Заняття 14
Теорія ринків
Мтем-11с
7.12.2021

Приклад.

$$(L):\quad u_L(x_L,z_L)=\underbrace{\sqrt{x_L}}_{v_L}+z_L;$$

$$(H):\quad u_h(x_h,z_h)=\underbrace{2\sqrt{x_h}}_{\tilde v_h}+z_h;$$

Ф-ія витрат: $c(x)=c\cdot x.$

$$\Pi=m_L\cdot\sqrt{x_L}+m_h\left(2\sqrt{x_h}-2\sqrt{x_L}+\sqrt{x_L}\right)-c\left(m_L x_L+m_h x_h\right)\to\max_{x_h x_L}$$

$x_L^p;\ x_h^p$: - знаходяться як значення розв'язку задачі max ф-ії прибутку:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Pi}{\partial x_L}=m_L\dfrac{1}{2\sqrt{x_L}}-m_h\dfrac{1}{\sqrt{x_L}}+m_h\dfrac{1}{2\sqrt{x_L}}-c\,m_L=0.\\[2mm] \dfrac{\partial\Pi}{\partial x_h}=m_h\dfrac{1}{\sqrt{x_h}}-m_h c=0.\end{cases}$$

Тоді: оптимальні

$$\begin{cases}(m_L+m_h)\dfrac{1}{2\sqrt{x_L^p}}-m_h\dfrac{1}{\sqrt{x_L^p}}=m_L c;\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{x_h^p}}=c.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{m_L-m_h}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x_L^p}}=m_L c\\[2mm] x_h^p=\dfrac{1}{c^2}\end{cases}\quad ! \quad m_L>m_h \quad\Rightarrow\quad \boxed{\begin{aligned}x_L^p&=\left(\frac{m_L-m_h}{2m_L c}\right)^2;\\ x_h^p&=\frac{1}{c^2}.\end{aligned}}$$

Ціна кожного пакета відповідно становить:

$(1_L=)$: $$t_L^p=v_L(x_L^p)=\sqrt{x_L^p}=\frac{m_L-m_h}{2m_L c}$$

$(2_h=)$: $$t_h^p=v_h(x_h^p)-v_h(x_L^p)+v_L(x_L^p)=2\sqrt{x_h^p}-2\sqrt{x_L^p}+\sqrt{x_L^p}=\frac{2}{c}-2\cdot\frac{m_L-m_h}{2m_L c}+\frac{m_L-m_h}{2m_L c}=$$
$$=\frac{2}{c}-\frac{m_L-m_h}{2m_L c}=\frac{3m_L+m_h}{2m_L c};$$

$$\boxed{t_L^p=\frac{m_L-m_h}{2m_L c}\qquad t_h^p=\frac{3m_L+m_h}{2m_L c};}$$

Розглянемо: $\dfrac{m_L}{m_h}=2$:

$$x_L^p=\frac{1}{16c^2};\qquad x_h^p=\frac{1}{c^2}$$

$$t_L^p=\frac{1}{4c};\qquad t_h^p=\frac{7}{4c}$$

Обчислимо чисті затрати (збитки) суспільного добробуту:

$$DL=m_L\left[v_L(x_L^*)-v_L(x_L^p)+c(x_L^p+x_h^p)-c(x_L^*+x_h^*)\right]=$$
$$=m_L\left(v_L(x_L^*)-v_L(x_L^p)+(x_L^p-x_L^*)c\right).$$

Оскільки: $x_L^*=\dfrac{1}{4c^2}$ $\{\to\{.$

$$DL=m_L\cdot\left(\frac{1}{2c}-\frac{m_L-m_h}{2m_L c}+\left[\left(\frac{m_L-m_h}{2m_L c}\right)^2-\frac{1}{4c^2}\right]c\right)=\frac{m_h^2}{4m_L c}.$$

Дискримінація другого типу: двокомпонентний тариф.

$$t(x) = A + px \quad \Big\} \rightarrow$$ Той факт, учасник не робить покупок:

$$t(x) = \begin{cases} A + px; & x > 0 \\ 0; & x = 0. \end{cases}$$

(A, p)

$w - A$

$$\boxed{v_i'(x_i) = p.}$$

i – i-ий товар.

$D_h(p)$ – пряма ф-ія попиту споживача High (H)

$D_L(p)$ – пряма ф-ія попиту споживача Low (L)

$$D(p) = m_h \cdot D_h(p) + m_L D_L(p). \quad \text{– сукупний попит.}$$

Якщо $v_i(D_i(p)) - A - p \cdot D_i(p) < v_i(0) = 0$ то споживачеві вигідно вибирати $x_i = 0$, а не $x_i = D_i(p)$ $(i = L \vee h)$.

Звідси умова участі:

$$v_i(D_i(p)) - A - p D_i(p) \geq 0. \qquad i = L, h.$$

$$v_h(x_h) - A - p x_h = 0: \quad (H): \ x_h \text{ а не } x_L \ \{\Rightarrow\}.$$

$$v_h(x_L) - A - p x_L \leq v_h(x_h) - A - p x_h = 0$$

Припустивши: $v_h(x) > v_L(x) \ \forall x$:

$$v(x_L) - A - p x_L < v_h(x_L) - A - p x_L \leq 0.$$

Випустимо:

$$v_h(x_h) - A - p x_h > 0 \quad : \quad (H)$$

$$v_L(x_L) - A - p x_L = 0 \quad : \quad (L).$$

Прибуток монополіста:

прибуток монополіста не застосовує цінової дискр.

$$\pi(p) = (m_L + m_h)\left[v_L(D_L(p)) - p D_L(p)\right] + p D(p) - c(D(p)).$$

$$\pi^{ND}(p) \overset{def}{=} p D(p) - c(D(p)).$$

Отже:

$$\pi(p) = (m_L + m_h)\left[v_L(D_L(p)) - p D_L(p)\right] + \pi^{ND}(p) \rightarrow \max_p.$$

$$\frac{d\pi}{dp}(p) = (m_L + m_h)\left[\left(v_L'(D_L(p)) - p\right)D_L'(p) - D_L(p)\right] + \frac{d\pi^{ND}}{dp}(p)$$

Скористаємося умовою першого порядку для знаходження розв'язку задачі споживача:

$$v_L'(D_L(p)) = p.$$

Отримуємо:

$$\frac{d\pi(p)}{dp} = -(m_L + m_h) D_L(p) + \frac{d\pi^{ND}}{dp}(p)$$

p^{TP} – оптимальну ціну, яка є розв. задачі:

$$\pi(p) \rightarrow \max_p.$$

Тоді: необхідна умова $(p^{TP} \geq 0)$

$$-(m_L + m_h) D_L(p^{TP}) + \frac{d\pi^{ND}}{dp}(p^{TP}) \leq 0$$

якщо існує внутрішній розв'язок ($p^{TP} > 0$)

$$-(m_L+m_h)D_L(p^{TP}) + \frac{d\Pi^{ND}(p^{TP})}{dp} = 0$$

Звідки:

$$\frac{d\Pi^{ND}}{dp}(p^{TP}) > 0, \quad \} \to \{ \quad p^{TP} \neq p^{ND}$$

Покажемо: $p^{TP} < p^{ND}$

$p = p^{ND}$

$$p^{ND}D(p^{ND}) - c(D(p^{ND})) \geq pD(p) - c(D(p)); \quad \forall p \geq 0.$$

З іншого боку:

$$A(p^{ND}) = v_L(D_L(p^{ND})) - p^{ND}\cdot D_L(p^{ND}) \geq v_L(D_L(p)) - pD_L(p) = A(p).$$

Звідки:

$$(m_L+m_h)A(p^{ND}) + p^{ND}D(p^{ND}) - c(D(p^{ND})) \geq$$
$$(m_L+m_h)A(p) + pD(p) - c(D(p)).$$

Останнє означає, що $\Pi(p): p > p^{ND}$ не є більшим для $p = p^{ND}$

Отже: $p^{TP} < p^{ND}$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Pi^{ND}}{dp}(p^{TP}) = D(p^{TP}) + [p^{TP} - c'(D(p^{TP}))]D'(p^{TP}). \\ &D(p^{TP}) = m_h D_h(p^{TP}) + m_L D_L(p^{TP}). \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{$$

$$m_h[D_h(p^{TP}) - D_L(p^{TP})] + [p^{TP} - c'(D(p^{TP}))]D'(p^{TP}) = 0.$$

При виконанні: $v_L'(x) < v_h'(x) \Rightarrow D_L(p) < D_h(p) \quad \{\Rightarrow\{ \quad p^{TP} > c'(D(p^{TP}))$

$$y^{TP} = D(p^{TP}) \qquad \hat{y}: \quad D(c'(\hat{y})) = \hat{y}.$$

Приклад. Дано функції корисності споживача (L) і (H):

$$\left.\begin{aligned} u_L(x_L, z_L) &= \sqrt{x_L} + z_L \\ u_h(x_h, z_h) &= 2\sqrt{x_h} + z_h. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v_L(x) &= \sqrt{x} \\ v_h(x) &= 2\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Крім того, функція затрат має вигляд:

$$c(x) = c\cdot x$$

▽ Із рівності отримуємо функції попиту споживачів (L), (H):

$$\boxed{v_i'(x_i) = p.} \qquad (i = L, h)$$

$$v_L'(x_L) = p \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_L}} = p \Rightarrow D_L(p) = \frac{1}{4p^2}$$

$$v_h'(x_h) = p \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_h}} = p \Rightarrow D_h(p) = \frac{1}{p^2}$$

Звідси функція сукупного доходу:

$$D(p) = m_L D_L(p) + m_h D_h(p) = \frac{m_L}{4p^2} + \frac{m_h}{p^2} = \frac{m_L+4m_h}{4p^2} \quad \{\Rightarrow\}$$

$$\boxed{D(p) = \frac{m_L+4m_h}{4p^2}}; \quad \text{похідна: } D'(p) = -\frac{m_L+4m_h}{4p^3}.$$

Підставимо в умову першого порядку:

$$m_h[D_h(p^{TP}) - D_L(p^{TP})] + [p^{TP} - c'(D(p^{TP}))]D'(p^{TP}) = 0.$$

одержимо:

$$\frac{3m_h}{4(p^{TP})^2} - [p^{TP} - c]\,\frac{m_L+4m_h}{2(p^{TP})^2} = 0$$

Звідси:

$$p^{TP} = \frac{2m_L+8m_h}{2m_L+5m_h}\,c > c$$

Фіксована оплата:

$$A = v_L(D_L(p^{TP})) - p^{TP} D_L(p^{TP}) = \frac{1}{2p^{TP}} - \frac{1}{4p^{TP}} = \frac{1}{4p^{TP}}.$$

Для порівняння ціни, яку призначає монополіст, що дискримінує із ціною монополіста, який не здійснює дискримінації, розглянемо умови першого порядку для монополіста, який не дискримінує:

$$D(p^{ND}) + [p^{ND} - c'(D(p^{ND}))]\cdot D'(p^{ND}) = 0$$

Звідки:

$$\frac{1}{(p^{ND})^2}\left(\frac{m_L}{4} + m_h\right) - [p^{ND} - c]\,\frac{2}{(p^{ND})^3}\left(\frac{m_L}{4} + m_h\right) = 0$$

і крім того:

$$p^{ND} = 2c > p^{TP}.$$

Порівняємо результати застосування двокомпонентного тарифа і пакетної дискримінації з точки зору суспільства і монополіста. З цією метою віднімемо чисті втрати добробуту для двокомпонентного тарифу (у випадку пакетної дискримінації чисті втрати були обчислені вище) та прибуток монополіста у цих випадках. Чисті втрати добробуту у випадку двокомпонентного тарифу дорівнюють

$$DL = m_L\sqrt{D_L(c)} + m_h\, 2\sqrt{D_h(c)} - c\,D(c) - [m_L\sqrt{D_L(p^{TP})} + m_h\cdot 2\sqrt{D_h(p^{TP})} - c\,D(p^{TP})] =$$

$$= \frac{m_L+4m_h}{2c} - \frac{m_L+4m_h}{4c} - \frac{m_L+4m_h}{2p^{TP}} + c\,\frac{m_L+4m_h}{4(p^{TP})^2} =$$

$$= \frac{m_L+4m_h}{4c}\left(1 - \frac{2c}{p^{TP}} + \left(\frac{c}{p^{TP}}\right)^2\right) = \frac{m_L+4m_h}{4c}\left(1 - \frac{c}{p^{TP}}\right)^2 =$$

$$= \frac{m_L+4m_h}{4c}\left(1 - \frac{2m_L+5m_h}{2m_L+8m_h}\right)^2 = \frac{9m_h^2}{16(m_L+4m_h)c}$$

З позиції суспільного добробуту однозначного вибору між двома схемами неможливо виконати. У залежності від співвідношення між m_L і m_h чисті втрати можуть мати місце як в одному так і у іншому випадку.

Далі, прибуток монополіст у випадку пакетної дискримінації дорівнює:

$$\frac{(m_L+m_h)^2}{4m_L c}$$

а прибуток у випадку застосування ним двокомпонентного тарифу:

$$\frac{(2m_L+5m_h)^2}{16(m_L+4m_h)c}$$

Можна показати (доведіть!) що незалежно від співвідношення між m_L і m_h монополіст надає перевагу пакетній дискримінації

△