{n}|},$$

оскільки ця нерівність еквівалентна такій:

$$0 < 1 - e^{-\delta n}(1 + \delta n) = \varphi(\delta n).$$

Використовуючи (7.21) і формулу (iii), маємо:

$$\mathsf{Pr}\big\{Y > \bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big\} = 1 + \frac{1}{\delta c}\ln(1 - \delta\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}) =$$
$$= 1 + \frac{1}{\delta c}\ln\left(\frac{1 - e^{-\delta n}\big(1 - \delta(c-n)\big)}{\delta c}\right).$$

(v) Згідно з (7.20) функція ${}_tq_x$ має такі властивості:

(а) ${}_nq_x = \dfrac{n}{c} < 1$;

(б) ${}_tq_x$ строго зростає на $[0, n]$.

Отже, за наслідком про процентиль теореми про функцію розподілу Y отримуємо:

(1) $\forall p \in (\,{}_nq_x\,, 1) \quad \xi_Y^p = \bar{a}_{\overline{n}|}$;

(2) $\xi_Y^{{}_nq_x} = \bar{a}_{\overline{n}|}$;

(3) $\forall p \in (\,{}_0q_x\,,\,{}_nq_x\,) = (0,\,{}_nq_x\,) \quad \xi_Y^p$ є розв'язком рівняння

$${}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = -\frac{1}{\delta c}\ln(1 - \delta y) = p \implies \xi_Y^p = \frac{1 - e^{-\delta cp}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{cp}|}.$$

Звідси отримуємо (7.19). □

Приклад 2. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:
$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має неперервний n-річний ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$, де $n = 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 79$;

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Розв'язання. Для кожної з N застрахованих осіб (x) теперішня вартість втрат Y має вигляд:

$$Y = c\begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geq n \end{cases}$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = c\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}, \quad \mathsf{E}\big[Y^2\big] = c^2\frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}\big).$$

З умови (ii) отримуємо:

$$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-\delta n}\big(1 - \delta(80 - n)\big) - (1 - 80\delta)}{80\delta^2} = \\ = \frac{e^{-0,06n}\big(1 - 0,06(80 - n)\big) + 3,8}{0,288}; \quad (7.22)$$

$${}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-2\delta n}\big(1 - 2\delta(80 - n)\big) - (1 - 160\delta)}{320\delta^2} = \\ = \frac{e^{-0,12n}\big(1 - 0,12(80 - n)\big) + 18,2}{1,152}. \quad (7.23)$$

Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Позначимо S теперішню вартість загальної суми втрат страхування на N особах (x). Застосовуючи результат параграфу про *застосування нормального наближення для страхування групи осіб*, отримуємо, що відносне навантаження надійності дорівнює:

$$\theta = \xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]} = \frac{\xi^{0,95}_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Y^2\big]}{\mathsf{E}\big[Y\big]^2} - 1} = \\ = \frac{1,645}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - \frac{{}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}}{\bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}}\right) - 1}.$$

Отже, з нерівності $\theta \le 0,1$ отримуємо:

$$N \ge (16,45)^2 \left[\frac{2}{\delta} \left(\frac{1}{\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}} - \frac{{}^2\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}}{\bar{a}^2_{x:\,\overline{n}|}} \right) - 1 \right].$$

Звідси, враховуючи (7.22) і (7.23), маємо:

n	$\bar{a}_{x:\,\overline{n}|}$	θ	N
5	41.91	2.30%	6
7	54.83	2.69%	8
10	70.97	3.14%	10
15	91.01	3.71%	14
20	104.75	4.12%	17
30	120.47	4.64%	22
40	127.53	4.92%	25
50	130.56	5.05%	26
60	131.75	5.11%	27
79	132.23	5.14%	27

□

1.8 Відкладений пожиттєвий ануїтет

1.8.1 Означення

Неперервний відкладений на l років пожиттєвий ануїтет виплачується застрахованій особі (x), починаючи з віку $x + l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди), допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x + l$, то їй не виплачується нічого. Інтенсивність виплат, функція дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} 0, & t < l \\ 1, & t \ge l \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \ge 0;$$

$$y_t = \begin{cases} 0, & t < l \\ \int\limits_l^t v^s\, ds, & t \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < l \\ \dfrac{v^l - v^t}{\delta}, & t \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < l \\ v^l \bar{a}_{\overline{t-l}|}, & t \ge l \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & T < l \\ \dfrac{v^l - v^T}{\delta}, & T \geq l \end{cases} = \begin{cases} 0, & T < l \\ v^l \bar{a}_{\overline{T-l}|}, & T \geq l \end{cases} \tag{8.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету позначається ${}_{l|}\bar{a}_x$ і визначається формулою:

$${}_{l|}\bar{a}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \int\limits_l^\infty v^l \bar{a}_{\overline{t-l}|}\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt. \tag{8.2}$$

Зауваження 1. Оскільки

$$\int\limits_l^t v^s\, ds = \int\limits_0^t v^s\, ds - \int\limits_0^l v^s\, ds = \bar{a}_{\overline{t}|} - \bar{a}_{\overline{l}|}, \quad t \geq l,$$

то $Y = Y(x)$ можна подати у вигляді:

$$Y = \begin{cases} 0, & T < l \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{l}|}, & T \geq l \end{cases} \tag{8.3}$$

Зауваження 2. З (8.2) отримуємо, що актуарна теперішня вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету ${}_{l|}\bar{a}_x$ задовільняє нерівності:

$$0 \leq {}_{l|}\bar{a}_x \leq \frac{v^l}{\delta}\, {}_lp_x\,.$$

1.8.2 Властивості

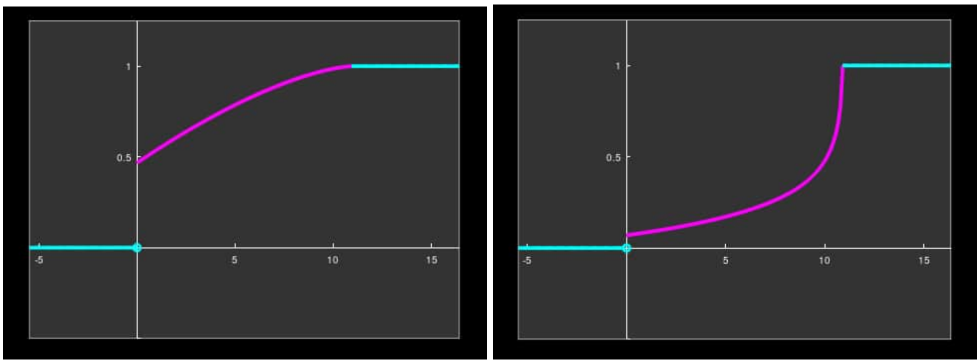
Теорема 8.1. (про функцію розподілу Y)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_T\big(-\frac{1}{\delta}\ln(v^l - \delta y)\big), & 0 \leq y < \frac{v^l}{\delta} \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{\delta} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(v^l - \delta y)}q_x\,, & 0 \leq y < \frac{v^l}{\delta} \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{\delta} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 8.1.*

На малюнку 1.3 (стор.54) зображено приклади графіків функцій розподілу.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.3: Функція розподілу F_Y

Наслідок 8.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає p-ий процентиль теперішньої вартості неперервного відкладеного на* l *років пожиттевого ануїтету,* $p \in (0,1)$.

(i) *Нехай* ${}_lq_x > 0$. *Тоді* $\forall p \in (0, {}_lq_x\,]$ $\quad \xi_Y^p = 0$.

(ii) *Нехай* ${}_tq_x$ *строго зростає на* $[\alpha, \beta] \subset [l, +\infty)$. *Тоді:*

  (а) $\xi_Y^{{}_\beta q_x} = v^l \bar{a}_{\overline{\beta - l|}}$;

  (б) $\forall p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\,{}_\beta q_x\,)$ $\quad \xi_Y^p$ *є розв'язком рівняння*

$$F_Y(y) = {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(v^l - \delta y)}q_x = p,$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Y^p = \frac{e^{-\delta l} - e^{-\delta t(p)}}{\delta} = v^l \bar{a}_{\overline{t(p)-l|}},$$

де

$$t(p) = \left(F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p), \quad p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\,{}_\beta q_x\,).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 8.1.1.*

Теорема 8.2. (про властивості неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету)

(i) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету та пожиттєвого ануїтету особи $(x+l)$*

$$_{l|}\bar{a}_x = v^l\, {}_l p_x\, \bar{a}_{x+l} = {}_l E_x\, \bar{a}_{x+l};$$

(ii) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету і пожиттєвого та l-річного ануїтетів*

$$_{l|}\bar{a}_x = \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{l}|}; \tag{8.4}$$

(iii) *актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету у формі поточних виплат*

$$_{l|}\bar{a}_x = \int\limits_l^\infty v^t\, {}_t p_x\, dt = \int\limits_l^\infty {}_t E_x\, dt; \tag{8.5}$$

(iv) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету і відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя*

$$v^l\, {}_l q_x = \delta\, {}_{l|}\bar{a}_x + {}_{l|}\bar{A}_x;$$

(v) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету*

$$_{l|}\bar{a}_x = E_x\, {}_{l-1|}\bar{a}_{x+1};$$

(vi) *диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету*

$$\frac{d}{dx}\, {}_{l|}\bar{a}_x = \big(\delta + \mu(x)\big)\, {}_{l|}\bar{a}_x - {}_l E_x\,. \tag{8.6}$$

Вправа 3. *Довести теорему 8.2.*

Теорема 8.3. (про дисперсію неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету)

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \frac{2}{\delta}\left(v^l\, {}_{l|}\bar{a}_x - {}_{l|}{}^2\bar{a}_x\right) = \frac{2}{\delta}\, v^{2l}\, {}_l p_x \left(\bar{a}_{x+l} - {}^2\bar{a}_{x+l}\right); \tag{8.7}$$

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\left(v^l\, {}_{l|}\bar{a}_x - {}_{l|}{}^2\bar{a}_x\right) - {}_{l|}\bar{a}_x^2 =$$

$$= v^{2l}\, {}_l p_x \left[\frac{2}{\delta} \left(\bar{a}_{x+l} - {}^2\bar{a}_{x+l} \right) - {}_l p_x\, \bar{a}^2_{x+l} \right] =$$

$$= \frac{v^{2l}\, {}_l p_x}{\delta^2} \left[{}_l q_x \left(1 - \bar{A}_{x+l} \right)^2 + ({}^2\bar{A}_{x+l} - \bar{A}^2_{x+l}) \right], \tag{8.8}$$

де ${}_{l|}{}^2\bar{a}_x$, ${}^2\bar{a}_{x+l}$ *позначають відповідно актуарну теперішню вартість неперервного відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету особи* (x) *і неперервного пожиттєвого ануїтету особи* $(x+l)$ *з інтенсивністю відсоткової ставки* 2δ.

Вправа 4. *Довести теорему 8.3 (навести три різних способи доведення).*

1.8.3 Приклади

Теорема 8.4. (про неперервний відкладений на l років пожиттєвий ануїтет для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має відкладений на* l *років пожиттєвий ануїтет,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \ge 0. \tag{8.9}$$

Тоді:

(i) ${}_{l|}\bar{a}_x = \dfrac{e^{-(\mu+\delta)l}}{\mu+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{2e^{-(\mu+2\delta)l}}{(\mu+\delta)(\mu+2\delta)} - \dfrac{e^{-2(\mu+\delta)l}}{(\mu+\delta)^2}$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - (v^l - \delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}, & 0 \le y < \frac{v^l}{\delta} \\ 1, & y \ge \frac{v^l}{\delta} \end{cases}$

(iv) $\mathsf{Pr}\big\{Y > {}_{l|}\bar{a}_x\big\} = e^{-\mu l} \left(1 - \dfrac{\delta e^{-\mu l}}{\mu+\delta} \right)^{\frac{\mu}{\delta}}$.

(v) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ^p_Y *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi^p_Y = \begin{cases} 0, & p \in \big(0, 1 - e^{-\mu l}\big] \\ \dfrac{v^l - (1-p)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}, & p \in \big(1 - e^{-\mu l}, 1\big) \end{cases} \tag{8.10}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y *дорівнює*

$$\xi^{0,5}_Y = \begin{cases} 0, & \mu l \ge \ln 2 \\ \dfrac{v^l - 2^{-\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}, & \mu l < \ln 2 \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 8.4.*

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \quad t \geq 0$;

(iii) має неперервний відкладений на l років пожиттєвий ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$, де

$$l = 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40,\ 50;$$

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 для страхування однієї особи.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 10$ отримуємо:

l	$c\,{}_{l\|}\bar{a}_x$	ξ	θ	θ_1
10	36.79	4241.56	15.30%	143.57%

Теорема 8.5. (про неперервний відкладений на l років пожиттєвий ануїтет для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи (x), що має відкладений на l років пожиттєвий ануїтет $(l < c)$, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \tag{8.11}$$

Тоді:

(i) ${}_{l|}\bar{a}_x = \dfrac{e^{-\delta c} - e^{-\delta l}\big(1 - \delta(c-l)\big)}{\delta^2 c}$;

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\left(\frac{e^{-\delta(c+l)} - e^{-2\delta l}\big(1-\delta(c-l)\big)}{\delta^2 c} - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{-2\delta c} - e^{-2\delta l}\big(1-2\delta(c-l)\big)}{4\delta^2 c}\right) - \left(\frac{e^{-\delta c} - e^{-\delta l}\big(1-\delta(c-l)\big)}{\delta^2 c}\right)^2;$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ -\dfrac{1}{\delta c}\ln(e^{-\delta l} - \delta y), & 0 \le y < e^{-\delta l}\bar{a}_{\overline{c-l|}} \\ 1, & y \ge e^{-\delta l}\bar{a}_{\overline{c-l|}} \end{cases}$$

(iv) $$\mathsf{Pr}\big\{Y > {}_{l|}\bar{a}_x\big\} = 1 + \frac{1}{\delta c}\ln\left(\frac{e^{-\delta l}\big(1+\delta l\big) - e^{-\delta c}}{\delta c}\right);$$

(v) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in \left(0, \dfrac{l}{c}\right] \\ e^{-\delta l}\bar{a}_{\overline{cp-l|}}, & p \in \left(\dfrac{l}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{8.12}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \begin{cases} 0, & l \ge 0,5c \\ e^{-\delta l}\bar{a}_{\overline{c/2-l|}}, & l < 0,5c \end{cases}$$

Вправа 3. *Довести теорему 8.5.*

Приклад 2. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) має неперервний відкладений на l років пожиттєвий ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$, де

$$l = 3,\ 5,\ 7,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40,\ 50;$$

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 10$ отримуємо:

l	${}_{l\vert}\bar{a}_x$	θ	N
10	61.26	8.51%	73

1.9 Відкладений строковий ануїтет

1.9.1 Означення

Неперервний відкладений на l років n-річний ануїтет виплачується застрахованій особі (x) починаючи з віку $x + l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди) протягом n років, допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x + l$, то їй не виплачується нічого. Інтенсивність виплат, функція дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_t = \begin{cases} 0, & t < l \\ 1, & l \le t < l+n \\ 0, & t \ge l+n \end{cases}$$

$$v_t = v^t, \quad t \ge 0;$$

$$y_t = \begin{cases} 0, & t < l \\ \int\limits_l^t v^t\, dt, & l \le t < l+n \\ \int\limits_l^{l+n} v^t\, dt, & t \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < l \\ \dfrac{v^l - v^t}{\delta}, & l \le t < l+n \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{\delta}, & t \ge l+n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & T < l \\ v^l \bar{a}_{\overline{t-l|}}, & l \le t < l+n \\ v^l \bar{a}_{\overline{n|}}, & t \ge l+n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість неперервного відкладеного на l років n-річного ануїтету* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & T < l \\ \dfrac{v^l - v^T}{\delta}, & l \le T < l+n \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{\delta}, & T \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & T < l \\ v^l \bar{a}_{\overline{T-l}|}, & l \le T < l+n \\ v^l \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \ge l+n \end{cases} \tag{9.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервного відкладеного на l років n-річного ануїтету позначається ${}_{l|n}\bar{a}_x$ і визначається формулою:

$${}_{l|n}\bar{a}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \int\limits_l^{l+n} v^l \bar{a}_{\overline{t-l}|}\, {}_t p_x\, \mu(x+t)\, dt + v^l \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_{l+n}p_x\,. \tag{9.2}$$

Зауваження 1. Оскільки

$$\int\limits_l^t v^s\, ds = \int\limits_0^t v^s\, ds - \int\limits_0^l v^s\, ds = \bar{a}_{\overline{t}|} - \bar{a}_{\overline{l}|},$$

то $Y = Y(x)$ можна подати у вигляді:

$$Y = \begin{cases} 0, & T < l \\ \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{l}|}, & l \le T < l+n \\ \bar{a}_{\overline{l+n}|} - \bar{a}_{\overline{l}|}, & T \ge l+n \end{cases} \tag{9.3}$$

Зауваження 2. З (9.2) отримуємо, що актуарна теперішня вартість неперервного відкладеного на l років n-річного ануїтету ${}_{l|n}\bar{a}_x$ задовільняє нерівності:

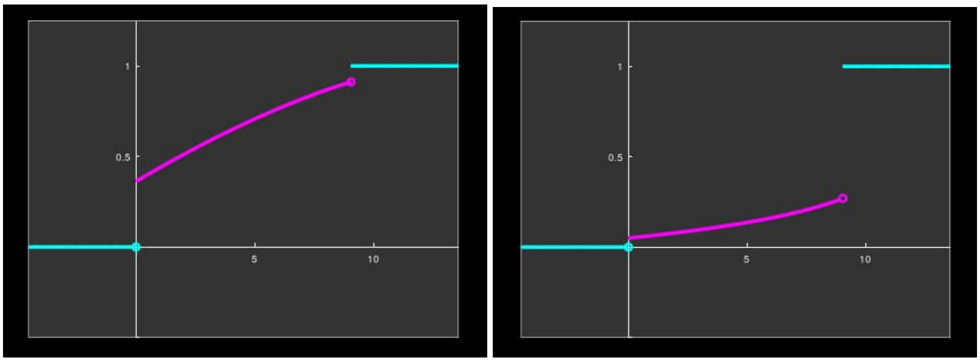
$$0 \le {}_{l|n}\bar{a}_x \le v^l \bar{a}_{\overline{n}|}\big({}_l p_x - {}_{l+n}p_x\big) + v^l \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_{l+n}p_x = v^l \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_l p_x\,.$$

1.9.2 Властивості

Вправа 1. *Сформулювати й довести теорему про функцію розподілу Y.*

На малюнку 1.4 (стор.61) зображено приклади графіків функцій розподілу.

Вправа 2. *Сформулювати й довести наслідок про процентиль випадкової величини Y.*



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.4: Функція розподілу F_Y

Вправа 3. *Сформулювати й довести теорему про властивості неперервного відкладеного на l років n-річного ануїтету:*

(i) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей відкладеного на l років n-річного ануїтету та l-річного ануїтету особи $(x+n)$*

(ii) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей відкладеного на l років n-річного ануїтету і $(l+n)$-річного та n-річного ануїтетів*

(iii) *актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету у формі поточних виплат*

(iv) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей відкладеного на l років n-річного ануїтету і відкладеного на l років n-річного мішаного страхування життя*

(v) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету*

(vi) *диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету*

Вправа 4. *Сформулювати й довести теорему про дисперсію неперервного відкладеного на l років n-річного ануїтету в термінах ${}_{l|n}\bar{a}_x$, $\bar{a}_{l+n:\,\overline{x}|}$, $\bar{A}_{l+n:\,\overline{x}|}$ (навести три різних способи доведення).*

1.9.3 Приклади

Вправа 1. *Сформулювати й довести теорему про неперервний відкладений на l років n-річний ануїтет для випадку сталої сили смертності, що містить формули для величин:*

(i) ${}_{l|n}\bar{a}_x$

(ii) $\mathsf{Var}[Y]$

(iii) $F_Y(y)$

(iv) $\mathsf{Pr}\{Y > {}_{l|n}\bar{a}_x\}$

(v) ξ_Y^p

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \quad t \geq 0$;

(iii) має неперервний відкладений на l років n-річний ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$, де

l	3	5	7	10	15	20	25	40	50
n	60	50	40	30	25	20	15	7	5

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 для страхування однієї особи.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $l = 10, \ n = 30$ отримуємо:

l	n	$c\,{}_{l\|n}\bar{a}_x$	ξ	θ	θ_1
10	30	34.96	4016.17	14.89%	118.41%

Вправа 3. *Сформулювати й довести теорему про неперервний відкладений на l років n-річний ануїтет для рівномірного розподілу, що містить формули для величин:*

(i) ${}_{l|n}\bar{a}_x$

(ii) $\mathsf{Var}[Y]$

(iii) $F_Y(y)$

(iv) $\mathsf{Pr}\{Y > {}_{l|n}\bar{a}_x\}$

(v) ξ_Y^p

Приклад 2. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0, 80) \\ 0, & t \notin [0, 80) \end{cases}$$

(iii) має неперервний відкладений на l років n-річний ануїтет з інтенсивністю виплат $c = 10$, де

l	3	5	7	10	15	20	25	40	50
n	60	50	40	30	25	20	15	7	5

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $l = 10,\ n = 30$ отримуємо:

l	n	ξ	θ	N
10	30	56.57	8.17%	67

1.10 Пожиттєвий ануїтет з гарантією

1.10.1 Означення

Неперервний пожиттєвий ануїтет з n-річною гарантією виплачується застрахованій особі (x) протягом n років, якщо ця особа не доживає до віку $x+n$, і виплачується допоки особа (x) залишається живою, якщо ця особа доживає до віку $x+n$ (тобто за цією страховою угодою гарантовано буде сплачено ануїтет протягом n років). Інтенсивність виплат, функція дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_t = 1, \quad t \geq 0;$$

$$v_t = \begin{cases} v^n, & t < n \\ v^t, & t \geq n \end{cases}$$

$$y_t = \begin{cases} \int\limits_0^n v^s\,ds, & t < n \\ \int\limits_0^t v^s\,ds, & t \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-v^n}{\delta}, & t < n \\ \dfrac{1-v^t}{\delta}, & t \geq n \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|}, & t < n \\ \bar{a}_{\overline{t}|}, & t \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} \dfrac{1-v^n}{\delta}, & T < n \\ \dfrac{1-v^T}{\delta}, & T \geq n \end{cases} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n}|}, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{T}|}, & T \geq n \end{cases} \tag{10.1}$$

де $T = T(x)$ позначає випадкову величину майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією позначається $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ і визначається формулою:

$$\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_nq_x + \int\limits_n^\infty \bar{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt. \tag{10.2}$$

Зауваження 1. З (10.2) отримуємо, що актуарна теперішня вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ задовільняє нерівності:

$$\bar{a}_{\overline{n}|} \leq \bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} \leq \bar{a}_{\overline{n}|}\,{}_nq_x + \frac{1}{\delta}\,{}_np_x = \bar{a}_{\overline{n}|} + \frac{v^n}{\delta}\,{}_np_x \leq \frac{1}{\delta}.$$

1.10.2 Властивості

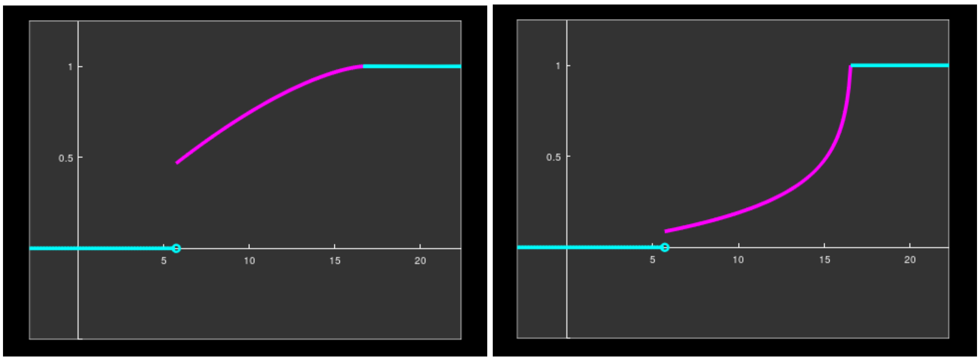
Теорема 10.1. (про функцію розподілу Y)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ F_T\big(-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)\big), & \bar{a}_{\overline{n}|} \leq y < \frac{1}{\delta} \\ 1, & y \geq \frac{1}{\delta} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \bar{a}_{\overline{n}|} \\ {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x\,, & \bar{a}_{\overline{n}|} \leq y < \frac{1}{\delta} \\ 1, & y \geq \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 10.1.*

На малюнку 1.5 (стор.65) зображено приклади графіків функцій розподілу.



(а) $T(x)$ має експоненційний розподіл (б) $T(x)$ має розподіл де Муавра

Рис. 1.5: Функція розподілу F_Y

Наслідок 10.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-ий процентиль теперішньої вартості неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією, $p \in (0,1)$.*

(i) *Нехай ${}_nq_x > 0$. Тоді $\forall p \in (0, {}_nq_x\,]$ $\quad \xi_Y^p = \bar{a}_{\overline{n}|}$;*

(ii) *Нехай ${}_tq_x$ строго зростає на $[\alpha, \beta] \subset [n, +\infty)$. Тоді:*

(а) $\xi_Y^{{}_\beta q_x} = \bar{a}_{\overline{\beta}|}$;

(б) $\forall p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\,{}_\beta q_x\,)$ $\quad \xi_Y^p$ *є розв'язком рівняння*

$$F_Y(y) = {}_{-\frac{1}{\delta}\ln(1-\delta y)}q_x = p, \quad y \in \left(\bar{a}_{\overline{\alpha}|}, \bar{a}_{\overline{\beta}|}\right),$$

який можна подати у вигляді:

$$\xi_Y^p = \frac{1 - e^{-\delta t(p)}}{\delta} = \bar{a}_{\overline{t(p)}|},$$

де

$$t(p) = \left(F_T\,\Big|_{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(p), \quad p \in (\,{}_\alpha q_x\,,\,{}_\beta q_x\,).$$

Вправа 2. *Довести наслідок 10.1.1.*

Теорема 10.2. (про властивості неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією)

(i) *зв'язок пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією з відкладеним на n років пожиттєвим ануїтетом*

$$\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x; \tag{10.3}$$

(ii) *зв'язок пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією з пожиттєвим ануїтетом особи $(x+n)$*

$$\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + v^n\, {}_np_x\, \bar{a}_{x+n} = \bar{a}_{\overline{n}|} + {}_nE_x\, \bar{a}_{x+n}; \tag{10.4}$$

(iii) *зв'язок пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією з пожиттєвим та n-річним ануїтетом*

$$\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \bar{a}_x - \bar{a}_{x:\overline{n}|};$$

(iv) *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією у формі поточних виплат*

$$\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \bar{a}_{\overline{n}|} + \int_n^\infty v^t\, {}_tp_x\, dt; \tag{10.5}$$

(v) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією*

$$\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \bar{a}_{\overline{n}|} - E_x \bar{a}_{\overline{n-1}|} + E_x \bar{a}_{\overline{\overline{x+1:\overline{n-1}|}}}; \tag{10.6}$$

(vi) *диференціальне рівняння на актуарну теперішню вартість пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією*

$$\frac{d}{dx}\, \bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} = \big(\delta + \mu(x)\big)\big(\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} - \bar{a}_{\overline{n}|}\big) - {}_nE_x\,.$$

Вправа 3. *Довести теорему 10.2.*

Теорема 10.3. (про дисперсію неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією)

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \frac{2}{\delta}\big(\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}} - {}^2\bar{a}_{\overline{\overline{x:\overline{n}|}}}\big) = \frac{2}{\delta}\left({}_{n|}\bar{a}_x - {}_{n|}{}^2\bar{a}_x\right) + \bar{a}_{\overline{n}|}{}^2 =$$

$$= \frac{2}{\delta}\, v^n\, {}_np_x \left(\bar a_{x+n} - v^n\, {}^2\bar a_{x+n}\right) + \bar a_{\overline{n|}}{}^2; \quad (10.7)$$

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\big(\bar a_{\overline{x:\overline{n|}}} - {}^2\bar a_{\overline{x:\overline{n|}}}\big) - \big(\bar a_{\overline{x:\overline{n|}}}\big)^2 = \frac{2}{\delta}\left(v^n\, {}_{n|}\bar a_x - {}_{n|}{}^2\bar a_x\right) - {}_{n|}\bar a_x^2 =$$
$$= v^{2n}\, {}_np_x \left[\frac{2}{\delta}\left(\bar a_{x+n} - {}^2\bar a_{x+n}\right) - {}_np_x\, \bar a_{x+n}^2\right] =$$
$$= \frac{v^{2n}\, {}_np_x}{\delta^2}\left[(1 - {}_np_x)\big(1 - \bar A_{x+n}\big)^2 + ({}^2\bar A_{x+n} - \bar A_{x+n}^2)\right], \quad (10.8)$$

де ${}^2\bar a_{\overline{x:\overline{n|}}}$, ${}_{n|}{}^2\bar a_x$, ${}^2\bar a_{x+n}$ *позначають відповідно актуарну теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з* n*-річною гарантією особи* (x)*, неперервного відкладеного на* n *років пожиттєвого ануїтету особи* (x) *і неперервного пожиттєвого ануїтету особи* $(x+n)$ *з інтенсивністю відсоткової ставки* 2δ.

Вправа 4. *Довести теорему 10.3.*

1.10.3 Приклади

Теорема 10.4. (про неперервний пожиттєвий ануїтет з n-річною гарантією для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x)*, що має неперервний пожиттєвий ануїтет з* n*-річною гарантією,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \quad (10.9)$$

Тоді:

(i) $\bar a_{\overline{x:\overline{n|}}} = \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} + \dfrac{e^{-(\mu+\delta)n}}{\mu+\delta}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{2e^{-(\mu+2\delta)n}}{(\mu+\delta)(\mu+2\delta)} - \dfrac{e^{-2(\mu+\delta)n}}{(\mu+\delta)^2}$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \bar a_{\overline{n|}} \\ 1 - (1-\delta y)^{\frac{\mu}{\delta}}, & \bar a_{\overline{n|}} \leq y < \frac{1}{\delta} \\ 1, & y \geq \frac{1}{\delta} \end{cases}$

(iv) $\mathsf{Pr}\left\{Y > \bar a_{\overline{x:\overline{n|}}}\right\} = e^{-\mu n}\left(1 - \dfrac{\delta e^{-\mu n}}{\mu+\delta}\right)^{\frac{\mu}{\delta}}$.

(v) *Нехай* $p \in (0,1)$*. Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}, & p \in \big(0, 1 - e^{-\mu n}\big] \\ \dfrac{1 - (1-p)^{\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}, & p \in \big(1 - e^{-\mu n}, 1\big) \end{cases} \quad (10.10)$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-\delta n}}{\delta}, & \mu n \geq \ln 2 \\ \dfrac{1-2^{-\frac{\delta}{\mu}}}{\delta}, & \mu n < \ln 2 \end{cases} \tag{10.11}$$

Вправа 1. *Довести теорему 10.4.*

Приклад 1. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) має сталу силу смертності $\mu(x+t) = \mu = 0,04, \ \ t \geq 0$;

(iii) має неперервний пожиттєвий ануїтет з n-річною гарантією з інтенсивністю виплат $c = 10$, де

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16;$$

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму (навантаження надійності), яку повинен мати фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи, становила приблизно $0,95$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) відносне навантаження надійності θ_1 для страхування однієї особи.

Вправа 2. *Розв'язати приклад 1*

Зазначимо, що для $n = 5$ отримуємо:

n	$c\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}\rceil}}$	ξ	θ	θ_1
5	103.85	11109.14	6.97%	58.69%

Теорема 10.5. (про неперервний пожиттєвий ануїтет з n-річною гарантією для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи (x), що має неперервний пожиттєвий ануїтет з n-річною гарантією $(n < c)$, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \tag{10.12}$$

Тоді:

(i) $\bar{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \dfrac{\delta c + e^{-\delta c} - e^{-\delta n}\big(1+\delta n\big)}{\delta^2 c}$;

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{\delta}\left(\frac{\delta c + e^{-\delta c} - e^{-\delta n}\big(1+\delta n\big)}{\delta^2 c} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\delta c + e^{-2\delta c} - e^{-2\delta n}\big(1+2\delta n\big)}{4\delta^2 c}\right) - \left(\frac{\delta c + e^{-\delta c} - e^{-\delta n}\big(1+\delta n\big)}{\delta^2 c}\right)^2.$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \bar{a}_{\overline{n|}} \\ -\dfrac{1}{\delta c}\ln(1-\delta y), & \bar{a}_{\overline{n|}} \le y < \bar{a}_{\overline{c|}} \\ 1, & y \ge \bar{a}_{\overline{c|}} \end{cases}$$

(iv) $\mathsf{Pr}\big\{Y > \bar{a}_{\overline{x:\overline{n|}}}\big\} = 1 + \dfrac{1}{\delta c}\ln\left(\dfrac{e^{-\delta n}\big(1+\delta n\big) - e^{-\delta c}}{\delta c}\right)$;

(v) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n|}}, & p \in \left(0, \dfrac{n}{c}\right] \\ \bar{a}_{\overline{cp|}}, & p \in \left(\dfrac{n}{c}, 1\right) \end{cases} \tag{10.13}$$

Зокрема, медіана випадкової величини Y дорівнює

$$\xi_Y^{0,5} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{n|}}, & n \ge 0,5c \\ \bar{a}_{\overline{c/2|}}, & n < 0,5c \end{cases}$$

Вправа 3. *Довести теорему 10.5.*

Приклад 2. Розглядається $N = 100$ незалежних осіб, кожна з яких:

(i) має вік x;

(ii) щільність розподілу випадкової величини $T(x)$ для кожної з N осіб (x) має вигляд:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{80}, & t \in [0,80) \\ 0, & t \notin [0,80) \end{cases}$$

(iii) має неперервний пожиттєвий ануїтет з n-річною гарантією з інтенсивністю виплат $c = 10$, де

$$n = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16;$$

(iv) отримує виплати зі страхового фонду, $\delta = 0,06$.

Потрібно обчислити мінімальне N, для якого:

(а) суми, яку матиме фонд в момент часу $t = 0$, з ймовірністю $0,95$ вистачить для того, щоб він був спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної застрахованої особи;

(б) відносне навантаження надійності становило не більше 10%.

Обчислити відносне навантаження надійності θ, якщо $N = 100$.

Вправа 4. *Розв'язати приклад 2*

Зазначимо, що для $n = 5$ отримуємо:

n	$c\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}\rvert}}$	θ	N
5	133.51	4.68%	22

Розділ 2

Дискретні страхові ануїтети зі щорічними виплатами

2.1 Загальне поняття ануїтету

2.1.1 Означення

Теорія дискретних ануїтетів подібна до теорії неперервних ануїтетів, тільки інтеграли заміняються на суми, а підінтегральні вирази на доданки. Для неперервних ануїтетів не існує відмінностей між виплатами на початку (пренумерандо) або в кінці (постнумерандо) періодів. Для дискретних ануїтетів ця відмінність істотна.

У цьому розділі здебільшого розглядаються дискретні ануїтети пренумерандо, оскільки саме вони відіграють найважливішу роль в актуарних застосуваннях. Загальний дискретний ануїтет пренумерандо визначається двома функціями (послідовностями):

- *функцією виплат* (*функцією винагороди*)

$$b_k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$$

- *функцією дисконтування*

$$v_k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots. \tag{1.1}$$

Величина b_k — це виплата, яку здійснює страхова організація на початку $(k+1)$-го року

$$[x + k, x + k + 1),$$

тобто в момент часу

$$x + k,$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x). Функція дисконтування (1.1) є звуженням на множину цілих невід'ємних чисел функції дисконтування

$$v_t, \quad t \geq 0.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат* y_k за формулою

$$y_k = \sum_{j=0}^{k} b_j v_j.$$

Отже, y_k — це теперішня вартість дискретного ануїтету пренумерандо, який сплачується особі (x) протягом $k + 1$ років (остання виплата здійснюється на початку $(k+1)$-го року). Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю дискретного ануїтету пренумерандо*:

$$Y(x) = y_{K(x)} = \sum_{j=0}^{K(x)} b_j v_j,$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j v_j \right) \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j v_j \right) {}_k p_x \, q_{x+k}$$

теперішньої вартості ануїтету пренумерандо називається *актуарною теперішньою вартістю дискретного ануїтету пренумерандо*. Залежно від вигляду функцій виплат та дисконтування отримуємо різні види ануїтетів (наприклад пожиттєвий, строковий, відкладений пожиттєвий, відкладений строковий).

2.1.2 Властивості

Теорема 1.1. (про зв'язок теперішніх вартостей ануїтетів пренумерандо) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_k = v^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Нехай виплати за ануїтетом пренумерандо мають таку властивість: для $l \in \mathbf{N}$ *виплата в момент часу*

$$x + l + k$$

за ануїтетом пренумерандо для особи у віці x та за ануїтетом пренумерандо для особи у віці $x+l$ однакова, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\mid K(x)\geq l\big]=\sum_{j=0}^{l-1}b_jv^j+v^l\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big], \tag{1.2}$$

де b_j позначає функцію виплат для особи (x).

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: За означенням і за умовою

$$Y(x+l)=\sum_{j=0}^{K(x+l)}b_{j+l}v^j.$$

Отже, за означенням математичного сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}b_{j+l}v^j\right)\mathsf{Pr}\big\{K(x+l)=k\big\}. \tag{1.3}$$

За означенням при $K(x)\geq l$

$$Y(x)-\sum_{j=0}^{l-1}b_jv^j=\sum_{j=l}^{K(x)}b_jv^j=\sum_{j=0}^{K(x)-l}b_{j+l}v^{j+l}=v^l\sum_{j=0}^{K(x)-l}b_{j+l}v^j.$$

Отже, за означенням математичного сподівання

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[Y(x)\mid K(x)\geq l\big]&=\\ &=\sum_{j=0}^{l-1}b_jv^j+v^l\sum_{k=l}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-l}b_{j+l}v^j\right)\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\mid K(x)\geq l\big\}\\ &=\sum_{j=0}^{l-1}b_jv^j+v^l\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}b_{j+l}v^j\right)\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k+l\mid K(x)\geq l\big\}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Оскільки

$$K(x+l)=K(x)-l,\quad K(x)\geq l,$$

то

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x+l)=k\big\}=\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k+l\mid K(x)\geq l\big\}. \tag{1.5}$$

З (1.3), (1.4) і (1.5) випливає (1.2).

2-й спосіб: За означенням і умовою

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_{j+l} v^j \right) {}_k p_{x+l}\, q_{x+l+k}. \tag{1.6}$$

Використовуючи співвідношення

$${}_{l+k}p_x = {}_l p_x \; {}_k p_{x+l}\,,$$

рівність

$${}_l p_x = \mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} {}_k p_x\, q_{x+k},$$

рівність

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) \geq l\big\} = \frac{\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \cap K(x) \geq l\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\}} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\}}{\mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\}}, & k \geq l \\ 0, & k < l \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{{}_k p_x\, q_{x+k}}{{}_l p_x}, & k \geq l \\ 0, & k < l \end{cases}$$

означення математичного сподівання і (1.6), маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big] = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j v^j \right) \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k \mid K(x) \geq l\big\} =$$
$$= \frac{1}{{}_l p_x} \sum_{k=l}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j v^j \right) {}_k p_x\, q_{x+k} =$$
$$= \frac{1}{{}_l p_x} \sum_{k=l}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + \sum_{j=l}^{k} b_j v^j \right) {}_k p_x\, q_{x+k} =$$
$$= \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + \frac{1}{{}_l p_x} \sum_{k=l}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-l} b_{j+l} v^{j+l} \right) {}_k p_x\, q_{x+k} =$$
$$= \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + \frac{v^l}{{}_l p_x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_{j+l} v^j \right) {}_{l+k} p_x\, q_{x+l+k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + v^l \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} b_{j+l} v^j \right) {}_k p_{x+l}\, q_{x+l+k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big].$$

□

Теорема 1.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість ануїтету пренумерандо) *За умов теореми 1.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j \,{}_j p_x + v^l \,{}_l p_x \,\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{1.7}$$

Зокрема,

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = b_0 + v p_x \mathsf{E}\big[Y(x+1)\big].$$

Доведення. *1-й спосіб*: За означенням та умовою теореми

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} b_{j+l} v^j \,{}_k p_{x+l}\, q_{x+l+k}. \tag{1.8}$$

За означенням

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} b_j v^j \,{}_k p_x\, q_{x+k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{k} b_j v^j \,{}_k p_x\, q_{x+k} + \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} b_j v^j \,{}_k p_x\, q_{x+k}. \tag{1.9}$$

Переставляючи сумування, перший доданок правої частини цієї рівності можна подати у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{k} b_j v^j \,{}_k p_x\, q_{x+k} = \sum_{j=0}^{l-1} \left(\sum_{k=j}^{l-1} {}_k p_x\, q_{x+k} \right) b_j v^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{l-1} \left(\sum_{k=j}^{l-1} ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \right) b_j v^j = \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j \,{}_j p_x - {}_l p_x \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j. \tag{1.10}$$

Використовуючи співвідношення

$${}_{l+k} p_x = {}_l p_x \,{}_k p_{x+l}$$

рівність

$$ {}_{l}p_x = \mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} {}_{k}p_x\, q_{x+k} $$

та рівність (1.8), другий доданок правої частини рівності (1.9) подамо у вигляді:

$$ \begin{aligned} \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} b_j v^j\, {}_{k}p_x\, q_{x+k} &= \sum_{k=l}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + \sum_{j=l}^{k} b_j v^j\right) {}_{k}p_x\, q_{x+k} = \\ &= {}_{l}p_x \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + \sum_{k=l}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k-l} b_{j+l} v^{j+l}\right) {}_{k}p_x\, q_{x+k} = \\ &= {}_{l}p_x \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} b_{j+l} v^{j+l}\right) {}_{l+k}p_x\, q_{x+l+k} = \\ &= {}_{l}p_x \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + v^l\, {}_{l}p_x \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} b_{j+l} v^{j}\right) {}_{k}p_{x+l}\, q_{x+l+k} = \\ &= {}_{l}p_x \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + v^l\, {}_{l}p_x\, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \end{aligned} \tag{1.11} $$

Підставляючи (1.10) і (1.11) в (1.9), отримуємо (1.7).
<u>*2-й спосіб*</u>: За формулою повної ймовірності

$$ \begin{aligned} \mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) < l\big]&\mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\} + \\ &+ \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big]\mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\} = \\ &= \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) < l\big]\, {}_{l}q_x + \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big]\, {}_{l}p_x\,. \end{aligned} \tag{1.12} $$

Перший співмножник другого доданку правої частини цієї рівності отримуємо з теореми про зв'язок теперішніх вартостей ануїтетів пренумерандо:

$$ \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big] = \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{1.13} $$

Для обчислення першого співмножника першого доданку правої частини рівності (1.12) скористаємося рівністю

$$\mathsf{Pr}\{K(x) = k \mid K(x) < l\} = \frac{\mathsf{Pr}\{K(x) = k \cap K(x) < l\}}{\mathsf{Pr}\{K(x) < l\}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathsf{Pr}\{K(x) = k\}}{\mathsf{Pr}\{K(x) < l\}}, & k < l \\ 0, & k \geq l \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{{}_kp_x\, q_{x+k}}{{}_lq_x}, & k < l \\ 0, & k \geq l \end{cases}$$

означенням математичного сподівання і рівністю (1.10):

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) < l\big] = \sum_{k=0}^{l-1} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j v^j \right) \mathsf{Pr}\{K(x) = k \mid K(x) < l\} =$$

$$= \frac{1}{{}_lq_x} \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{k} b_j v^j \, {}_kp_x\, q_{x+k} = \frac{1}{{}_lq_x} \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j \, {}_jp_x - \frac{{}_lp_x}{{}_lq_x} \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j. \quad (1.14)$$

Підставляючи (1.13) і (1.14) в (1.12), отримуємо (1.7). □

2.2 Загальне поняття ануїтету з гарантією

2.2.1 Означення

Поряд зі звичайними дискретними ануїтетами існують (і розглядаються) дискретні ануїтети з (n-річною) гарантією. Такий ануїтет гарантовано сплачується протягом n років незалежно від часу настання страхової події (смерті застрахованої особи). *Функція теперішньої вартості виплат* y_k за ануїтетом пренумерандо з n-річною гарантією визначається формулою

$$y_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j v_j, & k < n, \\ \sum\limits_{j=0}^{k} b_j v_j, & k \geq n. \end{cases}$$

Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією*:

$$Y(x) = y_{K(x)} = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j v_j, & K(x) < n \\ \sum\limits_{j=0}^{K(x)} b_j v_j, & K(x) \geq n \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}[Y(x)] = \sum_{j=0}^{n-1} b_j v_j \mathsf{Pr}\big\{K < n\big\} + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} b_j v_j\right)\mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} =$$

$$= {}_n q_x \sum_{j=0}^{n-1} b_j v_j + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} b_j v_j\right) {}_k p_x \, q_{x+k}$$

теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією називається *актуарною теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією.* Залежно від вигляду функцій відшкодування та дисконтування отримуємо різні види ануїтетів з гарантією (наприклад пожиттєвий, строковий).

2.2.2 Властивості

Теорема 2.1. (про зв'язок теперішніх вартостей ануїтетів пренумерандо з гарантією) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_k = v^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нехай виплати за ануїтетом пренумерандо з гарантією мають таку властивість: для $l, n \in \mathbf{N}: \ l < n$, виплата в момент часу

$$x + l + k$$

за ануїтетом пренумерандо з n-річною гарантією для особи у віці x та за ануїтетом пренумерандо з $(n-l)$-річною гарантією для особи у віці $x+l$ однакова, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big] = \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big], \tag{2.1}$$

де b_j позначає інтенсивність виплат для особи (x).

Вправа 1. *Довести теорему 2.1 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 2.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість ануїтету пренумерандо з гарантією) *За умов теореми 2.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{j=0}^{l-1} b_j v^j + {}_l q_x \sum_{j=l}^{n-1} b_j v^j + v^l \, {}_l p_x \, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{2.2}$$

Зокрема,

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = b_0 + q_x \sum_{j=1}^{n-1} b_j v^j + v p_x \mathsf{E}\big[Y(x+1)\big].$$

Вправа 2. *Довести теорему 2.2 (навести два різних способи доведення).*

2.3 Функція теперішньої вартості виплат

Теперішня вартість дискретного ануїтету пренумерандо зі сталою функцією виплат 1, що сплачується протягом $k+1$ років (остання виплата здійснюється на початку $(k+1)$-го року) та зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $\delta = -\ln v$, позначається $\ddot{a}_{\overline{k+1|}}$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = \sum_{j=0}^{k} v^j = \frac{1-v^{k+1}}{1-v} = \frac{1-v^{k+1}}{d}.$$

Зокрема, з цієї формули отримуємо такі оцінки:

$$1 = \ddot{a}_{\overline{1|}} \le \ddot{a}_{\overline{k+1|}} < \frac{1}{d}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Нехай $k \ge n$. Якщо виплати починаються з $(n+1)$-го року, і тривають протягом $(k-n)$ років, то теперішня вартість такого ануїтету пренумерандо дорівнює:

$$v^n + v^{n+1} + \ldots + v^k = \sum_{j=n}^{k} v^j = \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}} =$$

$$= \frac{v^n - v^{k+1}}{d} = v^n\, \frac{1-v^{k+1-n}}{d} = v^n \ddot{a}_{\overline{k+1-n|}}, \quad k \ge n.$$

2.4 Сумування частинами

Теорема 4.1. (про математичне сподівання функції від невід'ємної цілочисельної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{K}$ — невід'ємна цілочисельна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(k)$ — невід'ємна послідовність. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = +\infty \implies \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big) = +\infty. \tag{4.1}$$

Якщо функції F, φ задовільняють умову:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \varphi(n+1)\, \big(1 - F(n)\big) = 0, \tag{4.2}$$

то $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] < +\infty \iff$ числовий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big)$$

збіжний, до того ж справедлива рівність:

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big).$$

Доведення. За означенням математичного сподівання

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big). \tag{4.3}$$

Перетворимо частинну суму цього ряду. Позначимо

$$g(x) = 1 - F(x-1), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(g(k) - g(k+1)\big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)g(k) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)g(k+1) = -\varphi(n+1)g(n+1) + \varphi(0)g(0) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \varphi(k+1)g(k+1) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)g(k+1) =$$
$$= -\varphi(n+1)g(n+1) + \varphi(0) + \sum_{k=0}^{n} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)g(k+1).$$

Отже,

$$\varphi(n+1)\big(1 - F(n)\big) + \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big) =$$
$$= \varphi(0) + \sum_{k=0}^{n} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big). \tag{4.4}$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = +\infty$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big) \to \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big) =$$
$$= \mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = +\infty, \ \ n \to \infty. \tag{4.5}$$

За умовами теореми і згідно з (4.4)

$$\sum_{k=0}^{n} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big) \geq \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big) - \varphi(0).$$

Звідси і з (4.5) та означення збіжності числового ряду отримуємо твердження (4.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1)-\varphi(k)\big)\big(1-F(k)\big) = \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(\varphi(k+1)-\varphi(k)\big)\big(1-F(k)\big) = +\infty.$$

Нехай справджується умова (4.2). Тоді з рівності (4.4) випливає, що

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(F(k)-F(k-1)\big) \iff \\ \iff \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(\varphi(k+1)-\varphi(k)\big)\big(1-F(k)\big), \quad (4.6)$$

до того ж

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\big(F(k)-F(k-1)\big) = \\ = \varphi(0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \big(\varphi(k+1)-\varphi(k)\big)\big(1-F(k)\big). \quad (4.7)$$

З (4.3), (4.6) і (4.7), а також з означень збіжності і суми числового ряду отримуємо обидва твердження теореми. □

Наслідок 4.1.1. (про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної цілочисельної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{K}$ — невід'ємна цілочисельна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(k)$ — невід'ємна обмежена послідовність. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] < +\infty, \quad \mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big] < +\infty, \quad (4.8)$$

до того ж справедливі рівності:

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1)-\varphi(k)\big)\big(1-F(k)\big); \quad (4.9)$$

$$\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big] = \varphi^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi^2(k+1)-\varphi^2(k)\big)\big(1-F(k)\big). \quad (4.10)$$

Зокрема,

$$\mathsf{Var}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \varphi^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi^2(k+1) - \varphi^2(k)\big)\big(1 - F(k)\big) - \\ - \left(\varphi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big)\right)^2. \quad (4.11)$$

Вправа 1. *Довести наслідок 4.1.1.*

Теорема 4.2. (про математичне сподівання функції від невід'ємної цілочисельної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{K}$ — невід'ємна цілочисельна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(k)$ — невід'ємна монотонна послідовність. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big). \quad (4.12)$$

Доведення. Якщо послідовність $\varphi(k)$ обмежена, то твердження теореми випливає з наслідку 4.1.1. Нехай $\varphi(k)$ необмежена.
Зауваження 1. Послідовність $\varphi(k)$ невід'ємна.
Зауваження 2. Послідовність $\varphi(k)$ задовольняє нерівності:

$$0 \le \varphi(n+1)\big(1 - F(n)\big) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi(k)\big(F(k) - F(k-1)\big).$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = +\infty$. Тоді за твердженням (4.1) теореми 4.1 права частина рівності (4.12) також дорівнює $+\infty$.

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] < +\infty$. Для доведення рівності (4.12) досить обгрунтувати умову (4.2) теореми 4.1.
Зауваження 3. $\varphi(n+1)\big(1 - F(n)\big) \to 0, \ \ n \to \infty.$

□

Вправа 2. *Обгрунтувати зауваження 1, 2, 3 доведення теореми 4.2.*

Наслідок 4.2.1. (про дисперсію функції від невід'ємної цілочисельної випадкової величини) *Нехай $\mathcal{K}$ — невід'ємна цілочисельна випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$. Нехай $\varphi(k)$ — невід'ємна монотонна послідовність. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big] = \varphi^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi^2(k+1) - \varphi^2(k)\big)\big(1 - F(k)\big). \quad (4.13)$$

Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big] < +\infty$. Тоді $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] < +\infty$. Зокрема,

$$\mathsf{Var}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big] - \mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big]^2,$$

де $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big], \mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big]$ визначаються формулами (4.12) і (4.13).

Доведення. Якщо послідовність $\varphi(k)$ обмежена, то твердження теореми випливає з наслідку 4.1.1. Нехай $\varphi(k)$ необмежена. Тоді за умовами теореми (невід'ємність і монотонність) послідовність $\varphi(k)$ неспадна.
Зауваження 1. Послідовність $\varphi^2(k)$ невід'ємна і монотонна.
Невід'ємність очевидна, а монотонність $\varphi^2(k)$ випливає з невід'ємності і монотонності послідовності $\varphi(k)$.

Із зауваження 1 і теореми 4.2 випливає перше твердження наслідку — рівність (4.13). Нехай $\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{Z})\big] < +\infty$.
Зауваження 2. $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big] < +\infty$, *до того ж справедлива формула (4.12).*
Зазначимо, що досить довести скінченність $\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{Z})\big]$, оскільки формула (4.12) випливатиме з теореми 4.2. За означенням математичного сподівання

$$\mathsf{E}\big[\varphi(\mathcal{K})\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k)\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{K} = k\big\}. \tag{4.14}$$

З неспадання та необмеженості $\varphi(k)$ отримуємо:

$$\exists k_0 \in \mathbf{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad \varphi(k) \geq 1.$$

Тоді

$$\forall k \geq k_0 \quad 0 \leq \varphi(k) \leq \varphi^2(k). \tag{4.15}$$

Звідси, зі збіжності ряду

$$\mathsf{E}\big[\varphi^2(\mathcal{K})\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k)\mathsf{Pr}\big\{\mathcal{K} = k\big\}$$

та ознаки Вейєрштраса випливає збіжність ряду (4.14). □

Теорема 4.3. (про зображення актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат) *Нехай $Y(x)$ позначає теперішню вартість дискретного ануїтету пренумерандо з функцією виплат b_k і функцією дисконтування v_k. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v_k \, {}_k p_x \,.$$

Доведення. Застосуємо теорему 4.2 до цілочисельної дискретної випадкової величини $K(x)$ та невід'ємної неспадної послідовності

$$\varphi(k) = \sum_{j=0}^{k} b_j v_j, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Згідно з означенням ануїтету пренумерандо

$$Y(x) = \varphi(K(x)).$$

Оскільки

$$1 - F_{K(x)}(k) = 1 - {}_{k+1}q_x = {}_{k+1}p_x\,, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

то за теоремою 4.2 отримуємо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \varphi(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \big(\varphi(k+1) - \varphi(k)\big)\big(1 - F(k)\big) =$$
$$= b_0 v_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v_{k+1}\, {}_{k+1}p_x = b_0 v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k\, {}_k p_x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v_k\, {}_k p_x\,.$$

□

Теорема 4.4. (про зображення актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з гарантією у формі поточних виплат) *Нехай $Y(x)$ позначає теперішню вартість дискретного ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з функцією виплат b_j і функцією дисконтування v_j. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=0}^{n-1} b_k v_k + \sum_{k=n}^{\infty} b_k v_k\, {}_k p_x\,. \tag{4.16}$$

Вправа 3. *Довести теорему 4.4.*

2.5 Функція розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо

Теорема 5.1. (перша теорема про функцію розподілу Y) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат ануїтету пренумерандо) y_k задовільняє умови:*

(i) $y_0 = \ldots = y_n$;

(ii) y_k, $k \geq n$, *зростає;*

(iii) $y_k \to c$, $k \to \infty$.

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_n \\ {}_{k+1}q_x\,, & y \in [y_k, y_{k+1}),\ k \geq n \\ 1, & y \geq c \end{cases} \tag{5.1}$$

Нехай $\varphi : [y_n, c) \to [n, +\infty)$ довільна зростаюча функція, що задовільняє умову:

$$\varphi(y_k) = k, \quad k \geq n.$$

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_n \\ {}_{\lfloor \varphi(y) \rfloor + 1}q_x\,, & y_n \leq y < c \\ 1, & y \geq c \end{cases} \tag{5.2}$$

Доведення. За означенням випадкової величини Y і умовою теореми

$$Y \in [y_n, c).$$

Отже,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_n \\ 1, & y \geq c \end{cases} \tag{5.3}$$

Нехай $y_n \leq y < c$. Згідно з умовою теореми

$$[y_n, c) = \bigsqcup_{k=n}^{\infty} [y_k, y_{k+1}).$$

Отже,

$$y \in [y_n, c) \iff \exists! k \geq n : \ \ y \in [y_k, y_{k+1}).$$

Нехай $y \in [y_k, y_{k+1})$. Тоді, використовуючи умову теореми і означення випадкової величини Y, маємо:

$$Y \leq y \iff y_K \leq y \iff y_K \leq y_k \iff K \leq k.$$

Отже,

$$F_Y(y) = \mathsf{Pr}\big\{Y \leq y\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K \leq k\big\} = F_K(k) = {}_{k+1}q_x\,, \quad y \in [y_k, y_{k+1}). \tag{5.4}$$

З (5.3) і (5.4) випливає (5.1).

Перейдемо до другого твердження теореми. За її умовами на функцію φ маємо:

$$k = \varphi(y_k) \leq \varphi(y) < \varphi(y_{k+1}) = k + 1, \quad y \in [y_k, y_{k+1}), \quad k \geq n.$$

Отже,

$$k = \lfloor \varphi(y) \rfloor, \quad y \in [y_k, y_{k+1}), \quad k \geq n.$$

Звідси і з формули (5.1) випливає формула (5.2). □

Наслідок 5.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$. За умов теореми 5.1:*

- *Нехай* ${}_kq_x < 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_n, & p \in (0, {}_{n+1}q_x\,] \\ y_k, & p \in (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,], \quad k \geq n+1 \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{k_0}q_x < 1 = {}_{k_0+1}q_x$, $k_0 > n$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_n, & p \in (0, {}_{n+1}q_x\,] \\ y_k, & p \in (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,], \quad k = n+1, \ldots, k_0 - 1 \\ y_{k_0}, & p \in (\,{}_{k_0}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{n+1}q_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = y_n$, $p \in (0,1)$.

Доведення. За формулою (5.1)

$$F_Y(y_{k-}) = {}_kq_x\,, \quad F_Y(y_k) = {}_{k+1}q_x\,, \quad k \geq n+1.$$

Нехай ${}_kq_x < {}_{k+1}q_x$. Тоді з теореми про процентиль (перше твердження) отримуємо:

$$\forall p \in \big(F_Y(y_{k-}),\, F_Y(y_k)\big] = (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,] \quad \big(\xi_Y^p = y_k\big), \quad k \geq n+1.$$

Аналогічно, за формулою (5.1)

$$F_Y(y_{n-}) = 0, \quad F_Y(y_n) = {}_{n+1}q_x\,.$$

Нехай ${}_{n+1}q_x > 0$. Тоді з теореми про процентиль (перше твердження) отримуємо:

$$\forall p \in \big(y_{n-},\, F_Y(y_n)\big] = (0, {}_{n+1}q_x\,] \quad \big(\xi_Y^p = y_n\big).$$

□

Теорема 5.2. (друга теорема про функцію розподілу Y) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат ануїтету пренумерандо) y_k задовільняє умови:*

(i) $y_0 = \ldots = y_l$;

(ii) $y_l < \ldots < y_{l+n}$;

(iii) $y_k = y_{l+n}$, $k \geq l+n$.

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{k+1}q_x\,, & y \in [y_k, y_{k+1}), \quad k = l, \ldots, l+n-1 \\ 1, & y \geq y_{l+n} \end{cases} \tag{5.5}$$

Нехай $\varphi : [y_l, y_{l+n}] \to [l, l+n]$ *довільна зростаюча функція, що задовільняє умову:*

$$\varphi(y_k) = k, \quad k = l, \ldots, l+n.$$

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\lfloor \varphi(y) \rfloor + 1}q_x\,, & y_l \leq y < y_{l+n} \\ 1, & y \geq y_{l+n} \end{cases} \tag{5.6}$$

Вправа 1. *Довести теорему 5.2.*

Наслідок 5.2.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$. За умов теореми 5.2:*

- *Нехай* ${}_{l+n}q_x < 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_l, & p \in (0, {}_{l+1}q_x\,] \\ y_k, & p \in (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,], \quad k = l+1, \ldots, l+n-1 \\ y_{l+n}, & p \in (\,{}_{l+n}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{k_0}q_x < 1 = {}_{k_0+1}q_x\,$, $l < k_0 < l+n$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_l, & p \in (0, {}_{l+1}q_x\,] \\ y_k, & p \in (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,], \quad k = l+1, \ldots, k_0-1 \\ y_{k_0}, & p \in (\,{}_{k_0}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{l+1}q_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = y_l$, $p \in (0,1)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 5.2.1.*

2.6 Пожиттєвий ануїтет пренумерандо

2.6.1 Означення

Пожиттєвий ануїтет пренумерандо виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного року, допоки вона залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$v_k = v^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$y_k = \sum_{j=0}^{k} v^j = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отже, *теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1|}} = \frac{1 - v^{K+1}}{d}. \tag{6.1}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо позначається $\ddot{a}_x$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \; \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \;\, {}_k p_x \, q_{x+k}.$$

2.6.2 Властивості

Теорема 6.1. (про функцію розподілу Y)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ {}_{k+1}q_x\,, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \ddot{a}_{\overline{k+2|}}\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ 1, & y \ge \frac{1}{d} \end{cases} \tag{6.2}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ F_K\big(-1 - \frac{1}{\delta}\ln(1 - dy)\big), & 1 \le y < \frac{1}{d} \\ 1, & y \ge \frac{1}{d} \end{cases} = $$
$$= \begin{cases} 0, & y < 1 \\ {}_{\lfloor -\frac{1}{\delta}\ln(1-dy) \rfloor} q_x\,, & 1 \le y < \frac{1}{d} \\ 1, & y \ge \frac{1}{d} \end{cases}$$

Доведення. Обидві формули випливають з першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо:

(i) $y_0 = \ddot{a}_{\overline{1|}} = 1$;

(ii) послідовність $y_k = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}$, $k \geq 0$, строго зростає;

(iii) $y_k \to \frac{1}{d}$, $k \to \infty$;

(iv) функція

$$\varphi(y) = -1 - \frac{1}{\delta}\ln(1 - dy)$$

строго зростає на $\left[1, \frac{1}{d}\right)$ і має таку властивість:

$$\varphi(y_k) = \varphi(\ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

□

Наслідок 6.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Y, $p \in (0,1)$.

- *Нехай* ${}_kq_x < 1 \ \forall k \in \mathbf{N}$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \quad p \in (\,{}_kq_x\,,\,{}_{k+1}q_x\,], \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

- *Нехай* ${}_{k_0}q_x < 1 = {}_{k_0+1}q_x$, $k_0 > 0$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p \in (\,{}_kq_x\,,\,{}_{k+1}q_x\,], \;\; k = 0, \ldots, k_0 - 1 \\ \ddot{a}_{\overline{k_0+1|}}, & p \in (\,{}_{k_0}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* $q_x = 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = 1, \quad p \in (0,1).$$

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо і теореми 6.1. □

Теорема 6.2. (про властивості пожиттєвого ануїтету пренумерандо)

(i) *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат*

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\,{}_kp_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+1}E_x\,; \quad (6.3)$$

(ii) *зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування з виплатою в кінці року та пожиттєвого ануїтету пренумерандо*

$$1 = d\ddot{a}_x + A_x; \tag{6.4}$$

(iii) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо*

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1} = 1 + E_x\ddot{a}_{x+1}.$$

Доведення. (i) Випливає з (загальної) теореми про зображення дискретного ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат.

(ii) Позначимо Z тепершню вартість пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці періоду. Оскільки

$$Z = v^{K+1},$$

то, використовуючи формулу (6.1), отримуємо:

$$1 = dY + Z \implies 1 = d\mathsf{E}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Z\big] = d\ddot{a}_x + A_x.$$

(iii) Випливає з загальної теореми про рекурентну формулу для дискретного ануїтету пренумерандо, враховуючи, що $b_0 = 1$. Перевіримо умову цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_k$ функцію виплат для пожиттєвого ануїтету пренумерандо для особи $(x+1)$. Тоді

$$\widetilde{b}_k = 1 = b_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

□

Теорема 6.3. (про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{d^2} = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x\big) + {}^2\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2, \tag{6.5}$$

де ${}^2\ddot{a}_x$, ${}^2A_x$ *позначають відповідно актуарні теперішні вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо і пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці року для особи* (x) *з інтенсивністю відсоткової ставки* 2δ.

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: Позначимо Z тепершню вартість пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці року. Тоді, використовуючи формулу (6.1), отримуємо першу рівність (6.5):

$$Y = \frac{1-Z}{d} \implies \mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{\mathsf{Var}\big[Z\big]}{d^2} = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{d^2}.$$

Позначимо ${}^2Y$, ${}^2Z$ відповідно теперішні вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо і пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці року для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$ {}^2Y = \frac{1 - v^{2(K+1)}}{1 - v^2} = \frac{1 - {}^2Z}{d(2-d)}. $$

Звідси отримуємо:

$$ d(2-d)\mathsf{E}\big[{}^2Y\big] + \mathsf{E}\big[{}^2Z\big] = 1 \implies d(2-d)\,{}^2\ddot{a}_x + {}^2\!A_x = 1. \tag{6.6} $$

Друга рівність (6.5) випливає з першої рівності (6.5), формули (6.4) і рівності (6.6):

$$ \mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{(1 - d(2-d)\,{}^2\ddot{a}_x) - (1 - d\ddot{a}_x)^2}{d^2} = \frac{2}{d}\Big(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x\Big) + {}^2\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2. $$

2-й спосіб: Згідно з означенням $Y(x) = \varphi\big(K(x)\big)$, де

$$ \varphi(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1|}} = \frac{1 - v^{k+1}}{d}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots. $$

Оскільки послідовність $\varphi(k)$ невід'ємна й обмежена, то за теоремою про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної дискретної цілочисельної випадкової величини та формулою (6.3) маємо:

$$ \begin{aligned} \mathsf{E}\big[Y^2(x)\big] &= \mathsf{E}\big[\varphi^2\big(K(x)\big)\big] = \varphi^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty}\big(\varphi^2(k+1) - \varphi^2(k)\big)\,{}_{k+1}p_x = \\ &= 1 + \frac{1}{d^2}\sum_{k=0}^{\infty}\big(v^{k+1} - v^{k+2}\big)\big(2 - v^{k+1} - v^{k+2}\big)\,{}_{k+1}p_x = \\ &= 1 + \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{\infty} v^k\big(2 - v^k - v^{k+1}\big)\,{}_{k}p_x = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{\infty} v^k\big(2 - v^k - v^{k+1}\big)\,{}_{k}p_x = \\ &= \frac{2}{d}\sum_{k=0}^{\infty}\big(v^k - v^{2k}\big)\,{}_{k}p_x + \sum_{k=0}^{\infty} v^{2k}\,{}_{k}p_x = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x\big) + {}^2\ddot{a}_x. \end{aligned} $$

Звідси, зокрема, отримуємо другу рівність (6.5):

$$ \mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{E}\big[Y^2\big] - \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x\big) + {}^2\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2. \tag{6.7} $$

За формулами (6.4) і (6.6) маємо:

$$ \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}, \quad {}^2\ddot{a}_x = \frac{1 - {}^2\!A_x}{d(2-d)}. $$

Звідси й з (6.7) отримуємо першу рівність (6.5):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d}\left(\frac{1-A_x}{d} - \frac{1-{}^2A_x}{d(2-d)}\right) + \frac{1-{}^2A_x}{d(2-d)} - \left(\frac{1-A_x}{d}\right)^2 = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{d^2}.$$

□

Теорема 6.4. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має пожиттєвий ануїтет,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{6.8}$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}_x = \dfrac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{e^{-(\mu+2\delta)}\big(1-e^{-\mu}\big)}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)}$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1-e^{-\mu(k+1)}, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \ddot{a}_{\overline{k+2|}}\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ 1, & y \geq \frac{1}{d} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \quad p \in \big(1-e^{-\mu k}, 1-e^{-\mu(k+1)}\big], \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доведення. За умовою (6.7) теореми

$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad {}_tq_x = 1-e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{6.9}$$

(i) Використовуючи (6.8) і формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат, отримуємо:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta k} e^{-\mu k} = \frac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}}.$$

(ii) За теоремою про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо і пунктом (i) теореми

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d}\Big(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x\Big) + {}^2\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2 =$$

$$= \frac{2}{d}\Big(\frac{1}{1-e^{-(\mu+\delta)}} - \frac{1}{1-e^{-(\mu+2\delta)}}\Big) + \frac{1}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \frac{1}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2} =$$

$$= \frac{2e^{-(\mu+\delta)}}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)} + \frac{1}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \frac{1}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2} =$$

$$= \frac{1+e^{-(\mu+\delta)}}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)} - \frac{1}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2} =$$

$$= \frac{e^{-(\mu+2\delta)}\big(1-e^{-\mu}\big)}{\big(1-e^{-(\mu+\delta)}\big)^2\big(1-e^{-(\mu+2\delta)}\big)}.$$

(iii) Випливає з (6.8) і теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо.

(iv) Випливає з (6.8) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо. □

Теорема 6.5. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи (x), що має пожиттєвий ануїтет, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{6.10}$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}_x = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{v(1-v^c)}{cd}\right) = \frac{1}{1-e^{-\delta}}\left(1 - \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta c})}{c(1-e^{-\delta})}\right)$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-2\delta}}{c(1-e^{-\delta})^3}\left[\frac{1-e^{-2\delta c}}{1+e^{-\delta}} - \frac{(1-e^{-\delta c})^2}{c(1-e^{-\delta})}\right]$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{k+1}{c}, & y \in [\ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \ddot{a}_{\overline{k+2|}}), \quad k = 0,\dots,c-2 \\ 1, & y \geq \ddot{a}_{\overline{c|}} \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p \in \left(\frac{k}{c}, \frac{k+1}{c}\right], \quad k = 0,\dots,c-2 \\ \ddot{a}_{\overline{c|}}, & p \in \left(1 - \frac{1}{c}, 1\right) \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (6.9)

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{6.11} $$

$$ \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & , \ k = 0, \ldots, c-1 \\ 0, & k \geq c \end{cases} \tag{6.12} $$

(i) Використовуючи (6.11) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування, отримуємо:

$$ A_x = \sum_{k=0}^{c-1} v^{k+1} \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k\big\} = \sum_{k=0}^{c-1} v^{k+1} \frac{1}{c} = \frac{v(1 - v^c)}{c(1 - v)} = \frac{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta c})}{c(1 - e^{-\delta})}. $$

Звідси й за формулою (6.4) про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування та пожиттєвого ануїтету маємо:

$$ \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{v(1 - v^c)}{cd}\right) = \frac{1}{1 - e^{-\delta}}\left(1 - \frac{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta c})}{c(1 - e^{-\delta})}\right). $$

(ii) Згідно з пунктом (i)

$$ {}^2A_x = \frac{e^{-2\delta}(1 - e^{-2\delta c})}{c(1 - e^{-2\delta})}. $$

Застосовуючи теорему про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо, отримуємо:

$$ \begin{aligned} \mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{d^2} &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta})^2}\left[\frac{e^{-2\delta}(1 - e^{-2\delta c})}{c(1 - e^{-2\delta})} - \left(\frac{e^{-\delta}(1 - e^{-\delta c})}{c(1 - e^{-\delta})}\right)^2\right] \\ &= \frac{e^{-2\delta}}{c(1 - e^{-\delta})^3}\left[\frac{1 - e^{-2\delta c}}{1 + e^{-\delta}} - \frac{(1 - e^{-\delta c})^2}{c(1 - e^{-\delta})}\right]. \end{aligned} $$

(iii) Випливає з (6.10) і теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо.

(iv) Випливає з (6.10) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо. □

2.7 Строковий ануїтет пренумерандо

2.7.1 Означення

(Строковий) n-річний ануїтет пренумерандо виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного року протягом n років, допоки вона залишається жи-

вою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = \begin{cases} 1, & k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

$$v_k = v^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$y_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{k} v^j, & k < n \\ \sum\limits_{j=0}^{n-1} v^j, & k \geq n \end{cases} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & k < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & k \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{K+1}}{d}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^n}{d}, & K \geq n \end{cases} \tag{7.1}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо позначається $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \, \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} + \ddot{a}_{\overline{n|}} \, \mathsf{Pr}\big\{K \geq n\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1|}} \; {}_k p_x \, q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n|}} \, {}_n p_x \, .$$

2.7.2 Властивості

Теорема 7.1. (про функцію розподілу Y)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ {}_{k+1}q_x \, , & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k+1|}}, \ddot{a}_{\overline{k+2|}}\big), \quad k = 0, \dots, n-2 \\ 1, & y \geq \ddot{a}_{\overline{n|}} \end{cases} \tag{7.2}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ F_K\big(-1 - \frac{1}{\delta}\ln(1-dy)\big), & 1 \le y < \ddot{a}_{\overline{n|}} \\ 1, & y \ge \ddot{a}_{\overline{n|}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 1 \\ {}_{\lfloor -\frac{1}{\delta}\ln(1-dy)\rfloor} q_x\,, & 1 \le y < \ddot{a}_{\overline{n|}} \\ 1, & y \ge \ddot{a}_{\overline{n|}} \end{cases}$$

Доведення. Обидві формули випливають з другої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо:

(i) $0 < y_0 = \ddot{a}_{\overline{1|}} = 1 < y_1 = \ddot{a}_{\overline{2|}} < \ldots < y_{n-1} = \ddot{a}_{\overline{n|}}$;

(ii) $y_k = \ddot{a}_{\overline{n|}}, \quad k \ge n-1$;

(iii) функція

$$\varphi(y) = -1 - \frac{1}{\delta}\ln(1-dy)$$

строго зростає на $\big[1, \ddot{a}_{\overline{n|}}\big]$ і має таку властивість:

$$\varphi(y_k) = \varphi(\ddot{a}_{\overline{k+1|}}) = k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

□

Наслідок 7.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$.*

- *Нехай ${}_{n-1}q_x < 1$. Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p \in (\,{}_kq_x\,,\ {}_{k+1}q_x\,], \quad k = 0, \ldots, n-2 \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & p \in (\,{}_{n-1}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай ${}_{k_0}q_x < 1 = {}_{k_0+1}q_x\,,\ 0 < k_0 < n-1$. Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p \in (\,{}_kq_x\,,\ {}_{k+1}q_x\,], \quad k = 0, \ldots, k_0-1 \\ \ddot{a}_{\overline{k_0+1|}}, & p \in (\,{}_{k_0}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай $q_x = 1$. Тоді $\xi_Y^p = 1,\ p \in (0,1)$.*

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до другої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо і теореми 7.1. □

Теорема 7.2. (про властивості n-річного ануїтету пренумерандо)

(i) *актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат*

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,{}_kp_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-2} v^{k+1}\,{}_{k+1}p_x = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} {}_{k+1}E_x\,; \quad (7.3)$$

(ii) *зв'язок між актуарними теперішніми вартостями n-річного мішаного страхування з виплатою в кінці року та n-річного ануїтету пренумерандо*

$$1 = d\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overline{n}|}; \quad (7.4)$$

(iii) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості n-річного ануїтету пренумерандо*

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1:\,\overline{n-1}|} = 1 + E_x\ddot{a}_{x+1:\,\overline{n-1}|}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доведення. (i) Випливає з (загальної) теореми про зображення дискретного ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат.

(ii) Позначимо Z теперщню вартість мішаного n-річного страхування життя з виплатою 1 в кінці року. Оскільки

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$$

то використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$1 = dY + Z \implies 1 = d\mathsf{E}\big[y\big] + \mathsf{E}\big[Z\big] = d\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overline{n}|}.$$

(iii) Випливає з (загальної) теореми про рекурентну формулу для дискретного ануїтету пренумерандо. Перевіримо умову цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_k$ функцію виплат для $(n-1)$-річного ануїтету пренумерандо для особи $(x+1)$. Тоді

$$\widetilde{b}_k = \begin{cases} 1, & k < n-1 \\ 0, & k \geq n-1 \end{cases} = \begin{cases} 1, & k+1 < n \\ 0, & k+1 \geq n \end{cases} = b_{k+1}.$$

□

Теорема 7.3. (про дисперсію n-річного ануїтету пренумерандо)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_{x:\,\overline{n|}} - A^2_{x:\,\overline{n|}}}{d^2} = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} - {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}\big) + {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} - \ddot{a}^2_{x:\,\overline{n|}}, \tag{7.5}$$

де ${}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}$, ${}^2A_{x:\,\overline{n|}}$ *позначають відповідно актуарні теперішні вартості n-річного ануїтету пренумерандо і n-річного мішаного страхування з виплатою 1 в кінці року для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.*

Доведення. *1-й спосіб*: Позначимо Z теперішню вартість мішаного n-річного страхування з виплатою 1 в кінці року. Тоді, використовуючи формулу (7.1), отримуємо першу рівність (7.5):

$$Y = \frac{1-Z}{d} \implies \mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{\mathsf{Var}\big[Z\big]}{d^2} = \frac{{}^2A_{x:\,\overline{n|}} - A^2_{x:\,\overline{n|}}}{d^2}.$$

Використовуючи формулу (7.4) для відсоткової ставки 2δ та рівність

$$1 - v^2 = (1-v)(1+v) = d(2-d),$$

маємо:

$$1 = (1-v^2)\,{}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} + {}^2A_{x:\,\overline{n|}} \implies 1 = d(2-d)\,{}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} + {}^2A_{x:\,\overline{n|}}. \tag{7.6}$$

Друга рівність (7.5) випливає з першої рівності (7.5), формули (7.4) і рівності (7.6):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{\big(1 - d(2-d)\ {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}\big) - \big(1 - d\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}\big)^2}{d^2} =$$

$$= \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} - {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}\big) + {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}} - \ddot{a}^2_{x:\,\overline{n|}}.$$

2-й спосіб: Згідно з означенням $Y(x) = \varphi\big(K(x)\big)$, де

$$\varphi(k) = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & k < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & k \ge n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-v^{k+1}}{d}, & k < n \\ \dfrac{1-v^n}{d}, & k \ge n \end{cases}$$

Оскільки послідовність $\varphi(k)$ невід'ємна й обмежена, то за теоремою про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної дискретної цілочисельної випадкової величини та формулою (7.3) маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y^2(x)\big] = \mathsf{E}\big[\varphi^2\big(K(x)\big)\big] = \varphi^2(0) + \sum_{k=0}^{\infty}\big(\varphi^2(k+1) - \varphi^2(k)\big)\,{}_{k+1}p_x = $$
$$= 1 + \frac{1}{d^2}\sum_{k=0}^{n-2}\big(v^{k+1} - v^{k+2}\big)\big(2 - v^{k+1} - v^{k+2}\big)\,{}_{k+1}p_x = $$
$$= 1 + \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n-1} v^k\big(2 - v^k - v^{k+1}\big)\,{}_{k}p_x = \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{n-1} v^k\big(2 - v^k - v^{k+1}\big)\,{}_{k}p_x = $$
$$= \frac{2}{d}\sum_{k=0}^{n-1}\big(v^k - v^{2k}\big)\,{}_{k}p_x + \sum_{k=0}^{n-1} v^{2k}\,{}_{k}p_x = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}\big) + {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Звідси, зокрема, отримуємо другу рівність (7.5):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{E}\big[Y^2\big] - \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}_x - {}^2\ddot{a}_x\big) + {}^2\ddot{a}_x - \ddot{a}_x^2. \tag{7.7}$$

За формулами (7.4) і (7.6) маємо:

$$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x:\,\overline{n}|}}{d}, \qquad {}^2\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - {}^2A_{x:\,\overline{n}|}}{d(2-d)}.$$

Звідси й з (7.7) отримуємо першу рівність (7.5):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d}\left(\frac{1 - A_{x:\,\overline{n}|}}{d} - \frac{1 - {}^2A_{x:\,\overline{n}|}}{d(2-d)}\right) + \frac{1 - {}^2A_{x:\,\overline{n}|}}{d(2-d)} - $$
$$ - \left(\frac{1 - A_{x:\,\overline{n}|}}{d}\right)^2 = \frac{{}^2A_{x:\,\overline{n}|} - A^2_{x:\,\overline{n}|}}{d^2}.$$

□

Теорема 7.4. (про n-річний ануїтет пренумерандо для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має* n*-річний ануїтет,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{7.8}$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \dfrac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d}\Big(\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}} - \frac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+2\delta)}}\Big) + $$
$$ + \frac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+2\delta)}} - \left(\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2;$$

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - e^{-\mu(k+1)}, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k+1}|}, \ddot{a}_{\overline{k+2}|}\big), \quad k = 0, \dots, n-2 \\ 1, & y \geq \ddot{a}_{\overline{n}|} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0, 1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & p \in \big(1 - e^{-\mu k}, 1 - e^{-\mu(k+1)}\big], \quad k = 0, \dots, n-2 \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & p \in \big(1 - e^{-\mu(n-1)}, 1\big) \end{cases}$$

Доведення. За умовою (7.6) теореми

$$ {}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad {}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{7.9}$$

(i) Використовуючи (7.7) і формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат, отримуємо:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \, {}_kp_x = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta k} e^{-\mu k} = \frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}.$$

(ii) За теоремою про дисперсію n-річного ануїтету пренумерандо і пунктом (i) теореми

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}\big[Y\big] &= \frac{2}{d}\Big(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\Big) + {}^2\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}^2_{x:\overline{n}|} = \\ &= \frac{2}{d}\Big(\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}} - \frac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+2\delta)}}\Big) + \frac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+2\delta)}} - \left(\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}\right)^2; \end{aligned}$$

(iii) Випливає з (7.7) і теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо.

(iv) Випливає з (7.7) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо. □

Теорема 7.5. (про n-річний ануїтет пренумерандо для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має* n*-річний ануїтет, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \qquad c > n. \tag{7.10}$$

Тоді:

(i) $$\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{v(1-v^n)}{cd} - v^n\left(1-\frac{n}{c}\right)\right) = \\ = \frac{1}{1-e^{-\delta}}\left(1 - \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})} - e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right);$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{1}{(1-e^{-\delta})^2}\left[\frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta n})}{c(1-e^{-2\delta})} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right) - \\ - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)^2\right];$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<1 \\ \dfrac{k+1}{c}, & y \in [\ddot{a}_{\overline{k+1}|}, \ddot{a}_{\overline{k+2}|}), \quad k = 0,\ldots,n-2 \\ 1, & y \geq \ddot{a}_{\overline{n}|} \end{cases}$$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & p \in \left(\dfrac{k}{c}, \dfrac{k+1}{c}\right], \quad k=0,\ldots,n-2 \\ \ddot{a}_{\overline{c}|}, & p \in \left(\dfrac{n-1}{c}, 1\right) \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (7.8)

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t\in[0,c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{7.11}$$

$$\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} = {}_{k+1}q_x - {}_kq_x = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & k < \lfloor c \rfloor \\ 1 - \dfrac{\lfloor c\rfloor}{c}, & k = \lfloor c \rfloor \end{cases} \tag{7.12}$$

(i) Використовуючи (7.9), (7.10) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості n-річного мішаного страхування, отримуємо:

$$A_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k\big\} + v^n\mathsf{Pr}\big\{K(x)\geq n\big\} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1}\frac{1}{c} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \frac{v(1-v^n)}{c(1-v)} + v^n\left(1-\frac{n}{c}\right) = \\ = \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right).$$

Звідси й за формулою (7.4) про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями n-річного мішаного страхування та n-річного ануїтету маємо отримуємо твердження цього пункту.

(ii) Згідно з пунктом (i)

$$ {}^2A_{x:\,\overline{n}|} = \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta n})}{c(1-e^{-2\delta})} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right). $$

Застосовуючи теорему про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо, отримуємо:

$$ \begin{aligned} \mathsf{Var}\big[Y\big] &= \frac{{}^2A_{x:\,\overline{n}|} - A_{x:\,\overline{n}|}^{\;2}}{d^2} = \\ &= \frac{1}{(1-e^{-\delta})^2}\left[\frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta n})}{c(1-e^{-2\delta})} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta n})}{c(1-e^{-\delta})} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)^2\right]. \end{aligned} $$

(iii) Випливає з (7.9) і теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо.

(iv) Випливає з (7.9) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо. □

2.8 Відкладений пожиттєвий ануїтет пренумерандо

2.8.1 Означення

Відкладений на l років пожиттєвий ануїтет пренумерандо виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного року, починаючи з віку $x+l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди), допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & k \ge l \end{cases}$$

$$v_k = v^k, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$$

$$y_k = \begin{cases} 0, & k < l \\ \sum\limits_{j=l}^{k} v^j, & k \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < l \\ \ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \ddot{a}_{\overline{l}|}, & k \ge l \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету пренумерандо* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & K < l \\ \sum\limits_{k=l}^{K} v^k, & K \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{l}|}, & K \ge l \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \, \dfrac{1 - v^{K-l+1}}{d}, & K \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \ddot{a}_{\overline{K-l+1}|}, & K \ge l \end{cases} \tag{8.1}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l *років пожиттєвого ануїтету пренумерандо* позначається ${}_{l|}\ddot{a}_x$ і визначається формулою:

$${}_{l|}\ddot{a}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=l}^{\infty} v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1}|} \, \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1}|} \; {}_k p_x \, q_{x+k}. \tag{8.2}$$

2.8.2 Властивості

Теорема 8.1. (про функцію розподілу Y)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_k q_x\,, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k}|} - \ddot{a}_{\overline{l}|}, \ddot{a}_{\overline{k+1}|} - \ddot{a}_{\overline{l}|}\big), \quad k \ge l \\ 1, & y \ge \frac{v^l}{d} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_k q_x\,, & y \in \big[v^l \ddot{a}_{\overline{k-l}|}, v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1}|}\big), \quad k \ge l \\ 1, & y \ge \frac{v^l}{d} \end{cases}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_K\big(-1 - \frac{1}{\delta}\ln(v^l - dy)\big), & 0 \le y < \frac{v^l}{d} \\ 1, & y \ge \frac{v^l}{d} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{\lfloor -\frac{1}{\delta}\ln(v^l - dy)\rfloor} q_x\,, & 0 \le y < \frac{v^l}{d} \\ 1, & y \ge \frac{v^l}{d} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 8.1.*

Наслідок 8.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$.*

- *Нехай* ${}_k q_x < 1 \ \forall k \in \mathbf{N}$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, {}_l q_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & p \in (\,{}_k q_x\,, {}_{k+1} q_x\,], \quad k \ge l \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{k_0} q_x < 1 = {}_{k_0+1} q_x\,$, $k_0 > l - 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, {}_l q_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & p \in (\,{}_k q_x\,, {}_{k+1} q_x\,], \quad k = l, \ldots, k_0 - 1 \\ \ddot{a}_{\overline{k_0+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & p \in (\,{}_{k_0} q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_l q_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = 0$, $p \in (0,1)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 8.1.1.*

Теорема 8.2. (про властивості відкладеного пожиттєвого ануїтету пренумерандо)

(i) *зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо особи (x) з пожиттєвим ануїтетом пренумерандо особи $(x + l)$*

$$_{l|}\ddot{a}_x = v^l\, {}_l p_x\, \ddot{a}_{x+l} = {}_l E_x\, \ddot{a}_{x+l}; \tag{8.3}$$

(ii) *зв'язок відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пожиттєвим та l-річним ануїтетами пренумерандо*

$$_{l|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{l|}}; \tag{8.4}$$

(iii) *актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат*

$$ {}_{l|}\ddot{a}_x = \sum_{k=l}^{\infty} v^k \, {}_k p_x = \sum_{k=l}^{\infty} {}_k E_x \, ; $$

(iv) *зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладеного на l років пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці року та відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо*

$$ {}_l E_x = d \, {}_{l|}\ddot{a}_x + {}_{l|}A_x; \tag{8.5} $$

(v) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо*

$$ {}_{l|}\ddot{a}_x = v p_x \, {}_{l-1|}\ddot{a}_{x+1} = E_x \, {}_{l-1|}\ddot{a}_{x+1}, \quad n \in \mathbf{N}. $$

Вправа 3. *Довести теорему 8.2.*

Теорема 8.3. (про дисперсію теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо)

$$ \mathsf{Var}[Y] = \frac{1}{d^2} \left(v^{2l} \, {}_l p_x \, {}_l q_x + {}_{l|}{}^2A_x - \left({}_{l|}A_x \right)^2 - 2v^l \, {}_l q_x \, {}_{l|}A_x \right) = $$
$$ = \frac{2}{d} \left(v^l \, {}_{l|}\ddot{a}_x - {}_{l|}{}^2\ddot{a}_x \right) + {}_{l|}{}^2\ddot{a}_x - \left({}_{l|}\ddot{a}_x \right)^2, \tag{8.6} $$

де ${}_{l|}{}^2\ddot{a}_x$, ${}_{l|}{}^2A_x$ позначають відповідно актуарні теперішні вартості відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо і відкладеного на l років пожиттєвого страхування з виплатою в кінці року для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.

Вправа 4. *Довести теорему 8.3.*

Теорема 8.4. (про відкладений пожиттєвий ануїтет пренумерандо для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи (x), що має відкладений на l років пожиттєвий ануїтет пренумерандо,*

$$ \mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{8.7} $$

Тоді:

(i) $ {}_{l|}\ddot{a}_x = \dfrac{e^{-(\mu+\delta)l}}{1 - e^{-(\mu+\delta)}}; $

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{e^{-(\mu+2\delta)l}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\left(\dfrac{1+e^{-(\mu+\delta)}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \dfrac{e^{-\mu l}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right);$

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1-e^{-\mu k}, & y \in \big[v^l \ddot{a}_{\overline{k-l|}}, v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1|}}\big), \quad k \geq l \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{d} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in \big(0, 1-e^{-\mu l}\big] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & p \in \big(1-e^{-\mu k}, 1-e^{-\mu(k+1)}\big], \quad k \geq l \end{cases}$$

Вправа 5. *Довести теорему 8.4.*

Теорема 8.5. (про відкладений пожиттєвий ануїтет пренумерандо для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має відкладений на* l *років пожиттєвий ануїтет пренумерандо, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра)* $(l < c)$:

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{8.8}$$

Тоді:

(i) $${}_{l|}\ddot{a}_x = \frac{v^l}{d}\left(1 - \frac{l}{c} - \frac{v(1-v^{c-l})}{cd}\right) = \\ = \frac{e^{-\delta l}}{1-e^{-\delta}}\left(1 - \frac{l}{c} - \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta(c-l)})}{c(1-e^{-\delta})}\right);$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-2\delta l}}{(1-e^{-\delta})^2}\left[\frac{l}{c}\left(1-\frac{l}{c}\right) + \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta(c-l)})}{c(1-e^{-2\delta})} - \right. \\ \left. - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta(c-l)})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2 - \frac{2le^{-\delta}(1-e^{-\delta(c-l)})}{c^2(1-e^{-\delta})}\right];$$

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{k}{c}, & y \in \big[v^l \ddot{a}_{\overline{k-l|}}, v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1|}}\big), \quad k = l, \ldots, c-1 \\ 1, & y \geq v^l \ddot{a}_{\overline{c-l|}} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in \big(0, \frac{l}{c}\big] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & p \in \big(\frac{k}{c}, \frac{k+1}{c}\big], \quad k = l, \ldots, c-2 \\ \ddot{a}_{\overline{c|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & p \in \big(1-\frac{1}{c}, 1\big) \end{cases}$$

Вправа 6. *Довести теорему 8.5.*

2.9 Відкладений строковий ануїтет пренумерандо

2.9.1 Означення

Відкладений на l років n-річний ануїтет пренумерандо виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного року, починаючи з віку $x+l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди) протягом n років, допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k < l \\ 1, & l \le k < l+n \\ 0, & k \ge l+n \end{cases}$$

$$v_k = v^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$y_k = \begin{cases} 0, & k < l \\ \sum\limits_{j=l}^{k} v^j, & l \le k < l+n \\ \sum\limits_{j=l}^{l+n-1} v^j, & k \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < l \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & l \le k < l+n \\ \ddot{a}_{\overline{l+n|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & k \ge l+n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо $Y = Y(x)$* має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & K < l \\ \sum\limits_{j=l}^{K} v^j, & l \le K < l+n \\ \sum\limits_{j=l}^{l+n-1} v^j, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & l \le K < l+n \\ \ddot{a}_{\overline{l+n|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & K \ge l+n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \, \dfrac{1 - v^{K-l+1}}{d}, & l \le K < l+n \\ v^l \, \dfrac{1 - v^n}{d}, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \ddot{a}_{\overline{K-l+1|}}, & l \le K < l+n \\ v^l \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \ge l+n \end{cases} \tag{9.1}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо позначається ${}_{l|n}\ddot{a}_x$ і визначається формулою:

$$
{}_{l|n}\ddot{a}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1|}}\ \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} + v^l \ddot{a}_{\overline{n|}} \mathsf{Pr}\big\{K \geq l+n\big\} =
$$
$$
= \sum_{k=l}^{l+n-1} v^l \ddot{a}_{\overline{k-l+1|}}\ {}_k p_x\, q_{x+k} + v^l \ddot{a}_{\overline{n|}}\ {}_{l+n}p_x\,. \quad (9.2)
$$

2.9.2 Властивості

Вправа 1. *Сформулювати й довести теорему про функцію розподілу відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо.*

Вправа 2. *Сформулювати й довести наслідок про процентиль теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо.*

Вправа 3. *Сформулювати й довести теорему про властивості актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо:*

(i) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю n-річного ануїтету пренумерандо особи $(x+l)$*

(ii) *зв'язок з актуарними теперішніми вартостями $(l+n)$-річного та l-річного ануїтетів пренумерандо*

(iii) *зображення у формі поточних виплат*

(iv) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю відкладеного на l років n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці року*

(v) *рекурентна формула*

Вправа 4. *Сформулювати й довести теорему про дисперсію теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо (навести два різних способи доведення).*

Вправа 5. *Сформулювати й довести теорему про відкладений строковвий ануїтет пренумерандо для випадку сталої сили смертності:*

(i) ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{(m)}$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big]$

(iii) $F_Y(y)$

(iv) ξ_Y^p

Вправа 6. *Сформулювати й довести теорему про відкладений строковвий ануїтет пренумерандо для рівномірного розподілу:*

(i) ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{(m)}$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big]$

(iii) $F_Y(y)$

(iv) ξ_Y^p

2.10 Пожиттєвий ануїтет пренумерандо з гарантією

2.10.1 Означення

Пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного року протягом n років, якщо ця особа не доживає до віку $x+n$, і виплачується допоки особа (x) залишається живою, якщо ця особа доживає до віку $x+n$ (тобто за цією страховою угодою гарантовано буде сплачено ануїтет пренумерандо протягом n років). Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$
\begin{aligned}
&b_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;\\
&v_k = v^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;\\
&y_k = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & k < n \\ \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & k \ge n \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отже, *теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$
Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K \ge n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-v^n}{d}, & K < n \\ \dfrac{1-v^{K+1}}{d}, & K \ge n \end{cases} \tag{10.1}
$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією позначається $\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ і визначається формулою:

$$
\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \ddot{a}_{\overline{n}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K < n\big\} + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} =
$$

$$
= \ddot{a}_{\overline{n}|}\ {}_n q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\ {}_k p_x\, q_{x+k}.
$$

2.10.2 Властивості

Теорема 10.1. (про функцію розподілу Y)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}_{\overline{n|}} \\ {}_kq_x\,, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k|}}, \ddot{a}_{\overline{k+1|}}\big), \quad k \geq n \\ 1, & y \geq \frac{1}{d} \end{cases} \tag{10.2}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}_{\overline{n|}} \\ F_K\big(-1 - \frac{1}{\delta}\ln(1-dy)\big), & \ddot{a}_{\overline{n|}} \leq y < \frac{1}{d} \\ 1, & y \geq \frac{1}{d} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}_{\overline{n|}} \\ {}_{\lfloor -\frac{1}{\delta}\ln(1-dy)\rfloor}q_x\,, & \ddot{a}_{\overline{n|}} \leq y < \frac{1}{d} \\ 1, & y \geq \frac{1}{d} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 10.1.*

Наслідок 10.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$.*

- *Нехай* ${}_kq_x < 1 \ \ \forall k \in \mathbf{N}$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & p \in (0, {}_nq_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p \in (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,], \quad k \geq n \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{k_0}q_x < 1 = {}_{k_0+1}q_x\,,\ \ k_0 > n-1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & p \in (0, {}_nq_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p \in (\,{}_kq_x\,, {}_{k+1}q_x\,], \quad k = n, \ldots, k_0 - 1 \\ \ddot{a}_{\overline{k_0+1|}}, & p \in (\,{}_{k_0}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_nq_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = \ddot{a}_{\overline{n|}}$, $p \in (0,1)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 10.1.1.*

Теорема 10.2. (про властивості пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією)

(i) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією та відкладеного на n років пожиттєвого ануїтету пренумерандо*

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_{n|}\ddot{a}_x; \tag{10.3}$$

(ii) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією та пожиттєвого ануїтету пренумерандо особи $(x+n)$*

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_nE_x\,\ddot{a}_{x+n}; \tag{10.4}$$

(iii) *зв'язок актуарних теперішніх вартостей пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією і пожиттєвого та n-річного ануїтетів пренумерандо*

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}; \tag{10.5}$$

(iv) *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією у формі поточних виплат*

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k\,{}_kp_x\,; \tag{10.6}$$

(v) *рекурентна формула для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією*

$$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = 1 + q_x\ddot{a}_{\overline{n-1|}} + vp_x\ddot{a}_{\overline{x+1:\overline{n-1|}}}.$$

Вправа 3. *Довести теорему 10.2.*

Теорема 10.3. (про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{1}{d^2}\Big(v^{2n}\,{}_np_x\,{}_nq_x\, + \,{}_{n|}{}^2A_x - \big({}_{n|}A_x\big)^2 - 2v^n\,{}_nq_x\,{}_{n|}A_x\Big) =$$
$$= \frac{2}{d}\big(v^n\,{}_{n|}\ddot{a}_x - \,{}_{n|}{}^2\ddot{a}_x\big) + \,{}_{n|}{}^2\ddot{a}_x - \big({}_{n|}\ddot{a}_x\big)^2, \tag{10.7}$$

де ${}_{n|}{}^2\ddot{a}_x$, ${}_{n|}{}^2A_x$ позначають відповідно актуарні теперішні вартості відкладеного на n років пожиттєвого ануїтету пренумерандо і відкладеного на n років пожиттєвого страхування з виплатою в кінці року для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.

Вправа 4. *Довести теорему 10.3.*

Теорема 10.4. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи (x), що має пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{10.8}$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \dfrac{1-e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta}} + \dfrac{e^{-(\mu+\delta)n}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{e^{-(\mu+2\delta)n}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\left(\dfrac{1+e^{-(\mu+\delta)}}{1-e^{-(\mu+2\delta)}} - \dfrac{e^{-\mu n}}{1-e^{-(\mu+\delta)}}\right)$;

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ 1-e^{-\mu k}, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k}|}, \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\big), \quad k \ge n \\ 1, & y \ge \frac{1}{d} \end{cases}$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & p \in \big(0, 1-e^{-\mu n}\big] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & p \in \big(1-e^{-\mu k}, 1-e^{-\mu(k+1)}\big], \quad k \ge n \end{cases}$$

Вправа 5. *Довести теорему 10.4.*

Теорема 10.5. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи* (x)*, що має пожиттєвий ануїтет пренумерандо з* n*-річною гарантією, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра)* $(n < c)$:

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{10.9}$$

Тоді:

(i) $$\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \frac{1-v^n}{d} + \frac{v^n}{d}\left[1 - \frac{n}{c} - \frac{v(1-v^{c-n})}{cd}\right] = \\ = \frac{1-e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta}} + \frac{e^{-\delta n}}{1-e^{-\delta}}\left[1 - \frac{n}{c} - \frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta(c-n)})}{c(1-e^{-\delta})}\right];$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-2\delta n}}{(1-e^{-\delta})^2}\left[\frac{n}{c}\left(1-\frac{n}{c}\right) + \frac{e^{-2\delta}(1-e^{-2\delta(c-n)})}{c(1-e^{-2\delta})} - \right. \\ \left. - \left(\frac{e^{-\delta}(1-e^{-\delta(c-n)})}{c(1-e^{-\delta})}\right)^2 - \frac{2ne^{-\delta}(1-e^{-\delta(c-n)})}{c^2(1-e^{-\delta})}\right];$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ \dfrac{k}{c}, & y \in \big[\ddot{a}_{\overline{k}|}, \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\big), \quad k = n, \dots, c-1 \\ 1, & y \ge \ddot{a}_{\overline{c}|} \end{cases}$$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & p \in \left(0, \frac{n}{c}\right] \\ \ddot{a}_{\overline{k+1}|}, & p \in \left(\frac{k}{c}, \frac{k+1}{c}\right], \quad k = n, \ldots, c-2 \\ \ddot{a}_{\overline{c}|}, & p \in \left(1 - \frac{1}{c}, 1\right) \end{cases}$$

Вправа 6. *Довести теорему 10.5.*

2.11 Ануїтет постнумерандо

2.11.1 Означення

Загальний дискретний ануїтет постнумерандо визначається двома функціями (послідовностями):

- *функцією виплат* (*функцією винагороди*)

$$b_k, \quad k \in \mathbf{N};$$

- *функцією дисконтування*

$$v_k, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{11.1}$$

Величина b_k — це виплата, яку здійснює страхова організація в кінці k-го року

$$(x+k-1, x+k],$$

тобто в момент часу

$$x+k,$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x). Функція дисконтування (11.1) є звуженням на множину натуральних чисел функції дисконтування

$$v_t, \quad t \geq 0.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат y_k* за формулою

$$y_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{k} b_j v_j, & k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Отже, y_k — це теперішня вартість дискретного ануїтету постнумерандо, який сплачується особі (x) протягом k років (остання виплата здійснюється в кінці

k-го року). Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю дискретного ануїтету постнумерандо*:

$$Y(x) = y_{K(x)} = \begin{cases} 0, & K(x) = 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{K(x)} b_j v_j, & K(x) > 0 \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j v_j \right) \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j v_j \right) {}_k p_x \, q_{x+k}$$

теперішньої вартості ануїтету постнумерандо називається *актуарною теперішньою вартістю ануїтету постнумерандо.* Залежно від вигляду функцій виплат та дисконтування отримуємо різні види ануїтетів (наприклад пожиттєвий, строковий, відкладений пожиттєвий, відкладений строковий).

Зауваження 1. Теперішня вартість дискретного ануїтету постнумерандо зі сталою функцією виплат 1, що сплачується протягом k років (остання виплата здійснюється в кінці k-го року) та зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $\delta = -\ln v$, позначається $a_{\overline{k}|}$ і визначається формулою:

$$a_{\overline{k}|} = \sum_{j=1}^{k} v^j = v\,\frac{1 - v^k}{1 - v} = \frac{1 - v^k}{v^{-1} - 1} = \frac{1 - v^k}{i}.$$

Зокрема, з цієї формули отримуємо такі оцінки:

$$v = \frac{1}{1+i} = a_{\overline{1}|} \le a_{\overline{k}|} < \frac{1}{i}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

2.11.2 Пожиттєвий ануїтет постнумерандо

Пожиттєвий ануїтет постнумерандо виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного року, допоки вона залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_k &= 1, \quad k \in \mathbf{N}; \\ v_k &= v^k, \quad k \in \mathbf{N}; \\ y_k &= a_{\overline{k}|}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = a_{\overline{K|}} = \frac{1 - v^K}{i}.$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо позначається a_x і визначається формулою:

$$a_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k|}}\ \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\overline{k|}}\ {}_k p_x\, q_{x+k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k|}}\ {}_k p_x\, q_{x+k}.$$

Зауваження 1. Оскільки

$$\ddot{a}_{\overline{k+1|}} = \sum_{j=0}^{k} v^j = 1 + \sum_{j=1}^{k} v^j = 1 + a_{\overline{k|}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

то

$$\ddot{a}_x = \mathsf{E}\big[\ddot{a}_{\overline{K(x)+1|}}\big] = 1 + \mathsf{E}\big[a_{\overline{K(x)|}}\big] = 1 + a_x. \tag{11.2}$$

Вправа 1. *Довести формулу про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці року та пожиттєвого ануїтету постнумерандо:*

$$v = d a_x + A_x.$$

Вправа 2. *Довести формулу дисперсії для теперішньої вартості $Y = Y(x)$ пожиттєвого ануїтету постнумерандо:*

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_x - A_x^2}{d^2}.$$

2.11.3 Строковий ануїтет постнумерандо

(Строковий) n-річний ануїтет постнумерандо виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного року протягом n років, допоки вона залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

$$v_k = v^k, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$y_k = \begin{cases} a_{\overline{k|}}, & k < n \\ a_{\overline{n|}}, & k \ge n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість* n*-річного ануїтету постнумерандо* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K|}}, & K < n \\ a_{\overline{n|}}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^K}{i}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^n}{i}, & K \geq n \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість n*-річного ануїтету постнумерандо* позначається $a_{x:\,\overline{n|}}$ і визначається формулою:

$$a_{x:\,\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k|}}\ \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} + a_{\overline{n|}}\ \mathsf{Pr}\big\{K \geq n\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_{\overline{k|}}\ {}_k p_x\, q_{x+k} + a_{\overline{n|}}\ {}_n p_x\,.$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* $\ddot{a}_{x:\,\overline{n|}}$ *та* $a_{x:\,\overline{n|}}$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* $a_{x:\,\overline{n|}}$ *та* $A_{x:\,\overline{n|}}$.

Вправа 3. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *ануїтету постнумерандо.*

2.11.4 Відкладений пожиттєвий ануїтет постнумерандо

Відкладений на l *років пожиттєвий ануїтет постнумерандо* виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного року, починаючи з віку $x+l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди), допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x + l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq l \\ 1, & k > l \end{cases}$$

$$v_k = v^k, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$y_k = \begin{cases} 0, & k \leq l \\ \sum\limits_{j=l+1}^{k} v^j, & k > l \end{cases} = \begin{cases} 0, & k \leq l \\ a_{\overline{k|}} - a_{\overline{l|}}, & k > l \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < l \\ a_{\overline{k|}} - a_{\overline{l|}}, & k \geq l \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & K \le l \\ \sum\limits_{j=l+1}^{K} v^j, & K > l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ a_{\overline{K|}} - a_{\overline{l|}}, & K \ge l \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \dfrac{1 - v^{K-l}}{i}, & K \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l a_{\overline{K-l|}}, & K \ge l \end{cases}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо позначається ${}_{l|}a_x$ і визначається формулою:

$${}_{l|}a_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=l}^{\infty} v^l a_{\overline{k-l|}} \, \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} = \sum_{k=l}^{\infty} v^l a_{\overline{k-l|}} \ {}_k p_x \, q_{x+k}.$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|}\ddot{a}_x$ *та* ${}_{l|}a_x$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|}a_x$ *та* ${}_{l|}A_x$.

Вправа 3. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *ануїтету постнумерандо.*

2.11.5 Відкладений строковий ануїтет постнумерандо

Відкладений на l років n-річний ануїтет постнумерандо виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного року, починаючи з віку $x + l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди), протягом n років,допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x + l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le l \\ 1, & l < k \le l + n \\ 0, & k > l + n \end{cases}$$

$$v_k = v^k, \quad k \in \mathbf{N};$$

$$y_k = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le l \\ \sum\limits_{j=l+1}^{k} v^j, & l < k \le l + n \\ \sum\limits_{j=l+1}^{l+n} v^j, & k > l + n \end{cases} =$$

$$
= \begin{cases} 0, & k \le l \\ a_{\overline{k}|} - a_{\overline{l}|}, & l < k \le l+n \\ a_{\overline{l+n}|} - a_{\overline{l}|}, & k > l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & k < l \\ a_{\overline{k}|} - a_{\overline{l}|}, & l \le k < l+n \\ a_{\overline{l+n}|} - a_{\overline{l}|}, & k \ge l+n \end{cases}
$$

Отже, *теперішня вартість* $Y = Y(x)$ *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету постнумерандо* має вигляд:

$$
Y = \begin{cases} 0, & 1 \le K \le l \\ \sum\limits_{j=l+1}^{K} v^j, & l < K \le l+n \\ \sum\limits_{j=l+1}^{l+n} v^j, & K > l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ a_{\overline{K}|} - a_{\overline{l}|}, & l \le K < l+n \\ a_{\overline{l+n}|} - a_{\overline{l}|}, & K \ge l+n \end{cases} =
$$

$$
= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \, \dfrac{1 - v^{K-l}}{i}, & l \le K < l+n \\ v^l \, \dfrac{1 - v^n}{i}, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l a_{\overline{K-l}|}, & l \le K < l+n \\ v^l a_{\overline{n}|}, & K \ge l+n \end{cases}
$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l *років* n*-річного ануїтету постнумерандо* позначається ${}_{l|n}a_x$ і визначається формулою:

$$
{}_{l|n}a_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=l}^{l+n-1} v^l a_{\overline{k-l}|} \, \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} + v^l a_{\overline{n}|} \, {}_{l+n}p_x =
$$

$$
= \sum_{k=l}^{l+n-1} v^l a_{\overline{k-l}|} \;\; {}_kp_x \, q_{x+k} + v^l a_{\overline{n}|} \, {}_{l+n}p_x \, .
$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|n}\ddot{a}_x$ *та* ${}_{l|n}a_x$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|n}a_x$ *та* ${}_{l|n}A_x$.

Вправа 3. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету постнумерандо.*

2.11.6 Пожиттєвий ануїтет постнумерандо з гарантією

Пожиттєвий ануїтет постнумерандо з n*-річною гарантією* виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного року протягом n років, якщо ця особа не доживає до віку $x + n$, і виплачується допоки особа (x) залишається живою, якщо ця особа доживає до віку $x + n$ (тобто за цією страховою угодою гарантовано буде сплачено ануїтет постнумерандо протягом n років). Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$b_k = 1, \quad k \in \mathbf{N};$$
$$v_k = v^k, \quad k \in \mathbf{N};$$
$$y_k = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} v^j, & k < n \\ \sum\limits_{j=1}^{k} v^j, & k \geq n \end{cases} = \begin{cases} a_{\overline{n}|}, & k < n \\ a_{\overline{k}|}, & k \geq n \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з n-річною гарантією* $Y = Y(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{n}|}, & K < n \\ a_{\overline{K}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^n}{i}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^K}{i}, & K \geq n \end{cases} \tag{11.3}$$

де $K = K(x)$ позначає випадкову величину цілочисельної майбутньої тривалості життя особи (x).

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з n-річною гарантією позначається $a_{\overline{\overline{x:\,\overline{n}|}}}$ і визначається формулою:

$$a_{\overline{\overline{x:\,\overline{n}|}}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = a_{\overline{n}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K < n\big\} + \sum_{k=n}^{\infty} a_{\overline{k}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K = k\big\} =$$
$$= a_{\overline{n}|}\ {}_n q_x + \sum_{k=n}^{\infty} a_{\overline{k+1}|}\ {}_k p_x\, q_{x+k}.$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* $\ddot{a}_{\overline{\overline{x:\,\overline{n}|}}}$ *та* $a_{\overline{\overline{x:\,\overline{n}|}}}$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* $a_{\overline{\overline{x:\,\overline{n}|}}}$ *та* ${}_{n|}a_x$.

Вправа 3. *Вивести зв'язок між* $a_{\overline{\overline{x:\,\overline{n}|}}}$ *та* ${}_{n|}A_x$.

Вправа 4. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *ануїтету постнумерандо.*

2.12 Пропорційна поправка

При дискретному ануїтеті з річними виплатами кожна виплата здійснюється або за наступний рік (ануїтет пренумерандо), або за попередній рік (ануїтет постнумерандо). Може виникнути природнє питання щодо поправки (коригування) останньої виплати за частину року

- $[T(x), K(x)+1]$ (ануїтет пренумерандо)
- $[K(x), T(x)]$ (ануїтет постнумерандо)

Наприклад, особа придбала ануїтет пренумерандо. Якщо страхова подія настає через 1 місяць після того, як отримано останню (річну) виплату згідно зі страховою угодою, то цілком природнім буде відшкодувати (страховій організації) 11 місяців, які особа не дожила до кінця періоду, за який вона отримала виплату.

Другий (протилежний) приклад — ануїтет постнумерандо. Якщо страхова подія настає за 1 місяць до того, як особа має дістати чергову (річну) виплату за цим ануїтетом, цілком природньою є остання виплата (відшкодування страховою організацією) за 11 місяців, які особа прожила після чергової повної (річної) виплати.

Ідея визначення й обчислення цієї поправки — заміна останньої одноразової виплати еквівалентною (однаковою за вартістю) неперервною рівномірною протягом року виплатою, здійснення якої припиняється у момент настання страхової події.

Спершу розглянемо загальний ануїтет пренумерандо з параметрами b_k, v^k. Застрахована особа отримує останню виплату розміром b_K в момент часу $K(x)$ (відносно часу укладання угоди). Припустимо, що ця виплата *заробляється* зі сталою, рівномірною протягом року

$$[K(x), K(x)+1)$$

інтенсивністю c. Тоді інтенсивність c знаходимо з рівності вартостей обох виплат — дискретної і неперервної — в момент часу $K(x)$:

$$b_K = \int_0^1 cv^t\,dt = c\bar{a}_{\overline{1}|}.$$

Отже,

$$c = b_K \frac{1}{\bar{a}_{\overline{1}|}} = b_K \frac{\delta}{1-v} = b_K \frac{\delta}{d}.$$

Оскільки нарахування припиняється в момент часу $T(x)$, то *незаробленою* (що потребує відшкодування) протягом часу

$$K(x) + 1 - T(x)$$

є сума — її вартість в момент часу $T(x)$:

$$\int_0^{K+1-T} cv^t\,dt = c\bar{a}_{\overline{K+1-T}|} = b_K \frac{\delta}{d}\,\bar{a}_{\overline{K+1-T}|} = b_K \frac{1-v^{K+1-T}}{d}.$$

Отже, теперішня вартість $Y = Y(x)$ цього ануїтету пренумерандо мінус *незароблене* відшкодування має вигляд:

$$Y = \sum_{j=0}^{K} b_j v^j - v^T c\bar{a}_{\overline{K+1-T}|} = \sum_{j=0}^{K} b_j v^j - b_K \frac{v^T - v^{K+1}}{d}.$$

Цю формулу можна отримати інакше. Вартість в момент часу $K(x)$ *заробленої* останньої виплати за період часу

$$T(x) - K(x)$$

становить

$$\int_0^{T-K} cv^t\, dt = c\bar{a}_{\overline{T-K}|} = b_K \frac{\delta}{d}\, \bar{a}_{\overline{T-K}|} = b_K \frac{1 - v^{T-K}}{d}.$$

Отже, теперішня вартість $Y = Y(x)$ цього ануїтету пренумерандо до моменту $K(x) - 1$ включно плюс вартість *заробленої* останньої виплати має вигляд:

$$Y = \sum_{j=0}^{K-1} b_j v^j + v^K c\bar{a}_{\overline{T-K}|} = \sum_{j=0}^{K-1} b_j v^j + b_K\, \frac{v^K - v^T}{d} =$$
$$= \sum_{j=0}^{K} b_j v^j - b_K v^K + b_K\, \frac{v^K - v^T}{d} = \sum_{j=0}^{K} b_j v^j - b_K\, \frac{v^T - v^{K+1}}{d}.$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[b_K v^{K+1}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^k\, {}_kp_x\, A^1_{x+k:\,\overline{1}|},$$

$$\mathsf{E}\big[b_K v^T\big] = \int_0^{\infty} b_{\lfloor t\rfloor} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} b_{\lfloor t\rfloor} v^t\, {}_tp_x\, \mu(x+t)\, dt =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^1 v^{k+s}\, {}_{k+s}p_x\, \mu(x+k+s)\, ds =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^k\, {}_kp_x \int_0^1 v^s\, {}_sp_{x+k}\, \mu(x+k+s)\, ds = \sum_{k=0}^{\infty} b_k v^k\, {}_kp_x\, \bar{A}^1_{x+k:\,\overline{1}|},$$

то актуарна теперішня вартість $\mathsf{E}\big[Y\big]$ ануїтету пренумерандо з урахуванням відшкодування має вигляд:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} b_j v^j\, {}_kp_x\, q_{x+k} - \frac{1}{d}\sum_{k=0}^{\infty} b_k v^k\, {}_kp_x\, \big(\bar{A}^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} - A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|}\big).$$

При виведенні формул використано рівності:

$$A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = v\, q_{x+k}\,, \qquad {}_{k+s}p_x \;=\; {}_kp_x\;{}_{x+k}p_s\,.$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\bar{A}^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} \implies \frac{1}{d}\big(\bar{A}^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} - A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|}\big) = \\ = \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) v q_{x+k}.$$

Отже, за цього припущення маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} b_j v^j\, {}_kp_x\, q_{x+k} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} b_k v^k\, {}_kp_x\, A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} b_j v^j\, {}_kp_x\, q_{x+k} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right)\sum_{k=0}^{\infty} b_k v^{k+1}\, {}_kp_x\, q_{x+k}.$$

Цей тип ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за період від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню річну виплату, називається ***ануїтетом пренумерандо з пропорційною поправкою***.

Розглянемо тепер випадок ануїтету постнумерандо з параметрами b_k, v^k. Застрахована особа отримує останню виплату розміром b_K в момент часу $K(x)$ (відносно часу укладання угоди). Якби ця особа дожила до віку $K(x)+1$, то вона б отримала за прожитий проміжок

$$(K(x), K(x)+1]$$

наступну виплату b_{K+1} в момент часу $K(x)+1$. Припустимо, що ця виплата *заробляється* зі сталою, рівномірною протягом року інтенсивністю c. Тоді інтенсивність c знаходимо з рівності вартостей обох виплат — дискретної і неперервної — в момент часу $K(x)+1$:

$$b_{K+1} = \int_0^1 c v^{t-1}\, dt = c\bar{s}_{\overline{1}|}.$$

Отже,

$$c = b_{K+1}\frac{1}{\bar{s}_{\overline{1}|}} = b_{K+1}\frac{\delta}{v^{-1}(1-v)} = b_{K+1}\frac{\delta}{i}.$$

Оскільки нарахування припиняється в момент часу $T(x)$, то *заробленою* (що потребує відшкодування) протягом часу

$$T(x) - K(x)$$

є сума — її вартість в момент часу $T(x)$:

$$\int\limits_0^{T-K} c v^{t-(T-K)}\,dt = c\bar{s}_{\overline{T-K}|} = b_{K+1}\frac{\delta}{i}\; v^{-T+K}\;\bar{a}_{\overline{T-K}|} = b_{K+1}\frac{v^{-T+K}-1}{i}.$$

Отже, теперішня вартість цього ануїтету постнумерандо плюс *зароблене* відшкодування має вигляд:

$$Y = \sum_{j=1}^{K} b_j v^j + v^T\, c\bar{s}_{\overline{T-K}|} = \sum_{j=1}^{K} b_j v^j + b_{K+1}\frac{v^K - v^T}{i}.$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[b_{K+1}v^K\big] = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^k\,{}_kp_x\,q_{x+k} = \frac{1}{v}\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^k\,{}_kp_x\,A^1_{x+k:\,\overline{1}|}$$

$$\mathsf{E}\big[b_{K+1}v^T\big] = \int\limits_0^{\infty} b_{\lfloor t\rfloor+1}v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_k^{k+1} b_{\lfloor t\rfloor+1}v^t\,{}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}\int\limits_0^1 v^{k+s}\,{}_{k+s}p_x\,\mu(x+k+s)\,ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^k\,{}_kp_x\int\limits_0^1 v^s\,{}_sp_{x+k}\,\mu(x+k+s)\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^k\,{}_kp_x\,\bar{A}^1_{x+k:\,\overline{1}|},$$

то актуарна теперішня вартість $\mathsf{E}\big[Y\big]$ ануїтету постнумерандо з урахуванням відшкодування має вигляд:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k} b_j v^j\,{}_kp_x\,q_{x+k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}v^k\,{}_kp_x\,\left(\frac{1}{d}\,A^1_{x+k:\,\overline{1}|} - \frac{1}{i}\,\bar{A}^1_{x+k:\,\overline{1}|}\right).$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\bar{A}^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} \implies \frac{1}{d}\, A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} - \frac{1}{i}\, \bar{A}^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \\ = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) v q_{x+k}.$$

Отже, за цього припущення маємо:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} b_j v^j \, {}_kp_x \, q_{x+k} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^k \, {}_kp_x \, A^{1}_{x+k:\,\overline{1}|} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} b_j v^j \, {}_kp_x \, q_{x+k} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1} v^{k+1} \, {}_kp_x \, q_{x+k}.$$

Цей тип ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за період від моменту здійснення останньої річної виплати до моменту настання страхової події, називається ***ануїтетом постнумерандо з пропорційною поправкою***, або ***завершеним ануїтетом постнумерандо***.

2.12.1 Пожиттєвий ануїтет

Нехай особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет пренумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\ddot{a}_{\overline{K+1}|} = \frac{1 - v^{K+1}}{d}.$$

Подальші міркування використовують результати розгляду загального ануїтету (пренумерандо і постнумерандо) з пропорційною поправкою. *Теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою* визначається формулою:

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \frac{v^T - v^{K+1}}{d} = \frac{1 - v^T}{d} = \ddot{a}_{\overline{T}|} = \frac{\delta}{d}\, \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{\delta}{d}\, \overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету. Отже, *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою*, яка позначається $\ddot{a}_x^{\{1\}}$, має вигляд:

$$\ddot{a}_x^{\{1\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \ddot{a}_x - \frac{\bar{A}_x - A_x}{d} = \frac{\delta}{d}\, \bar{a}_x. \tag{12.1}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\ddot{a}_x^{\{1\}} = \ddot{a}_x - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) A_x.$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню річну виплату, називається ***пожиттєвим ануїтетом пренумерандо з пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет постнумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$a_{\overline{K|}} = \frac{1 - v^K}{i}.$$

Теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою визначається формулою:

$$Y = a_{\overline{K|}} + \frac{v^K - v^T}{i} = \frac{1 - v^T}{i} = a_{\overline{T|}} = \frac{\delta}{i}\,\bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{\delta}{i}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету. Отже, *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою*, яка позначається $\mathring{a}_x$ або $a_x^{\{1\}}$, має вигляд:

$$\mathring{a}_x = a_x^{\{1\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = a_x + \frac{1}{d}\,A_x - \frac{1}{i}\,\bar{A}_x = \frac{\delta}{i}\,\bar{a}_x. \tag{12.2}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\mathring{a}_x = a_x^{\{1\}} = a_x + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A_x.$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої річної виплати до моменту настання страхової події, називається ***пожиттєвим ануїтетом постнумерандо з пропорційною поправкою***, або ***завершеним пожиттєвим ануїтетом постнумерандо***.

З формул (12.1) і (12.2) зокрема отримуємо:

$$\ddot{a}_x^{\{1\}} = \frac{i}{d}\cdot\mathring{a}_x = \frac{i}{d}\cdot a_x^{\{1\}}.$$

Приклад 1. Порівняти дисперсії пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою і завершеного пожиттєвого ануїтету постнумерандо.

Розв'язання. Дисперсія пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою дорівнює:

$$\mathsf{Var}\big[\ddot{a}_{\overline{T|}}\big] = \mathsf{Var}\left[\frac{1 - v^T}{d}\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{d^2}.$$

Дисперсія завершеного пожиттєвого ануїтету постнумерандо дорівнює:

$$\mathsf{Var}\big[a_{\overline{T|}}\big] = \mathsf{Var}\left[\frac{1-v^T}{i}\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{i^2}.$$

Оскільки

$$d = \frac{i}{1+i} < i,$$

то

$$\mathsf{Var}\big[\ddot{a}_{\overline{T|}}\big] > \mathsf{Var}\big[a_{\overline{T|}}\big].$$

□

2.12.2 Строковий ануїтет

Нехай особа (x) придбала n-річний ануїтет пренумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \ge n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-v^{K+1}}{d}, & K < n \\ \dfrac{1-v^n}{d}, & K \ge n \end{cases}$$

Подальші міркування використовують результати розгляду загального ануїтету (пренумерандо і постнумерандо) з пропорційною поправкою. *Теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою* визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} \dfrac{1-v^{K+1}}{d}, & K < n \\ \dfrac{1-v^n}{d}, & K \ge n \end{cases} - \begin{cases} \dfrac{v^T - v^{K+1}}{d}, & K < n \\ 0, & K \ge n \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1-v^T}{d}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \ge n \end{cases} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{T|}}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K \ge n \end{cases} = \frac{\delta}{d}\begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}}, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}}, & T \ge n \end{cases} = \frac{\delta}{d}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного n-річного ануїтету. Отже, *актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою*, яка позначається $\ddot{a}^{\{1\}}_{x:\overline{n|}}$, має вигляд:

$$\ddot{a}^{\{1\}}_{x:\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{d}\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} =$$
$$= \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} - A^1_{x:\overline{n|}}}{d} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}} - A_{x:\overline{n|}}}{d}. \quad (12.3)$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\ddot{a}^{\{1\}}_{x:\,\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) A^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right)\left(A_{x:\,\overline{n}|} - {}_{n}E_x\right).$$

Цей тип n-річного ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню (інтервальну) виплату, називається ***n*-річним ануїтетом пренумерандо з пропорційною поправкою**.

Нехай тепер особа (x) придбала n-річний ануїтет постнумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$Y = \begin{cases} a_{\overline{K}|}, & K < n \\ a_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^K}{i}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^n}{i}, & K \geq n \end{cases}$$

Теперішня вартість n-річного ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} \dfrac{1 - v^K}{i}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^n}{i}, & K \geq n \end{cases} + \begin{cases} \dfrac{v^K - v^T}{i}, & K < n \\ 0, & K \geq n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1 - v^T}{i}, & K < n \\ a_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} a_{\overline{T}|}, & K < n \\ a_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \frac{\delta}{i}\begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & T \geq n \end{cases} = \frac{\delta}{i}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного n-річного ануїтету. Отже, *актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою*, яка позначається $a^{\{1\}}_{x:\,\overline{n}|}$, має вигляд:

$$a^{\{1\}}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{i}\,\bar{a}_{x:\,\overline{n}|} = a_{x:\,\overline{n}|} + \frac{1}{d}\,A^{1}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{1}{i}\,\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|}. \tag{12.4}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$a^{\{1\}}_{x:\,\overline{n}|} = a_{x:\,\overline{n}|} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) A^{1}_{x:\,\overline{n}|} = a_{x:\,\overline{n}|} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right)\left(A_{x:\,\overline{n}|} - {}_{n}E_x\right).$$

Цей тип n-річного ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої річної виплати до моменту настання страхової події, називається ***n*-річним ануїтетом постнумерандо з пропорційною поправкою**, або **завершеним *n*-річним ануїтетом постнумерандо**.

З формул (12.3) і (12.4) зокрема отримуємо:

$$\ddot{a}^{\{1\}}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{i}{d}\cdot a^{\{1\}}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Вправа 1. *Порівняти дисперсії n-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою і завершеного n-річного ануїтету постнумерандо.*

2.12.3 Відкладений пожиттєвий ануїтет

Нехай особа (x) придбала відкладений на l років пожиттєвий ануїтет пренумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - \ddot{a}_{\overline{l}|}, & K \geq l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{v^l - v^{K+1}}{d}, & K \geq l \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести, що теперішня вартість Y відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{d}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету.

Вправа 2. *Довести, що актуарна теперішня вартість ${}_{l|}\ddot{a}_x^{\{1\}}$ відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{\{1\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = {}_{l|}\ddot{a}_x - \frac{{}_{l|}\bar{A}_x - {}_{l|}A_x}{d} = \frac{\delta}{d}\,{}_{l|}\bar{a}_x.$$

Вправа 3. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{\{1\}} = {}_{l|}\ddot{a}_x - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right){}_{l|}A_x.$$

Цей тип відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню річну виплату, називається ***відкладеним на l років пожиттєвим ануїтетом пренумерандо з пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала відкладений на l років пожиттєвий ануїтет постнумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} 0, & K < l \\ a_{\overline{K}|} - a_{\overline{l}|}, & K \geq l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{v^l - v^{K}}{i}, & K \geq l \end{cases}$$

Вправа 4. *Довести, що теперішня вартість Y відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{d}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету.

Вправа 5. *Довести, що актуарна теперішня вартість* ${}_{l|}a_x^{\{1\}}$ *відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$ {}_{l|}a_x^{\{1\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = {}_{l|}a_x + \frac{1}{d}\ {}_{l|}A_x - \frac{1}{i}\ {}_{l|}\bar{A}_x = \frac{\delta}{i}\ {}_{l|}\bar{a}_x. $$

Вправа 6. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$ {}_{l|}a_x^{\{1\}} = {}_{l|}a_x + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) {}_{l|}A_x. $$

Цей тип відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої річної виплати до моменту настання страхової події, називається ***відкладеним на*** l ***років пожиттєвим ануїтетом постнумерандо з пропорційною поправкою***, або ***завершеним відкладеним на*** l ***років пожиттєвим ануїтетом постнумерандо***.

Вправа 7. *Порівняти дисперсії відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою і завершеного відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету постнумерандо.*

2.12.4 Відкладений строковий ануїтет

Нехай особа (x) придбала відкладений на l років n-річний ануїтет пренумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$ \begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & l \le K < l+n \\ \ddot{a}_{\overline{l+n|}} - \ddot{a}_{\overline{l|}}, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{v^l - v^{K+1}}{d}, & l \le K < l+n \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{d}, & K \ge l+n \end{cases} $$

Вправа 1. *Вивести формулу для теперішньої вартості* Y *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою.*

Вправа 2. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості* ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{\{1\}}$ *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою.*

Вправа 3. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості* ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{\{1\}}$ *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою за припущення лінійної інтерполяції.*

Нехай тепер особа (x) придбала відкладений на l років n-річний ануїтет постнумерандо, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} 0, & K < l \\ a_{\overline{K|}} - a_{\overline{l|}}, & l \le K < l+n \\ a_{\overline{l+n|}} - a_{\overline{l|}}, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{v^l - v^K}{i}, & l \le K < l+n \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{i}, & K \ge l+n \end{cases}$$

Вправа 4. *Вивести формулу для теперішньої вартості Y відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою.*

Вправа 5. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості ${}_{l|n}a_x^{\{1\}}$ відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою.*

Вправа 6. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості ${}_{l|n}a_x^{\{1\}}$ відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою за припущення лінійної інтерполяції.*

Вправа 7. *Порівняти дисперсії відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою і завершеного відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо.*

2.12.5 Пожиттєвий ануїтет з гарантією

Нехай особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & K \ge n \end{cases} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^{K+1}}{d}, & K \ge n \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести, що теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{d}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією.

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з пропорційною поправкою позначається $\ddot{a}^{\{1\}}_{\overline{x:\overline{n|}}}$.

Вправа 2. *Довести, що*

$$\ddot{a}^{\{1\}}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{d}\,\bar{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{x:\overline{n|}}} - \frac{{}_{n|}\bar{A}_x - {}_{n|}A_x}{d}.$$

Вправа 3. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$\ddot{a}^{\{1\}}_{\overline{x:\, \overline{n|}}} = \ddot{a}_{\overline{x:\, \overline{n|}}} - \frac{i}{d}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i}\right) {}_{n|}A_x .$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню річну виплату, називається ***пожиттєвим ануїтетом пренумерандо з n-річною гарантією та пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет постнумерандо з n-річною гарантією, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1|}}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^{K+1}}{d}, & K \geq n \end{cases}$$

Вправа 4. *Довести, що теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з n-річною гарантією з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{i}\, \overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією.

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з n-річною гарантією з пропорційною поправкою позначається $a^{\{1\}}_{\overline{x:\, \overline{n|}}}$.

Вправа 5. *Довести, що*

$$a^{\{1\}}_{\overline{x:\, \overline{n|}}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{i}\, \bar{a}_{\overline{n:\, \overline{x|}}} = a_{\overline{x:\, \overline{n|}}} + \frac{(1+i)\, {}_{n|}A_x - {}_{n|}\bar{A}_x}{i}.$$

Вправа 6. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$a^{\{1\}}_{\overline{x:\, \overline{n|}}} = a_{\overline{x:\, \overline{n|}}} + \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\right) {}_{n|}A_x .$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету постнумерандо з n-річною гарантією, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої річної виплати до моменту настання страхової події, називається ***пожиттєвим ануїтетом постнумерандо з n-річною гарантією та пропорційною поправкою***, або ***завершеним пожиттєвим ануїтетом постнумерандо з n-річною гарантією***.

Розділ 3

Дискретні страхові ануїтети з виплатами m разів на рік

3.1 Випадкові величини $J(x), H(x)$

Нехай $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. Для особи (x) поділимо кожен (цілий) рік

$$[x + k, x + k + 1), \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

на m однакових півінтервалів

$$\Big[x + k + \frac{j}{m}, x + k + \frac{j+1}{m}\Big), \quad j = 0, \ldots, m-1$$

(для $m = 12,\ 2,\ 3$, це відповідно місяці, півріччя, квартали). Ці півінтервали називаються *періодами* або *m-періодами.*

Визначимо випадкову величину $J = J(x)$ цілої кількості m-періодів, яку проживає особа (x) протягом останнього року життя. Тоді

$$\frac{J}{m} \leq T - K = S < \frac{J+1}{m}. \tag{1.1}$$

Отже,

$$J = \lfloor (T - K)m \rfloor = \lfloor Sm \rfloor .$$

Згідно з означенням $J(x)$ є цілочисельною випадковою величиною, яка набуває значення з множини $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$.

Теорема 1.1. (про спільний розподіл K, J) *Нехай*

$$k \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\} &= {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x \,-\, {}_{k+\frac{j}{m}}q_x \,= \\
&= {}_{k+\frac{j}{m}}p_x \,-\, {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x \,=\, {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \qquad (1.2)
\end{aligned}
$$

Доведення. Використовуючи (1.1) і співвідношення

$$
{}_{k+t}p_x \,=\, {}_kp_x \ {}_tp_{x+k}\,,
$$

отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big\{K(x)=k,\ J(x)=j\big\} &= \mathsf{Pr}\left\{k+\frac{j}{m}\le T(x)<k+\frac{j+1}{m}\right\} = \\
&= {}_{k+\frac{j+1}{m}}q_x \,-\, {}_{k+\frac{j}{m}}q_x \,=\, {}_{k+\frac{j}{m}}p_x \,-\, {}_{k+\frac{j+1}{m}}p_x \,= \\
&= {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} \,-\, {}_kp_x \ {}_{\frac{j+1}{m}}p_{x+k} \,=\, {}_kp_x \left({}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} \,-\, {}_{\frac{j+1}{m}}p_{x+k}\right) = \\
&= {}_kp_x\,\mathsf{Pr}\left\{\frac{j}{m}\le T(x+k)<\frac{j+1}{m}\right\} = {}_kp_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.
\end{aligned}
$$

□

Визначимо випадкову величину

$$
H = H(x) = mK(x) + J(x) \qquad (1.3)
$$

цілої кількості періодів (m-періодів), яку проживе особа (x) у майбутньому. Цю випадкову величину будемо називати *цілою кількістю періодів майбутньої тривалості життя особи* (x).

Зауваження 1. Згідно з означенням $H(x)$

$$
\begin{aligned}
K(x)\ge n &\iff H(x)\ge nm; \\
K(x)< n &\iff H(x)< nm.
\end{aligned}
$$

Звідси, зокрема, отримуємо:

$$
\begin{aligned}
{}_np_x &= \mathsf{Pr}\big\{K(x)\ge n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x)\ge nm\big\} = \sum_{h=nm}^{\infty}\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\}; \\
{}_nq_x &= \mathsf{Pr}\big\{K(x)< n\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x)< nm\big\} = \sum_{h=0}^{nm-1}\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\}.
\end{aligned}
$$

Наслідок 1.1.1. (про функцію розподілу H)

(i) *Нехай* $h \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. *Тоді*

$$\mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = {}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x\,. \tag{1.4}$$

Позначимо

$$k = \lfloor h/m \rfloor\,, \quad j = h - km. \tag{1.5}$$

Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}. \tag{1.6}$$

(ii) *Функція розподілу* F_H *випадкової величини* $H(x)$ *визначається формулою:*

$$F_H(y) = {}_{\frac{\lfloor y \rfloor+1}{m}}q_x\,, \quad y \geq 0. \tag{1.7}$$

Зокрема,

$$F_H(h) = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, \quad h = 0,\,1,\,2,\,\ldots\,.$$

Доведення. (i) Згідно з означенням (1.3)

$$H(x) = h \iff K(x) = k,\ J(x) = j,$$

де k, j визначаються формулами (1.5). Тоді

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \mathsf{Pr}\big\{K(x) = k,\ J(x) = j\big\}.$$

Звідси й з (1.2) отримуємо (1.6), а також (1.4), враховуючи рівність

$$h = km + j.$$

(ii) Оскільки випадкова величина $H(x)$ невід'ємна й цілочисельна, то використовуючи (1.4), отримуємо (1.7):

$$F_H(y) = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \leq y\big\} = \mathsf{Pr}\big\{H(x) \leq \lfloor y \rfloor\ \big\} =$$
$$= \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} \Big({}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x \Big) = {}_{\frac{\lfloor y \rfloor+1}{m}}q_x\,.$$

□

Зауваження 2. Оскільки

$$K(x+n) = K(x) - n, \quad K(x) \geq n, \qquad T(x+n) = T(x) - n, \quad K(x) \geq n,$$

то

$$J(x+n) = J(x), \quad K(x) \geq n.$$

Отже,

$$K(x+n) + \frac{J(x+n)+1}{m} = K(x) + \frac{J(x)+1}{m} - n, \quad K(x) \geq n.$$

Зокрема,

$$\frac{H(x+n)+1}{m} = \frac{H(x)+1}{m} - n, \quad H(x) \geq nm.$$

3.2 Загальне поняття ануїтету

3.2.1 Означення

Нехай $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$. У цьому розділі розглядаються дискретні ануїтети, для яких виплата здійснюється на початку (пренумерандо) або в кінці (постнумерандо) кожного m-періоду. Величина та час виплати за страховою угодою залежить лише від цілої кількості років від моменту укладання угоди до моменту настання страхової події (смерті застрахованої особи) та від цілої кількості періодів (m-періодів), прожитих застрахованою особою протягом останнього року життя. Ці ануїтети називаються *дискретними ануїтетами (пренумерандо або постнумерандо) з виплатами m разів на рік.* Такі моделі дискретних ануїтетів описуються в термінах випадкових величин $K(x)$ та $J(x)$, або в термінах випадкової величини $H(x)$.

Якщо ці моделі описувати в термінах випадкових величин $K(x)$ та $J(x)$, то вони (ці моделі) визначаються двома функціями (послідовностями):

- *функцією виплат (функцією винагороди)*

$$b_{k,j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

- *функцією дисконтування*

$$v_{k,j}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Для випадку ануїтетів пренумерандо величина $b_{k,j}$ — це виплата, яку здійснює страхова організація на початку періоду

$$\left[x + k + \frac{j}{m}, x + k + \frac{j+1}{m}\right)$$

в момент часу

$$x + k + \frac{j}{m}$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x). Функція $v_{k,j}$ зазвичай визначається як звуження функції

$$v^t = e^{-\delta t}, \quad t \geq 0,$$

на множину точок розбиття

$$k + \frac{j}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1$$

півосі $[0, +\infty)$, тобто визначається формулою

$$v_{k,j} = v^{k+\frac{j}{m}} = e^{-\delta\left(k+\frac{j}{m}\right)}.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат* (за ануїтетом пренумерандо) $y_{k,j}$ за формулою

$$y_{k,j} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{t=0}^{m-1} b_{s,t} v_{s,t} + \sum_{t=0}^{j} b_{k,t} v_{k,t}. \tag{2.1}$$

Отже, $y_{k,j}$ — це теперішня вартість майбутніх $km + j + 1$ виплат згідно з укладеною угодою.

Використовуючи (2.1), будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік*:

$$Y(x) = y_{K(x),J(x)}.$$

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} y_{k,j} \mathsf{Pr}\big\{K = k, J = j\big\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} y_{k,j}\, {}_k p_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}$$

теперішньої вартості ануїтету називається *актуарною теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік*. Залежно від вигляду функцій виплат й дисконтування отримуємо різні види ануїтетів (наприклад, пожиттєвий, строковий, відкладений пожиттєвий, відкладений строковий).

Якщо моделі страхових ануїтетів з виплатами m разів на рік описувати в термінах випадкової величини $H(x)$, то ці моделі визначаються двома функціями (послідовностями):

- *функцією виплат (функцією винагороди)*

$$b_h, \quad h = 0, 1, 2, \ldots;$$

- *функцією дисконтування*

$$v_h, \quad h = 0, 1, 2, \ldots.$$

Для випадку ануїтетів пренумерандо величина b_h — це виплата, яку здійснює страхова організація на початку періоду

$$\left[x + \frac{h}{m}, x + \frac{h+1}{m}\right)$$

в момент часу

$$x + \frac{h}{m}$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x). Функція v_h зазвичай визначається як звуження функції

$$v^t = e^{-\delta t}, \quad t \geq 0,$$

на множину точок розбиття

$$\frac{h}{m}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

півосі $[0, +\infty)$, тобто визначається формулою

$$v_h = v^{\frac{h}{m}} = e^{-\delta \frac{h}{m}}.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат* (за ануїтетом пренумерандо) y_h за формулою

$$y_h = \sum_{s=0}^{h} b_s v_s. \tag{2.2}$$

Отже, y_h — це теперішня вартість майбутніх $h+1$ виплат згідно з укладеною угодою.

Використовуючи (2.2), будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік*:

$$Y(x) = y_{H(x)} = \sum_{s=0}^{H(x)} b_s v_s.$$

Звідси отримуємо формулу для *актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік*:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=0}^{\infty} y_h \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v_s\right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x. \tag{2.3}$$

Якщо в числовому ряді (у зовнішній сумі по h) згрупувати його члени (по m у групі) з однаковою цілою частиною $[h/m]$, то формула (2.3) набуває вигляду:

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} y_{km+j} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = km + j\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{km+j} b_s v_s\right) {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

Зауваження 1. Нехай k, j — результат ділення з остачею h на m, тобто

$$h = km + j, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Тоді

$$b_h = b_{k,j}, \quad v_h = v_{k,j}, \quad y_h = y_{k,j}, \quad Y_H = Y_{K,J}.$$

3.2.2 Властивості

Теорема 2.1. (про зв'язок актуарних теперішніх вартостей ануїтетів пренумерандо) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_h = v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нехай виплати за ануїтетом пренумерандо мають таку властивість: для $l \in \mathbf{N}$ *виплата в момент часу*

$$x + l + \frac{h}{m} = x + l + k + \frac{j}{m}, \quad h = km + j,$$

за ануїтетом пренумерандо для особи у віці x *та за ануїтетом пренумерандо для особи у віці* $x + l$ *однакова, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big] = \sum_{h=0}^{lm-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \\ = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j} v^{k+\frac{j}{m}} + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big], \quad (2.4)$$

де $b_{k,j}(b_h)$ *позначає функцію виплат для особи* (x).

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: За означенням і за умовою

$$Y(x+l) = \sum_{s=0}^{H(x+l)} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}.$$

Отже, за означенням математичного сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}} \right) \mathsf{Pr}\big\{H(x+l) = h\big\}. \quad (2.5)$$

За означенням при $K(x) \geq l$

$$Y(x) - \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} = \sum_{s=lm}^{H(x)} b_s v^{\frac{s}{m}} = \\ = \sum_{s=0}^{H(x)-lm} b_{s+lm} v^{\frac{s+lm}{m}} = v^l \sum_{s=0}^{H(x)-lm} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}.$$

Отже, за означенням математичного сподівання

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Y(x)\mid K(x)\ge l\big] - \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} = \\
= v^l \sum_{h=lm}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h-lm} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}\right)\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\mid K(x)\ge l\big\} = \\
= v^l \sum_{h=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}\right)\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h+lm\mid K(x)\ge l\big\}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Оскільки

$$K(x+l)=K(x)-l,\ K(x)\ge l,\quad T(x+l)=T(x)-l,\ K(x)\ge l,$$

то

$$J(x+l)=J(x),\ K(x)\ge l,\quad H(x+l)=H(x)-lm,\ K(x)\ge l.$$

Зокрема,

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x+l)=h\big\}=\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h+lm\mid K(x)\ge l\big\} \quad (2.7)$$

З (2.5), (2.6) і (2.7) випливає (2.4).

2-й спосіб: За означенням і умовою

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]=\sum_{h=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}\right)\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l}. \quad (2.8)$$

Використовуючи співвідношення

$${}_{l+t|u}q_x = {}_{l+t}p_x - {}_{l+t+u}p_x = {}_{l}p_x\left({}_{t}p_{x+l} - {}_{t+u}p_{x+l}\right) = {}_{l}p_x\ {}_{t|u}q_{x+l},$$

рівність

$${}_{l}p_x = \mathsf{Pr}\big\{H(x)\ge lm\big\} = \sum_{h=lm}^{\infty}\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\big\} = \sum_{h=lm}^{\infty} {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x,$$

означення математичного сподівання і (2.8), маємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Y(x)\mid K(x)\ge l\big] = \sum_{h=lm}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}}\right)\mathsf{Pr}\big\{H(x)=h\mid K(x)\ge l\big\} = \\
= \frac{1}{{}_{l}p_x}\sum_{h=lm}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}}\right)\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{{}_lp_x} \sum_{h=lm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + \sum_{s=lm}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$

$$= \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + \frac{1}{{}_lp_x} \sum_{h=lm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h-lm} b_{s+lm} v^{\frac{s+lm}{m}} \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$

$$= \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + \frac{v^l}{{}_lp_x} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{l+\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$

$$= \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + v^l \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l} =$$

$$= \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big].$$

□

Теорема 2.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість ануїтету пренумерандо) *За умов теореми 2.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} \, {}_{\frac{s}{m}}p_x + v^l \, {}_lp_x \, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{2.9}$$

Зокрема,

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{s=0}^{m-1} b_s v^{\frac{s}{m}} \, {}_{\frac{s}{m}}p_x + vp_x \mathsf{E}\big[Y(x+1)\big].$$

Доведення. <u>*1-й спосіб*</u>: За означенням та умовою теореми

$$\mathsf{E}\big[Y(x+l)\big] = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l}. \tag{2.10}$$

За означенням

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$

$$= \sum_{h=0}^{lm-1} \sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \, {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + \sum_{h=lm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x. \tag{2.11}$$

Переставляючи сумування, перший доданок правої частини цієї рівності можна подати у вигляді:

$$\sum_{h=0}^{lm-1}\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x = \sum_{s=0}^{lm-1}\sum_{h=s}^{lm-1}\Big({}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x\Big) b_s v^{\frac{s}{m}} =$$
$$= \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}}\ {}_{\frac{s}{m}}p_x - {}_l p_x \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}}. \quad (2.12)$$

Використовуючи співвідношення

$${}_{l+t|u}q_x = {}_l p_x\ {}_{t|u}q_{x+l},$$

рівність

$${}_l p_x = \sum_{h=lm}^{\infty} {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x,$$

та (2.10), другий доданок правої частини рівності (2.11) подамо у вигляді:

$$\sum_{h=lm}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}}\right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$
$$= \sum_{h=lm}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + \sum_{s=lm}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}}\right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$
$$= {}_l p_x \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + \sum_{h=lm}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h-lm} b_{s+lm} v^{\frac{s+lm}{m}}\right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$
$$= {}_l p_x \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + v^l \sum_{h=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}\right) {}_{l+\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x =$$
$$= {}_l p_x \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + v^l\ {}_l p_x \sum_{h=0}^{\infty}\left(\sum_{s=0}^{h} b_{s+lm} v^{\frac{s}{m}}\right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+l} =$$
$$= {}_l p_x \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + v^l\ {}_l p_x\, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \quad (2.13)$$

Підставляючи (2.12) і (2.13) в (2.11), отримуємо (2.9).

2-й спосіб: За формулою повної ймовірності

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) < l\big]\mathsf{Pr}\big\{K(x) < l\big\} +$$
$$+ \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big]\mathsf{Pr}\big\{K(x) \geq l\big\} =$$

$$= \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) < l\big]\, {}_l q_x + \mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big]\, {}_l p_x \,. \quad (2.14)$$

Перший співмножник другого доданку правої частини цієї рівності отримуємо з теореми про зв'язок теперішніх вартостей ануїтетів пренумерандо:

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \geq l\big] = \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \quad (2.15)$$

Для обчислення першого співмножника першого доданку правої частини рівності (2.14) скористаємося означенням математичного сподівання і рівністю (2.12):

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) < l\big] = \sum_{h=0}^{lm-1} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \right) \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h \mid K(x) < l\big\} =$$

$$= \frac{1}{{}_l q_x} \sum_{h=0}^{lm-1} \sum_{s=0}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \left({}_{\frac{h}{m}} p_x - {}_{\frac{h+1}{m}} p_x \right) =$$

$$= \frac{1}{{}_l q_x} \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}} \, {}_{\frac{s}{m}} p_x - \frac{{}_l p_x}{{}_l q_x} \sum_{s=0}^{lm-1} b_s v^{\frac{s}{m}}. \quad (2.16)$$

Підставляючи (2.15) і (2.16) в (2.14), отримуємо (2.9). □

Теорема 2.3. (про зображення актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат) *Нехай $Y(x)$ позначає теперішню вартість дискретного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=0}^{\infty} b_h v_h \, {}_{\frac{h}{m}} p_x = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j} v_{k,j} \, {}_{k+\frac{j}{m}} p_x \,.$$

Доведення. Застосуємо теорему про математичне сподівання функції від невід'ємної цілочисельної випадкової величини до випадкової величини $H(x)$ та невід'ємної неспадної послідовності

$$\varphi(h) = \sum_{s=0}^{h} b_s v_s, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots .$$

Згідно з означенням

$$Y(x) = \varphi(H(x)).$$

Отже, за цією теоремою

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \varphi(0) + \sum_{h=0}^{\infty} \big(\varphi(h+1) - \varphi(h)\big)\big(1 - F_H(h)\big) =$$

$$= b_0 v_0 + \sum_{h=0}^{\infty} b_{h+1} v_{h+1} \ {}_{\frac{h+1}{m}}p_x = b_0 v_0 + \sum_{h=1}^{\infty} b_h v_h \ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \sum_{h=0}^{\infty} b_h v_h \ {}_{\frac{h}{m}}p_x \, .$$

□

3.3 Загальне поняття ануїтету з гарантією

3.3.1 Означення

Поряд зі звичайними ануїтетами розглядаються ануїтети з (n-річною) гарантією. Такий ануїтет гарантовано сплачується протягом n років незалежно від часу настання страхової події (смерті застрахованої особи).

Функція теперішньої вартості виплат y_k за ануїтетом пренумерандо з (n-річною) гарантією визначається формулою

$$y_h = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{nm-1} b_s v_s, & h < nm, \\ \sum\limits_{s=0}^{h} b_s v_s, & h \geq nm. \end{cases}$$

Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією*:

$$Y(x) = y_{H(x)} = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{nm-1} b_s v_s, & H(x) < nm \\ \sum\limits_{s=0}^{H(x)} b_s v_s, & H(x) \geq nm \end{cases} = \begin{cases} \sum\limits_{s=0}^{nm-1} b_s v_s, & K(x) < n \\ \sum\limits_{s=0}^{H(x)} b_s v_s, & K(x) \geq n \end{cases}$$

Остання рівність випливає з того, що

$$H(x) < nm \iff K(x) < n.$$

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}[Y(x)] = \sum_{s=0}^{nm-1} b_s v_s \mathsf{Pr}\big\{K(x) < n\big\} +$$

$$+ \sum_{h=nm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v_s \right) \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} =$$

$$= {}_n q_x \sum_{s=0}^{nm-1} b_s v_s + \sum_{h=nm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v_s \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x =$$

$$= {}_nq_x \sum_{s=0}^{nm-1} b_s v_s + \sum_{h=nm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v_s \right) \left({}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x \right) =$$

$$= {}_nq_x \sum_{s=0}^{nm-1} b_s v_s + \sum_{h=nm}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{h} b_s v_s \right) \left({}_{\frac{h}{m}}p_x - {}_{\frac{h+1}{m}}p_x \right) =$$

$$= {}_nq_x \sum_{s=0}^{nm-1} b_s v_s + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{s=0}^{km+j} b_s v_s \right) {}_kp_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією називається *актуарною теперішньою вартістю ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією.* Залежно від вигляду функцій відшкодування та дисконтування отримуємо різні види ануїтетів з гарантією (наприклад пожиттєвий, строковий).

3.3.2 Властивості

Теорема 3.1. (про зв'язок теперішніх вартостей ануїтетів пренумерандо з гарантією) *Нехай функція дисконтування визначається формулою*

$$v_h = v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots .$$

Нехай виплати за ануїтетом пренумерандо мають таку властивість: для $l \in \mathbf{N}$ виплата в момент часу

$$x + l + \frac{h}{m} = x + l + k + \frac{j}{m}, \quad h = km + j,$$

за ануїтетом пренумерандо з n-річною гарантією для особи у віці x та за ануїтетом пренумерандо з $(n-l)$-річною гарантією для особи у віці $x+l$ однакова, тобто залежить лише від абсолютного віку особи в цей момент часу. Тоді

$$\mathsf{E}\big[Y(x) \mid K(x) \ge l\big] = \sum_{h=0}^{lm-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + v^l \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big], \tag{3.1}$$

де b_h позначає функцію виплат для особи (x).

Вправа 1. *Довести теорему 3.1 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 3.2. (про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість ануїтету пренумерандо з гарантією) *За умов теореми 3.1 справедлива рівність:*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=0}^{lm-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + {}_lq_x \sum_{h=lm}^{nm-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + v^l \, {}_lp_x \, \mathsf{E}\big[Y(x+l)\big]. \tag{3.2}$$

Зокрема,

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=0}^{m-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + q_x \sum_{h=m}^{nm-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + vp_x \mathsf{E}\big[Y(x+1)\big].$$

Вправа 2. *Довести теорему 3.2 (навести два різних способи доведення).*

Теорема 3.3. (про зображення актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з гарантією у формі поточних виплат) *Нехай $Y(x)$ позначає теперішню вартість дискретного ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік. Тоді*

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=0}^{nm-1} b_h v_h + \sum_{h=nm}^{\infty} b_h v_h \,{}_{\frac{h}{m}}p_x =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j} v_{k,j} + \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} b_{k,j} v_{k,j} \,{}_{k+\frac{j}{m}}p_x \,.$$

Вправа 3. *Довести теорему 3.3.*

3.4 Функція теперішньої вартості виплат

Теперішня вартість дискретного ануїтету пренумерандо з виплатами $\frac{1}{m}$, тобто зі сталою функцією виплат

$$b_h = \frac{1}{m}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots,$$

що сплачується протягом $(h+1)$ періодів (остання виплата здійснюється на початку $(h+1)$-го періоду) зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $\delta = -\ln v$, тобто з функцією дисконтування

$$v_t = v^t = e^{-\delta t}, \quad t \geq 0,$$

позначається $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} = \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}} = \frac{1 - v^{\frac{h+1}{m}}}{m(1 - v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1 - v^{\frac{h+1}{m}}}{d^{(m)}},$$

де

$$d^{(m)} = m\big(1 - v^{\frac{1}{m}}\big) = m\big(v^{-\frac{1}{m}} - 1\big)v^{\frac{1}{m}} = i^{(m)} v^{\frac{1}{m}}.$$

Аналогічно, теперішня вартість дискретного ануїтету пренумерандо з виплатами $\frac{1}{m}$, що сплачується протягом k повних років і протягом $(j+1)$ періодів (остання виплата здійснюється на початку $(j+1)$-го періоду $(k+1)$-го року) зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $\delta = -\ln v$, позначається $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}$ і визначається формулою

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} = \sum_{h=0}^{km+j} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}} = \frac{1-v^{k+\frac{j+1}{m}}}{m(1-v^{\frac{1}{m}})} = \frac{1-v^{k+\frac{j+1}{m}}}{d^{(m)}}.$$

Зокрема:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}} = \frac{1-v}{d^{(m)}} = \frac{d}{d^{(m)}};$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}} = \frac{1}{d^{(m)}}.$$

Нехай $k \geq n$. Якщо виплати починаються з $(n+1)$-го року, і тривають протягом повних $(k-n)$ років і протягом j періодів, то теперішня вартість такого ануїтету пренумерандо дорівнює:

$$\frac{1}{m}\left(v^n + v^{n+\frac{1}{m}} + \ldots + v^{k+\frac{j}{m}}\right) = \sum_{h=nm}^{km+j} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} =$$

$$= \frac{v^n - v^{k+\frac{j+1}{m}}}{d^{(m)}} = v^n\, \frac{1-v^{k+\frac{j+1}{m}-n}}{d^{(m)}} = v^n \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}-n}|}, \quad k \geq n.$$

Нехай $h \geq nm$. Якщо виплати починаються з $(n+1)$-го року, і тривають протягом $(h-nm)$ періодів, то теперішня вартість такого ануїтету пренумерандо дорівнює:

$$\frac{1}{m}\left(v^n + v^{n+\frac{1}{m}} + \ldots + v^{\frac{h}{m}}\right) = \sum_{s=nm}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} =$$

$$= \frac{v^n - v^{\frac{h+1}{m}}}{d^{(m)}} = v^n\, \frac{1-v^{\frac{h+1}{m}-n}}{d^{(m)}} = v^n \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}-n}|}, \quad h \geq nm.$$

3.5 Функція розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо

Теорема 5.1. (перша теорема про функцію розподілу Y) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат ануїтету пренумерандо) y_h задовільняє умови:*

(i) $y_0 = \ldots = y_l$;

(ii) $y_h,\ h \geq l$, *зростає;*

(iii) $y_h \to c,\ \ h \to \infty$.

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, & y \in [y_h, y_{h+1}),\ h \geq l \\ 1, & y \geq c \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, & y \in [y_{h-1}, y_h),\ h \geq l+1 \\ 1, & y \geq c \end{cases} \tag{5.1}$$

Нехай $\varphi : [y_l, c) \to [l, +\infty)$ *довільна зростаюча функція, що задовільняє умову:*

$$\varphi(y_h) = h, \quad h \geq l.$$

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\lfloor \varphi(y) \rfloor + 1}q_x\,, & y_l \leq y < c \\ 1, & y \geq c \end{cases} \tag{5.2}$$

Доведення. За означенням випадкової величини Y і умовою теореми

$$Y \in [y_l, c).$$

Отже,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ 1, & y \geq c \end{cases} \tag{5.3}$$

Нехай $y_l \leq y < c$. Згідно з умовою теореми

$$[y_l, c) = \bigsqcup_{h=l}^{\infty} [y_h, y_{h+1}).$$

Отже,

$$y \in [y_l, c) \iff \exists! h \geq l : \ \ y \in [y_h, y_{h+1}).$$

Нехай $y \in [y_h, y_{h+1})$. Тоді, використовуючи умову теореми і означення випадкової величини Y, маємо:

$$Y \leq y \iff y_H \leq y \iff y_H \leq y_h \iff H \leq h.$$

Отже,

$$F_Y(y) = \mathsf{Pr}\{Y \le y\} = \mathsf{Pr}\{H \le h\} = F_H(h) = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, \quad y \in [y_h, y_{h+1}). \tag{5.4}$$

З (5.3) і (5.4) випливає (5.1).

Перейдемо до другого твердження теореми. За її умовами на функцію φ маємо:

$$h = \varphi(y_h) \le \varphi(y) < \varphi(y_{h+1}) = h+1, \quad y \in [y_h, y_{h+1}), \quad h \ge l.$$

Отже,

$$h = \lfloor \varphi(y) \rfloor, \quad y \in [y_h, y_{h+1}), \quad h \ge l.$$

Звідси і з формули (5.1) випливає формула (5.2). □

Наслідок 5.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$. За умов теореми 5.1:*

- *Нехай ${}_tq_x < 1 \quad \forall t \ge 0$. Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_l, & p \in (0,\ {}_{\frac{l+1}{m}}q_x\,] \\ y_h, & p \in (\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,], \quad h \ge l+1 \end{cases}$$

- *Нехай ${}_{\frac{h_0}{m}}q_x < 1 = {}_{\frac{h_0+1}{m}}q_x\,,\ h_0 > l$. Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_l, & p \in (0,\ {}_{\frac{l+1}{m}}q_x\,] \\ y_h, & p \in (\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,], \quad h = l+1, \dots, h_0-1 \\ y_{h_0}, & p \in (\ {}_{\frac{h_0}{m}}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай ${}_{\frac{l+1}{m}}q_x = 1$. Тоді $\xi_Y^p = y_l,\ p \in (0,1)$.*

Доведення. За формулою (5.1)

$$F_Y(y_{h-}) = {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, \quad F_Y(y_h) = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, \quad h \ge l+1.$$

Нехай ${}_{\frac{h}{m}}q_x < {}_{\frac{h+1}{m}}q_x$. Тоді з теореми про процентиль (перше твердження) отримуємо:

$$\forall p \in \big(F_Y(y_{h-}),\, F_Y(y_h)\big] = (\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,] \quad \big(\xi_Y^p = y_h\big), \quad h \ge l+1.$$

Аналогічно, за формулою (5.1)

$$F_Y(y_{l-}) = 0, \quad F_Y(y_l) = {}_{\frac{l+1}{m}}q_x\,.$$

Нехай ${}_{\frac{l+1}{m}}q_x > 0$. Тоді з теореми про процентиль (перше твердження) отримуємо:

$$\forall p \in \big(y_{l-},\, F_Y(y_l)\big] = (0,\ {}_{\frac{l+1}{m}}q_x\,] \quad \big(\xi_Y^p = y_l\big).$$

$\square$

Теорема 5.2. (друга теорема про функцію розподілу Y) *Нехай послідовність (функція теперішньої вартості виплат ануїтету пренумерандо) y_h задовільняє умови:*

(i) $y_0 = \ldots = y_l$;

(ii) $y_l < \ldots < y_{l+n}$;

(iii) $y_h = y_{l+n},\ h \geq l+n.$

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, & y \in [y_h, y_{h+1}),\quad h = l,\ldots,l+n-1 \\ 1, & y \geq y_{l+n} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, & y \in [y_{h-1}, y_h),\quad h = l+1,\ldots,l+n \\ 1, & y \geq y_{l+n} \end{cases} \tag{5.5}$$

Нехай $\varphi : [y_l, y_{l+n}] \to [l, l+n]$ довільна зростаюча функція, що задовільняє умову:

$$\varphi(y_h) = h, \quad h = l,\ldots,l+n.$$

Тоді

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < y_l \\ {}_{\frac{\lfloor\varphi(y)\rfloor+1}{m}}q_x\,, & y_l \leq y < y_{l+n} \\ 1, & y \geq y_{l+n} \end{cases} \tag{5.6}$$

Вправа 1. *Довести теорему 5.2.*

Наслідок 5.2.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$. За умов теореми 5.2:*

- *Нехай* ${}_{\frac{l+n}{m}}q_x < 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_l, & p \in (0,\ {}_{\frac{l+1}{m}}q_x\,] \\ y_h, & p \in (\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,], \quad h = l+1,\ldots,l+n-1 \\ y_{l+n}, & p \in (\ {}_{\frac{l+n}{m}}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{h_0}{m}}q_x < 1 = {}_{\frac{h_0+1}{m}}q_x$, $l < h_0 < l+n$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} y_l, & p \in (0,\ {}_{\frac{l+1}{m}}q_x\,] \\ y_h, & p \in (\,{}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,], \quad h = l+1, \dots, h_0 - 1 \\ y_{h_0}, & p \in (\,{}_{\frac{h_0}{m}}q_x\,, 1) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{l+1}{m}}q_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = y_l,\ p \in (0,1)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 5.2.1.*

3.6 Пожиттєвий ануїтет пренумерандо

3.6.1 Означення

Пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного періоду (m-періоду) від моменту укладання страхової угоди, допоки ця особа залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_{k,j} &= \frac{1}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1; \\ v_{k,j} &= v^{k+\frac{j}{m}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1; \\ y_{k,j} &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік* $Y = Y(x)$ в термінах випадкових величин $K = K(x), J = J(x)$ має вигляд:

$$Y = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} = \sum_{h=0}^{mK+J} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}} = \frac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}. \tag{6.1}$$

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік позначається $\ddot{a}_x^{(m)}$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K = k,\ J = j\big\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}\ {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

В термінах випадкової величини $H = H(x)$ функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_h &= \frac{1}{m}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots; \\ v_h &= v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots; \\ y_h &= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots. \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік* має вигляд:

$$Y = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m}}|} = \sum_{h=0}^{H} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}} = \frac{1 - v^{\frac{H+1}{m}}}{d^{(m)}}.$$

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік $\ddot{a}_x^{(m)}$ визначається формулою:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=0}^{\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\ \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = \sum_{h=0}^{\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.$$

3.6.2 Властивості

Теорема 6.1. (про функцію розподілу пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+2}{m}}|}\Big), \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \\ 1, & y \geq \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\Big), \quad h \in \mathbf{N} \\ 1, & y \geq \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ F_H\Big(-1 - \frac{m}{\delta}\ln(1 - d^{(m)}y)\Big), & \frac{1}{m} \le y < \frac{1}{d^{(m)}} \\ 1, & y \ge \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ {}_{\frac{1}{m}\lfloor -\frac{m}{\delta}\ln(1-d^{(m)}y)\rfloor} q_x\,, & \frac{1}{m} \le y < \frac{1}{d^{(m)}} \\ 1, & y \ge \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases}$$

Доведення. Обидві формули випливають з першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо:

(i) $y_0 = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{1}{m}}|} = \dfrac{1}{m}$;

(ii) послідовність $y_h = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}$, $h \ge 0$, строго зростає;

(iii) $y_h \to \dfrac{1}{d^{(m)}}$, $h \to \infty$;

(iv) функція
$$\varphi(y) = -1 - \frac{m}{\delta}\ln(1 - d^{(m)}y)$$
строго зростає на $\big[\frac{1}{m}, \frac{1}{d^{(m)}}\big)$ і має таку властивість:
$$\varphi(y_h) = \varphi\Big(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\Big) = h, \quad h = 0, 1, 2, \ldots.$$

□

Наслідок 6.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$.*

- *Нехай ${}_tq_x < 1 \quad \forall t \ge 0$. Тоді*
$$\xi_Y^p = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, \quad p \in \Big(\,{}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\Big], \quad h = 0, 1, 2, \ldots.$$

- *Нехай ${}_{\frac{h_0}{m}}q_x < 1 = {}_{\frac{h_0+1}{m}}q_x$, $h_0 > 0$. Тоді*
$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & p \in \Big(\,{}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\Big], \quad h = 0, \ldots, h_0 - 1 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h_0+1}{m}}|}, & p \in \Big(\,{}_{\frac{h_0}{m}}q_x\,, 1\Big) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{1}{m}}q_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = \dfrac{1}{m}$, $p \in (0,1)$.

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо і теореми 6.1. □

Теорема 6.2. (про властивості актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

(i) *зображення у формі поточних виплат*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{m}\ {}_{\frac{h}{m}}E_x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, v^{k+\frac{j}{m}}\ {}_{k+\frac{j}{m}}p_x = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\ {}_{k+\frac{j}{m}}E_x\,; \qquad (6.2)$$

(ii) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю пожиттєвого страхування з виплатою в кінці періоду*

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}; \qquad (6.3)$$

(iii) *рекурентна формула*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x + vp_x\ddot{a}_{x+1}^{(m)}.$$

Доведення. (i) Випливає з (загальної) теореми про зображення у формі поточних виплат актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.

(ii) Нехай Z позначає тепершню вартість пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці періоду:

$$Z = v^{K+\frac{J+1}{m}}.$$

Використовуючи формулу (6.1), отримуємо:

$$1 = d^{(m)}Y + Z \implies 1 = d^{(m)}\mathsf{E}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Z\big] = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}.$$

(iii) Випливає з (загальної) теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. Перевіримо умову цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k,j}$ функцію виплат цього ануїтету для особи $(x+1)$. Тоді

$$\widetilde{b}_{k,j} = 1 = b_{k+1,j}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

□

Теорема 6.3. (про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_x^{(m)} - \big(A_x^{(m)}\big)^2}{\big(d^{(m)}\big)^2} = \\ = \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}_x^{(m)} - {}^2\ddot{a}_x^{(m)}\Big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}_x^{(m)} - (\ddot{a}_x^{(m)})^2, \quad (6.4)$$

де ${}^2\ddot{a}_x^{(m)}$, ${}^2A_x^{(m)}$ *позначають відповідно актуарні теперішні вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік і пожиттєвого страхування життя з виплатою в кінці періоду для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.*

Доведення. *1-й спосіб*: Нехай Z позначає теперішню вартість пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці періоду:

$$Z = v^{K+\frac{J+1}{m}},$$

Використовуючи формулу (6.1), отримуємо:

$$Y = \frac{1-Z}{d^{(m)}} \implies \mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{\mathsf{Var}\big[Z\big]}{\big(d^{(m)}\big)^2} = \frac{{}^2A_x^{(m)} - \big(A_x^{(m)}\big)^2}{\big(d^{(m)}\big)^2}. \quad (6.5)$$

Позначимо ${}^2Y$, ${}^2Z$ відповідно теперішні вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік і пожиттєвого страхування (з виплатою 1 в кінці періоду) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$\begin{aligned} {}^2Z &= v^{\frac{2(H+1)}{m}}, \\ {}^2Y &= \frac{1 - v^{\frac{2(H+1)}{m}}}{m(1 - v^{\frac{2}{m}})} = \frac{1 - {}^2Z}{d^{(m)}\big(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\big)}. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)\mathsf{E}\big[{}^2Y\big] + \mathsf{E}\left[{}^2Z\right] = 1 \implies \\ \implies d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right){}^2\ddot{a}_x^{(m)} + {}^2A_x^{(m)} = 1. \quad (6.6)$$

Використовуючи цю рівність і формули (6.3), (6.5), отримуємо:

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{1}{(d^{(m)})^2}\left[1 - d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right){}^2\ddot{a}_x^{(m)} - \big(1 - d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)}\big)^2\right] = \\ = \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}_x^{(m)} - {}^2\ddot{a}_x^{(m)}\Big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}_x^{(m)} - (\ddot{a}_x^{(m)})^2.$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Згідно з означенням $Y(x) = \varphi\big(H(x)\big)$, де

$$\varphi(h) = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} = \frac{1 - v^{\frac{h+1}{m}}}{d^{(m)}}, \quad h = 0, 1, 2, \dots .$$

Оскільки послідовність $\varphi(h)$ невід'ємна й обмежена, то за теоремою про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної дискретної цілочисельної випадкової величини та формулою (6.2) маємо:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Y^2(x)\big] &= \mathsf{E}\big[\varphi^2\big(H(x)\big)\big] = \varphi^2(0) + \sum_{h=0}^{\infty}\big(\varphi^2(h+1) - \varphi^2(h)\big)\ {}_{\frac{h+1}{m}}p_x = \\
&= \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(d^{(m)})^2}\sum_{h=0}^{\infty}\big(v^{\frac{h+1}{m}} - v^{\frac{h+2}{m}}\big)\big(2 - v^{\frac{h+1}{m}} - v^{\frac{h+2}{m}}\big)\ {}_{\frac{h+1}{m}}p_x = \\
&= \frac{1}{m^2} + \frac{1}{d^{(m)}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\big(2 - v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{h+1}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
&= \frac{1}{d^{(m)}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\big(2 - v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{h+1}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
&= \frac{1}{d^{(m)}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\big(2 - 2v^{\frac{h}{m}} + v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{h+1}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
&= \frac{2}{d^{(m)}}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{m}\big(v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{2h}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x + \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{m^2}v^{\frac{2h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
&= \frac{2}{d^{(m)}}\big(\ddot{a}^{(m)}_x - {}^2\ddot{a}^{(m)}_x\big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_x.
\end{aligned}$$

Звідси, зокрема, отримуємо другу рівність (6.4):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{E}\big[Y^2\big] - \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \frac{2}{d}\big(\ddot{a}^{(m)}_x - {}^2\ddot{a}^{(m)}_x\big) + {}^2\ddot{a}^{(m)}_x - (\ddot{a}^{(m)}_x)^2.$$

За формулами (6.3) і (6.6) маємо:

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1 - A^{(m)}_x}{d}, \qquad {}^2\ddot{a}^{(m)}_x = \frac{1 - {}^2A^{(m)}_x}{d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)}.$$

Звідси й з другої рівності (6.4) отримуємо першу рівність (6.4):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d^{(m)}}\left(\frac{1 - A^{(m)}_x}{d^{(m)}} - \frac{1 - {}^2A^{(m)}_x}{d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)}\right) +$$

$$\frac{1-{}^2A_x^{(m)}}{md^{(m)}\left(2-\frac{d^{(m)}}{m}\right)}-\left(\frac{1-A_x^{(m)}}{d^{(m)}}\right)^2=\frac{{}^2A_x^{(m)}-\left(A_x^{(m)}\right)^2}{\left(d^{(m)}\right)^2}.$$

□

Теорема 6.4. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має пожиттєвий ануїтет,*

$$\mu(x+t)=\mu=const,\quad t\geq 0. \tag{6.7}$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}_x^{(m)}=\dfrac{1}{m\left(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)}$;

(ii) $\mathsf{Var}\left[Y\right]=\dfrac{e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{m^2\left(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)\left(1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)}$;

(iii) $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\frac{1}{m}\\ 1-e^{-\frac{\mu h}{m}}, & y\in\left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}},\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}\right),\quad h\in\mathbf{N}\\ 1, & y\geq\frac{1}{d^{(m)}}\end{cases}$

(iv) *Нехай* $p\in(0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p=\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}},\quad p\in\left(1-e^{-\frac{\mu h}{m}},1-e^{-\frac{\mu(h+1)}{m}}\right],\quad h=0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

Доведення. За умовою (6.7) теореми

$${}_tp_x=e^{-\mu t},\quad {}_tq_x=1-e^{-\mu t},\quad t\geq 0. \tag{6.8}$$

(i) Використовуючи (6.8) і формулу для актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо у формі поточних виплат, отримуємо:

$$\ddot{a}_x^{(m)}=\sum_{h=0}^{\infty}v^{\frac{h}{m}}\,{}_{\frac{h}{m}}p_x=\frac{1}{m}\sum_{h=0}^{\infty}e^{-\frac{\delta h}{m}}e^{-\frac{\mu h}{m}}=\frac{1}{m\left(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)}.$$

(ii) За теоремою про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо і пунктом (i) теореми

$$\mathsf{Var}\left[Y\right]=\frac{2}{d}\left(\ddot{a}_x^{(m)}-{}^2\ddot{a}_x^{(m)}\right)+\frac{1}{m}\;{}^2\ddot{a}_x^{(m)}-(\ddot{a}_x^{(m)})^2=$$

$$= \frac{2}{d^{(m)}} \left(\frac{1}{m\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)} - \frac{1}{m\left(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)} - \frac{1}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{\mu+\delta}{m}} e^{-(\mu+\delta)}}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)\left(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)} + \frac{1}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)} - \frac{1}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1 + e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)\left(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)} - \frac{1}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}}\right)}{m^2\left(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)\left(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)}.$$

(iii) Випливає з (6.8) і теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.

(iv) Випливає з (6.8) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. □

Теорема 6.5. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи (x), що має пожиттєвий ануїтет, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \qquad c \in \mathbf{N}. \tag{6.9}$$

Тоді:

(i) $$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{d^{(m)}} \left(1 - \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^c)}{cd^{(m)}} \right) = \frac{1}{m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})} \left(1 - \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\delta c})}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})} \right);$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1 - e^{-\delta c})}{cm^3(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})^3} \left[\frac{1 + e^{-\delta c}}{1 + e^{-\frac{\delta}{m}}} - \frac{1 - e^{-\delta c}}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})} \right];$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \dfrac{1}{m} \\ \dfrac{h}{cm}, & y \in \left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}\right), \quad h = 1, \ldots, cm-1 \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{c|}} \end{cases}$$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & p \in \left(\frac{h}{cm}, \frac{h+1}{cm}\right], \quad h = 0, \ldots, cm-2 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{c}|}, & p \in \left(1 - \frac{1}{cm}, 1\right) \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (6.9)

$$_tq_x = \begin{cases} \frac{t}{c}, & t \in [0,c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{6.10}$$

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = \begin{cases} \frac{1}{cm}, & h = 0, \ldots, cm-1 \\ 0, & h \geq cm \end{cases} \tag{6.11}$$

(i) Використовуючи (6.11) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості пожиттєвого страхування з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A_x^{(m)} = \sum_{h=0}^{cm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=0}^{cm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \frac{1}{cm} =$$
$$= \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^c)}{cm(1 - v^{\frac{1}{m}})} = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^c)}{cd^{(m)}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\delta c})}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})}.$$

Звідси й за формулою про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування з виплатою в кінці періоду та пожиттєвого ануїтету з виплатами m разів на рік маємо:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}} = \frac{1}{d^{(m)}} \left(1 - \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^c)}{cd^{(m)}}\right) =$$
$$= \frac{1}{m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})} \left(1 - \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\frac{\delta c}{m}})}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})}\right).$$

(ii) Згідно з пунктом (i)

$$^2A_x^{(m)} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1 - e^{-2\delta c})}{cm(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}})}.$$

Застосовуючи теорему про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік, отримуємо:

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_x^{(m)} - (A_x^{(m)})^2}{(d^{(m)})^2} =$$

$$= \frac{1}{m^2(1-e^{-\frac{\delta}{m}})^2}\left[\frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1-e^{-2\delta c})}{cm(1-e^{-\frac{2\delta}{m}})} - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta c})}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1-e^{-\delta c})}{cm^3(1-e^{-\frac{\delta}{m}})^3}\left[\frac{1+e^{-\delta c}}{1+e^{-\frac{\delta}{m}}} - \frac{1-e^{-\delta c}}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\right].$$

(iii) Випливає з (6.10) і теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.

(iv) Випливає з (6.10) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. $\square$

3.7 Строковий ануїтет пренумерандо

3.7.1 Означення

(Строковий) n-річний ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного періоду (m-періоду) протягом n років від моменту укладання страхової угоди, допоки ця особа залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$v_{k,j} = v^{k+\frac{j}{m}}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$

$$y_{k,j} = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}|}}, & k < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & k \geq n \end{cases}, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Отже, *теперішня вартість (строкового) n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік* $Y = Y(x)$ в термінах випадкових величин $K = K(x), J = J(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}|}}, & K < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K < n \\ \dfrac{1-v^n}{d^{(m)}}, & K \geq n \end{cases} \tag{7.1}$$

Актуарна теперішня вартість (строкового) n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік позначається $\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} \, \mathsf{Pr}\big\{K = k,\ J = j\big\} + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \, \mathsf{Pr}\big\{K \geq n\big\} = = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} \ {}_k p_x \ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \ {}_n p_x \,.$$

В термінах випадкової величини $H = H(x)$ функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету мають вигляд:

$$b_h = \begin{cases} \frac{1}{m}, & h < mn \\ 0, & h \geq mn \end{cases}$$

$$v_h = v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

$$y_h = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & h < mn \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & h \geq mn \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість (строкового) n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік* $Y = Y(x)$ визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m}}|}, & H < nm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & H \geq nm \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{\frac{H+1}{m}}}{d^{(m)}}, & H < nm \\ \dfrac{1 - v^{n}}{d^{(m)}}, & H \geq nm \end{cases}$$

Актуарна теперішня вартість (строкового) n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік має вигляд:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=0}^{nm-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} \, \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \, \mathsf{Pr}\big\{H \geq nm\big\} = = \sum_{h=0}^{nm-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} \ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x + \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \ {}_n p_x \,.$$

3.7.2 Властивості

Теорема 7.1. (про функцію розподілу Y)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\,, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+2}{m}}|}\Big), \quad h = 0, \ldots, nm-2 \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\Big), \quad h = 1, \ldots, nm-1 \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \end{cases}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ F_H\Big(-1 - \frac{m}{\delta}\ln(1 - d^{(m)}y)\Big), & \frac{1}{m} \leq y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ {}_{\frac{1}{m}\lfloor -\frac{m}{\delta}\ln(1-dy)\rfloor}q_x\,, & \frac{1}{m} \leq y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \end{cases}$$

Доведення. Обидві формули випливають з першої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо:

(i) $y_0 = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{1}{m}}|} = \dfrac{1}{m}$;

(ii) $y_0 < y_1 < \ldots < y_{nm-1}$;

(iii) $y_h = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, \quad h \geq nm-1$;

(iv) функція

$$\varphi(y) = -1 - \frac{m}{\delta}\ln(1 - d^{(m)}y)$$

строго зростає на $\big[\frac{1}{m}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}\big]$ і має таку властивість:

$$\varphi(y_h) = h, \quad h = 0, \ldots, nm-1.$$

□

Наслідок 7.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Y, $p \in (0,1)$.

- *Нехай* ${}_{\frac{nm-1}{m}}q_x = {}_{n-\frac{1}{m}}q_x < 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}, & p \in \left({}_{\frac{h}{m}}q_x \,,\, {}_{\frac{h+1}{m}}q_x \right], \quad h = 0, \ldots, nm-2 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}, & p \in \left({}_{n-\frac{1}{m}}q_x \,, 1 \right) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{h_0}{m}}q_x < 1 = {}_{\frac{h_0+1}{m}}q_x$, $0 < h_0 < nm-1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}, & p \in \left({}_{\frac{h}{m}}q_x \,,\, {}_{\frac{h+1}{m}}q_x \right], \quad h = 0, \ldots, h_0-1 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h_0+1}{m}|}}, & p \in \left({}_{\frac{h_0}{m}}q_x \,, 1 \right) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{1}{m}}q_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = \dfrac{1}{m}$, $p \in (0,1)$.

Доведення. Випливає з наслідку про процентиль до другої теореми про функцію розподілу теперішньої вартості ануїтету пренумерандо і теореми 7.1. $\square$

Теорема 7.2. (про властивості актуарної теперішньої вартості n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

(i) *зображення у формі поточних виплат*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \sum_{h=0}^{nm-1} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}}\; {}_{\frac{h}{m}}p_x = \sum_{h=0}^{nm-1} \frac{1}{m}\; {}_{\frac{h}{m}}E_x =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, v^{k+\frac{j}{m}}\; {}_{k+\frac{j}{m}}p_x = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\; {}_{k+\frac{j}{m}}E_x\,; \tag{7.2}$$

(ii) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю* n*-річного мішаного страхування з виплатою в кінці періоду*

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} + A^{(m)}_{x:\overline{n|}}; \tag{7.3}$$

(iii) *рекурентна формула*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \sum_{h=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}}\; {}_{\frac{h}{m}}p_x + vp_x\ddot{a}^{(m)}_{x+1:\overline{n-1|}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Доведення. (i) Випливає з (загальної) теореми про зображення у формі поточних виплат актуарної теперішньої вартості ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.

(ii) Нехай Z позначає теперешню вартість n-річного мішаного страхування з виплатою 1 в кінці періоду:

$$Z = \begin{cases} v^{K+\frac{J+1}{m}}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$$

Використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$1 = d^{(m)}Y + Z \implies 1 = d^{(m)}\mathsf{E}\big[Y\big] + \mathsf{E}\big[Z\big] = d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} + A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}.$$

(iii) Випливає з (загальної) теореми про рекурентне співвідношення на актуарну теперішню вартість ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. Перевіримо умову цієї теореми. Позначимо $\widetilde{b}_{k,j}$ функцію виплат для $(n-1)$-річного ануїтету пренумерандо для особи $(x+1)$. Тоді

$$\widetilde{b}_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & k < n-1 \\ 0, & k \geq n-1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{m}, & k+1 < n \\ 0, & k+1 \geq n \end{cases} = b_{k+1,j}, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

□

Теорема 7.3. (про дисперсію n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2\!A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} - \big(A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}\big)^2}{\big(d^{(m)}\big)^2} =$$
$$= \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} - {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}\Big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}} - \big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}\big)^2, \quad (7.4)$$

де ${}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}$, ${}^2\!A^{(m)}_{x:\,\overline{n|}}$ *позначають відповідно актуарні теперішні вартості n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік і n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.*

Доведення. *1-й спосіб*: Нехай Z позначає теперешню вартість n-річного мішаного страхування з виплатою 1 в кінці періоду:

$$Z = \begin{cases} v^{K+\frac{J+1}{m}}, & K < n \\ v^n, & K \geq n \end{cases}$$

Використовуючи формулу (7.1), отримуємо:

$$Y = \frac{1-Z}{d^{(m)}} \implies \mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{\mathsf{Var}\big[Z\big]}{\big(d^{(m)}\big)^2} = \frac{{}^2\!A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \big(A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\big)^2}{\big(d^{(m)}\big)^2}.$$

Позначимо ${}^2Y$, ${}^2Z$ відповідно теперішні вартості n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік і n-річного мішаного страхування життя з виплатою 1 в кінці періоду для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ. Тоді

$$ {}^2Z = \begin{cases} v^{\frac{2(H+1)}{m}}, & H < nm \\ v^{\frac{2n}{m}}, & H \geq nm \end{cases}$$

$${}^2Y = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{\frac{2(H+1)}{m}}}{m(1-v^{\frac{2}{m}})}, & H < nm \\ \dfrac{1-v^{\frac{2n}{m}}}{m(1-v^{\frac{2}{m}})}, & H \geq nm \end{cases} = \frac{1 - {}^2Z}{d^{(m)}\Big(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\Big)}.$$

Звідси маємо:

$$d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)\mathsf{E}\big[\,{}^2Y\big] + \mathsf{E}\big[\,{}^2Z\big] = 1 \implies$$
$$\implies d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} + {}^2\!A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = 1. \quad (7.5)$$

Використовуючи цю рівність, формулу (7.3) і першу рівність (7.4), отримуємо другу рівність (7.4):

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{1}{(d^{(m)})^2}\left[1 - d^{(m)}\left(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \big(1 - d^{(m)}\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\big)^2\right] =$$
$$= \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\Big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\big)^2.$$

<u>*2-й спосіб*</u>: Згідно з означенням $Y(x) = \varphi\big(H(x)\big)$, де

$$\varphi(h) = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & h < nm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & h \geq nm \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{\frac{h+1}{m}}}{d^{(m)}}, & h < nm \\ \dfrac{1-v^n}{d^{(m)}}, & h \geq nm \end{cases}$$

Оскільки послідовність $\varphi(h)$ невід'ємна й обмежена, то за теоремою про математичне сподівання й дисперсію функції від невід'ємної дискретної цілочисельної випадкової величини та формулою (7.2) маємо:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[Y^2(x)\big] = \mathsf{E}\big[\varphi^2\big(H(x)\big)\big] = \varphi^2(0) + \sum_{h=0}^{\infty}\big(\varphi^2(h+1) - \varphi^2(h)\big)\ {}_{\frac{h+1}{m}}p_x = \\
= \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(d^{(m)})^2}\sum_{h=0}^{nm-2}\big(v^{\frac{h+1}{m}} - v^{\frac{h+2}{m}}\big)\big(2 - v^{\frac{h+1}{m}} - v^{\frac{h+2}{m}}\big)\ {}_{\frac{h+1}{m}}p_x = \\
= \frac{1}{m^2} + \frac{1}{d^{(m)}}\sum_{h=1}^{nm-1}\frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\big(2 - v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{h+1}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
= \frac{1}{d^{(m)}}\sum_{h=0}^{nm-1}\frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\big(2 - v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{h+1}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
= \frac{1}{d^{(m)}}\sum_{h=0}^{nm-1}\frac{1}{m}v^{\frac{h}{m}}\big(2 - 2v^{\frac{h}{m}} + v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{h+1}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
= \frac{2}{d^{(m)}}\sum_{h=0}^{nm-1}\frac{1}{m}\big(v^{\frac{h}{m}} - v^{\frac{2h}{m}}\big)\ {}_{\frac{h}{m}}p_x + \sum_{h=0}^{nm-1}\frac{1}{m^2}v^{\frac{2h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \\
= \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\Big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

Звідси, зокрема, отримуємо другу рівність (7.4):

$$
\mathsf{Var}\big[Y\big] = \mathsf{E}\big[Y^2\big] - \mathsf{E}\big[Y\big]^2 = \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\Big) + \frac{1}{m}\,{}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\big)^2.
$$

За формулами (7.3) і (7.5) маємо:

$$
\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d}, \qquad {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{1 - {}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}\Big(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\Big)}.
$$

Звідси й з другої рівності (7.4) отримуємо першу рівність (7.4):

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d^{(m)}}\left(\frac{1 - A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}} - \frac{1 - {}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}\Big(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\Big)}\right) + \\
\frac{1 - {}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{md^{(m)}\Big(2 - \frac{d^{(m)}}{m}\Big)} - \left(\frac{1 - A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}}\right)^2 = \frac{{}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \big(A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\big)^2}{\big(d^{(m)}\big)^2}.
\end{aligned}
$$

□

Теорема 7.4. (про n-річний ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має*

n-річний ануїтет,

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \tag{7.6}$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\big)}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{2}{d^{(m)}}\left(\dfrac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\big)} - \dfrac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\big)}\right) +$

$$+ \frac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{m^2\big(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\big)} - \left(\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\big)}\right)^2;$$

(iii) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \frac{1}{m} \\ 1 - e^{-\frac{\mu h}{m}}, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\Big), \quad h = 1, \ldots, nm-1 \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \end{cases}$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ^p_Y випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi^p_Y = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & p \in \Big(1 - e^{-\frac{\mu h}{m}}, 1 - e^{-\frac{\mu(h+1)}{m}}\Big], \quad h = 0, \ldots, nm-2 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & p \in \Big(1 - e^{-\frac{\mu(nm-1)}{m}}, 1\Big) \end{cases}$$

Доведення. За умовою (7.6) теореми

$${}_tp_x = e^{-\mu t}, \quad {}_tq_x = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0. \tag{7.7}$$

(i) Використовуючи (7.7) і формулу для актуарної теперішньої вартості n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік у формі поточних виплат, отримуємо:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{nm-1} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \frac{1}{m}\sum_{h=0}^{nm-1} e^{-\frac{\delta h}{m}} e^{-\frac{\mu h}{m}} = \frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\big)}.$$

(ii) За теоремою про дисперсію n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік і пунктом (i) теореми

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d^{(m)}}\Big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}\Big) + \frac{1}{m}\ {}^2\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} - \Big(\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}\Big)^2 =$$

$$= \frac{2}{d^{(m)}}\left(\frac{1 - e^{-(\mu+\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\big)} - \frac{1 - e^{-(\mu+2\delta)n}}{m\big(1 - e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\big)}\right) +$$

$$+\frac{1-e^{-(\mu+2\delta)n}}{m\left(1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}\right)}-\left(\frac{1-e^{-(\mu+\delta)n}}{m\left(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}\right)}\right)^2;$$

(iii) Випливає з (7.7) і теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.

(iv) Випливає з (7.7) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. □

Теорема 7.5. (про n-річний ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи (x), що має n-річний ануїтет, випадкова величина $T(x)$ має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра):*

$$f_{T(x)}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}, & x\in[0,c)\\ 0, & x\notin[0,c)\end{cases}\qquad c>n. \tag{7.8}$$

Тоді:

(i) $$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}=\frac{1}{d^{(m)}}\left(1-\frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^n)}{cd^{(m)}}-v^n\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{m(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\left(1-\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta n})}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}-e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right);$$

(ii) $$\mathsf{Var}[Y]=\frac{1}{m^2(1-e^{-\frac{\delta}{m}})^2}\left[\frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1-e^{-2\delta n})}{cm(1-e^{-\frac{2\delta}{m}})}+e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta n})}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}+e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)^2\right];$$

(iii) $$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<\dfrac{1}{m}\\ \dfrac{h}{cm}, & y\in\left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}},\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}\right),\quad h=1,\ldots,nm-1\\ 1, & y\geq\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}\end{cases}$$

(iv) *Нехай $p\in(0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ^p_Y випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi^p_Y=\begin{cases}\ddot{a}_{\overline{k+1|}}, & p\in\left(\dfrac{k}{c},\dfrac{k+1}{c}\right],\quad k=0,\ldots,c-2\\ \ddot{a}_{\overline{c|}}, & p\in\left(1-\dfrac{1}{c},1\right)\end{cases}$$

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & p \in \left(\dfrac{h}{cm}, \dfrac{h+1}{cm}\right], \quad h = 0, \ldots, nm-2 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & p \in \left(\dfrac{nm-1}{cm}, 1\right) \end{cases}$$

Доведення. Згідно з (7.8)

$$ {}_tq_x = \begin{cases} \dfrac{t}{c}, & t \in [0, c) \\ 1, & t \geq c \end{cases} \tag{7.9}$$

$$\mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = {}_{\frac{h+1}{m}}q_x - {}_{\frac{h}{m}}q_x = \begin{cases} \dfrac{1}{cm}, & h < \lfloor cm \rfloor \\ 1 - \dfrac{\lfloor cm \rfloor}{cm}, & h = \lfloor cm \rfloor \end{cases} \tag{7.10}$$

(i) Використовуючи (7.9), (7.10) та формулу обчислення актуарної теперішньої вартості n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду, отримуємо:

$$A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} + v^n \mathsf{Pr}\big\{H(x) \geq nm\big\} =$$
$$= \sum_{h=0}^{nm-1} v^{\frac{h+1}{m}} \frac{1}{cm} + v^n \left(1 - \frac{n}{c}\right) = \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^n)}{cm(1 - v^{\frac{1}{m}})} + v^n \left(1 - \frac{n}{c}\right) =$$
$$= \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^n)}{cd^{(m)}} + v^n \left(1 - \frac{n}{c}\right) = \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\delta n})}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})} + e^{-\delta n} \left(1 - \frac{n}{c}\right).$$

Звідси й за формулою про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду та n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік отримуємо твердження цього пункту.

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A^{(m)}_{x:\overline{n}|}}{d^{(m)}} = \frac{1}{d^{(m)}} \left(1 - \frac{v^{\frac{1}{m}}(1 - v^n)}{cd^{(m)}} - v^n \left(1 - \frac{n}{c}\right)\right).$$

(ii) Згідно з пунктом (i)

$$ {}^2A^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1 - e^{-2\delta n})}{cm(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}})} + e^{-2\delta n} \left(1 - \frac{n}{c}\right).$$

Застосовуючи теорему про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік, отримуємо:

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \left(A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}\right)^2}{(d^{(m)})^2} =$$

$$= \frac{1}{m^2(1-e^{-\frac{\delta}{m}})^2}\left[\frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1-e^{-2\delta n})}{cm(1-e^{-\frac{2\delta}{m}})} + e^{-2\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta n})}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})} + e^{-\delta n}\left(1-\frac{n}{c}\right)\right)\right].$$

(iii) Випливає з (7.9) і теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.

(iv) Випливає з (7.9) і наслідку про процентиль теореми про функцію розподілу Y для строкового ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік. □

3.8 Відкладений (відтермінований) пожиттєвий ануїтет пренумерандо

3.8.1 Означення

Відкладений на l років пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного періоду (m-періоду), починаючи з віку $x+l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди), допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_{k,j} = \begin{cases} 0, & k<l \\ \frac{1}{m}, & k \ge l \end{cases}, \quad j=0,\dots,m-1;$$
$$v_{k,j} = v^{k+\frac{j}{m}}, \quad k=0,\,1,\,2,\,\dots, \quad j=0,\dots,m-1;$$
$$y_{k,j} = \begin{cases} 0, & k<l \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & k \ge l \end{cases}, \quad j=0,\dots,m-1.$$

Отже, *теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік* $Y = Y(x)$ в термінах випадкових величин $K = K(x), J = J(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & K<l \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & K \ge l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K<l \\ \dfrac{v^l - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K \ge l \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \dfrac{1 - v^{K + \frac{J+1}{m} - l}}{d^{(m)}}, & K \geq l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K + \frac{J+1}{m} - l}|}, & K \geq l \end{cases} \tag{8.1}$$

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік позначається ${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)}$ і визначається формулою:

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k + \frac{j+1}{m} - l}|} \; \mathsf{Pr}\big\{K = k,\ J = j\big\} =$$

$$= \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k + \frac{j+1}{m} - l}|} \;\; {}_k p_x \;\; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k}. \tag{8.2}$$

В термінах випадкової величини $H = H(x)$ функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету мають вигляд:

$$b_h = \begin{cases} 0, & h < lm \\ \frac{1}{m}, & h \geq lm \end{cases}$$

$$v_h = v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$y_h = \begin{cases} 0, & h < lm \\ \sum\limits_{s=lm}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}}, & h \geq lm \end{cases} = \begin{cases} 0, & h < lm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & h \geq lm \end{cases}$$

Отже, теперішня вартість Y визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} 0, & H < lm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & H \geq lm \end{cases} = \begin{cases} 0, & H < lm \\ \dfrac{v^l - v^{\frac{H+1}{m}}}{d^{(m)}}, & H \geq lm \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l \dfrac{1 - v^{\frac{H+1}{m} - l}}{d^{(m)}}, & H \geq lm \end{cases} = \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m} - l}|}, & H \geq lm \end{cases}$$

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік має вигляд:

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=lm}^{\infty} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m} - l}|} \; \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = \sum_{h=lm}^{\infty} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m} - l}|} \;\; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x.$$

3.8.2 Властивості

Теорема 8.1. (про функцію розподілу відкладеного на n років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}\Big), \quad h \geq lm \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{d^{(m)}} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{\frac{h}{m}}q_x\,, & y \in \Big[v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}-l}|}, v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}-l}|}\Big), \quad h \geq lm \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{d^{(m)}} \end{cases}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ F_H\Big(-1 - \frac{m}{\delta}\ln(v^l - d^{(m)}y)\Big), & 0 \leq y < \frac{v^l}{d^{(m)}} \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{d^{(m)}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ {}_{\frac{1}{m}\lfloor -\frac{m}{\delta}\ln(v^l - d^{(m)}y)\rfloor}q_x\,, & 0 \leq y < \frac{v^l}{d^{(m)}} \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{d^{(m)}} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 8.1.*

Наслідок 8.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай ξ_Y^p позначає p-й процентиль теперішньої вартості втрат Y, $p \in (0,1)$.*

- *Нехай* ${}_tq_x < 1 \quad \forall t \geq 0$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, {}_lq_x\,] \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & p \in \Big({}_{\frac{h}{m}}q_x\,, {}_{\frac{h+1}{m}}q_x\Big], \quad h \geq lm \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{h_0}{m}}q_x < 1 = {}_{\frac{h_0+1}{m}}q_x$, $h_0 > lm - 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, {}_lq_x\,] \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & p \in \left({}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x \right],\ \ h = lm, \ldots, h_0 - 1 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h_0+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & p \in \left({}_{\frac{h_0}{m}}q_x\,, 1 \right) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_lq_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = 0,\ p \in (0, 1)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 8.1.1.*

Теорема 8.2. (про властивості актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

(i) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю пожиттєвого ануїтету пренумерандо особи $(x+l)$ з виплатами m разів на рік*

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = v^l\, {}_lp_x\, \ddot{a}^{(m)}_{x+l} = {}_lE_x\, \ddot{a}^{(m)}_{x+l};$$

(ii) *зв'язок з актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого та l-річного ануїтетів пренумерандо з виплатами m разів на рік*

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{l}|}; \tag{8.3}$$

(iii) *зображення у формі поточних виплат*

$$\begin{aligned} {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} &= \sum_{h=lm}^{\infty} \frac{1}{m}\, v^{\frac{h}{m}}\, {}_{\frac{h}{m}}p_x = \sum_{h=lm}^{\infty} \frac{1}{m}\, {}_{\frac{h}{m}}E_x = \\ &= \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, v^{k+\frac{j}{m}}\, {}_{k+\frac{j}{m}}p_x = \sum_{k=l}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, {}_{k+\frac{j}{m}}E_x\,; \end{aligned} \tag{8.4}$$

(iv) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю відкладеного на l років пожиттєвого страхування з виплатою в кінці періоду*

$${}_lE_x = d^{(m)}\, {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} + {}_{l|}A_x^{(m)}\,; \tag{8.5}$$

(v) *рекурентна формула*

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = vp_x\, {}_{l-1|}\ddot{a}^{(m)}_{x+1} = E_x\, {}_{l-1|}\ddot{a}^{(m)}_{x+1}, \quad l \in \mathbf{N}.$$

Вправа 3. *Довести теорему 8.2.*

Теорема 8.3. (про дисперсію теперішньої вартості відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d^{(m)}}\big(v^l\ {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} - {}_{l|}{}^2\ddot{a}_x^{(m)}\big) + \frac{1}{m}\ {}_{l|}{}^2\ddot{a}_x^{(m)} - \big({}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)}\big)^2 =$$
$$= \frac{1}{(d^{(m)})^2}\Big(v^{2l}\ {}_lp_x\ {}_lq_x + {}_{l|}{}^2A_x^{(m)} - \big({}_{l|}A_x^{(m)}\big)^2 - 2v^l\ {}_lq_x\ {}_{l|}A_x^{(m)}\Big), \quad (8.6)$$

де ${}_{l|}{}^2\ddot{a}_x^{(m)}$, ${}_{l|}{}^2A_x^{(m)}$ *позначають відповідно актуарні теперішні вартості відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами* m *разів на рік і відкладеного на* l *років пожиттєвого страхування життя з виплатою 1 в кінці періоду для особи* (x) *з інтенсивністю відсоткової ставки* 2δ.

Вправа 4. *Довести теорему 8.3.*

Теорема 8.4. (про відкладений пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має відкладений на* l *років пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами* m *разів на рік,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \quad (8.7)$$

Тоді:

(i) $${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{e^{-(\mu+\delta)l}}{m(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}})};$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-(\mu+2\delta)l}}{m^2(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}})}\left(\frac{1+e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \frac{e^{-\mu l}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right);$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1-e^{-\frac{\mu h}{m}}, & y \in \left[v^l\ddot{a}_{\overline{\frac{h}{m}-l|}}^{(m)}, v^l\ddot{a}_{\overline{\frac{h+1}{m}-l|}}^{(m)}\right), \quad h \geq lm \\ 1, & y \geq \frac{v^l}{d^{(m)}} \end{cases}$$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in (0,\ {}_lq_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}^{(m)} - \ddot{a}_{\overline{l|}}^{(m)}, & p \in \left(1-e^{-\frac{\mu h}{m}}, 1-e^{-\frac{\mu(h+1)}{m}}\right], \quad h \geq lm \end{cases}$$

Вправа 5. *Довести теорему 8.4.*

Теорема 8.5. (про відкладений пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має відкладений на* l *років пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами* m *разів на рік, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра)* $(l < c)$:

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}, & x \in [0,c) \\ 0, & x \notin [0,c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{8.8}$$

Тоді:

(i) $${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{v^l}{d^{(m)}}\left[1 - \frac{l}{c} - \frac{v^{\frac{1}{m}}(1-v^{c-l})}{cd^{(m)}}\right] = \\ = \frac{e^{-\delta l}}{m(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\left[1 - \frac{l}{c} - \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta(c-l)})}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\right];$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-2\delta l}}{m^2(1-e^{-\frac{\delta}{m}})^2}\left[\frac{l}{c}\left(1-\frac{l}{c}\right) + \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1-e^{-2\delta(c-l)})}{cm(1-e^{-\frac{2\delta}{m}})} - \\ - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta(c-l)})}{cm(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\right)^2 - \frac{2le^{-\frac{\delta}{m}}(1-e^{-\delta(c-l)})}{c^2m(1-e^{-\frac{\delta}{m}})}\right];$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \dfrac{h}{cm}, & y \in \left[v^l\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}-l}|}, v^l\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}-l}|}\right), \quad h = lm, \ldots, cm-1 \\ 1, & y \geq v^l\ddot{a}^{(m)}_{\overline{c-l}|} \end{cases}$$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} 0, & p \in (0, {}_lq_x\ \frac{l}{c}] \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & p \in \left(\frac{h}{cm}, \frac{h+1}{cm}\right], \quad h = lm, \ldots, cm-2 \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{c}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & p \in \left(1 - \frac{1}{cm}, 1\right) \end{cases}$$

Вправа 6. *Довести теорему 8.5.*

3.9 Відкладений (відтермінований) строковий ануїтет пренумерандо

3.9.1 Означення

Відкладений на l років n-річний ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного періоду (інтервала розбиття), починаючи з віку $x+l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди) протягом n років, допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_{k,j} = \begin{cases} 0, & k < l \\ \frac{1}{m}, & l \le k < l+n \\ 0, & k \ge l+n \end{cases}, \quad j = 0, \dots, m-1;$$

$$v_{k+\frac{j}{m}} = v^{k+\frac{j}{m}}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1;$$

$$y_{k,j} = \begin{cases} 0, & k < l \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & l \le k < l+n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & k \ge l+n \end{cases}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Отже, *теперішня вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік* $Y = Y(x)$ в термінах випадкових величин $K = K(x), J = J(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & l \le K < l+n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & K \ge l+n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{v^l - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & l \le K < l+n \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{d^{(m)}}, & K \ge l+n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l\, \dfrac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}-l}}{d^{(m)}}, & l \le K < l+n \\ v^l\, \dfrac{1-v^n}{d^{(m)}}, & K \ge l+n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & K < l \\ v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}-l}|}, & l \le K < l+n \\ v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \ge l+n \end{cases} \tag{9.1}$$

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік позначається ${}_{l|n}\ddot{a}^{(m)}_x$ і визначається формулою:

$$ {}_{l|n}\ddot{a}^{(m)}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] =$$
$$= \sum_{k=l}^{l+n-1} \sum_{j=0}^{m-1} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}-l}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K=k,\ J=j\big\} + v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}\ \mathsf{Pr}\big\{K \ge l+n\big\} =$$
$$= \sum_{k=l}^{l+n-1} \sum_{j=0}^{m-1} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}-l}|}\ {}_k p_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}\ {}_{l+n}p_x\,. \tag{9.2}$$

В термінах випадкової величини $H = H(x)$ функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету мають вигляд:

$$b_h = \begin{cases} 0, & h < lm \\ \frac{1}{m}, & lm \le h < (l+n)m \\ 0, & h \ge (l+n)m \end{cases}$$

$$v_{\frac{h}{m}} = v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_h = \begin{cases} 0, & h < lm \\ \sum\limits_{s=lm}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}}, & lm \le h < (l+n)m \\ \sum\limits_{s=lm}^{(l+n)m-1} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}}, & h \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & h < lm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & lm \le h < (l+n)m \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & h \ge (l+n)m \end{cases}$$

Отже, теперішня вартість Y визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} 0, & H < lm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & lm \le H < (l+n)m \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & H \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ \dfrac{v^l - v^{\frac{H+1}{m}}}{d^{(m)}}, & lm \le H < (l+n)m \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{d^{(m)}}, & H \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l \, \dfrac{1 - v^{\frac{H+1}{m} - l}}{d^{(m)}}, & lm \le H < (l+n)m \\ v^l \, \dfrac{1 - v^n}{d^{(m)}}, & H \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m} - l}|}, & lm \le H < (l+n)m \\ v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & H \ge (l+n)m \end{cases}$$

Актуарна теперішня вартість відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік має вигляд:

$$_{l|n}\ddot{a}^{(m)}_x = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=lm}^{(l+n)m-1} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m} - l}|} \, \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} + v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \; {}_{l+n}p_x =$$

$$= \sum_{h=lm}^{(l+n)m-1} v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m} - l}|} \; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + v^l \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \; {}_{l+n}p_x \, .$$

3.9.2 Властивості

Вправа 1. *Сформулювати й довести теорему про функцію розподілу відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.*

Вправа 2. *Сформулювати й довести наслідок про процентиль теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік.*

Вправа 3. *Сформулювати й довести теорему про властивості актуарної теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік:*

(i) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік особи $(x+l)$*

(ii) *зв'язок з актуарними теперішніми вартостями $(l+n)$-річного та l-річного ануїтетів пренумерандо з виплатами m разів на рік*

(iii) *зображення у формі поточних виплат*

(iv) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю відкладеного на l років n-річного мішаного страхування життя з виплатою в кінці періоду*

(v) *рекурентна формула*

Вправа 4. *Сформулювати й довести теорему про дисперсію теперішньої вартості відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік (навести два різних способи доведення).*

Вправа 5. *Сформулювати й довести теорему про відкладений строковвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для випадку сталої сили смертності:*

(i) ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{(m)}$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big]$

(iii) $F_Y(y)$

(iv) ξ_Y^p

Вправа 6. *Сформулювати й довести теорему про відкладений строковвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік для рівномірного розподілу:*

(i) ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{(m)}$

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big]$

(iii) $F_Y(y)$

(iv) ξ_Y^p

3.10 Пожиттєвий ануїтет пренумерандо з гарантією

3.10.1 Означення

Пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) на початку кожного періоду (m-періоду) протягом n років, якщо ця особа не доживає до віку $x+n$, і виплачується допоки особа (x) залишається живою, якщо ця особа доживає до віку $x+n$ (тобто за цією страховою угодою гарантовано буде сплачено ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік протягом n років). Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_{k,j} = \frac{1}{m}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$
$$v_{k+\frac{j}{m}} = v^{k+\frac{j}{m}}, \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \quad j = 0, \ldots, m-1;$$
$$y_{k,j} = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & k < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|}, & k \geq n \end{cases}, \quad j = 0, \ldots, m-1.$$

Отже, *теперішня вартість пожиттевого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік* $Y = Y(x)$ в термінах випадкових величин $K = K(x), J = J(x)$ має вигляд:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^n}{d^{(m)}}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K \geq n \end{cases} \tag{10.1}$$

Актуарна теперішня вартість пожиттевого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік позначається $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}}$ і визначається формулою:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] =$$
$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \,\mathsf{Pr}\big\{K < n\big\} + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} \,\mathsf{Pr}\big\{K = k, J = j\big\} =$$
$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}\, {}_nq_x + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{k+\frac{j+1}{m}}|} \; {}_kp_x \;\; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}.$$

В термінах випадкової величини $H = H(x)$ функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету мають вигляд:

$$b_h = \frac{1}{m}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$$
$$v_{\frac{h}{m}} = v^{\frac{h}{m}}, \quad h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots;$$
$$y_h = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & h < nm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & h \geq nm \end{cases}$$

Отже, теперішня вартість Y визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & H < nm \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H+1}{m}}|}, & H \geq nm \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^n}{d^{(m)}}, & H < nm \\ \dfrac{1 - v^{\frac{H+1}{m}}}{d^{(m)}}, & H \geq nm \end{cases} \tag{10.2}$$

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік має вигляд:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] =$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \mathsf{Pr}\big\{H < nm\big\} + \sum_{h=nm}^{\infty} v^n \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}-n}|} \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} =$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}\ {}_n q_x + \sum_{h=nm}^{\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x.$$

3.10.2 Властивості

Теорема 10.1. (про функцію розподілу відкладеного на n років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік)

- *(перша формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ {}_{\frac{h}{m}} q_x\,, & y \in \Big[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\Big), \quad h \geq nm \\ 1, & y \geq \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases}$$

- *(друга формула)*

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ F_H\Big(-1 - \frac{m}{\delta} \ln(1 - d^{(m)}y)\Big), & \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \leq y < \frac{1}{d^{(m)}} \\ 1, & y \geq \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ {}_{\frac{1}{m}\lfloor -\frac{m}{\delta} \ln(1-d^{(m)}y)\rfloor} q_x\,, & \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \leq y < \frac{1}{d^{(m)}} \\ 1, & y \geq \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести теорему 10.1.*

Наслідок 10.1.1. (про процентиль випадкової величини Y) *Нехай* ξ_Y^p *позначає* p*-й процентиль теперішньої вартості втрат* Y, $p \in (0,1)$.

- *Нехай* ${}_tq_x < 1 \quad \forall t \ge 0$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}, & p \in (0, {}_nq_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}^{(m)}, & p \in \left({}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x \right], \quad h \ge nm \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_{\frac{h_0}{m}}q_x < 1 = {}_{\frac{h_0+1}{m}}q_x$, $h_0 > nm - 1$. *Тоді*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}, & p \in (0, {}_nq_x\,] \\ \ddot{a}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}}^{(m)}, & p \in \left({}_{\frac{h}{m}}q_x\,,\ {}_{\frac{h+1}{m}}q_x \right], \quad h = nm, \ldots, h_0 - 1 \\ \ddot{a}_{\overline{\frac{h_0+1}{m}|}}^{(m)}, & p \in \left({}_{\frac{h_0}{m}}q_x\,, 1 \right) \end{cases}$$

- *Нехай* ${}_nq_x = 1$. *Тоді* $\xi_Y^p = \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}$, $p \in (0,1)$.

Вправа 2. *Довести наслідок 10.1.1.*

Теорема 10.2. (про властивості актуарної теперішньої вартості пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік)

(i) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю відкладеного на* n *років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами* m *разів на рік*

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:\,n|}}}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} + {}_{n|}\ddot{a}_x^{(m)}; \tag{10.3}$$

(ii) *зв'язок з актуарною теперішньою вартістю пожиттєвого ануїтету пренумерандо особи* $(x+n)$ *з виплатами* m *разів на рік*

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:\,n|}}}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} + {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}; \tag{10.4}$$

(iii) *зв'язок з актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого та* n*-річного ануїтетів пренумерандо з виплатами* m *разів на рік*

$$\ddot{a}_{\overline{\overline{x:\,n|}}}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} + \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}; \tag{10.5}$$

(iv) *зображення у формі поточних виплат*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} + \sum_{h=nm}^{\infty} \frac{1}{m} v^{\frac{h}{m}}\ {}_{\frac{h}{m}}p_x = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} + \sum_{h=nm}^{\infty} \frac{1}{m}\ {}_{\frac{h}{m}}E_x =$$
$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{k+\frac{j}{m}}\ {}_{k+\frac{j}{m}}p_x = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\ {}_{k+\frac{j}{m}}E_x\,; \qquad (10.6)$$

(v) *рекурентна формула*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{\frac{s}{m}} + q_x \sum_{s=m}^{nm-1} \frac{1}{m} v^{\frac{s}{m}} + v p_x \ddot{a}^{(m)}_{x+1:\overline{n-1}|}.$$

Вправа 3. *Довести теорему 10.2.*

Теорема 10.3. (про дисперсію пожиттєвого ануїтету пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік)

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{2}{d^{(m)}}\big(v^n\ {}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x - {}_{n|}{}^2\ddot{a}^{(m)}_x\big) + \frac{1}{m}\ {}_{n|}{}^2\ddot{a}^{(m)}_x - \big({}_{n|}\ddot{a}^{(m)}_x\big)^2 =$$
$$= \frac{1}{(d^{(m)})^2}\left(v^{2n}\ {}_np_x\ {}_nq_x + {}_{n|}{}^2A^{(m)}_x - \big({}_{n|}A^{(m)}_x\big)^2 - 2v^n\ {}_nq_x\ {}_{n|}A^{(m)}_x\right), \qquad (10.7)$$

де ${}_{n|}{}^2\ddot{a}^{(m)}_x$, ${}_{n|}{}^2A^{(m)}_x$ *позначають відповідно актуарні теперішні вартості відкладеного на n років пожиттєвого ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік і відкладеного на n років пожиттєвого страхування з виплатою 1 в кінці періоду для особи (x) з інтенсивністю відсоткової ставки 2δ.*

Вправа 4. *Довести теорему 10.3.*

Теорема 10.4. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік для випадку сталої сили смертності) *Нехай для застрахованої особи (x), що має пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік,*

$$\mu(x+t) = \mu = const, \quad t \geq 0. \qquad (10.8)$$

Тоді:

(i) $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1-e^{-\delta n}}{m(1-e^{-\frac{\delta}{m}})} + \dfrac{e^{-(\mu+\delta)n}}{m(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}})}$;

(ii) $\mathsf{Var}\big[Y\big] = \dfrac{e^{-(\mu+2\delta)l}}{m^2(1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}})}\left(\dfrac{1+e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}{1-e^{-\frac{\mu+2\delta}{m}}} - \dfrac{e^{-\mu l}}{1-e^{-\frac{\mu+\delta}{m}}}\right)$;

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ 1 - e^{-\frac{\mu h}{m}}, & y \in \left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\right), \quad h \geq nm \\ 1, & y \geq \frac{1}{d^{(m)}} \end{cases}$$

(iv) *Нехай* $p \in (0,1)$. *Тоді* p*-й процентиль* ξ_Y^p *випадкової величини* Y *дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & p \in \left(0, 1 - e^{-\mu n}\right] \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}, & p \in \left(1 - e^{-\frac{\mu h}{m}}, 1 - e^{-\frac{\mu(h+1)}{m}}\right], \quad h \geq nm \end{cases}$$

Вправа 5. *Довести теорему 10.4.*

Теорема 10.5. (про пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік для рівномірного розподілу) *Нехай для застрахованої особи* (x), *що має пожиттєвий ануїтет пренумерандо з* n*-річною гарантією з виплатами* m *разів на рік, випадкова величина* $T(x)$ *має рівномірний розподіл (розподіл де Муавра)* $(n < c)$:

$$f_{T(x)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & x \in [0, c) \\ 0, & x \notin [0, c) \end{cases} \quad c \in \mathbf{N}. \tag{10.9}$$

Тоді:

(i) $$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})} + \frac{e^{-\delta n}}{m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})}\left[1 - \frac{n}{c} - \frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\delta(c-n)})}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})}\right];$$

(ii) $$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{e^{-2\delta n}}{m^2(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})^2}\left[\frac{n}{c}\left(1 - \frac{n}{c}\right) + \frac{e^{-\frac{2\delta}{m}}(1 - e^{-2\delta(c-n)})}{cm(1 - e^{-\frac{2\delta}{m}})} - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{e^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\delta(c-n)})}{cm(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})}\right)^2 - \frac{2ne^{-\frac{\delta}{m}}(1 - e^{-\delta(c-n)})}{c^2m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}})}\right];$$

(iii) $$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} \\ \frac{h}{cm}, & y \in \left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}\right), \quad h = nm, \dots, cm-1 \\ 1, & y \geq \ddot{a}^{(m)}_{\overline{c}|} \end{cases}$$

(iv) *Нехай $p \in (0,1)$. Тоді p-й процентиль ξ_Y^p випадкової величини Y дорівнює*

$$\xi_Y^p = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}, & p \in \left(0, \frac{n}{c}\right] \\ \ddot{a}_{\overline{\frac{h+1}{m}}|}^{(m)}, & p \in \left(\frac{h}{cm}, \frac{h+1}{cm}\right], \quad h = nm, \ldots, cm-2 \\ \ddot{a}_{\overline{c}|}^{(m)}, & p \in \left(1 - \frac{1}{cm}, 1\right) \end{cases}$$

Вправа 6. *Довести теорему 10.5.*

3.11 Зв'язок між актуарними теперішніми вартостями ануїтетів пренумерандо

Згідно з означенням

$$\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1-v}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{d}{d^{(m)}};$$

$$s_{\overline{1}|}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m} v^{-\frac{k}{m}} = \frac{v^{-1}-1}{m\left(v^{-\frac{1}{m}} - 1\right)} = \frac{i}{i^{(m)}}.$$

Позначимо

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{id}{i^{(m)} d^{(m)}};$$

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{(m)}}.$$

Означення 11.1. Функція

$${}_sE_x = v^s \, {}_sp_x$$

задовільняє умову лінійної інтерполяції, якщо

$${}_{k+t}E_x = (1-t) \, {}_kE_x + t \, {}_{k+1}E_x \,, \quad 0 \le t \le 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11.1}$$

Зауваження 1. Оскільки

$${}_{k+t}E_x = {}_kE_x \; {}_tE_{x+k} \,, \quad {}_{k+1}E_x = {}_kE_x \; E_{x+k} \,,$$

то умову (11.1) можна подати у вигляді:

$${}_tE_{x+k} = (1-t) + t \, E_{x+k} \,, \quad 0 \le t \le 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Лема 11.1. (про функцію ${}_tE_x$) *Нехай функція ${}_sE_x$ задовільняє умову лінійної інтерполяції. Тоді*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\ {}_{k+\frac{j}{m}}E_x = {}_kE_x - ({}_kE_x - {}_{k+1}E_x)\frac{m-1}{2m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Доведення. За умовою леми і згідно з (11.1) маємо:

$$\begin{aligned} {}_{k+\frac{j}{m}}E_x &= {}_kE_x \left(1 - \frac{j}{m}\right) + {}_{k+1}E_x\ \frac{j}{m} = \\ &= {}_kE_x - ({}_kE_x - {}_{k+1}E_x)\ \frac{j}{m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо твердження леми:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\ {}_{k+\frac{j}{m}}E_x &= {}_kE_x - ({}_kE_x - {}_{k+1}E_x)\sum_{j=0}^{m-1}\frac{j}{m^2} = \\ &= {}_kE_x - ({}_kE_x - {}_{k+1}E_x)\frac{m-1}{2m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

□

3.11.1 Пожиттєвий ануїтет пренумерандо

Теорема 11.1. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвих ануїтетів пренумерандо) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m); \tag{11.2}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x. \tag{11.3}$$

Доведення. З формул

$$1 = d^{(m)}\ddot{a}_x^{(m)} + A_x^{(m)}, \quad 1 = d\ddot{a}_x + A_x$$

отримуємо:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\ \ddot{a}_x - \frac{1}{d^{(m)}}\big(A_x^{(m)} - A_x\big). \tag{11.4}$$

Використовуючи припущення лінійної інтерполяції, маємо:

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}}\ A_x = s_{\overline{1}|}^{(m)}A_x.$$

Звідси й з (11.4) отримуємо формулу (11.3):

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}}\,\ddot{a}_x - \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} A_x = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_x - \beta(m) A_x.$$

Зазначимо, що формули (11.2) і (11.3) еквівалентні, оскільки різниця правих частин цих формул дорівнює нулю:

$$\begin{aligned}\big(\alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m)\big) - \big(\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)A_x\big) &= \\ = (s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1)\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_x - \beta(m)\big(1 - A_x\big) &= \\ = \beta(m) d\ddot{a}_x - \beta(m)\big(1 - A_x\big) = \beta(m)\big(d\ddot{a}_x - 1 + A_x\big) &= 0.\end{aligned}$$

□

Теорема 11.2. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвих ануїтетів пренумерандо) *Нехай функція ${}_tE_x$ задовільняє умову лінійної інтерполяції. Тоді*

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.$$

Доведення. Використовуючи зображення пожиттєвих ануїтетів у формі поточних виплат

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\ {}_{k+\frac{j}{m}}E_x\,, \quad \ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x$$

та лему про функцію ${}_tE_x$ маємо:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left({}_kE_x - \frac{m-1}{2m}\big({}_kE_x - {}_{k+1}E_x \big)\right) &= \\ = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kE_x - \frac{m-1}{2m}\sum_{k=0}^{\infty}({}_kE_x - {}_{k+1}E_x) &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.\end{aligned}$$

□

3.11.2 Строковий ануїтет пренумерандо

Теорема 11.3. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями строкових ануїтетів пренумерандо) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \alpha(m)\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x); \tag{11.5}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta(m)A_{x:\overline{n}|}^{1}. \tag{11.6}$$

Доведення. З формул

$$1 = d^{(m)} \ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} + A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}, \quad 1 = d\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} + A_{x:\,\overline{n}|}$$

отримуємо:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(m)}}\, \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{1}{d^{(m)}}\big(A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - A_{x:\,\overline{n}|}\big). \tag{11.7}$$

Використовуючи припущення лінійної інтерполяції, маємо:

$$A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}}\, A^{1}_{x:\,\overline{n}|} + A_{n:\,\frac{1}{x|}} = s^{(m)}_{\overline{1}|} A^{1}_{x:\,\overline{n}|} + A_{n:\,\frac{1}{x|}}.$$

Звідси й з (11.7) отримуємо (11.6):

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|}\, \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{1}{d^{(m)}}\big(s^{(m)}_{\overline{1}|} A^{1}_{x:\,\overline{n}|} + A_{n:\,\frac{1}{x|}} - A_{x:\,\overline{n}|}\big) =$$
$$= \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{s^{(m)}_{\overline{1}|} - 1}{d^{(m)}} A^{1}_{x:\,\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta(m) A^{1}_{x:\,\overline{n}|}.$$

Зазначимо, що формули (11.5) і (11.6) еквівалентні, оскільки різниця правих частин цих формул дорівнює нулю:

$$\big(\alpha(m)\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta(m)(1 - {}_nE_x)\big) - \big(\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta(m) A^{1}_{x:\,\overline{n}|}\big) =$$
$$= (s^{(m)}_{\overline{1}|} - 1)\ddot{a}^{(m)}_{\overline{1}|} \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta(m)\big(1 - {}_nE_x - A^{1}_{x:\,\overline{n}|}\big) =$$
$$= \beta(m) d\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \beta(m)\big(1 - A_{x:\,\overline{n}|}\big) = \beta(m)\big(d\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - 1 + A_{x:\,\overline{n}|}\big) = 0.$$

□

Теорема 11.4. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями строкових ануїтетів пренумерандо) *Нехай функція ${}_tE_x$ задовільняє умову лінійної інтерполяції. Тоді*

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\,(1 - {}_nE_x).$$

Доведення. Використовуючи зображення строкових ануїтетів у формі поточних виплат

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m}\, {}_{k+\frac{j}{m}}E_x, \quad \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x$$

та лему про функцію ${}_tE_x$ маємо:

$$\ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \left({}_kE_x - \frac{m-1}{2m}\big({}_kE_x - {}_{k+1}E_x\big)\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} {}_kE_x - \frac{m-1}{2m} \sum_{k=0}^{n-1} ({}_kE_x - {}_{k+1}E_x) = \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x).$$

□

3.11.3 Відкладений пожиттєвий ануїтет пренумерандо

Теорема 11.5. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладених пожиттєвих ануїтетів пренумерандо) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$ {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m)\, {}_{l|}\ddot{a}_x - \beta(m)\, {}_{l}E_x\,; \tag{11.8}$$

$$ {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\, {}_{l|}\ddot{a}_x - \beta(m)\, {}_{l|}A_x. \tag{11.9}$$

Вправа 1. *Довести теорему 11.5.*

Теорема 11.6. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладених на l років пожиттєвих ануїтетів пренумерандо) *Нехай функція ${}_tE_x$ задовільняє умову лінійної інтерполяції. Тоді*

$$ {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} = {}_{l|}\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}\, {}_{l}E_x\,. $$

Вправа 2. *Довести теорему 11.6 (навести два різних способи доведення).*

3.11.4 Відкладений строковий ануїтет пренумерандо

Вправа 1. *Сформулювати й довести теорему про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладених строкових ануїтетів пренумерандо (за припущення лінійної інтерполяції).*

Вправа 2. *Сформулювати й довести теорему про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями відкладених строкових ануїтетів пренумерандо за припущення лінійної інтерполяції на функцію ${}_tE_x$ (навести два різних способи доведення).*

3.11.5 Пожиттєвий ануїтет пренумерандо з гарантією

Теорема 11.7. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвих ануїтетів пренумерандо з гарантією) *За припущення лінійної інтерполяції*

$$ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \alpha(m)\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)(1 - v^n\, {}_nq_x\,); \tag{11.10}$$

$$ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}\ddot{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \beta(m)\, {}_{n|}A_x. \tag{11.11}$$

Вправа 1. *Довести теорему 11.7.*

Теорема 11.8. (про зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвих ануїтетів пренумерандо з гарантією) *Нехай функція ${}_tE_x$ задовільняє умову лінійної інтерполяції. Тоді*

$$ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n:\overline{x}|}} = \ddot{a}_{\overline{n:\overline{x}|}} - \frac{m-1}{2m}\, {}_nE_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}(\ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} - 1). $$

Вправа 2. *Довести теорему 11.8 (навести два різних способи доведення).*

3.12 Ануїтет постнумерандо

3.12.1 Означення

Загальний дискретний ануїтет постнумерандо в термінах випадкової величини $H(x)$ визначається двома функціями (послідовностями):

- *функцією виплат (функцією винагороди)*

$$b_h, \quad h \in \mathbf{N};$$

- *функцією дисконтування*

$$v_h, \quad h \in \mathbf{N}.$$

Величина b_h — це виплата, яку здійснює страхова організація в кінці h-го періоду

$$\left(x + \frac{h-1}{m}, x + \frac{h}{m}\right]$$

в момент часу

$$x + \frac{h}{m}$$

згідно з укладеною страховою угодою з особою (x). Функція дисконтування v_h зазвичай визначається як звуження функції

$$v^t = e^{-\delta t}, \quad t \geq 0,$$

на множину точок розбиття

$$\frac{h}{m}, \quad h \in \mathbf{N}$$

півосі $[\frac{1}{m}, +\infty)$, тобто визначається формулою

$$v_h = v^{\frac{h}{m}} = e^{-\delta \frac{h}{m}}, \quad h \in \mathbf{N}.$$

Визначимо *функцію теперішньої вартості виплат* (за ануїтетом постнумерандо) y_h за формулою

$$y_h = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{h} b_s v_s, & h \in \mathbf{N} \end{cases}$$

Отже, y_h — це теперішня вартість дискретного ануїтету постнумерандо, який сплачується особі (x) протягом h періодів (остання виплата здійснюється в кінці

h-го періоду). Використовуючи її, будуємо випадкову величину $Y = Y(x)$, яка називається *теперішньою вартістю ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік*:

$$Y(x) = y_{H(x)} = \begin{cases} 0, & H(x) = 0 \\ \sum\limits_{s=1}^{H(x)} b_s v_s, & H(x) > 0 \end{cases}$$

Математичне сподівання

$$\mathsf{E}\big[Y(x)\big] = \sum_{h=1}^{\infty} y_h \mathsf{Pr}\big\{H(x) = h\big\} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{h} b_s v_s \right) {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

теперішньої вартості ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік називається *актуарною теперішньою вартістю ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік.* Залежно від вигляду функцій виплат та дисконтування отримуємо різні види ануїтетів (наприклад пожиттєвий, строковий, відкладений пожиттєвий, відкладений строковий).

Зауваження 1. Теперішня вартість ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік зі сталою функцією виплат $\frac{1}{m}$, що сплачується протягом h періодів (остання виплата здійснюється в кінці h-го року) та зі сталою інтенсивністю відсоткової ставки $\delta = -\ln v$, позначається $a_{\overline{h}|}^{(m)}$ і визначається формулою:

$$a_{\overline{\frac{h}{m}}|}^{(m)} = \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}} = v^{\frac{1}{m}}\, \frac{1 - v^{\frac{h}{m}}}{m\big(1 - v^{\frac{1}{m}}\big)} = \frac{1 - v^{\frac{h}{m}}}{i^{(m)}},$$

де

$$i^{(m)} = m\big(v^{-\frac{1}{m}} - 1\big), \quad d^{(m)} = v^{\frac{1}{m}} i^{(m)}.$$

Вправа 1. *Порівняти величини $a_{\overline{n}|}$ та $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ (теперішні вартості n-річного ануїтету постнумерандо з річними виплатами 1 та n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами $\frac{1}{m}$, що сплачуються m разів на рік).*

3.12.2 Пожиттєвий ануїтет постнумерандо

Пожиттєвий ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного періоду (m-періоду) від моменту укладання страхової угоди, допоки ця особа залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$\begin{aligned} b_h &= \frac{1}{m}, \quad h \in \mathbf{N}; \\ v_h &= v^{\frac{h}{m}}, \quad h \in \mathbf{N}; \\ y_h &= a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Отже, *теперішня вартість* $Y = Y(x)$ *пожиттєвого ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік* має вигляд:

$$Y = Y_{H(x)} = a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m}|}} = \frac{1 - v^{\frac{H}{m}}}{i^{(m)}}.$$

Актуарна теперішня вартість $a_x^{(m)}$ *пожиттєвого ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік* визначається формулою:

$$a_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=0}^{\infty} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}} \, \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} = \sum_{h=0}^{\infty} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}} \; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x = \sum_{h=1}^{\infty} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}} \; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.$$

Зауваження 1. Оскільки

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{h+1}{m}|}} = \sum_{s=0}^{h} \frac{1}{m} \, v^{\frac{s}{m}} = \frac{1}{m} + \sum_{s=1}^{h} \frac{1}{m} \, v^{\frac{s}{m}} = \frac{1}{m} + a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots,$$

то

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \mathsf{E}\left[\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\frac{H(x)+1}{m}|}}\right] = \frac{1}{m} + \mathsf{E}\left[a^{(m)}_{\overline{\frac{H(x)}{m}|}}\right] = \frac{1}{m} + a_x^{(m)}. \tag{12.1}$$

Вправа 1. *Довести формулу зв'язок між актуарними теперішніми вартостями пожиттєвого страхування з виплатою 1 з виплатою в кінці періоду та пожиттєвого ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік:*

$$v^{\frac{1}{m}} = d^{(m)} a_x^{(m)} + A_x^{(m)}.$$

Вправа 2. *Довести формулу дисперсії для теперішньої вартості* $Y = Y(x)$ *пожиттєвого ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік:*

$$\mathsf{Var}\big[Y\big] = \frac{{}^2A_x^{(m)} - \big(A_x^{(m)}\big)^2}{\big(d^{(m)}\big)^2}.$$

3.12.3 Строковий ануїтет постнумерандо

(Строковий) n-річний ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного періоду (m-періоду) протягом n років від моменту укладання страхової угоди, допоки ця особа залишається живою. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_h = \begin{cases} \frac{1}{m}, & 1 \le h \le nm \\ 0, & h > nm \end{cases}$$

$$v_h = v^{\frac{h}{m}}, \quad h \in \mathbf{N}$$

$$y_h = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}}, & h \le mn \\ a^{(m)}_{\overline{n|}}, & h > mn \end{cases} = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}}, & h < nm \\ a^{(m)}_{\overline{n|}}, & h \ge nm \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість $Y = Y(x)$ (строкового) n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік* визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m}|}}, & H < nm \\ a^{(m)}_{\overline{n|}}, & H \ge nm \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{\frac{H}{m}}}{i^{(m)}}, & H < nm \\ \dfrac{1 - v^n}{i^{(m)}}, & H \ge nm \end{cases}$$

Актуарна теперішня вартість $a^{(m)}_{x:\overline{n|}}$ (строкового) n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік має вигляд:

$$a^{(m)}_{x:\overline{n|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=0}^{nm-1} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}} \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} + a^{(m)}_{\overline{n|}} \mathsf{Pr}\big\{H \ge nm\big\} =$$

$$= \sum_{h=0}^{nm-1} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}} \;{}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + a^{(m)}_{\overline{n|}} \;{}_n p_x = \sum_{h=1}^{nm-1} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}|}} \;{}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + a^{(m)}_{\overline{n|}} \;{}_n p_x \,.$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}$ та $a^{(m)}_{x:\overline{n|}}$.*

Вправа 2. *Вивести зв'язок між $a_{x:\overline{n|}}$ та $A_{x:\overline{n|}}$.*

Вправа 3. *Вивести формулу для дисперсії $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ теперішньої вартості Y ануїтету постнумерандо.*

3.12.4 Відкладений пожиттєвий ануїтет постнумерандо

Відкладений на l років пожиттєвий ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного періоду (m-періоду), починаючи з віку $x + l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди), допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_h = \begin{cases} 0, & 1 \le h \le lm \\ \frac{1}{m}, & h > lm \end{cases}$$

$$v_h = v^{\frac{h}{m}}, \quad h \in \mathbf{N};$$

$$y_h = \begin{cases} 0, & h \le lm \\ \sum\limits_{s=lm+1}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}}, & h > lm \end{cases} = \begin{cases} 0, & h < lm \\ a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & h \ge lm \end{cases}$$

Отже, *теперішня вартість* $Y = Y(x)$ *відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік* визначається формулою:

$$Y = y_{H(x)} = \begin{cases} 0, & H < lm \\ a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m}}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & H \ge lm \end{cases} = \begin{cases} 0, & H < lm \\ \dfrac{v^l - v^{\frac{H}{m}}}{i^{(m)}}, & H \ge lm \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l\, \dfrac{1 - v^{\frac{H}{m}-l}}{i^{(m)}}, & H \ge lm \end{cases} = \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m}-l}|}, & H \ge lm \end{cases}$$

Актуарна теперішня вартість ${}_{l|}a_x^{(m)}$ *відкладеного на* l *років пожиттєвого ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік* має вигляд:

$${}_{l|}a_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=lm}^{\infty} v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}-l}|} \,\mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} =$$

$$= \sum_{h=lm}^{\infty} v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}-l}|}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x = \sum_{h=lm+1}^{\infty} v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}-l}|}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x.$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)}$ та ${}_{l|}a_x^{(m)}$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|}a_x^{(m)}$ та ${}_{l|}A_x^{(m)}$.

Вправа 3. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік.*

3.12.5 Відкладений строковий ануїтет постнумерандо

Відкладений на l *років* n*-річний ануїтет постнумерандо з виплатами* m *разів на рік* виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного періоду (інтервала розбиття), починаючи з віку $x+l$ (тобто через l років після укладання страхової угоди) протягом n років, допоки вона залишається живою. Якщо застрахована особа (x) не доживає до віку $x+l$, то їй не виплачується нічого. Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_h = \begin{cases} 0, & 1 \le h \le lm \\ \frac{1}{m}, & lm < h \le (l+n)m \\ 0, & h > (l+n)m \end{cases}$$

$$v_{\frac{h}{m}} = v^{\frac{h}{m}}, \qquad h \in \mathbf{N}$$

$$y_h = \begin{cases} 0, & h \le lm \\ \sum\limits_{s=lm+1}^{h} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}}, & lm < h \le (l+n)m \\ \sum\limits_{s=lm+1}^{(l+n)m} \frac{1}{m}\, v^{\frac{s}{m}}, & h > (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & h < lm \\ a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & lm \le h < (l+n)m \\ a^{(m)}_{\overline{l+n}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & h \ge (l+n)m \end{cases}$$

Отже, теперішня вартість $Y = Y(x)$ відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік визначається формулою:

$$Y = y_{H(x)} = \begin{cases} 0, & H < lm \\ a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m}}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & lm \le H < (l+n)m \\ a^{(m)}_{\overline{l+n}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & H \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ \dfrac{v^l - v^{\frac{H}{m}}}{i^{(m)}}, & lm \le H < (l+n)m \\ \dfrac{v^l - v^{l+n}}{i^{(m)}}, & H \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l \, \dfrac{1 - v^{\frac{H}{m} - l}}{i^{(m)}}, & lm \le H < (l+n)m \\ v^l \, \dfrac{1 - v^n}{i^{(m)}}, & H \ge (l+n)m \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & H < lm \\ v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m} - l}|}, & lm \le H < (l+n)m \\ v^l a^{(m)}_{\overline{n}|}, & H \ge (l+n)m \end{cases}$$

Актуарна теперішня вартість ${}_{l|n}a_x^{(m)}$ *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік* має вигляд:

$${}_{l|n}a_x^{(m)} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=lm}^{(l+n)m-1} v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m} - l}|} \, \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} + v^l a^{(m)}_{\overline{n}|} \; {}_{l+n}p_x =$$

$$= \sum_{h=lm}^{(l+n)m-1} v^l a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m} - l}|} \; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}}q_x + v^l a^{(m)}_{\overline{n}|} \; {}_{l+n}p_x \, .$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{(m)}$ *та* ${}_{l|n}a_x^{(m)}$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* ${}_{l|n}a_x^{(m)}$ *та* ${}_{l|n}A_x^{(m)}$.

Вправа 3. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *відкладеного на* l *років* n*-річного ануїтету постнумерандо з виплатами* m *разів на рік.*

3.12.6 Пожиттєвий ануїтет постнумерандо з гарантією

Пожиттєвий ануїтет постнумерандо з n*-річною гарантією з виплатами* m *разів на рік* виплачується застрахованій особі (x) в кінці кожного періоду (m-періоду) протягом n років, якщо ця особа не доживає до віку $x + n$, і виплачується допоки особа (x) залишається живою, якщо ця особа доживає до віку $x + n$ (тобто за цією страховою угодою гарантовано буде сплачено ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік протягом n років). Функції виплат і дисконтування та функція теперішньої вартості виплат такого ануїтету для виплат розміром $\frac{1}{m}$ визначаються формулами:

$$b_h = \frac{1}{m}, \quad h \in \mathbf{N};$$
$$v_{\frac{h}{m}} = v^{\frac{h}{m}}, \quad h \in \mathbf{N};$$
$$y_h = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{n}|}, & 1 \le h \le nm \\ a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}, & h > nm \end{cases}$$

Отже, теперішня вартість $Y = Y(x)$ пожиттєвого ануїтету постнумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{n}|}, & H < nm \\ a^{(m)}_{\overline{\frac{H}{m}}|}, & H \ge nm \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^n}{i^{(m)}}, & H < nm \\ \dfrac{1 - v^{\frac{H}{m}}}{i^{(m)}}, & H \ge nm \end{cases} \tag{12.2}$$

Актуарна теперішня вартість $a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ *пожиттєвого ануїтету постнумерандо з* n*-річною гарантією з виплатами* m *разів на рік* має вигляд:

$$a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = a^{(m)}_{\overline{n}|}\mathsf{Pr}\big\{H < nm\big\} + \sum_{h=nm}^{\infty} v^n a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}-n}|}\ \mathsf{Pr}\big\{H = h\big\} =$$
$$= a^{(m)}_{\overline{n}|}\ {}_n q_x + \sum_{h=nm}^{\infty} a^{(m)}_{\overline{\frac{h}{m}}|}\ {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x.$$

Вправа 1. *Вивести зв'язок між* $\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ *та* $a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$.

Вправа 2. *Вивести зв'язок між* $a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ *та* ${}_{n|}a^{(m)}_x$.

Вправа 3. *Вивести зв'язок між* $a^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ *та* ${}_{n|}A^{(m)}_x$.

Вправа 4. *Вивести формулу для дисперсії* $\mathsf{Var}\big[Y\big]$ *теперішньої вартості* Y *пожиттєвого ануїтету постнумерандо з* n*-річною гарантією з виплатами* m *разів на рік.*

3.13 Пропорційна поправка

При дискретному ануїтеті з виплатами m разів на рік кожна виплата здійснюється або за наступний період (ануїтет пренумерандо), або за попередній період (ануїтет постнумерандо). Як і у випадку дискретних річних ануїтетів виникає питання щодо поправки (коригування) останньої виплати за частину періоду

- (ануїтет пренумерандо) $\left[T(x), \frac{H(x)+1}{m}\right] = \left[T(x), K(x) + \frac{J(x)+1}{m}\right]$
- (ануїтет постнумерандо) $\left[\frac{H(x)}{m}, T(x)\right] = \left[K(x) + \frac{J(x)}{m}, T(x)\right]$

Наприклад, особа придбала ануїтет пренумерандо. Якщо страхова подія настає через 1 тиждень після того, як отримано останню (місячну) виплату згідно зі страховою угодою, то цілком природнім буде відшкодувати (страховій організації) 3 тижні, які особа не дожила до кінця періоду (місяця), за який вона отримала виплату.

Другий (протилежний) приклад — ануїтет постнумерандо. Якщо страхова подія настає за 1 тиждень до того, як особа має отримати чергову (місячну) виплату за цим ануїтетом, цілком природньою є остання виплата (відшкодування страховою організацією) за 3 тижні, які особа прожила після чергової повної (місячної) виплати.

Ідея визначення й обчислення цієї поправки — заміна останньої одноразової виплати еквівалентною (однаковою за вартістю) неперервною рівномірною протягом періоду (інтервала розбиття) виплатою, здійснення якої припиняється у момент настання страхової події.

Спершу розглянемо загальний ануїтет пренумерандо з параметрами $b_h, v^{\frac{h}{m}}$. Застрахована особа отримує останню виплату розміром b_H в момент часу $\frac{H(x)}{m}$ (відносно часу укладання угоди). Припустимо, що ця виплата *заробляється* зі сталою, рівномірною протягом періоду

$$\left[\frac{H(x)}{m}, \frac{H(x)+1}{m}\right]$$

інтенсивністю c. Тоді інтенсивність c знаходимо з рівності вартостей обох виплат — дискретної і неперервної — в момент часу $\frac{H(x)}{m}$:

$$b_H = \int_0^{\frac{1}{m}} cv^t \, dt = c\bar{a}_{\overline{\frac{1}{m}}|}.$$

Отже,

$$c = b_H \frac{1}{\bar{a}_{\overline{\frac{1}{m}}|}} = b_H \frac{\delta}{1 - v^{\frac{1}{m}}} = b_H \frac{\delta m}{d^{(m)}}.$$

Оскільки нарахування припиняється в момент часу $T(x)$, то *незаробленою* (що потребує відшкодування) протягом часу

$$\frac{H(x)+1}{m} - T(x)$$

є сума — її вартість в момент часу $T(x)$:

$$\int_0^{\frac{H(x)+1}{m}-T(x)} cv^t dt = c\bar{a}_{\overline{\frac{H+1}{m}-T}|} = b_H \frac{\delta m}{d^{(m)}} \; \frac{1-v^{\frac{H+1}{m}-T}}{\delta} = b_H \frac{m\big(1-v^{\frac{H+1}{m}-T}\big)}{d^{(m)}}.$$

Отже, теперішня вартість $Y = Y(x)$ цього ануїтету пренумерандо мінус *незароблене* відшкодування має вигляд:

$$Y = \sum_{h=0}^{H} b_h v^{\frac{h}{m}} - v^T c\bar{a}_{\overline{\frac{H+1}{m}-T}|} = \sum_{h=0}^{H} b_h v^{\frac{h}{m}} - b_H \frac{m\big(v^T - v^{\frac{H+1}{m}}\big)}{d^{(m)}}.$$

Цю формулу можна отримати інакше. Вартість в момент часу $\frac{H(x)}{m}$ *заробленої* останньої виплати за період часу

$$T(x) - \frac{H(x)}{m}$$

становить

$$\int_0^{T(x)-\frac{H(x)}{m}} cv^t dt = c\bar{a}_{\overline{T-\frac{H}{m}}|} = b_H \frac{\delta m}{d^{(m)}} \; \bar{a}_{\overline{T-\frac{H}{m}}|} = b_H \frac{m\big(1-v^{T-\frac{H}{m}}\big)}{d^{(m)}}.$$

Отже, теперішня вартість $Y = Y(x)$ цього ануїтету пренумерандо до моменту $\frac{H(x)-1}{m}$ включно плюс вартість *заробленої* останньої виплати має вигляд:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_{h=0}^{H-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + v^{\frac{H}{m}} c\bar{a}_{\overline{T-\frac{H}{m}}|} = \sum_{h=0}^{H-1} b_h v^{\frac{h}{m}} + b_H \; \frac{m\big(v^{\frac{H}{m}} - v^T\big)}{d^{(m)}} = \\ &= \sum_{h=0}^{H} b_h v^{\frac{h}{m}} - b_H v^{\frac{H}{m}} + b_H \; \frac{m\big(v^{\frac{H}{m}} - v^T\big)}{d^{(m)}} = \sum_{h=0}^{H} b_h v^{\frac{h}{m}} - b_H \; \frac{m\big(v^T - v^{\frac{H+1}{m}}\big)}{d^{(m)}}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[b_H v^{\frac{H+1}{m}}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j} v^{k+\frac{j+1}{m}} \; {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k},$$

$$\mathsf{E}\big[b_H v^T\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j} \int_{k+\frac{j}{m}}^{k+\frac{j+1}{m}} v^t \; {}_t p_x \, \mu(x+t) \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j} \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^{k+s}\ {}_{k+s}p_x\, \mu(x+k+s)\, ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j} v^k\ {}_kp_x \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^s\ {}_sp_{x+k}\, \mu(x+k+s)\, ds,$$

то актуарна теперішня вартість ануїтету пренумерандо з урахуванням відшкодування має вигляд:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{km+j} b_s v^{\frac{s}{m}}\ {}_kp_x\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} + \frac{m}{d^{(m)}} \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j} \times$$
$$\times \left(v^{\frac{j+1}{m}}\ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} - \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^s\ {}_sp_{x+k}\, \mu(x+k+s)\, ds \right).$$

За припущення лінійної інтерполяції

$${}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} = \frac{1}{m} q_{x+k},$$
$${}_sp_{x+k}\, \mu(x+k+s) = q_{x+k}.$$

Отже, за цього припущення актуарна теперішня вартість $\mathsf{E}\big[Y\big]$ набуває вигляду:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m}\ {}_kp_x\, q_{x+k} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{km+j} b_s v^{\frac{s}{m}} +$$
$$+ \frac{i^{(m)}}{d^{(m)}} \left(\frac{1}{i^{(m)}} - \frac{1}{\delta} \right) \sum_{k=0}^{\infty} v^k\ {}_kp_x\, q_{x+k} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j} v^{\frac{j+1}{m}}.$$

Цей тип ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за період від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню (повну) виплату, називається ***ануїтетом пренумерандо з пропорційною поправкою***.

Розглянемо тепер випадок ануїтету постнумерандо з параметрами $b_h, v^{\frac{h}{m}}$. Застрахована особа отримує останню виплату розміром b_H в момент часу $\frac{H(x)}{m}$ (відносно часу укладання угоди). Якби ця особа дожила до віку $\frac{H(x)+1}{m}$, то вона б отримала за прожитий проміжок

$$\left(\frac{H(x)}{m}, \frac{H(x)+1}{m} \right]$$

наступну виплату b_{H+1} в момент часу $\frac{H(x)+1}{m}$. Припустимо, що ця виплата *заробляється* зі сталою, рівномірною протягом року інтенсивністю c. Тоді інтенсивність c знаходимо з рівності вартостей обох виплат — дискретної і неперервної — в момент часу $\frac{H(x)+1}{m}$:

$$b_{H+1} = \int\limits_0^{\frac{1}{m}} c v^{t-\frac{1}{m}}\, dt = c\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}}|}.$$

Отже,

$$c = b_{H+1} \frac{1}{\bar{s}_{\overline{\frac{1}{m}}|}} = b_{H+1} \frac{\delta}{v^{-\frac{1}{m}} - 1} = b_{H+1} \frac{\delta m}{i^{(m)}}.$$

Оскільки нарахування припиняється в момент часу $T(x)$, то *заробленою* (що потребує відшкодування) протягом часу

$$T(x) - \frac{H(x)}{m}$$

є сума — її вартість в момент часу $T(x)$:

$$\int\limits_0^{T-\frac{H}{m}} c v^{t-\left(T-\frac{H}{m}\right)} dt = c\bar{s}_{\overline{T-\frac{H}{m}}|} = b_{H+1} \frac{\delta m}{i^{(m)}} \; \frac{v^{-T+\frac{H}{m}} - 1}{\delta} = b_{H+1} \; \frac{m(v^{-T+\frac{H}{m}} - 1)}{i^{(m)}}.$$

Отже, теперішня вартість цього ануїтету постнумерандо плюс *зароблене* відшкодування має вигляд:

$$Y = \sum_{h=1}^{H} b_h v^{\frac{h}{m}} + v^T \, c\bar{s}_{\overline{T-\frac{H}{m}}|} = \sum_{h=1}^{H} b_h v^{\frac{h}{m}} + b_{H+1} \; \frac{m(v^{\frac{H}{m}} - v^T)}{i^{(m)}}.$$

Оскільки

$$\mathsf{E}\big[b_{H+1} v^{\frac{H}{m}}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j+1} v^{k+\frac{j}{m}} \; {}_k p_x \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k},$$

$$\mathsf{E}\big[b_{H+1} v^{T}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j+1} \int\limits_{k+\frac{j}{m}}^{k+\frac{j+1}{m}} v^t \; {}_t p_x \; \mu(x+t)\; dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j+1} \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^{k+s} \; {}_{k+s} p_x \; \mu(x+k+s)\; ds =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j+1} v^k \, {}_k p_x \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^s \, {}_s p_{x+k} \, \mu(x+k+s) \, ds,$$

то актуарна теперішня вартість ануїтету пренумерандо з урахуванням відшкодування має вигляд:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x + \frac{m}{i^{(m)}} \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j+1} \times$$

$$\times \left(v^{\frac{j}{m}} \; {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} - \int\limits_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} v^s \, {}_s p_{x+k} \, \mu(x+k+s) \, ds \right).$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$ {}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}} q_{x+k} = \frac{1}{m} q_{x+k},$$
$$ {}_s p_{x+k} \, \mu(x+k+s) = q_{x+k}.$$

Отже, за цього припущення актуарна теперішня вартість $\mathsf{E}\big[Y\big]$ набуває вигляду:

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{h} b_s v^{\frac{s}{m}} \; {}_{\frac{h}{m}|\frac{1}{m}} q_x +$$

$$+ \left(\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{\delta} \right) \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_k p_x \, q_{x+k} \sum_{j=0}^{m-1} b_{km+j+1} v^{\frac{j+1}{m}}.$$

Цей тип ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за період від моменту здійснення останньої річної виплати до моменту настання страхової події, називається ***ануїтетом постнумерандо з пропорційною поправкою***, або ***завершеним ануїтетом постнумерандо***.

3.13.1 Пожиттєвий ануїтет

Нехай особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} = \frac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}},$$

Подальші міркування використовують результати розгляду загального ануїтету (пренумерандо і постнумерандо) з пропорційною поправкою. *Теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою з виплатами m разів на рік* визначається формулою:

$$Y = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} - \frac{v^T - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}} = \frac{1-v^T}{d^{(m)}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету. Отже, *актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою*, яка позначається $\ddot{a}_x^{\{m\}}$, має вигляд:

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\bar{a}_x = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{\bar{A}_x - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}. \tag{13.1}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i^{(m)}}\right)A_x.$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню (інтервальну) виплату, називається ***пожиттєвим ануїтетом пренумерандо (з виплатами*** m ***разів на рік) з пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|} = \frac{1 - v^{K+\frac{J}{m}}}{i^{(m)}},$$

Теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою з виплатами m разів на рік визначається формулою:

$$Y = a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|} + \frac{v^{K+\frac{J}{m}} - v^T}{i^{(m)}} = \frac{1-v^T}{i^{(m)}} = a^{(m)}_{\overline{T}|} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\,\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету. Отже, актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою, яка позначається $a_x^{\{m\}}$, має вигляд:

$$\begin{aligned} a_x^{\{m\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{i^{(m)}}\,\bar{a}_x = a_x^{(m)} + \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}A_x^{(m)} - \bar{A}_x}{i^{(m)}} &= \\ = a_x^{(m)} + \frac{1}{d^{(m)}}A_x^{(m)} - \frac{1}{i^{(m)}}\bar{A}_x. \end{aligned} \tag{13.2}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$a_x^{\{m\}} = a_x^{(m)} + \frac{i}{i^{(m)}} \left(\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{\delta} \right) A_x.$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої (інтервальної) виплати до моменту настання страхової події, називається ***пожиттєвим ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою***, або ***завершеним пожиттєвим ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік)***.

З формул (13.1) і (13.2) зокрема отримуємо:

$$\ddot{a}_x^{\{m\}} = \frac{i^{(m)}}{d^{(m)}} \cdot a_x^{\{m\}}.$$

Приклад 1. Порівняти дисперсії пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою і завершеного пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік).

Розв'язання. Дисперсія пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою дорівнює:

$$\mathsf{Var}\big[\ddot{a}_{\overline{T|}}^{(m)}\big] = \mathsf{Var}\left[\frac{1 - v^T}{d^{(m)}}\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\left(d^{(m)}\right)^2}.$$

Дисперсія завершеного пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) дорівнює:

$$\mathsf{Var}\big[a_{\overline{T|}}^{(m)}\big] = \mathsf{Var}\left[\frac{1 - v^T}{i^{(m)}}\right] = \frac{{}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2}{\left(i^{(m)}\right)^2}.$$

Оскільки

$$d^{(m)} = m(1 - v^{\frac{1}{m}}) = m(v^{-\frac{1}{m}} - 1)v^{\frac{1}{m}} = i^{(m)}v^{\frac{1}{m}} < i^{(m)},$$

то

$$\mathsf{Var}\big[\ddot{a}_{\overline{T|}}^{(m)}\big] > \mathsf{Var}\big[a_{\overline{T|}}^{(m)}\big].$$

□

3.13.2 Строковий ануїтет

Нехай особа (x) придбала n-річний ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}|}}^{(m)}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}, & K \geq n \end{cases}$$

Подальші міркування використовують результати розгляду загального ануїтету (пренумерандо і постнумерандо) з пропорційною поправкою. *Теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою з виплатами m разів на рік* визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} - \dfrac{v^T - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

Отже,

$$Y = \begin{cases} \dfrac{1 - v^T}{d^{(m)}}, & K < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{T}|}, & K < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} =$$

$$= \frac{\delta}{d^{(m)}} \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & K < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \frac{\delta}{d^{(m)}}\, \overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного n-річного ануїтету.

Отже, *актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету пренумерандо з пропорційною поправкою з виплатами m разів на рік*, яка позначається $\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\,\overline{n}|}$, має вигляд:

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\,\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\, \bar{a}_{x:\,\overline{n}|} =$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{\bar{A}_{x:\,\overline{n}|} - A^{(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{\bar{A}^{1}_{x:\,\overline{n}|} - A^{1(m)}_{x:\,\overline{n}|}}{d^{(m)}}. \qquad (13.3)$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\,\overline{n}|} = \ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i^{(m)}}\right) A^{1}_{x:\,\overline{n}|} =$$

$$= \ddot{a}^{(m)}_{x:\,\overline{n}|} - \frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i^{(m)}}\right) \big(A_{x:\,\overline{n}|} - {}_nE_x\big).$$

Цей тип n-річного ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню (інтервальну) виплату, називається ***n-річним ануїтетом пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала n-річний ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|}, & K < n \\ a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1 - v^{K+\frac{J}{m}}}{i^{(m)}}, & K < n \\ a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

Теперішня вартість n-річного ануїтету постнумерандо з пропорційною поправкою з виплатами m разів на рік визначається формулою:

$$Y = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|} + \dfrac{v^{K+\frac{J}{m}} - v^T}{i^{(m)}}, & K < n \\ a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

Отже,

$$Y = \begin{cases} \dfrac{1 - v^T}{i^{(m)}}, & K < n \\ a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{T}|}, & K < n \\ a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} =$$

$$= \frac{\delta}{i^{(m)}} \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|}, & K < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases} = \frac{\delta}{i^{(m)}}\, \overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного n-річного ануїтету.

Отже, актуарна теперішня вартість n-річного ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою, яка позначається $a^{\{m\}}_{x:\overline{n}|}$, має вигляд:

$$a^{\{m\}}_{x:\overline{n}|} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{i^{(m)}}\, \bar{a}_{x:\overline{n}|} = a^{(m)}_{x:\overline{n}|} + \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} A^{1(m)}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}}{i^{(m)}}. \tag{13.4}$$

За припущення лінійної інтерполяції

$$a^{\{m\}}_{x:\overline{n}|} = a^{(m)}_{x:\overline{n}|} + \frac{i}{i^{(m)}} \left(\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{\delta} \right) A^{1}_{x:\overline{n}|}.$$

Цей тип n-річного ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої (інтервальної) виплати до моменту настання страхової події, називається ***n-річним ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою***, або ***завершеним n-річним ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік)***.

З формул (13.3) і (13.4) зокрема отримуємо:

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{x:\overline{n}|} = \frac{i^{(m)}}{d^{(m)}} \cdot a^{\{m\}}_{x:\overline{n}|}.$$

Приклад 1. Порівняти дисперсії n-річного ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою і завершеного n-річного ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік).

Розв'язання. Теперішню вартість Y_1 n-річного ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою та теперішню вартість Y_2 n-річного ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою можна подати у вигляді:

$$Y_1 = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\overline{Y}, \quad Y_2 = \frac{\delta}{i^{(m)}}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного n-річного ануїтету.
Отже,

$$\mathsf{Var}\big[Y_1\big] = \frac{\delta^2}{\big(d^{(m)}\big)^2}\,\mathsf{Var}\big[\overline{Y}\big], \quad \mathsf{Var}\big[Y_2\big] = \frac{\delta^2}{\big(i^{(m)}\big)^2}\,\mathsf{Var}\big[\overline{Y}\big].$$

Оскільки

$$d^{(m)} = m(1 - v^{\frac{1}{m}}) = m(v^{-\frac{1}{m}} - 1)v^{\frac{1}{m}} = i^{(m)}v^{\frac{1}{m}} < i^{(m)},$$

то

$$\mathsf{Var}\big[Y_1\big] > \mathsf{Var}\big[Y_2\big].$$

□

3.13.3 Відкладений пожиттєвий ануїтет

Нехай особа (x) придбала відкладений на l років пожиттєвий ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|}, & K \geq l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K \geq l \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести, що теперішня вартість Y відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету.

Вправа 2. *Довести, що актуарна теперішня вартість ${}_{l|}\ddot{a}_x^{\{m\}}$ відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$${}_{l|}\ddot{a}_x^{\{m\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\;{}_{l|}\bar{a}_x = {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} - \frac{{}_{l|}\bar{A}_x - {}_{l|}A_x^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

Вправа 3. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$ {}_{l|}\ddot{a}_x^{\{m\}} = {}_{l|}\ddot{a}_x^{(m)} - \frac{i}{d^{(m)}} \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i^{(m)}} \right) {}_{l|}A_x. $$

Цей тип відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню інтервальну виплату, називається ***відкладеним на l років пожиттєвим ануїтетом пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала відкладений на l років пожиттєвий ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$ \begin{cases} 0, & K < l \\ a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|}, & K \geq l \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{1 - v^{K+\frac{J}{m}}}{i^{(m)}}, & K \geq l \end{cases} $$

Вправа 4. *Довести, що теперішня вартість Y відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$ Y = \frac{\delta}{i^{(m)}} \, \overline{Y}, $$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету.

Вправа 5. *Довести, що актуарна теперішня вартість ${}_{l|}a_x^{\{m\}}$ відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$ {}_{l|}a_x^{\{m\}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{i^{(m)}} \; {}_{l|}\bar{a}_x = {}_{l|}a_x^{(m)} + \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}} \; {}_{l|}A_x^{(m)} \; - \; {}_{l|}\bar{A}_x}{i^{(m)}}. $$

Вправа 6. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$ {}_{l|}a_x^{\{m\}} = {}_{l|}a_x^{(m)} + \frac{i}{i^{(m)}} \left(\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{\delta} \right) {}_{l|}A_x. $$

Цей тип відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої інтервальної виплати до моменту настання страхової події, називається ***відкладеним на l років пожиттєвим ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою***, або ***завершеним відкладеним на l років пожиттєвим ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік)***.

Вправа 7. *Порівняти дисперсії відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою і завершеного відкладеного на l років пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік).*

3.13.4 Відкладений строковий ануїтет

Нехай особа (x) придбала відкладений на l років n-річний ануїтет пренумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} 0, & K < l \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & l \le K < l+n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & l \le K < l+n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l+n}|} - \ddot{a}^{(m)}_{\overline{l}|}, & K \ge l+n \end{cases}$$

Вправа 1. *Вивести формулу для теперішньої вартості Y відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік з пропорційною поправкою.*

Вправа 2. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{\{m\}}$ відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік з пропорційною поправкою.*

Вправа 3. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості ${}_{l|n}\ddot{a}_x^{\{m\}}$ відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо з виплатами m разів на рік з пропорційною поправкою за припущення лінійної інтерполяції.*

Нехай тепер особа (x) придбала відкладений на l років n-річний ануїтет постнумерандо з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} 0, & K < l \\ a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & l \le K < l+n \\ a^{(m)}_{\overline{l+n}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & K \ge l+n \end{cases} = \begin{cases} 0, & K < l \\ \dfrac{1 - v^{K+\frac{J}{m}}}{i^{(m)}} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & l \le K < l+n \\ a^{(m)}_{\overline{l+n}|} - a^{(m)}_{\overline{l}|}, & K \ge l+n \end{cases}$$

Вправа 4. *Вивести формулу для теперішньої вартості Y відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік з пропорційною поправкою.*

Вправа 5. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості ${}_{l|n}a_x^{\{m\}}$ відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік з пропорційною поправкою.*

Вправа 6. *Вивести формулу для актуарної теперішньої вартості ${}_{l|n}a_x^{\{m\}}$ відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо з виплатами m разів на рік з пропорційною поправкою за припущення лінійної інтерполяції.*

Вправа 7. *Порівняти дисперсії відкладеного на l років n-річного ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з пропорційною поправкою і завершеного відкладеного на l років n-річного ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік).*

3.13.5 Пожиттєвий ануїтет з гарантією

Нехай особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет пренумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K < n \\ \ddot{a}^{(m)}_{\overline{K+\frac{J+1}{m}}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}, & K < n \\ \dfrac{1 - v^{K+\frac{J+1}{m}}}{d^{(m)}}, & K \geq n \end{cases}$$

Вправа 1. *Довести, що теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією та пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією.

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією з пропорційною поправкою позначається $\ddot{a}^{\{m\}}_{\overline{x:\overline{n}|}}$.

Вправа 2. *Довести, що*

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\bar{a}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \frac{{}_{n|}\bar{A}_x - {}_{n|}A^{(m)}_x}{d^{(m)}}.$$

Вправа 3. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$\ddot{a}^{\{m\}}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} - \frac{i}{d^{(m)}}\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{i^{(m)}}\right){}_{n|}A_x.$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією, що враховує відшкодування за час від моменту настання страхової події і кінцем періоду, коли було здійснено останню (інтервальну) виплату, називається ***пожиттєвим ануїтетом пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією та пропорційною поправкою***.

Нехай тепер особа (x) придбала пожиттєвий ануїтет постнумерандо з n-річною гарантією з виплатами m разів на рік, теперішня вартість якого дорівнює:

$$\begin{cases} a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K < n \\ a^{(m)}_{\overline{K+\frac{J}{m}}|}, & K \geq n \end{cases} = \begin{cases} a^{(m)}_{\overline{n}|}, & K < n \\ \frac{1-v^{K+\frac{J}{m}}}{i^{(m)}}, & K \geq n \end{cases}$$

Вправа 4. *Довести, що теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією та пропорційною поправкою визначається формулою:*

$$Y = \frac{\delta}{d^{(m)}}\,\overline{Y},$$

де $\overline{Y}$ позначає теперішню вартість неперервного пожиттєвого ануїтету з n-річною гарантією.

Актуарна теперішня вартість пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією з пропорційною поправкою позначається $a^{\{m\}}_{\overline{x:\overline{n}|}}$.

Вправа 5. *Довести, що*

$$a^{\{m\}}_{\overline{x:\overline{n}|}} = \mathsf{E}\big[Y\big] = \frac{\delta}{i^{(m)}}\,\bar{a}_{\overline{n:\overline{x}|}} = a^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} + \frac{(1+i)^{\frac{1}{m}}\ {}_{n|}A^{(m)}_x \ -\ {}_{n|}\bar{A}_x}{i^{(m)}}.$$

Вправа 6. *Довести, що за припущення лінійної інтерполяції*

$$a^{\{m\}}_{\overline{x:\overline{n}|}} = a^{(m)}_{\overline{x:\overline{n}|}} + \frac{i}{i^{(m)}}\left(\frac{1}{d^{(m)}} - \frac{1}{\delta}\right)\ {}_{n|}A_x.$$

Цей тип пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією, що враховує відшкодування за час від моменту здійснення останньої (інтервальної) виплати до моменту настання страхової події, називається ***пожиттєвим ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією та пропорційною поправкою***, або ***завершеним пожиттєвим ануїтетом постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією***.

Вправа 7. *Порівняти дисперсії пожиттєвого ануїтету пренумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією та пропорційною поправкою і завершеного пожиттєвого ануїтету постнумерандо (з виплатами m разів на рік) з n-річною гарантією.*

Додаток A

Процентиль, нормальне наближення

A.1 Процентиль

Означення 1.1. Нехай $p \in (0, 1)$, Y довільна випадкова величина з функцією розподілу
$$F(y) = \mathsf{Pr}\big\{Y \le y\big\}, \quad y \in \mathbf{R}.$$

Тоді ***p-им процентилем*** випадкової величини Y називається

$$\xi_Y^p = \min\big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) \ge p\big\}.$$

Зауваження 1. Якщо випадкова величина Y невід'ємна, то

$$\xi_Y^p = \min\big\{\xi \ge 0 \mid F(\xi) \ge p\big\}.$$

Зауваження 2.
$$\xi_Y^p = \min\big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) = p\big\}, \tag{1.1}$$

якщо множина у правій частині рівності (1.1) непорожня. Це отримуємо з таких двох тверджень:

$$\big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) \ge p\big\} = \big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) = p\big\} \bigsqcup \big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) > p\big\};$$
$$\forall \xi_1 \in \big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) = p\big\} \quad \forall \xi_2 \in \big\{\xi \in \mathbf{R} \mid F(\xi) > p\big\} \quad (\xi_1 < \xi_2).$$

Зокрема,
$$\big(\exists! \xi \in \mathbf{R} : \ F(\xi) = p\big) \implies \big(\xi_Y^p = \xi\big). \tag{1.2}$$

Зауваження 3.

$$\exists(\alpha,\beta)\subset \mathbf{R} \quad \big(\exists! \xi \in (\alpha,\beta):\ F(\xi)=p\big) \implies \xi_Y^p = \xi. \tag{1.3}$$

Виберемо

$$a, b \in \mathbf{R}: \quad \alpha < a < \xi < b < \beta.$$

Використовуючи неспадання функції розподілу F, маємо:

$$\begin{gathered} F(a) < F(\xi) < F(b); \\ \forall y \le a \quad F(y) \le F(a) < F(\xi) = p; \\ \forall y \ge b \quad F(y) \ge F(b) > F(\xi) = p. \end{gathered}$$

Звідси отримуємо:

$$\exists! \xi \in \mathbf{R}:\ F(\xi) = p.$$

Тоді з (1.2) маємо (1.3).

Зауваження 4. Оскільки функція розподілу F неспадна, то

$$\forall \beta \in \mathbf{R} \quad \big(F(\beta) \ge F(\beta_-)\big) \implies \xi_Y^{F(\beta_-)} \le \beta. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. (про процентиль) *Нехай Y довільна випадкова величина з функцією розподілу F. Тоді:*

(i) $\forall \beta \in \mathbf{R} \Big(F(\beta) > F(\beta_-) \implies \forall p \in \big(F(\beta_-), F(\beta)\big] \quad \xi_Y^p = \beta\Big)$;

(ii) $\forall \beta \in \mathbf{R} \Big(Y \ge \beta \wedge F(\beta) > 0 \implies \forall p \in \big(0, F(\beta)\big] \quad \xi_Y^p = \beta\Big)$;

(iii) $\forall \beta \in \mathbf{R} \Big(\exists \alpha < \beta : F$ *строго зростає на* $(\alpha,\beta) \Longrightarrow \xi_Y^{F(\beta_-)} = \beta\Big)$;

(iv) *якщо на інтервалі $(\alpha,\beta) \subset \mathbf{R}$ функція розподілу F неперервна і строго зростає, то $\forall p \in \big(F(\alpha), F(\beta_-)\big)$ p-ий процентиль ξ_Y^p є розв'язком (який існує і єдиний) рівняння*

$$F(\xi) = p, \quad \xi \in (\alpha,\beta). \tag{1.5}$$

Тобто

$$\xi_Y^p = \Big(F\,\big|_{(\alpha,\beta)}\Big)^{-1}(p).$$

Доведення. (i) Нехай $F(\beta) > F(\beta_-),\ \ p \in \big(F(\beta_-), F(\beta)\big]$. Тоді

$$F(\beta) \ge p \implies \xi_Y^p \le \beta. \tag{1.6}$$

З неспадання функції розподілу F маємо:

$$\forall \xi < \beta \quad F(\xi) \le F(\beta_-) < p \implies \xi_Y^p \ge \beta. \tag{1.7}$$

З (1.6) і (1.7) отримуємо рівність: $\xi_Y^p = \beta$.
(ii) Випливає з твердження (i). Нехай $Y \ge \beta,\ F(\beta) > 0$. Тоді

$$\forall y < \beta \quad F(y) = \mathsf{Pr}\big\{Y \le y\big\} = 0 \implies F(\beta_-) = \lim_{y \to \beta_-} F(y) = 0 < F(\beta).$$

(iii) Нехай F строго зростає на (α, β). Тоді

$$\forall y \in (\alpha, \beta) \quad F(y) < F(\beta_-).$$

Звідси, враховуючи неспадання функції розподілу F, маємо:

$$\forall y < \beta \quad F(y) < F(\beta_-) \implies \xi_Y^{F(\beta_-)} \ge \beta. \tag{1.8}$$

З (1.4) і (1.8) отримуємо рівність: $\xi_Y^{F(\beta_-)} = \beta$.

(iv) Нехай $p \in \big(F(\alpha), F(\beta_-)\big)$. Оскільки функція розподілу F неперервна справа, то $F(\alpha_+) = F(\alpha)$. Отже,

$$p \in \big(F(\alpha_+), F(\beta_-)\big).$$

Тоді з теореми Больцано-Коші про проміжне значення і зі строгої монотонності функції розподілу F на інтервалі (α, β) отримуємо:

$$\exists! \xi \in (\alpha, \beta): \quad F(\xi) = p. \tag{1.9}$$

Отже, ξ — розв'язок (який існує і єдиний) рівняння (1.5). Тоді з (1.3) і (1.9) отримуємо: $\xi_Y^p = \xi$. □

А.2 Нормальне наближення

Постановка задачі. Розглядається N осіб $(x_i),\ i = 1, \ldots, N$, які укладають (одночасно) однакові страхові угоди (на страхові ануїтети). Нехай

(i) особи (x_i) незалежні;

(ii) випадкові величини $T(x_i)$ однаково розподілені (мають однакові функції розподілу);

(iii) $Y(x_i)$ — теперішня вартість ануїтету особи (x_i).

Позначимо

$$S = \sum_{i=1}^{N} Y(x_i)$$

(загальну) теперішню вартість втрат страхування цих N осіб. Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати страховий фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної з N застрахованих осіб становила не менше, ніж $p \in (0, 1)$;

(б) відносне навантаження надійності (навантаження безпеки, надбавку надійності, надбавку безпеки, security loading) θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) мінімальну кількість осіб, яку потрібно застрахувати, щоб відносне навантаження надійності не перевищувало $\theta_0 > 0$.

Розв'язання. Зазначимо, що згідно з (а) потрібно обчислити p-ий процентиль випадкової величини S :

$$\min\Big\{\xi \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathsf{Pr}\big\{S \le \xi\big\} \ge p\Big\} = \xi_S^p. \tag{2.1}$$

Для застосування нормального наближення подамо (2.1) у вигляді:

$$\min\left\{\xi \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\left\{\frac{S - \mathsf{E}[S]}{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}} \le \frac{\xi - \mathsf{E}[S]}{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}\right\} \ge p\right\} = \xi_S^p.$$

Нехай $\mathcal{N}(0,1)$ позначає випадкову величину, що має стандартний нормальний розподіл з параметрами $0, 1$. Застосовуючи нормальне наближення

$$\frac{S - \mathsf{E}[S]}{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

отримуємо:

$$\min\left\{\xi \in \mathbf{R} \;\middle|\; \mathsf{Pr}\left\{\mathcal{N}(0,1) \le \frac{\xi - \mathsf{E}[S]}{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}\right\} \ge p\right\} = \xi_S^p. \tag{2.2}$$

Позначимо

$$\eta = \frac{\xi - \mathsf{E}[S]}{\sqrt{\mathsf{Var}[S]}}.$$

Тоді (2.2) набуває вигляду:

$$\min\left\{\mathsf{E}\big[S\big] + \eta\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]} \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{N}(0,1) \le \eta\big\} \ge p\right\} = \xi_S^p.$$

Оскільки $\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]} > 0$, то ця рівність еквівалентна такій:

$$\min\left\{\eta \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{N}(0,1) \le \eta\big\} \ge p\right\} = \frac{\xi_S^p - \mathsf{E}\big[S\big]}{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}. \tag{2.3}$$

Величина зліва є p-им процентилем випадкової величини $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\min\left\{\eta \in \mathbf{R} \;\Big|\; \mathsf{Pr}\big\{\mathcal{N}(0,1) \le \eta\big\} \ge p\right\} = \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p.$$

Отже, з (2.3) отримуємо:

$$\begin{aligned}\xi_S^p = \mathsf{E}\big[S\big] + \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]} &= \\ &= \mathsf{E}\big[S\big]\left(1 + \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]}\right) = \mathsf{E}\big[S\big](1+\theta), \end{aligned} \tag{2.4}$$

де відносне навантаження надійності θ обчислюється за формулою:

$$\theta = \xi_{\mathcal{N}(0,1)}^p\frac{\sqrt{\mathsf{Var}\big[S\big]}}{\mathsf{E}\big[S\big]}.$$

Згідно з умовою (припущенням) випадкові величини

$$Y(x_i), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2.5}$$

незалежні і мають однакові розподіли. Нехай $\mathcal{Y}$ позначає випадкову величину, однаково розподілену з випадковими величинами (2.5). Тоді маємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[S\big] &= \sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}\big[Y(x_i)\big] = N\mathsf{E}\big[\mathcal{Y}\big];\\ \mathsf{Var}\big[S\big] &= \sum_{i=1}^{N}\mathsf{Var}\big[Y(x_i)\big] = N\mathsf{Var}\big[\mathcal{Y}\big].\end{aligned}$$

Отже, з (2.4) отримуємо (пункти (а) і (б) задачі):

$$\xi_S^p = N\mathsf{E}[\mathcal{Y}] + \xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}\sqrt{N}\sqrt{\mathsf{Var}[\mathcal{Y}]} =$$
$$= N\mathsf{E}[\mathcal{Y}]\left(1 + \frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\frac{\sqrt{\mathsf{Var}[\mathcal{Y}]}}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]}\right) =$$
$$= N\mathsf{E}[\mathcal{Y}]\left(1 + \frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\mathsf{E}[\mathcal{Y}^2]}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]^2} - 1}\right) = N\mathsf{E}[\mathcal{Y}](1+\theta),$$

де відносне навантаження надійності θ обчислюється за формулою:

$$\theta = \frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\frac{\sqrt{\mathsf{Var}[\mathcal{Y}]}}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]} = \frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\mathsf{E}[\mathcal{Y}^2]}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]^2} - 1}. \tag{2.6}$$

Згідно з формулою (2.6) для знаходження мінімальної кількості осіб (пункт (в) задачі) отримуємо нерівність:

$$\frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\mathsf{E}[\mathcal{Y}^2]}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]^2} - 1} \le \theta_0 \implies N \ge \left(\frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\theta_0}\right)^2\left(\frac{\mathsf{E}[\mathcal{Y}^2]}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]^2} - 1\right).$$

Або в термінах дисперсії $\mathcal{Y}$:

$$\frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\sqrt{N}}\frac{\sqrt{\mathsf{Var}[\mathcal{Y}]}}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]} \le \theta_0 \implies N \ge \left(\frac{\xi^p_{\mathcal{N}(0,1)}}{\theta_0}\right)^2\frac{\mathsf{Var}[\mathcal{Y}]}{\mathsf{E}[\mathcal{Y}]^2}.$$

□

A.2.1 Приклад застосування нормального наближення

Формулювання. Розглядається $N = 100$ осіб (x_i), $i = 1, \ldots, N$, які укладають (одночасно) однакові страхові угоди (на страхові ануїтети). Нехай

(i) особи (x_i) незалежні;

(ii) випадкові величини $T(x_i)$ однаково розподілені і мають узагальнений розподіл де Муавра
$$f_{T(x_i)}(t) = \begin{cases} 2(1-t), & t \in [0,1) \\ 0, & t \notin [0,1) \end{cases}$$

(iii) теперішня вартість ануїтету $Y(x_i)$ особи (x_i) визначається формулою (неперервний пожиттєвий ануїтет):
$$Y(x_i) = \frac{1 - e^{-\delta T(x_i)}}{\delta}, \quad \delta = 0,1;$$

Застосовуючи нормальне наближення, потрібно обчислити:

(а) мінімальну суму, яку повинен мати страховий фонд в момент часу $t = 0$, щоб ймовірність того, що він буде спроможний здійснювати виплати за ануїтетом для кожної з N застрахованих осіб становила не менше, ніж $p = 0,9$;

(б) відносне навантаження надійності θ, тобто відсоток, який становить навантаження надійності відносно очікуваної суми виплат страховим фондом;

(в) мінімальну кількість осіб, яку потрібно застрахувати, щоб відносне навантаження надійності не перевищувало $\theta_0 = 0,1$.

Розв'язання. Для обчислення математичних сподівань $\mathsf{E}\big[Y\big], \mathsf{E}\big[Y^2\big]$ скористаємося інтегралом:

$$\int_0^1 e^{ax} x\, dx = \frac{1}{a} x e^{ax}\Big|_0^1 - \frac{1}{a}\int_0^1 e^{ax}\, dx = \frac{e^a}{a} - \frac{e^a - 1}{a^2}.$$

Отже,

$$\mathsf{E}\big[Y\big] = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta} 2(1-x)\, dx = \frac{2}{\delta}\int_0^1 \big(1 - e^{-\delta(1-x)}\big) x\, dx =$$
$$= \frac{2}{\delta}\left(\frac{1}{2} - e^{-\delta}\int_0^1 e^{\delta x} x\, dx\right) = \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta^2} + \frac{2(1-e^{-\delta})}{\delta^3}.$$

$$\mathsf{E}\big[Y^2\big] = \int_0^1 \left(\frac{1 - e^{-\delta x}}{\delta}\right)^2 2(1-x)\, dx = \frac{2}{\delta^2}\int_0^1 \big(1 - e^{-\delta(1-x)}\big)^2 x\, dx =$$
$$= \frac{2}{\delta^2}\left(\frac{1}{2} - 2e^{-\delta}\int_0^1 e^{\delta x} x\, dx + e^{-2\delta}\int_0^1 e^{2\delta x} x\, dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\delta^2} - \frac{4}{\delta^3} + \frac{4(1-e^{-\delta})}{\delta^4} + \frac{1}{\delta^3} - \frac{1 - e^{-2\delta}}{2\delta^4} =$$
$$= \frac{1}{\delta^2} - \frac{3}{\delta^3} + \frac{7 - 8e^{-\delta} + e^{-2\delta}}{2\delta^4}.$$

Використовуючи результати попереднього параграфа, а також значення

$$\xi^{0,9}_{\mathcal{N}(0,1)} = 1,282,$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}
\theta &= 0,1282\sqrt{\frac{\mathsf{E}\big[Y^2\big]}{\mathsf{E}\big[Y\big]^2} - 1} = 0,0893 \implies 100\% \cdot \theta = 8,93\%;\\
\xi_S^{0,9} &= 100\,\mathsf{E}\big[Y\big](1+\theta) = 35,42;\\
N &\geq (12,82)^2\left(\frac{\mathsf{E}\big[Y^2\big]}{\mathsf{E}\big[Y\big]^2} - 1\right) = 79,76 \implies N = 80.
\end{aligned}$$

Зазначимо, що актуарна теперішня вартість ануїтету для кожної зі 100 застрахованих осіб становить:

$$\mathsf{E}\big[Y(x_i)\big] = 0,3252.$$

Проте для кожної з цих осіб страхування (ануїтет) буде коштувати на $8,93\%$ більше, а саме: $0,3542$. $\square$

Література

[1] *Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial mathematics*, Schaumburg, Illinois: The Society of Actuaries, 1979, 622 p.

[2] *Billingsley P. Probability and Measure*, New York: John Wiley & Sons, 1986, 753 p.

[3] *Підкуйко С.І. Математичний аналіз*, Т. 1. Львів: Галицька Видавнича Спілка, 2004, 544 с.

Навчальне видання

ПІДКУЙКО Сергій Іванович

Актуарна математика: страхові ануїтети

Навчальний посібник

Редагування *Н. Й. Плиса*
Комп'ютерний набір і верстання *С. І. Підкуйко*

Підп. до друку ??.??.2022. Формат ??×??/??
Папір друк. Друк офсет. Гарнітура TEX
Умовн. друк. арк. 12,78. Обл.-вид. арк. ??,??.
Тираж ??? прим.

Видавець та виготовлювач:
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000

СВІДОЦТВО
*про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:
Серія ДК №3059 від 13.12.2007 р.*