Заняття 3
21.09.2021

Exercise 1.
завдання 2 (точка Cournot).

$c(x) = 3x$

$$p(x) = \begin{cases} 13 - x; & 0 \le x \le 13 \\ 0; & x > 13. \end{cases}$$

1. знайти розв'язок Cournot.

$\pi(x) = x \cdot P(x) - C(x) \qquad (0 \le x \le 13)$

$\pi(x) = x(13-x) - 3x = 10x - x^2.$

! $\pi''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ строго увігнутою;

! $P(0) - c'(0) = 13 - 3 = 10 > 0 \rightarrow$ існує внутрішній розв'язок:

$\boxed{R'(x) = c'(x)} \iff \boxed{\frac{d\pi}{dx} = 0} \Rightarrow 10 - 2x = 0 \Rightarrow x^M = 5$

$p^M = P(x^M) = 13 - 5 = 8.$

$\boxed{\begin{matrix} x^M = 5 \\ p^M = 8. \end{matrix}}$ - точка Cournot.

(1) Альтернативний спосіб знаходження розв'язку.

$\pi(x) = 10x - x^2 \rightarrow max. \qquad (1)$

$0 \le x \le 13 \quad (x \le 13) \qquad (2)$

(1) $L(x, \lambda) = 10x - x^2 + \lambda(13 - x)$

Умови Kuhn-Tucker для задачі (1), (2):

$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = 10 - 2x - \lambda \le 0, \quad x \ge 0; \quad x \cdot \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x} = 0. \qquad (3)$

$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 13 - x \ge 0; \quad \lambda \ge 0; \quad \lambda \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 0. \qquad (4).$

а) $x = 0$: $10 - \lambda \le 0$; $\lambda \cdot 13 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

суперечність.

б) $x > 0$; $(3_1) \rightarrow 10 - 2x - \lambda = 0 \quad x = 5 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x^M = 5 \\ p^M = P(x^M) = 8. \end{matrix}}$

$\lambda = 0$

$\lambda \ne 0 \quad (4_1)$: $13 - x = 0 \Rightarrow x = 13 \xrightarrow{(3_1)} 10 - 2 \cdot 13 - \lambda \le 0$

$\Rightarrow \lambda \ge -26.$

(2) Альтернативний спосіб знаходження розв'язку.

$0 \le x \le 13$: $P(x) = 13 - x \rightarrow$ функція попиту:

$p = 13 - X(p) \Rightarrow X(p) = 13 - p$: $0 \le p \le 13.$

$\pi(p) = X(p) \cdot p - C(X(p)) =$

$= p(13 - p) - 3(13 - p)$

$\boxed{\pi(p) = (13 - p)(p - 3).}$

$\frac{d^2\pi}{dp^2} = -2 < 0$ - строго увігнуто.

$\pi(p) = (13 - p)(p - 3) \rightarrow max.$

$0 \le p \le 13.$

$16p - p^2 - 39$

$L(p, \lambda) = (13 - p)(p - 3) + \lambda(13 - p).$

Умови:

$\frac{\partial L}{\partial p} = 16 - 2p - \lambda \le 0; \quad p \ge 0; \quad p(16 - 2p - \lambda) = 0.$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 13 - p \ge 0; \quad \lambda \ge 0; \quad \lambda(13 - p) = 0.$

1) $p = 0 \rightarrow \lambda = 0$ – протиріччя

2) $p > 0 \rightarrow 16 - 2p - \lambda = 0$, $\lambda = 0 \rightarrow p^M = 8. \quad x^M = X(p^M) = 13 - 8 = 5$

$\lambda > 0 \rightarrow p = 13$ – протиріччя

② Максимальний прибуток монополіста

$$\Pi^*(x^M, p^M) = x^M \cdot p^M - C(x^M) = 5\cdot 8 - 3\cdot 5 = 25.$$

③ $W(x)$ = залишок споживача + залишок монопол

$$= \left(\int_p^x P(s)dx - P(x)\cdot x\right) + \left(P(x)\cdot x - C(x)\right) =$$

$$= \int_0^x P(s)ds - C(x); \qquad 0 \le x \le 13.$$

$$\begin{cases} W(x) \to \max. \\ x \le 13 \end{cases}$$

$$L(x,\lambda) = \int_0^x P(s)ds - C(x) + \lambda(13-x)$$

Умови Куна-Таккера:

$$\begin{cases} P(x) - C'(x) - \lambda \le 0; & x \ge 0; & x\left(P(x) - C'(x) - \lambda\right) = 0 \\ 13 - x \ge 0; & \lambda \ge 0; & \lambda(13-x) = 0. \end{cases}$$

$10 - x - \lambda \le 0.$

$\underbrace{13 - x - 3 - \lambda}_{} \le 0 \qquad x \ge 0; \qquad x(10 - x - \lambda) = 0.$

$13 - x \ge 0; \qquad \lambda \ge 0; \qquad \lambda(13-x) = 0.$

а) $\boxed{x = 0} \to \lambda \ge 10 \Rightarrow \lambda > 0 \to \boxed{x = 13}$

суперечність

б) $x > 0; \to 10 - x - \lambda = 0$ $\quad \lambda = 0: \; x = 10$

$\quad \lambda > 0 \quad x = 13$

$$\boxed{x^* = 10}$$

④ s - одинична субсидія:

$$\Pi(x,s) = xP(x) - C(x) + s\cdot x =$$

$$= x(13-x) - 3x + s\cdot x$$

$$\Pi_x(x,s) = 13 - 2x - 3 + s = 0 \Rightarrow x^M(s) = \frac{10+s}{2}.$$

$x^* = x^M(s) = 0 \Rightarrow \underbrace{s^* = 10,}_{10\cdot 10 = 100}$ - одинична субсидія

$10 \cdot 10 = 100$ - загальна.

$$\Pi(x,s) = x\cdot P(x) - C(x) + s\cdot x - 100.$$

$x^M = 5$
$p^M = 8.$

$x^M = 10$