Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Магістерська робота
на тему:
"Задача оптимального інвестування фірми."

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с,
спеціальності 111 -*математика,*
спеціалізації *математична економіка та економетрика*,
Войціховська Лілія Андріївна

Науковий керівник: доц. Флюд В.М.

Роботу рекомендовано до захисту на засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики протокол від 04 грудня 2020 року №4

В.о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М.О.

Львів - 2020

Зміст

1 Вступ

Важливою сферою фінансів є прийняття рішень щодо інвестиційної та дивідендної політики протягом часу та способів їх фінансування. Серед способів фінансування такої політики є: випуск власного капіталу, збереження прибутків, запозичення грошей тощо. Можна моделювати такі ситуації як задача оптимального керування; Деякі з цих моделей є простими для аналізу, і вони дають корисні знання.

У своїй курсовій роботі я розгляну задачу готівкового балансу та задачу оптимального фінансування акціонерного капіталу фірми. Перша, у найпростішій формі, є задачею контролю рівня грошового залишку фірми, щоб задовольнити її попит на готівку при мінімальних сукупних витратах. Остання, яка є основною задачею у фінансах, полягає у визначенні оптимального шляху дивідендів разом з понаднормовим випуском нових акцій з метою максимізації вартості фірми.

Хоча ми розглядаємо лише детерміновані задачі, деякі з найбільш важливих задач у сфері фінансів пов'язані з невизначеністю. Таким чином, їх оптимізація вимагає використання стохастичної теорії оптимального керування або стохастичного програмування.

Далі введемо просту задачу готівкового балансу і будемо особливо зацікавлені у фінансовій інтерпретації для різних функцій, таких як Гамільтоніан і приєднані функції, що виникають під час аналізу.

При дослідженні даної теми використано матеріали із [1].

2 Оптимальна модель фінансування

Розглянемо модель фірми, яка має фінансувати свої інвестиції шляхом оптимального поєднання нерозподіленого прибутку та зовнішнього капіталу. Задача оптимального фінансування фірми може бути сформульована як задача оптимального керування. Такі формулювання, дозволяють фірмі фінансувати свої інвестиції за рахунок нерозподіленого прибутку, боргу та / або зовнішнього капіталу в різних пропорціях, які можуть змінюватися з часом. Зауважимо, що незбережені доходи виплачуються акціонерам фірми як дивіденди.

З причин простоти і легкості цього розв'язку, модель, проаналізована тут, не допускає заборгованості як джерела фінансування, але дозволяє використовувати нерозподілений прибуток та зовнішній капітал у будь-яких пропорціях.

2.1 Модель

Для того, щоб сформулювати модель, використовуємо наступні позначення:

$y(t)$ – вартість активів фірми або вкладеного капіталу в момент часу t,

$x(t)$ – поточна ставка прибутку в доларах за час на час t,

$u(t)$ – зовнішнє або нове акціонерне фінансування, виражене як кратне поточного прибутку; $u \geq 0$

$v(t)$ – частка поточного прибутку, що зберігається, тобто $1 - v(t)$
представляє ставку виплати дивідендів; $0 \leqslant v(t) \leqslant 1$,

$1 - c$ – пропорційна платіжна (тобто транзакція) вартість зовнішнього капіталу; c - константа, $0 \leqslant c < 1$,

ρ – неперервна дисконтная процентная ставка (допустима константа); відома як частота прибутковості акціонера,

r – фактична норма прибутку (допустима константа) на інвестований капітал фірми; $r > \rho$

g – верхній коефіцієнт зростання цінових активів фірми,

T – інтервал планування; $T < \infty$

Враховуючи ці визначення, поточними доходами є $x = ry$. Швидкість зміни поточних доходів визначається

$$\dot{x} = r\dot{y} = r(cu + v)x, \quad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Крім того, верхня межа швидкості зростання активів передбачає наступне обмеження на вимірювальнній змінній :

$$\dot{y}/y = \frac{(cu + v)x}{x/r} = r(cu + v) \leqslant g. \tag{2}$$

Нарешті, мета фірми полягає в тому, щоб максимізувати свою вартість, яка приймається за теперішню вартість потоку майбутніх дивідендів, що накопичується в акціях, які перебувають в оббігу на момент часу нуль. Для виведення цього виразу зауважимо, що

$$\int_0^T (1 - v)xe^{-\rho t}dt$$

представляє поточну вартість загальних дивідендів, що випускаються фірмою. Частина цих дивідендів йде на новий капітал, який під припущенням ефективного ринку отримає норму прибутку, рівну дисконтній ставці ρ. Отже, це повинно бути рівним теперішній вартості

$$\int_0^T uxe^{-\rho t}dt$$

зовнішнього капіталу, піднятого через деякий час.

Таким чином, чиста теперішня вартість загальних майбутніх дивідендів, що нараховуються на початкові акції, є різницею вищезазначених двох виразів, тобто

$$J = \int_0^T e^{-\rho t}(1 - v - u)xdt. \tag{3}$$

Зауважимо, що у випадку кінцевого результату більш реалістична цільова функція буде включати в себе залишкову вартість або зайвий термін $S[x(T)]$.

Задачею оптимального керування є вибір між u та v, щоб максимізувати J в (3) за умов (1) з обмеженням (2), $u \geqslant 0$, і $0 \leqslant v \leqslant 1$. Для зручності ми заново сформулюємо цю задачу як

$$\begin{cases} \max\limits_{u,v} \left\{ J = \int\limits_0^T e^{-\rho t}(1 - v - u)xdt \right\} \\ \text{стосовно} \\ \dot{x} = r(cu + v)x, \quad x(0) = x_0, \\ \text{при обмеженнях на керування} \\ cu + v \leqslant g/r, \quad u \geq 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

2.2 Застосування принципу максимуму

Це білінійна задача з двома керуючими змінними. Поточне значення Гамільтона це

$$H = (1 - v - u)x + \lambda r(cu + v)x, \tag{5}$$

де сумісна змінна поточного значення A задовольняє

$$\dot{\lambda} = \rho\lambda - (1 - v - u) - \lambda r(cu + v) \tag{6}$$

з умовою трансверсальності

$$\lambda(T) = 0. \tag{7}$$

З Гамільтоніана в (5) нам відомо, що $\lambda(t)$ можна інтерпретувати як граничне значення (долар за час t) одиничної зміни доходу в момент часу t. Також $(cu + v)x$ є додатковими інвестиціями в момент часу t. Тоді, λr - гранична величина одиничної інвестиції в момент часу t. Таким чином, добуток $\lambda r(cu + v)x$ є значенням для акціонерів додаткових інвестицій, виміряних з точки зору недоотриманих дивідендів (іншими словами, долар за час t). Якщо фірма здійснює додаткові інвестиції λr (що дає додатковий прибуток на один долар), $\rho\lambda$ є очікуваним прибутком від цієї інвестиції. У рівновазі це повинно дорівнювати "приросту капіталу" λ, плюс безпосередні дивіденди $(1^{-}v)$ менші u, "вимоги" зовнішніх акціонерів, плюс вартість додаткових прибутків $\lambda r(cu + v)$.

Щоб задати форму оптимальної стратегії, перепишемо Гамільтона як

$$H = [W_1 u + W_2 v + 1]x, \tag{8}$$

де

$$W_1 = cr\lambda - 1, \tag{9}$$

$$W_2 = r\lambda - 1. \tag{10}$$

Передусім зазначимо, що змінна стану x обчислюється так, що оптимальне керування не залежать від змінної стану. По-друге, оскільки Гамільтоніан є лінійним у двох контрольних змінних, оптимальною стратегією є комбінація узагальнених двопозиційного та сингулярного керувань. Звичайно, характеристика цих оптимальних засобів керування в термінах спряженої змінної λ вимагатиме розв'язок параметричної задачі лінійного програмування в кожний момент часу t. Задачу максимізації функції Гамільтона можна викласти таким чином:

$$\begin{cases} \max\limits_{u,v} \{W_1 u + W_2 v\} \\ \text{стосовно} \\ u \geqslant 0, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1, \quad cu + v \leqslant \dfrac{g}{r}. \end{cases} \tag{11}$$

Очевидно, що обмеження $v \leqslant 1$ стає зайвим, якщо $g/r < 1$. Тому ми маємо два випадки:

Випадок A: $g \leqslant r$ і **Випадок B:** $g > r$,

під кожним з яких ми можемо розв'язати задачу лінійного програмування (11) графічно в замкнутій формі. Це зроблено на малюнках 5.4 і 5.5.

Оскільки $c < 1$ за припущенням, наступні підпункти, показані на малюнках 5.4 і 5.5, можна виключити:

(i) $W_1 > cW_2, W_1 > 0 \Rightarrow c > 1$,

(ii) $W_1 = 0, W_2 < 0 \Rightarrow c > 1$,

(iii) $W_1 = cW_2 > 0 \Rightarrow c = 1,$

(iv) $W_1 = W_2 = 0 \Rightarrow c = 1,$

Для решти підзадач, показаних поряд із затемненими лініями на малюнках 5.4 і 5.5, ми охарактеризуємо відповідні оптимальні контролі в таблиці 5.1. Каталог можливих режимів оптимального керування, наведений у таблиці 5.1, показує потенційні часові шляхи для фірми. Що необхідно зробити для отримання оптимального шляху (з урахуванням початкової умови) це синтезувати ці підзадачі в оптимальну послідовність.

2.3 Синтез шляхів оптимального керування

Для отримання оптимальної траєкторії необхідно синтезувати оптимальну послідовність підзадач. Звичайною процедурою, що застосовується, є конструкція зворотного часу, спочатку розроблена Isaacs (1965). Зворотний час можна визначити тільки для задачі про кінцевий інтервал. Проте, розв'язок нескінченного інтервалу зазвичай можна вивести з розв'язку скінченного інтервалу.

Наш аналіз задачі скінченного інтервалу (5.33) продовжується з припущенням, що момент обриву T вважається досить великим. Ми зробимо це припущення чітким під час нашого аналізу. Окрім того, ми розглянемо рішення, коли T недостатньо велике у зауваженнях 1 і 4.

Визначимо змінну зворотного часу τ як

$$\tau = T - t,$$

так, що

$$\overset{\circ}{y} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\tau} = -\dot{y}.$$

Як наслідок, $\overset{\circ}{y} = -\dot{y}$, і зворотно-часові версії стану і доповнюючих рівнянь (1) і (6), відповідно, можуть бути отримані шляхом простої заміни $\dot{y}$ на $\overset{\circ}{y}$ і зміни знаків з правої сторони. Умова трансверсальності на доповнюючу змінну

$$\lambda(t = T) = \lambda(\tau = 0) = 0 \tag{12}$$

стає початковою умовою в зворотно часовому сенсі. Крім того, давайте параметризуємо заключний стан, припустивши що

$$x(t = T) = x(\tau = 0) = \alpha_A, \tag{13}$$

де α_A є параметр, який потрібно визначити.

Відтепер у цьому розділі все виражається у зворотному часовому сенсі, якщо не вказано інше. Використовуючи визначення $\circ x$ і $\circ\lambda$ та умови (13) і (12), можна записати версії (1) і (6) у зворотному часі наступним чином:

$$\overset{\circ}{x} = -r(cu + v)x, \quad x(0) = \alpha_A, \tag{14}$$

$$\overset{\circ}{\lambda} = (1 - u - v) - \lambda\{\rho - r(cu + v)\}, \quad \lambda(0) = 0. \tag{15}$$

Це є початковою точкою для нашого синтезу точки перемикання. По-перше, розглянемо випадок А.

Випадок А: $g \leqslant r$.

Зауважимо, що обмеження $v \leqslant 1$ є зайвим у цьому випадку і єдиними можливими підкласами є А1, А3 і А6. Оскільки $\lambda(0) = 0$, то маємо $W_1(0) = W_2(0) = -1$, і отримали Випадок А1.

Підвипадок А1: $\underline{W_1 = cr\lambda - 1 < 0 \text{ і } W_2 = r\lambda - 1 < 0.}$

З рядка (1) таблиці 5.1 маємо $u^* = v^* = 0$, рівняння стану (14) і приєднане рівняння (15) як

$$\overset{\circ}{x} = 0 \quad \text{i} \quad \overset{\circ}{\lambda} = 1 - \rho\lambda. \tag{16}$$

З початковими умовами, наведеними у (12), розв'язки для x та λ є

$$x(\tau) = \alpha_A \quad \text{i} \quad \lambda(\tau) = \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\rho}. \tag{17}$$

Легко бачити, що з припущення $0 \leqslant c < 1$ випливає, що якщо $W_2 = \rho\lambda - 1 < 0$, тоді $W_2 = cr\lambda - 1 < 0$. Тому, щоб залишитися в цій підгрупі, як t зростає, $W_2(\tau)$ повинен залишатися негативним протягом деякого часу, оскільки τ зростає. Проте з (17), $\lambda(\tau)$ зростає асимптотично до значення $1/\rho$ і тому, $W_2(\tau)$ зростає асимптотично до значення $r/\rho - 1$. Оскільки ми припустили $r > \rho$, існує τ_1 таке,що $W_2(\tau_1) = (1 - e^{-\rho\tau})r/\rho - 1 = 0$. Це легко обчислити

$$\tau_1 = \frac{1}{\rho} \cdot \ln\left(\frac{r}{r - \rho}\right). \tag{18}$$

З цього виразу очевидно, що фірма залишає підрозділ А1, забезпечуючи $\tau_1 < T$. Більш того, це спостереження також дає точне поняття досить великого T у Випадку А, маючи $T > \tau$.

Зауваження 2.1. *Коли T не є достатньо великим, тобто, коли $T \leqslant \tau_1$ у Випадку А, то фірма залишається у Випадку А3. Оптимальним розв'язком у цьому випадку є $u^* = 0$ і $v^* = 0$, тобто принцип відсутності інвестицій.*

Зауваження 2.2. *Зауважимо, що якщо ми припустили, що $r < \rho$, то фірма ніколи не виходить з Випадку А1 незалежно від* *значення T. Очевидно, що інвестування не використовується, якщо норма прибутку менше дисконтної ставки.*

У зворотному часі τ_1 ми маємо $W_2 = 0$ і $W_1 < 0$, і тому фірма знаходиться у Підрозділі А6.

Півипадок А6: $\underline{W_1 = cr\lambda - 1 < 0 \text{ і } W_2 = r\lambda - 1 = 0.}$

У цьому випадку оптимальне керування

$$u^* = 0, \quad 0 \leqslant v^* \leqslant \frac{g}{r} \tag{19}$$

з рядка (3) таблиці 5.1 є сингулярне щодо v. Цей випадок називається сингулярним, оскільки умови максимізації Гамільтона не дає унікальне значення для елемента керування v. У таких випадках оптимальні засоби керування отримують за умов, необхідних для підтримки $W_2 = 0$ за кінцевий інтервал часу. Це означає, що ми повинні мати $\circ W = 0$, що в свою чергу означає $\overset{\circ}{\lambda} = 0$. Для обчислення $\overset{\circ}{\lambda}$ підставимо (5.48) в (5.44) і отримаємо

$$\overset{\circ}{\lambda} = (1 - v) - \lambda[\rho - rv^*]. \tag{20}$$

Підставляючи $\lambda = 1/r$ (з $W_2 = 0$) в (20) і прирівнюючи праву сторону до нуля, одержимо

$$r = \rho \tag{21}$$

як необхідна умова, необхідна для підтримання сингулярності протягом кінцевого інтервалу часу після τ_1. Умова (21) є випадковою і взагалі не виконуватиметься. Фактично ми припустили $r > \rho$. Таким чином, фірма не залишиться у Випадку А6 на скінченному часовому інтервалі. Крім того, з $r > \rho$, ми маємо $\overset{\circ}{\lambda}(\tau_1) = (r - \rho/r) > 0$. Тому W_2 зростає від нуля і стає позитивним після τ_1. Таким чином, при τ_1^+ фірма переходить до Підрозділу A3.

Півипадок A3: $\underline{W_2 = r\lambda - 1 > 0}$.

Оптимальним керуванням у цьому підпункті з рядка (2) таблиці (5.1) є

$$u^* = 0, \quad v^* = \frac{g}{r}. \tag{22}$$

Стан і приєднані рівняння

$$\overset{\circ}{x} = -gx, \quad x(\tau_1) = \alpha_A \tag{23}$$

$$\overset{\circ}{\lambda} = \left(1 - \frac{g}{r}\right) - \lambda(\rho - g), \quad \lambda(\tau_1) = 1/r \tag{24}$$

мають значення при $\tau = \tau_1$ і виведені з (17) і (18).

Оскільки $\circ\alpha(\tau_1) > 0$, λ зростає при τ_1 від значення $1/\tau$. Подальше вивчення поведінки $\lambda(\tau)$ при збільшенні τ буде здійснюватися при двох різних можливих умовах: (i) $\rho > g$ і (ii) $\rho \leqslant g$.

(i) $\rho > g$: За цієї умови, коли λ збільшується, $\overset{\circ}{\lambda}$ зменшується і стає нулем при значенні, отриманому прирівнюванням правої частини (24) до нуля, тобто

$$\bar{\lambda} = \frac{1 - g/r}{\rho - g}. \tag{25}$$

Отже, це значення $\bar{\lambda}$ є асимптотою розв'язку (24), що починається з $\lambda(\tau_1) = 1/r$. Оскільки $r > \rho > g$ в цьому випадку

$$\overline{W}_2 = r\bar{\lambda} - 1 = \frac{r(1 - g/r)}{\rho - g} - 1 = \frac{r - \rho}{\rho - g} > 0, \tag{26}$$

що означає, що фірма залишається у Підвипадку A3.

(ii) $\rho \leqslant g$: За цієї умови, коли $\lambda(\tau)$ зростає, $\overset{\circ}{\lambda}(\tau)$ зростає.

Отже, $W_2(\tau) = r\lambda(\tau) - 1$ продовжує бути більше нуля і фірма залишається у Підвипадку А3.

Зауваження 2.3. *З* $\rho \leqslant g$ *зауважимо, що* $\lambda(\tau)$ *зростає до нескінченності, коли* τ *зростає до нескінченності. Це має важливі наслідки пізніше, коли ми маємо справу з розв'язком задачі на нескінченному інтервалі.*

Зауваження 2.4. *Оскільки встановлено, що оптимальні рішення для* $r \geq r_1$ *і незалежні від* α_A *для* T *досить великі, ми можемо накреслити рішення для випадку А на малюнку 5.6, починаючи з* x_0*. Це також дає значення*

$$\alpha_A = x_0 e^{g(T-\tau_1)} = x_0 e^{gT}[1 - \rho/r]^{g/\rho},$$

У розв'язку для випадку А існує тільки одна точка перемикання, якщо Т є достатньо великий (тобто $T > \tau_1$ в цьому випадку). Час перемикання $t = T - \tau_1$ має цікаву економічну інтерпретацію. А саме, для цього потрібно щонайменше τ_1 одиниць часу, щоб зберегти долар прибутку (для інвестицій), і бути доцільним. Це означає, що інвестувати стільки прибутків, скільки можливо, до $T - \tau_1$, і не інвестувати будь - які прибутки після $T - \tau_1$. Таким чином, $T - \tau_1$ є опорною точкою між збереженням прибутку або виплатою дивідендів з заробітку. Щоб побачити це безпосередньо, припустимо, що фірма зберігає один долар прибутку в $T - \tau_1$. Оскільки це останній раз, коли будь-який вкладений дохід буде вартим, це очевидно (тому що всі заробітки виплачуються),що долар просто інвестував у дохідності $T - \tau_1$ дивіденди за ставкою r від $T - \tau_1$ і до Т. Значення цього потоку дивідендів у термінах $T - \tau_1$ -доларів є

$$\int_0^{\tau_1} re^{-\rho t}dt = \frac{r}{\rho}[1 - e^{-\rho\tau_1}], \qquad (27)$$

які повинні бути прирівняні до одного долара, щоб знайти точку байдужості. Прирівнювання (27) до 1 дає точно значення τ_1, наведене в (18).

З такою інтерпретацією τ_1 ми робимо висновок, що достатньо прибутків необхідно зберегти, щоб зробити фірму експоненціально зростаючою при максимальній швидкості g до $t = T - \tau_1$. Після цього весь прибуток виплачується, і фірма перестає рости. Оскільки $g \leqslant r$ (передбачається для випадку A), зростання в першій частині рішення може фінансуватися виключно з нерозподіленого прибутку. Таким чином, немає необхідності вдаватися до більш дорогого зовнішнього фінансування акцій. Останнього не буде, однак, у випадку B, коли $g > r$, про який ми зараз обговоримо.

Випадок B: $g > r$.

Оскільки $g/r > 1$, обмеження $v \leqslant 1$ у випадку B є актуальним. Можливі підвипадки являють собою B1, B8, B4, B7 і B3, показані поряд з затемненими лініями на малюнку 5.5. Як і у випадку A, очевидно, що фірма починає (в сенсі зворотного часу) в підвипадку B1. Нагадаємо, що T також вважається достатньо великим. Ця заява у випадку B буде зрозуміла в ході нашого аналізу. Крім того, розв'язок, коли T не є достатньо великим у випадку B, буде обговорюватися в Зауваженні 5.4.

Півипадок B1: $\underline{W_1 = r\lambda - 1 < 0, W_2 = r\lambda - 1 < 0}$.
Аналіз цього підпункту аналогічний підкласу A1. Так як у

цьому підпункті фірма вимикається в момент часу $\tau = \tau_1$ до Підвипадку B8.

Підвипадок B8: $\underline{W_1 = r\lambda - 1 < 0, W_2 = r\lambda - 1 = 0}$.

У цьому підпункті оптимальне керування

$$u^* = 0, \quad 0 \leqslant v^* \leqslant 1 \tag{28}$$

з рядка (3) таблиці 5.1 є сингулярні відносно v. Як і раніше у підвипадку A6, сингулярний випадок не може бути витриманий протягом кінцевого часу через наше припущення $r > \rho$. Як і в Підвипадку A6, W_2 збільшується на τ_1 від нуля і стає додатним після τ_1. Таким чином, при τ_1^+, фірма опиняється у Підвипадку B4.

Підвипадок B4: $\underline{W_1 = r\lambda - 1 < 0, W_2 = r\lambda - 1 > 0}$.

Оптимальне керування в цьому підвипадку

$$u^* = 0, \quad v^* = 1 \tag{29}$$

як показано в рядку (5) таблиці 5.1. Стан і приєднані рівняння

$$\mathring{x} = -rx, \quad x(\tau_1) = \alpha_B \tag{30}$$

з α_B, параметр, який потрібно визначити,

$$\mathring{\lambda} = \lambda(r - \rho), \quad \lambda(\tau_1) = 1/\tau. \tag{31}$$

Очевидно, що прибуток зростає експоненціально зі швидкістю r і $\lambda(\tau)$ зростає зі швидкістю $(r - \rho)$, як τ зростає з τ_1. Оскільки $\lambda(\tau_1) = 1/r$, ми маємо

$$\lambda(\tau) = \frac{e^{(r-\rho)(\tau-\tau_1)}}{r} \quad \text{для} \quad \tau \geqslant \tau_1. \tag{32}$$

У міру збільшення λ, W_1 збільшується і стає нулем в момент часу τ_2, який визначається

$$W_1(\tau_2) = cr\lambda(\tau_2) - 1 = ce^{(r-\rho)(\tau-\tau_1)} - 1 = 0, \tag{33}$$

у свою чергу, дає

$$W_1(\tau_2) = \tau_1 + [1/(r-\rho)]ln(1/c). \tag{34}$$

На τ_2^+ фірма переходить до Підвипадку B7.

Перед тим, як перейти до Підвипадку B7, зауважимо, що в Випадку B ми тепер можемо визначити T достатньо великим, при $T > \tau_2$.

Підвипадку B7: $\underline{W_1 = cr\lambda - 1 = 0,\ W_2 = r\lambda - 1 > 0}$.

У Підрвипадку B7 оптимальним керуванням є

$$0 \leqslant u^* \leqslant \frac{g-r}{rc}, \quad v^* = 1. \tag{35}$$

З рядка (6) в таблиці 5.1 ці елементи є сингулярними відносно u. Щоб зберегти цей сингулярний контроль за кінцевий період часу, ми повинні зберігати $w_1 = 0$ в інтервалі. Це означає, що ми повинні мати $\overset{\circ}{W}_1(\tau_2) = 0$, що, у свою чергу, означає $\lambda(\tau_2) = 0$. Щоб обчислити $\overset{\circ}{\lambda} = 0$, підставимо (35) в (15) і отримаємо

$$\overset{\circ}{\lambda} = -u^* - \lambda\{\rho - r(cu^* + 1)\}. \tag{36}$$

Підставляючи $\lambda(\tau_2) = 1/rc$ (оскільки $W_1(\tau_2) = 0$) в (36) і прирівнюючи праву частину до нуля, отримаємо

$$r = \rho.$$

За нашим припущенням $r > \rho$, окремий шлях не може бути підтриманий і фірма не залишиться в Підвипадку B7 на кінцевий час. Крім того, з (36) ми маємо

$$\overset{\circ}{\lambda}(\tau_2) = \frac{r-\rho}{rc} > 0, \tag{37}$$

що означає, що λ зростає, і тому W_1 зростає. При цьому у τ_2^+ фірма переходить на Підвипадок B3.

Підвипадок B3: $\underline{W_1 = r\lambda - 1 > 0}$.

Оптимальним керуванням у цьому підпункті з рядка (4) таблиці 5.1 є

$$u^* = \frac{g-r}{rc}, \quad v^* = 1. \tag{38}$$

Стан зворотного часу і приєднані рівняння є

$$\overset{\circ}{x} = -gx, \tag{39}$$

$$\overset{\circ}{\lambda} = -\frac{g-r}{rc} + \lambda(g-\rho). \tag{40}$$

Оскільки $\overset{\circ}{\lambda}(\tau_2) > 0$, то $\lambda(\tau)$ зростає. Крім того, у Випадку B ми припускаємо $g > r$. Але $r > \tau$ передбачається протягом усього розділу. Тому $\rho < g$ та другий член у правій частині (40) зростає.

Це означає, що $\overset{\circ}{\lambda}(\tau) > 0$ і $\lambda(\tau)$ продовжують збільшуватися. Тому фірма продовжує залишатися у Підвипадку B3.

Зауваження 2.5. *Зауважимо, що $\lambda(\tau)$ у випадку B зростає без обмеження, оскільки τ стає великим.*

У розв'язку для випадку B існують дві точки перемикання замість однієї, як у Випадку A. Причина двох точок перемикання стає цілком зрозумілою, коли ми інтерпретуємо значення τ_1 і τ_2. Очевидно, що τ_1 має те ж значення, що і раніше. А саме, якщо

τ_1 - час, що залишився до відрізку, то фірма не бачить інвестування долара доходу або виплати його як дивідендів. Інтуїтивно, здається, що оскільки зовнішній капітал є більш дорогим, ніж нерозподілений прибуток як джерело фінансування, інвестиції, що фінансуються за рахунок зовнішнього капіталу, вимагають більше часу, щоб бути доцільним. Таким чином,

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{r-\rho} \cdot \ln \frac{1}{c} \tag{41}$$

має бути час, необхідний для компенсації витрат на зовнішні акції.

Щоб побачити це, ми припускаємо, що фірма випускає акції долара при $t = T - \tau_2$. Хоча вартість цього випуску становить один долар, придбаний капітал - це долари, оскільки вартість розміщення (1 - c). Оскільки ми намагаємося знайти час беззбитковості для зовнішнього капіталу, очевидно, що збереження всього прибутку для інвестицій залишається прибутковим. Таким чином, від $T - \tau_2$ до $T - \tau_1$ немає дивідендів, а фірма зростає зі швидкістю r. Таким чином, вартість цієї інвестиції при $T - \tau_2$, виміряної в $T - \tau_2$ -доларах, дорівнює

$$ce^{(r-\rho)(\tau_2-\tau_1)} = ce^{\ln(1/c)} = 1. \tag{42}$$

Рівняння (42) зазначає, що один $(T - \tau_2)$ -долар зовнішнього капіталу на час $(T - \tau_2)$, який приносить c доларів капіталу в момент часу $T - \tau_2$, еквівалентний одній $(T - \tau_2)$ - доларовій інвестиції at $(T - \tau_1)$. Але фірма байдужа між інвестуванням або не інвестуванням витрачених коштів заробіток $(T - \tau_1)$. Підводячи підсумок, фірма байдужа між видачею запасу долара на $(T - \tau_2)$ або не видаючи. До того, як $(T - \tau_2)$, він платить, щоб випустити запаси на такі великі ставки, як це можливо. Після $(T - \tau_2)$, він не платить за видачу будь - якого зовнішнього капіталу взагалі.

Зауваження 2.6. *Коли T не є достатньо великим, тобто, коли $T < \tau_2$ у Випадку B, оптимальний розв'язок є такий самий, як і в зауваженні 5.2, коли $T \leqslant \tau_1$. Якщо $\tau_1 < T \leqslant \tau_2$, то оптимальним розв'язком є $u^* = 0$, $v^* = 1$ до тих пір, поки $t = T - \tau_1$, для $t > T - \tau_1$ оптимальним розв'язком є $u^* = 0$ і $v^* = 0$.*

Повністю розв'язавши випадок кінцевого інтервалу, перейдемо до випадку нескінченного інтервалу.

2.4 Розвязок задачі нескінченного інтервалу

Для випадку нескінченного інтервалу умову трансверсальності потрібно змінити на

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt}\lambda(t) = 0. \tag{43}$$

Крім того, ця умова може більше не бути необхідною. Однак це є достатньою умовою оптимальності в поєднанні з іншими умовами достатності. Звичайним методом розв'язування проблеми нескінченного інтервалує прийняття границі як $T \to \infty$ розв'язку кінцевого інтервалу, а потім доведення того, що отримане таким чином граничне рішення вирішує проблему нескінченного інтервалу. Доведення важливе, оскільки межа розв'язку може вирішувати проблему нескінченного інтервалу, а може й не вирішувати. Доведення, як правило, базується на умовах достатності, дещо модифікованих, як зазначено вище для випадку нескінченного інтервалу.

Тепер ми проаналізуємо випадок нескінченного інтервалу, дотримуючись описаної вище процедури. Почнемо з Випадку А.

Випадок А: $g \leqslant r$.

Граничне рішення в цьому випадку подається як Підвипадок А3, тобто,

$$u = 0, v = g/r, \tag{44}$$

$$\overset{\circ}{x} = gx, x(0) = x_0, \tag{45}$$

і

$$\overset{\circ}{\lambda} = -(1 - g/r) - \lambda(g - \rho), \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda(t) = 0. \tag{46}$$

Щоб довести, що рішення (44) є оптимальним, ми повинні показати, що існує рішення (46), яке з (44) і (45) задовольняє принцип максимуму (тобто залишається в Підвипадку А3).
Повертаючись до Підвипадку А3 в розділі 2.3, відзначимо, що в зворотному часовому сенсі $\lambda(tau)$асимптотично зростає у напрямку до значення

$$\bar{\lambda} = \frac{1 - g/r}{\rho - g}. \tag{47}$$

тільки у випадку $\rho > g$. В іншому випадку, тобто коли $\rho \leqslant g$, $\lambda(\tau)$ збільшується без обмежень. Таким чином, для $\rho > g$, в якому $r > \rho > g, \lambda = \bar{\lambda}$ однозначно задовольняє ((46) Крім того,

$$\bar{W_2} = \rho\bar{\lambda} - 1 = \frac{r - \rho}{\rho - g} > 0,$$

з чоговипливає, що тверда позиція залишається в Підвипадку А3, тобто діє принцип максимуму.
Тепер ми довели наступний результат: для $\rho > g$ у Випадку А,

$$u^* = 0, \quad v^* = g/r,$$

поряд з відповідною траєкторією стану

$$x^*(t) = x_0 e^{gt},$$

та суміжною траєкторією

$$\lambda(t) = \bar{\lambda} = \frac{1 - g/r}{\rho - g},$$

являє собою оптимальне рішення проблеми нескінченного інтервалу. Зверніть увагу, що припущення $\rho > g$ разом з нашим загальним припущенням про те, що $\rho < r$ дає $g < r$, так що $1 - v^* > 0$, означає, що постійна частина прибутку виплачується у вигляді дивідендів.

Зауважимо, що значення сполученої змінної $\bar{\lambda}$ в цьому випадку є константою і її форма нагадує класичну формулу Гордона; Див. Гордон (1962). В рамках теорії управління величина $\bar{\lambda}$ являє собою граничну вартість на додаткову одиницю прибутку. Очевидно, що збільшення прибутку на одиницю означатиме збільшення $1 - v^*$ або $1 - r/g$ дивідендів на одиницю. Це, звичайно, має бути капіталізовано за ставкою, що дорівнює ставці дисконтування за вирахуванням темпу зростання (тобто $\rho^- g$), що в точності відповідає формулі Гордона.
Для $\rho \leqslant g$ конструкція зворотного часу в Підвипадку A3 має на увазі, що $\lambda(\tau)$ збільшується без прив'язки в міру збільшення τ .Таким чином, ми не можемо знайти жодного значення λ, яке задовольняє (5.75). Роздуми показують, що для $\rho \leqslant g$ цільову функцію можна зробити нескінченною. Наприклад, будь-яка стратегія контролю, коли рівень $q, \rho \leqslant q \leqslant g$ зростає за темпами в поєднанні з частковою виплатою дивідендів, тобто постійною v такою, що $0 < v < 1$ дає нескінченне значення для цільової

функції. Тому з $u^* = 0, v^* = q/r, 1$ ми маємо

$$J = \int_0^\infty e^{-\rho t}(1 - v - u)xdt = \int_0^\infty e^{-\rho t}(1 - v)x_0e^{qt} = \infty.$$

Оскільки існує безліч стратегій, які надають нескінченну цінність об'єктивної функції, Вибір між ними може бути зроблений на суб'єктивних підставах.Ми коротко обговоримо лише постійні (у часі) оптимальні стратегії. Якщо $g < r$, то швидкість зростання q може бути обрана в замкнутому інтервалі $[\rho, g]$; якщо $g = r$, тоді q може бути обрана в напіввідкритому інтервалі $[\rho, r)$.У будь-якому випадку вибір низького темпу зростання (тобто високої пропорційної виплати дивідендів) означатиме вищу ставку дивідендів (у доларах за одиницю часу) на ранніх термінах, але нижчу ставку дивідендів у подальшому часі через повільніші темпи зростання. Аналогічним чином вибір високих темпів зростання означає протилежне щодо виплат дивідендів у доларах за обмежений час.

На закінчення зауважимо, що для $\rho \leqslant g$ у Випадку А граничне рішення кінцевого випадку є оптимальним рішенням для проблеми нескінченного інтервалу в тому сенсі, що цільова функція стає нескінченною. Однак ситуація у Випадку В не буде такою.

Випадок В: $g \leqslant r$.

Межа кінцевого інтервалу оптимального рішення полягає в тому, щоб рости з максимально допустимою швидкістю зростання

$$u = \frac{g - r}{rc}, \quad v = 1$$

на всьому шляху. Оскільки τ_1 зникає в межі, акціонери ніколи не отримуватимуть дивіденди. Тверда позиція перетворилася на нескінченне джерело інвестицій. Насправді граничне рішення є песимістичним, оскільки значення цільової функції, пов'язаної з ним, дорівнює нулю. З точки зору теорії оптимального управління це можна пояснити, як і раніше, у Випадку A, коли $\rho \leqslant g$. У Випадку B ми маємо $g > r$ так, що (оскільки $r > \rho$ протягом всієї глави) ми маємо $\rho < g$. Для цього, $\lambda(\tau)$ збільшується без обмежень у міру збільшення τ і, отже, (42) не має рішення.

Як і у Випадку A з $\rho < g$, будь-яка стратегія контролю, коли прибуток $q \in [\rho, g]$ зростає зі швидкістю в поєднанні з константою v, $0 < v < 1$, має нескінченне значення для цільової функції.

Підсумовуючи, зазначимо, що єдиним невиродженим випадком у проблемі нескінченного інтервалу є $\rho > g$. У цьому випадку, який має місце лише у Випадку A, стратегія максимально допустимого зростання є оптимальною. З іншого боку коли $\rho \leqslant g$, у Випадку A чи B проблема нескінченного інтервалу має неоднозначну стратегію з нескінченними значеннями для цільової функції.

Перш ніж вирішувати числовий приклад, ми зробимо цікаве зауваження щодо Випадку B.

Зауваження 2.7 Нехай (u_T^*, v_T^*) позначає оптимальне управління для задачі кінцевого інтервалу у Випадку B. Нехай (u_∞^*, v_∞^*) позначає будь-яке оптимальне управління для задачі нескінченного інтервалу у Випадку B. Ми вже знаємо що $J = (u_\infty^*, v_\infty^*) = \infty$. Визначте нескінченний інтервал управління (u_∞, v_∞) розширивши (u_T^*, v_T^*) наступним чином:

$$(u_\infty, v_\infty) = \lim_{T\to\infty}(u_T^*, v_T^*).$$

Тепер зауважимо, що для нашої моделі у Випадку В ми маємо

$$\lim_{T\to\infty} J(u_T^*, v_T^*) = \infty, \quad J(u_\infty, v_\infty) = 0. \tag{48}$$

Очевидно, що (u_∞, v_∞) не оптимальне управління для задачі нескінченного інтервалу. Оскільки два члени в (48) не рівні, ми можемо сказати в технічному плані, що $J(u, v)$ розглядається як відображення, не є закритим відображенням. Якщо ми введемо значення порятунку $Bx(T), B > 0$ для задачі кінцевого інтервалу, то нова цільова функція,

$$J(u,v) = \begin{cases} \int\limits_0^T e^{-\rho t}(1-u-v)xdt + Bx(T)e^{-\rho T}, \text{якщо} \quad T < \infty, \\ \int\limits_0^\infty e^{-\rho t}(1-u-v)xdt + \lim_{T\to\infty}\{Bx(T)e^{-\rho T}\}, \text{якщо} \quad T = \infty \end{cases}$$

є замкнутим відображенням в тому сенсі, що

$$\lim_{T\to\infty} J(u_T^*, v_T^*) = \infty \quad \text{і} \quad J(u_\infty, v_\infty) = \infty$$

для модифікованої моделі.

Завдання 1 Тепер ми будемо призначати числа різним параметрам в задачі оптимального фінансування, щоб обчислити оптимальне рішення. Тоді

$$x = 1000/\text{місяців}, \quad T = 60 \quad \text{місяців},$$

$$r = 0.15, \quad \rho = 0.10, \quad g = 0.05, \quad c = 0.98.$$

Розв'язок. Оскільки $g \leqslant r$ задача належитьдо Випадку А. Ми обчислюємо

$$\tau_1 = \frac{1}{\rho} ln[r/(r-\rho)] = 10ln3 \approx 11 \quad \text{місяців}$$

Оптимальними засобами управління для цього завдання є

$$u^* = 0, v^* = g/r = 1/3, \quad t \in [0, 49),$$

$$u^* = 0, v^* = 0, \quad t \in [49, 60]$$

і оптимальною траєкторією стану є

$$x(t) = \begin{cases} 1000e^{0.05t}, & t \in [0, 49), \\ 1000e^{2.45} & t \in [49, 60]. \end{cases}$$

Значення цільової функції дорівнює

$$J^* = \int_0^{49} e^{-0.1t}(1 - 1/3)(1000)e^{0.05t}dt$$

$$+ \int_{49}^{60} 1000e^{2.45} * e^{-0.1t}dt = 12,578.75$$

Зауважимо, що задача нескінченного інтервалу в цьому випадку чітко визначена, оскільки $g < \rho$ та $g < r$. Оптимальними засобами управління є

$$u^* = 0, \quad v^* = g/r = 1/3,$$

і

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-0.1t}(2/3)(1000)e^{0.05t}dt = 2000/0.15 = 13,333\frac{1}{3}.$$

3 Висновок

Отже, основна мета роботи є керування інвестиціями. У процесі її розв'язання на альтернативній основі оцінюють і обирають такий інвестиційний проект, який з погляду співвідношення вигоди та ризику забезпечить оптимальний результат.

Принцип максимуму Л.С. Понтрягіна є певного виду необхідна умова оптимальності для задачі оптимального керування. У його формулюванні беруть участь функції спеціального виду - Гамильтониан і спряжені змінні. Це необхідна умова приймає той чи інший вид залежно від різновиду завдання оптимального керування. Існує певна схема застосування принципу максимуму. Однак в загальному випадку використання принципу максимуму вимагає високої математичної кваліфікації і нерідко - винахідливості.

Таким чином, у своїй роботі, мені вдалося ознайомитися з задачею оптимального керування інвестиціями і основними методами її розв'язування.

Література

[1] Suresh P. Sethi *Optimal control theory, Applications to Management Science and Economics* Suresh P. Sethi, Gerald L. Thompson – Springer, 2000. – 119 с.

[2] Сузи Р.А.*Язык программированивание Python,2–е издание.-Национальный Открытый Университет,* 2016.–351 с.

[3] В.Д. Ногин. *Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие.* – СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008 г., 92 с.