Заняття 11
Теорія ринків
Мтем-11с
16.11.2021

Продовження Exercise Sheet 3.

(3.2) Відмовляємося від припущення о рівні випуску монополістом $(\frac{1}{2}, 0)$.

Нехай $x_1 = \frac{1}{2}$; x_2 - ? Тоді задача max. прибутку:

$$\Pi_2(x_2) = x_2 \cdot p_2 = x_2(1 - x_1 - x_2)\Big|_{x_1=\frac{1}{2}} = x_2\left(1 - \frac{1}{2} - x_2\right) = x_2\left(\frac{1}{2} - x_2\right) \to \max_{x_2} \quad \{ \Rightarrow \}$$

$$\Pi_2'(x_2) = \frac{1}{2} - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{1}{4}.$$

Покажемо, у випадку $x_2^* = \frac{1}{4}$:

$$\Pi_2(x_2) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} > 0 = \Pi_2(x_2)\Big|_{x_2=0} = x_2 \cdot p_2 = 0.$$

(3.3) Етап 1. $(t=1)$: випуск монополіста становить x_1.

Етап 2. $(t=2)$: випуск монополіста становить x_2.

Задачу розв'яжемо у зворотному порядку.

Етап 2. Задача максим. прибутку:

$$\Pi_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1 - x_2) \to \max_{x_2} \quad \{ x_2 \geq 0. \qquad (8)$$

Умови Kuhn-Tucker'а:

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} = 1 - x_1 - 2x_2 \leq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_2(1 - x_1 - 2x_2) = 0 \qquad (9).$$

Розглянемо випадки:

а) $x_2 = 0$: $(9_1) \to 1 - x_1 \leq 0$: суперечить припущенню: $x_1 \leq 1$.

б) $x_2 > 0$: $(9_3) \to x_2 = \frac{1-x_1}{2}$.

$$x_2^*(x_1) = \begin{cases} \frac{1-x_1}{2}; & 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0; & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

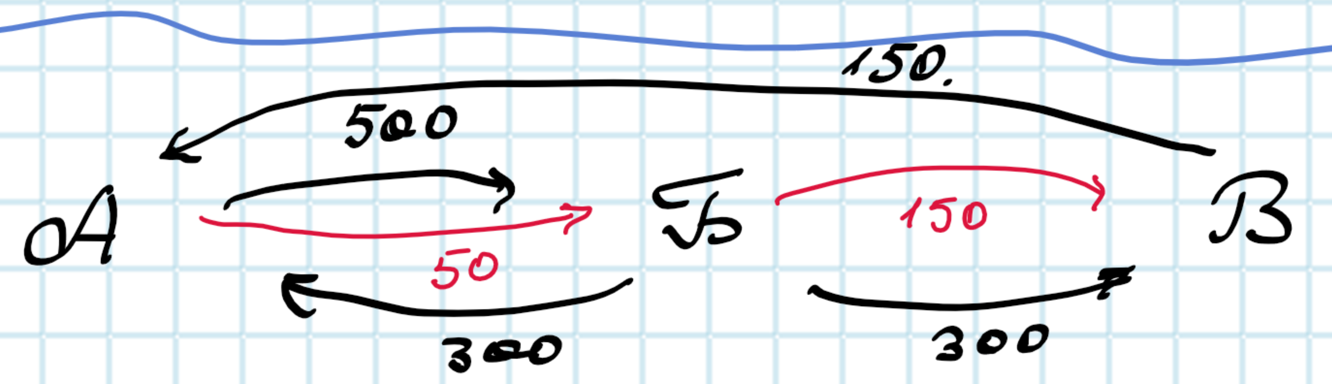
Надалі припускаємо: виключаємо $x_1 > 1$.

Ціни клірингового ринку можна записати як ф-ії x_1:

$$p_2 = P(\xi_2) = 1 - x_1 - x_2^*(x_1) = \frac{1-x_1}{2};$$

$$p_1 = 1 - x_1 + \delta p_2 = 1 - x_1 + \delta \frac{1-x}{2} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)(1 - x_1).$$

Кліринг.



1250 ~ прямо.
200 - кліринг.

Етап 1.

$$\Pi(x_1, x_2^*(x_1)) = x_1 p_1 + \delta x_2^*(x_1) \cdot p_2 = x_1\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)(1 - x_1) + \delta \frac{1}{2}(1 - x_1)\frac{1}{2}(1 - x_1) =$$

$$= (1 - x_1)x_1 + \frac{\delta}{4}(1 - x_1^2) \to \max_{x_1}$$

$x_1 \geq 0$.

Умови Kuhn-Tucker'а:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 - 2\frac{\delta}{4}x_1 \leq 0; \quad x_1 \geq 0; \quad x_1\left(1 - 2x_1 - \frac{\delta}{2}x_1\right) = 0. \qquad (10)$$

а) $x_1 = 0$: $1 - 2x_1 - 2\frac{\delta}{4}x_1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0$. суперечність.

б) $x_1 > 0$: (10_3) $\{\Rightarrow\}$ $x_1\left(4 + \frac{\delta}{2}\right) = 1$ $\{\Rightarrow\}$ $\boxed{x_1 = \frac{2}{4+\delta}}$

Отже:

$$\boxed{x_2} = x_2^*(x_1) = \frac{1-x_1}{2}\Bigg|_{x_1=\frac{2}{4+\delta}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{4+\delta}\right) = \boxed{\frac{\delta+2}{2(4+\delta)}};$$

$$p_t = \begin{cases} 1-\frac{2}{4+\delta} + \delta\left(1-\frac{2}{4+\delta}-\frac{\delta+2}{2(4+\delta)}\right); & t=1 \\ 1-\frac{2}{4+\delta}-\frac{\delta+2}{2(4+\delta)}; & t=2. \end{cases}$$

$$1-\frac{2}{4+\delta}-\frac{\delta+2}{2(4+\delta)} = \frac{8+2\delta-4-\delta-2}{2(4+\delta)} = \frac{2+\delta}{2(4+\delta)}$$

$$1-\frac{2}{4+\delta}+\delta\left(1-\frac{2}{4+\delta}-\frac{\delta+2}{2(4+\delta)}\right) = 1-\frac{2}{4+\delta}+\delta\,\frac{2+\delta}{2(4+\delta)} = \frac{2(4+\delta)-4+\delta(2+\delta)}{2(4+\delta)} =$$

$$= \frac{\cancel{4}+2(2+\delta)-\cancel{4}+\delta(2+\delta)}{2(4+\delta)} = \frac{(2+\delta)^2}{2(4+\delta)};$$

$$\boxed{p_t = \begin{cases} \frac{2+\delta}{2(4+\delta)}; & t=1; \\ \frac{(2+\delta)^2}{2(4+\delta)}; & t=2. \end{cases}}$$

$$\pi = (1-x_1)x_1 + \frac{\delta}{4}(1-x_1^2)\Bigg|_{x_1=\frac{2}{4+\delta}} = \left(1-\frac{2}{4+\delta}\right)\frac{2}{4+\delta} + \frac{\delta}{4}\left(1-\frac{4}{(4+\delta)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(2+\delta)}{(4+\delta)^2} + \frac{\delta}{4}\,\frac{(4+\delta)^2-4}{(4+\delta)^2} = \frac{1}{(4+\delta)^2\cdot 4}\left(8(2+\delta)+\delta\left((4+\delta)^2-4\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4(4+\delta)^2}\cdot\left(16+8\delta+\delta(4+\delta)^2-4\delta\right) = \frac{(4+\delta)(2+\delta)^2}{4(4+\delta)^2} = \frac{(2+\delta)^2}{4(4+\delta)}.$$

$16+4\delta+\delta(4+\delta)^2$

$4(4+\delta)+\delta(4+\delta)^2$

$(4+\delta)(4+\delta(4+\delta))$

$4+4\delta+\delta^2$

$(2+\delta)^2$

$$\boxed{\pi = \frac{(2+\delta)^2}{4(4+\delta)}}$$

(3.4) Ціни за оренду у періодах:

$$p_t = \begin{cases} P(\xi_1) = 1-\xi_1; & t=1. \\ P(\xi_2) = 1-\xi_2; & t=2. \end{cases}$$

ξ_t $(t=1,2)$ – запаси монополіста. Прибуток монополіста:

$$\pi = \xi_1(1-\xi_1) + \delta\,\xi_2(1-\xi_2) \to \max_{(\xi_1,\xi_2)}$$

$$\xi_1 \geq 0;\ \xi_2 \geq 0.$$

Умови Kuhn-Tucker'a:

$J = \xi_1(1-\xi_1) + \delta\xi_2(1-\xi_2).$

$\frac{\partial J}{\xi_1} = 1-2\xi_1 \leq 0$; $\xi_1 \geq 0$; $\xi_1(1-2\xi_1) = 0$;

$\frac{\partial J}{\partial \xi_2} = \delta(1-2\xi_1) \leq 0$; $\xi_2 \geq 0$; $\xi_2\delta(1-2\xi_2) = 0$;

i) $\xi_1 = \xi_2 = 0$; ii) $\xi_1 = 0$; $\xi_2 > 0$; iii) $\xi_1 > 0$; $\xi_2 = 0$; iv) $\xi_1 > 0$; $\xi_2 > 0$.

?!