

Львівський національний університет імені Івана Франка  
Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної  
економіки, економетрії,  
фінансової та страхової  
математики

*Магістерська робота*

на тему:

**”Задача керування поширенням епідемії та її чисельна  
реалізація.”**

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с

спеціальності 111 - *математика*,

спеціалізації *математична економіка та економетрика*

**Смалюх Люба-Марія Ярославівна**

Науковий керівник:

доц. Флюд В.М.

*Роботу рекомендовано до захисту  
на засіданні кафедри математичної  
економіки, економетрії, фінансової та  
страхової математики  
протокол від 04 грудня 2020 року №4*

*В.о. завідувач кафедрою  
проф. Оліскевич М.О.*

Львів - 2020

## Зміст

<b>1 Вступ</b>	<b>3</b>
<b>2 Постановка задачі керування</b>	<b>7</b>
<b>3 Теоретичні обґрунтування</b>	<b>9</b>
<b>4 Чисельна реалізація алгоритму</b>	<b>19</b>
<b>5 Висновок</b>	<b>30</b>
<b>6 Використана література</b>	<b>31</b>

# 1 Вступ

Розростання міст та швидка урбанізація населення створюють сприятливі умови для появи та швидкого поширення різноманітних епідемій, зокрема вірусних. Історія людства свідчить, що епідемії хвороб приносять не тільки людські нещастя, але й призводять до значних економічних втрат. Сумарні втрати за масштабних епідеміях іноді сягають десятикратних розмірів за той обсяг витрат, який необхідний для ефективної профілактики поширенню інфекційних захворювань. Відтак, виходячи з того, що проблему краще попередити, ніж боротися з її наслідками, державі необхідно проводити стратегію профілактичних засобів, до того ж бажано раціонально витрачаючи державний бюджет. Вакцинопрофілактика є одним з найважливіших державних заходів захисту населення від інфекційних захворювань. Паралельно з вакцинацією застосовують карантин. Для підвищення ефективності цього профілактичного заходу застосовують тестування здорових ззовні осіб на наявність інфекції. Окрім позитивних наслідків впровадження профілактичних заходів, а саме підвищення рівня суспільного здоров'я, зниження захворюваності і смертності, програми профілактичних щеплень та карантину дозволяють досягти значного економічного ефекту: економії ресурсів охорони здоров'я, росту продуктивності праці через відсутність потреби у додатковому догляді, росту продуктивності праці серед вакцинованих осіб. Проте розробка моделі, яка б зв'язувала процес поширення епідемій в умовах протидії та економічними аспектами, залишається актуальною. У раніше проведених дослідженнях були зазначені, проте невирішені такі проблеми, як: створення інструменту для моделювання та оцінки впливу загрози епідемії на економіку; моделювання ринкової економіки як

фактора, що впливає на характер плину епідемії; прогнозування витрат у грошовому відображенні, які несе населення та держава від загрози епідемії.

У світі давно розробляються та впроваджуються системи моделювання та прогнозування розвитку епідемій залежно від набору початкових умов та засобів стримування. Ці засоби використовують для розроблення ефективних методів стримування поширення вірусного захворювання та зупинки епідемії.

В Україні немає достатньо потужних систем, адаптованих до специфічних умов нашої країни та факторів, що впливають на поширення захворювання. Це призводить до значних труднощів у боротьбі з епідеміями, затрати величезних ресурсів на засоби, що є неефективними. В результаті практично кожна епідемія в Україні набуває значних масштабів. Створення системи прогнозування розвитку епідемій, адаптованої до умов України, значно спрощує вибір засобів боротьби з захворюванням та дає змогу уникнути значного поширення епідемії у разі своєчасного виявлення захворювання та оперативного введення необхідних запобіжних заходів. Тому розроблення такої системи є дуже важливим для української системи охорони здоров'я.

У світі вже давно розроблялись та успішно впроваджувались системи прогнозування та моделювання епідемій. На жаль, Україна відстає в інформатизації цієї важливої галузі науки. Комп'ютерний аналіз дає змогу обробляти в тисячі разів більші набори даних, враховувати сотні факторів впливу, зокрема і специфічних для заданого регіону. Тільки такий комплексний аналіз минулих епідемій дає можливість адекватно прогнозувати наступні. Розглянувши статистику захворюваності на найпоширеніший в Україні вірус – грип, можна зрозуміти, наскільки часто щорічні прогнози розходяться з дійсністю. Основним завданням

прогнозування розвитку епідемії є не оцінка кількості людей, що захворіють, та ступенів складності захворювання, а розроблення ефективних методів стримування та зупинки епідемії. Швидкість поширення вірусних захворювань не дає змоги експериментувати зі засобами стримування, а вимагає швидкої ефективної стратегії боротьби з епідемією вже в перші дні поширення. Це можливо лише за наявності адекватної комп'ютерної моделі розвитку епідемії в умовах певної країни та можливості швидкого вивчення різноманітних засобів стримування та профілактики на 157 поширення вірусу. Цілком можливо, що в деяких випадках епідемію можна зупинити без повної ізоляції міст та дезінфікації вулиць, а просто підвищенням стійкості організму людей до вірусу в зоні навколо первинного осередку. Це зменшує коефіцієнт захворюваності і за декілька днів епідемія стихає. Щоправда, далеко не кожен вірус можна зупинити таким методом. Саме для визначення необхідних засобів боротьби і необхідні системи комп'ютерного моделювання розвитку епідемій. Сьогодні в Україні немає достатньо потужних засобів моделювання, пристосованих до особливостей нашого клімату, тваринного та рослинного світу, ґрунтів та інших факторів, що можуть впливати на поширення епідемії, а засоби впливу міжнародних організацій на спеціалізовані програми урядів інших країн часто незастосовні або ж дають велику похибку прогнозування в умовах України. Тому розроблення української системи прогнозування розвитку вірусних епідемій є необхідним і дуже перспективним.

Ми розглянемо математичну модель, що відповідає класу епідемій. Контролювати епідемію зазвичай важко. Для здійснення політики контролю, запропонованим математичним аналізом, у реальному світі ніколи не буває простим. Однак, можна запропонувати державним органам пропозиції щодо впливу конкретної

політики управління, і в цьому сенсі аналіз та моделювання за допомогою математичних моделей, стає потужним інструментом.

## 2 Постановка задачі керування

Важливим класом епідемій є тип людини та навколишнє середовище; для таких систем навколишнє середовище підтримує епідемію позитивним зворотним зв'язком інфекційного збудника, який виробляється інфекційним населенням людини. Навколишнє середовище представлено з обмеженою і відкритою областю  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  з досить гладкою межею  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , де  $\Gamma_1$  - верхня і  $\Gamma_2$  - нижні межі.  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  мають розділені внутрішні точки. (Див.Рис. 1)

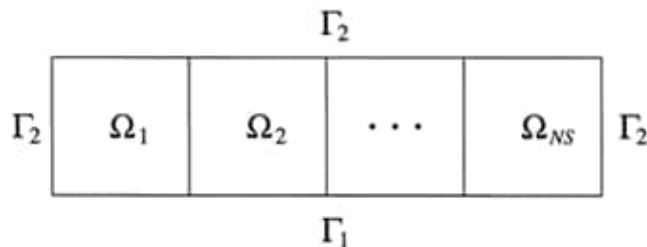


Рис. 1

Нехай  $u_1(x, t)$  - просторова щільність збудника інфекції в момент часу  $t \in [0; T]$  і  $x \in \Omega$  - місцезнаходження;  $u_2(x, t)$  - кількість інфікованих осіб. Реалістична модель повинна враховувати той факт, що стічні води, що виробляються людською популяцією, відправляються не очищеними у море, а звідти збудник інфекції, повертається до середовища проживання через морський берег крізь деякий дифузійний механізм, пов'язаний із звичками місцевого населення. Відповідно стан системи є такий:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t) - \Delta u_1(t, x) + a_{11}u_1(t, x) = 0, \quad Q = (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t) + a_{22}u_2(t, x) - g(u_1(t, x)) = 0 \quad \text{в } Q \quad (2)$$

$$u_1(0, x) = u_1^0(x), \quad u_2(0, x) = u_2^0(x) \quad \text{для } x \in \Omega, \quad (3)$$

$$\frac{u_1}{\partial \nu}(t, \sigma) + \alpha u_1(t, \sigma) = K * u_2 = \int_{\Omega} K(t, x, \sigma) u_2(t, x) dx, \quad (4)$$

$$\text{для } (t, \sigma) \in \Sigma_1 = (0, T) \times \Gamma_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(t, \sigma) = 0, \quad \text{для } (t, \sigma) \in \Sigma_2 = (0, T) \times \Gamma_2. \quad (5)$$

Рівняння (1) описує дифузію збудника інфекції у середовищі проживання;  $a_{11}$  і  $a_{11}^{-1}$  є середнім тривалістю життям збудника у навкошньому середовищі. Рівняння (2) описує еволюцію зображення людини;  $a_{22} > 0$  і  $a_{22}^{-1}$  є середнім інфекційним періодом зараженої людини;  $g$  - сила зараження завдяки збудника. Форма функції  $g$  сильно залежить від виду епідемії. Початкові умови задають рівняння (3). Зворотним зв'язком на межі  $\Gamma_1$  подається за зразком лінійного інтегрального оператора (рівняння (4)); це враховує перенесення збудника інфекції, що розвивається в різних частинах середовища проживання  $\Omega$  до берегів.

Рівняння (5) стверджує, що межа  $\Gamma_2$  є повністю ізольована.

$$K(t, x, \sigma) = \sum_{i=1}^M w_i(t) K_i(x, \sigma) \quad \text{для } t \in [0; T], x \in \Omega, \sigma \in \Gamma_1, \quad (6)$$

де  $K_i \in L^\infty(\Omega \times \Gamma_1)$ ,  $w_i \in L^\infty(0, T)$  для  $i = 1, 2, \dots, M$ .

Встановимо  $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_M(t))$ ; тут  $w(t)$  позначає витрати на очищення стічних вод в підобласті і буде представляти собою управління системою.

Метою оптимального контрольного є зменшення епідемії, описаної рівнянням. Рівняння (1) – (5) зменшують граничний зворотній зв'язок на березі, тобто за рахунок зменшення міцності ядра  $K$ . Це відповідає впровадженню санітарної програми, яка очищає стічні води перед відправою її в море. Її вартість повинна порівнюватися з вартістю самої епідемії.

Отже, розглянемо наступну задачу оптимального керування:  
 (P) Мінімізувати:

$$\Phi(w) = \int_0^T \int_{\Omega} f(u_2(t, x)) dx dt + \int_0^T h(w(t)) dt + \int_{\Omega} l(u_2(T, x)) dx$$

для усіх  $(u_1, u_2, w)$  підпорядковані станом ситеми (1)–(5). Наступні припущення діятимуть у цій частині:

(H1)  $f, g, l \in C^1(\mathbb{R}); f, g \geq 0$  і

$$|g(r)| \leq c_1|r| + c_2 \quad \text{для кожного } r \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

де  $c_1, c_2 > 0$  - константи.

(H2)  $h : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  - опукла, існує обмежена замкнута підмножина  $Q \subset \mathbb{R}^{NS}$  така як  $h(w) = \infty$  назовні  $Q$ .

Для практичної точки зору важливий конкретний випадок на-дається так:

$$h(w) = \sum_{i=1}^M h_i(w_i), \quad (8)$$

де

$$h_i(r) = \begin{cases} \lambda/r^2, & \text{якщо } 0 < r \leq a, \\ +\infty, & \text{у інших випадках} \end{cases} \quad (9)$$

### 3 Теоретичні обґрунтування

Ми покажемо існування та єдиність розв'язку для стану систе-ми.

**Твердження 1.1** Якщо  $K \in L^\infty((0, T) \times \Omega \times \Gamma_1)$  і  $u_1^0, u_2^0 \in L^\infty(\Omega)$ , тоді система (1) – (5) має єдиний розв'зок  $(u_1, u_2)$ , який зодовольняє такі умови:

$$u_1 \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$$

,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$$

$$u_2 \in C^1(0, T; L^\infty(\Omega))$$

.

Якщо, крім того,  $u_1^0 \in H^2(\Omega)$  і  $w$  - є функцією Ліпшіца, тоді  $\frac{\partial u_1}{\partial t} \in L^2(Q)$ .

*Доведення:* Згідно теореми про існування, для кожного  $v \in L^2(Q)$  крайові умови задачі

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 + a_{11}u_1 = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$u_1(0, x) = u_1^0(x) \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \alpha u_1 = K * v, \quad \text{в } \Sigma_1$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{в } \Sigma$$

має єдиний розв'язок  $u_1 = P_v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  з  $\frac{\partial u_1}{\partial t} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ .

Систему (1) – (5) можна переписати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{22}u_2 - g(Pu_2) = 0 & \text{в } Q, \\ u_2(0, x) = u_2^0(x) & \text{для } x \in \Omega. \end{cases} \quad (10)$$

Теорема Банаха про фіксовану точку і аргумент продовження, що включає припущення (H1), передбачає, що (10) має єдиний розв'язок  $u_2 \in C^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ .

Припустимо, що  $u_1^0 \in H^2(\Omega)$  і функція  $w$  - є функцією Ліпшіца, такою що,  $|w'(t)| \leq C, t \in [0, T]$ . Для довільного  $\tau \in [0, T - t)$ ,

встановимо  $v_\tau(t) = u_1(t + \tau) - u_1(t)$ . Потім ми отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\tau(t) - \Delta v_\tau(t) + a_{11} v_\tau(t) = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$v_\tau(0, x) = u_1(\tau, x) - u_1^0(x) \quad \text{в } \Omega,$$

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial \nu} + \alpha v_\tau = \int_{\Omega} (K(t + \tau, x, \sigma) u_2(t + \tau, x) - K(t, x, \sigma) u_2(t, x)) dx$$

в  $\Gamma_1$ ,

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial \nu} = 0 \quad \text{в } \Sigma_2$$

Помножимо перше рівняння на  $v_\tau(t, x)$ , потім проінтегруємо на проміжку  $(0, s) \times \Omega$  і використавши формулу Гріна, отримаємо:

$$\|v_\tau(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad s \in [0, T].$$

Тому  $u_1 : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$  є абсолютно неперервна, і  $\frac{\partial u_1}{\partial t} \in L^2(Q)$  як дано.

Що стосується задачі (P)

**Твердження 1.2** Задача (P) визначає щонайменше один розв'язок  $(u_1^*, u_2^*, w^*)$ .

*Доведення:* Доведення є стандартним, тому ми лише опишемо структуру доведення. Нехай  $d = \inf(P)$ , і припустимо, що послідовність  $(u_1^n, u_2^n, w^n)$  є така, де кожне  $(u_1^n, u_2^n, w^n)$  задовільняє умови (1) – (5) і

$$d \leq \int_Q f(u_2^n) dx dt + \int_0^T h(w^n) dt + \int_{\Omega} l(u_2^n(T, x)) dx \leq d + n^{-1}. \quad (11)$$

Згідно припущення (H2),  $\{w^n\}$  є обмежена в  $L^\infty(0, T, \mathbb{R}^N)$  і також є підпослідовністю, тому знову перепозначимо  $\{w^n\}$

$$w^n \rightarrow w^* \quad \text{слабка в } L^\infty(0, T, \mathbb{R}^N).$$

З одної сторони сторони,  $u_1^n$  є обмежена в  $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  і  $\{\frac{\partial u_1^n}{\partial t}\}$  є обмежена в  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ .  
 $u_1^n \rightarrow u_1^*$  слабо прямує в  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  і сильно прямує в  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  
 $\frac{\partial u_1^n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u_1^*}{\partial t}$  слабо прямує в  $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ .

$$g(u_1^n) \rightarrow g(u_1^*) \quad \text{прямує строго в } L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u_2^n \rightarrow u_2^* \quad \text{прямує строго в } C(0, T; L^2(\Omega)),$$

$K_n * u_2^n \rightarrow K^* * u_2^*$  прямує строго в  $C(0, T; L^2(\Omega))$ ,  
де

$$K_n = \sum_{i=1}^M K_i w_i^*, \quad K^* = \sum_{i=1}^M K_i w_i^*$$

Тоді ми можемо перейти до межі в (11), щоб побачити, що  $(u_1^*, u_2^*, w^*)$  є оптимальним.

Ми переходимо до

**Необхідні умови для оптимальності.** Основний результат дає  
**Теорема 3** Нехай  $u_1^*, u_2^*, w^*$  буде оптимальним для задачі (P). Тоді існує  $p_1 \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  з  $\frac{\partial p_1}{\partial t} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$  і  $p_2 \in C(0, T; L^2(\Omega))$  з  $\frac{\partial p_2}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$  такі, що

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \Delta p_1 - a_{11}p_1 + g'(u_1^*)p_2 = 0 & \text{в } Q \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} - a_{11}p_2 + \int_{\Gamma_1} K^*(t, x, \sigma)p_1(t, \sigma)d\sigma = f'(u_2^*) & \text{в } Q, \\ p_1(T, x) = 0, \quad p_2(T, x) = -l'(u_2^*(T, x)) & \text{для } x \in \Omega, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \nu} + \alpha p_1 = 0 & \text{в } \Sigma_1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \nu} = 0 & \text{в } \Sigma_2, \end{cases} \quad (12)$$

$$w^*(t) = (\partial h)^{-1} \left( \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i(x, \sigma)p_1(t, \sigma)u_2^*(t, x)dx d\sigma \right)_{i=1, M} \quad (13)$$

У спеціальному випадку, коли  $h$  задано рівністю (8) – (9), маємо

$$w_i^*(t) = \begin{cases} -\left( \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i(x, \sigma)p_1(t, \sigma)u_2^*(t, x)dx d\sigma \right)^{\frac{-1}{3}} & (2\lambda)^{\frac{1}{3}}, \\ \text{якщо } \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i p_1 u_2^* dx d\sigma < -2\lambda/a^3, \\ a, & \text{якщо } \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i p_1 u_2^* dx d\sigma > -2\lambda/a^3 \end{cases} \quad (14)$$

для  $i = 1, 2, \dots, M$ .

*Доведення:* Нехай  $z_i = (\partial u_1^*/\partial w)(w^*, w)$  для кожного  $i = 1, 2$ . Опишемо систему (1) – (5) для  $(u_1^* + \lambda z_1, u_2^* + \lambda z_2, w^* + \lambda w)$  і для  $(u_1^*, u_2^*, w^*)$ , і, відніманням, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial t} - \Delta z_1 + a_{11}z_1 = 0 & \text{в } Q \\ \frac{\partial z_2}{\partial t} + a_{22}z_2 - g'(u_1^*)z_1 = 0 & \text{в } Q \\ z_1(0, x) = 0, \quad z_2(0, x) = 0, & \text{в } Q \\ \frac{\partial z_1}{\partial \nu} + \alpha z_1 = K^* * z_2 + K * u_2^* & \text{в } \Sigma_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \nu} = 0 & \text{в } \Sigma_2 \end{cases} \quad (15)$$

Нехай

$$h^0(w^*, w) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{h(w^* + \lambda w) - h(w^*)}{\lambda}.$$

З того, що  $(u_1^*, u_2^*, w^*)$  є оптимальний, ми отримаємо

$$\int_Q \frac{f(u_2^* + \lambda z_2) - f(u_2^*)}{\lambda} dx dt + \int_0^T \frac{h(w^* + \lambda w) - h(w^*)}{\lambda} dt +$$

$$\int_{\Omega} \frac{l(u_2^* + \lambda z_2) - l(u_2^*)}{\lambda} dx \geq 0, \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathbb{R}^M)$$

і коли  $\lambda \rightarrow 0$  ми отримаємо

$$\int_Q f'(u_2^*) z_2 dx dt + \int_0^T h^0(w^*, w) dt + \quad (16)$$

$$+ \int_{\Omega} l'(u_2^*(T, x)) z_2(T, x) dx \geq 0, \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathbb{R}^M).$$

Нехай  $(p_1, p_2)$  - розв'язок системи (12). Помножимо друге рівняння в (12) на  $z_2$  і проінтегруємо в  $Q$ :

$$\int_Q f'(u_2^*) z_2 dx dt = \int_Q \left( \frac{\partial p_2}{\partial t} - a_{22} p_2 \right) z_2 dx dt + \int_{Q \times \Gamma_1} K * p_1 z_2 dx d\sigma dt.$$

Перший інтеграл у правій частині інтегрується частинами по  $t$  і використовуючи дає друге рівняння в (15) отримаємо:

$$\int_Q f'(u_2^*) z_2 dx dt = \int_{\Omega} p_2(T, x) z_2(T, x) dx - \int_Q g'(u_1^*) p_2 z_1 dx dt +$$

$$+ \int_{Q \times \Gamma_1} K^* p_1 z_2 dx d\sigma dt.$$

Далі обчислюємо другий інтеграл у правій частині, використовуючи перше рівняння в (12), інтегруємо частинами по  $t$ , перше

рівняння в (15) та використовуємо формулу Гріна . Ми отримуємо

$$- \int_Q g'(u_1^*) p_2 z_1 dx dt = - \int_{Q \times \Gamma_1} (K u_2^* p_1 + K^* p_1 z_2) dx d\sigma dt.$$

Підставивши це в попередню рівність, ми виявимо, що

$$\int_Q f'(u_2^*) dx dt = \int_{\Omega} p_2(T, x) z_2(T, x) dx - \int_{Q \times \Gamma_1} K u_2^* p_1 dx d\sigma dt,$$

що в поєднанні з (16) призводить до

$$\int_Q h^0(w^*, w) dt \geq \int_{Q \times \Gamma_1} K u_2^* p_1 dx d\sigma dt, \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathbb{R}^M).$$

Еквівалентно

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_0^T w_i(t) \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i(x, \sigma) u_2^*(t, x) p_1(t, \sigma) dx d\sigma dt &\leq \\ &\leq \int_0^T h^0(w^*(t), w(t)) dt, \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathbb{R}^M), \end{aligned}$$

і це дає

$$\left( \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i(x, \sigma) u_2^*(t, x) p_1(t, \sigma) dx d\sigma dt \right)_{i=1, M} \in \partial h(w^*(t)) \quad t \in [0, T]$$

як стверджувалося.

Прогнозований градієнтний метод може бути наближений до оптимального контролю.

### Алгоритм 1

S0: Почнемо з  $w^{(1)}$  довільне в  $L^\infty(0, T, \mathbb{R}^M)$ ;  $j := 1$ .

S1: Обчислимо  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})$  з системи (1) – (5)

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t} - \Delta u_1^{(j)} + a_{11} u_1^{(j)} = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$\frac{u_2^{(j)}}{\partial t} + a_{22}u_2^j - g(u_1^{(j)}) = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$u_1^{(j)}(0, x) = u_1^0(x), \quad u_2^{(j)}(0, x) = u_2^0(x) \quad \text{для } x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial \nu} + \alpha u_1^{(j)} = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} K_i(x, \sigma) w_i^{(j)}(t) u_2^{(j)}(t, x) dx \quad \text{в } \sum_1$$

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{в } \sum_2$$

S2: Обчислимо  $(p_1^{(j)}, p_2^{(j)})$  з приєдненої системи (12) у якому  $(u_1^*, u_2^*, u_3^*)$  замінюється на  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, w^{(j)})$ ,

$$\frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial t} + \Delta p_1^{(j)} - a_{11}p_1^{(j)} + g'(u_1^{(j)})p_2^{(j)} = 0 \quad \text{в } Q,$$

$$\frac{\partial p_2^{(j)}}{\partial t} - a_{22}p_2^{(j)} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} w_i^{(j)} K_i(x, \sigma) p_1^{(j)}(t, \sigma) d\sigma = f'(u_2^j) \quad \text{в } Q,$$

$$p_1^{(j)}(T, x) = 0, \quad p_2^{(j)}(T, x) = -l(u_2^{(j)}(T, x)) \quad \text{для } x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial \nu} + \alpha p_1^{(j)} = 0 \quad \text{в} \quad \sum_1, \quad \frac{\partial p_1^{(j)}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{в} \quad \sum_2.$$

S3: Обчислимо  $\bar{w}^{(j)}$  з рівняння (13) у якому  $u_2^*$  замінимо  $u_2^{(j)}$ .

$$\bar{w}^{(j)} = (\partial h)^{-1} \left( \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_i(x, \sigma) p_1^{(j)}(t, \sigma) u_2^{(j)}(t, x) dx d\sigma \right)_{i=1, M}$$

S4: Нехай  $w^{(j+1)} = \lambda_j \bar{w}^{(j)} + (1 - \lambda_j) w^{(j)}$  буде таким, що

$$\Phi(w^{(j+1)}) = \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \Phi(\lambda \bar{w}^{(j)} + (1 - \lambda) w^{(j)}),$$

де  $\Phi$  - функціонал витрат задачі P.

S5: Нехай  $\varepsilon > 0$  буде визначенним.

$$\text{Якщо } \| w^{(j+1)} - w^{(j)} \| < \varepsilon$$

потім зупиняємося і ще встановлюємо

$$j := j + 1;$$

і йдемо до S1.

### Алгоритм 1

S0: Почнемо з  $w^{(1)}$  довільне з  $L^\infty(0, T, \mathbb{R}^M)$ ; встановимо  $j := 1$ .

S1: Обчислимо  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})$ .

S2: Обчислимо  $(p_1^{(j)}, p_2^{(j)})$ .

S3: Обчислимо

$$\nabla \Phi(w^{(j)}) = q^{(j)} - \left( \int_{\Omega \times \Gamma_1} K_1 u_2^{(j)} p_1^{(j)} dx d\sigma \right)_{i=\overline{1, M}},$$

де  $q^{(j)}$  позначає елемент  $\partial h(w^{(j)})$ .

Якщо  $\| \nabla \Phi(w^{(j)}) \| < \varepsilon$

потім зупиняємося

ще нехай  $w^{(j+1)} = w^{(j)} - \rho_j \nabla \Phi(w^{(j)})$  бути таким, що

$$\Phi(w^{(j+1)}) = \min_{\rho > 0} \Phi(w^{(j)} - \rho \nabla \Phi(w^{(j)}));$$

встановимо  $j := j + 1$ ; і переходимо до S1.

## 4 Чисельна реалізація алгоритму

Розглянемо конкретний випадок, в якому

$$K(x, \sigma, t) = w(t)K_0(x, \sigma). \quad (17)$$

Для чисельного моделювання епідемічної системи ми вважаємо, що  $w$  - час незалежний.

$$K_0(x, \sigma) = \sum_{i=1}^M a_i \bar{\chi}_i(x) \chi_i(\sigma). \quad (18)$$

Пояснимо цю формулу. Припустимо, що  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ , і введемо сітки з рівновіддаленими вузлами:

$$\begin{aligned} a &= x_1 < x_2 < \dots < x_{M+1} = b, \\ c &= y_1 < y_2 < \dots < y_{N+1} = d. \end{aligned}$$

Підобласть є точно  $\Omega_i = (x_i, x_{i+1}) \times [c, d]$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Крім того,  $\chi_i$  - характеристична функція на інтервалі  $(x_i, x_{i+1})$ ,  $\bar{\chi}_i$  - характеристична функція на  $\Omega_i$  і  $a_i$  є вагами присвоєні підобластю  $\Omega_i$ . Таким чином ми відправляємо на граничний інтервал  $[x_i, x_{i+1}] \subset \Gamma_1$  лише ефект інфекційної щільності  $u_2(t, x)$ . У рівнянні (2) ми вибрали для сили зараження  $g$  наступну формулу:

$$g(u_1) = \beta \frac{u_1}{\gamma u_1 + 1},$$

де  $\beta$  - пороговий параметр. Це означає, що ми можемо збільшити його вартість починаючи з нуля, щоб показати, що при малих значеннях  $\beta$  епідемія має тенденцію до зникнення, тоді як для досить великих значень  $\beta$  епідемія має тенденцію до нетривіального стійкого (ендемічного) стану.

### Алгоритм 3 (Реалізація алгоритму)

S0: Нехай  $w^{(1)}$  буде довільно обраним в  $L^\infty(0, T; \mathbb{R})$

Встановимо  $j:=1$ ;

S1: Обчислимо  $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)})$  розв'язанням

$$\begin{cases} \partial u_1^{(j)} / \partial t - \Delta u_1^{(j)} + a_{11} u_1^{(j)} = 0 & \text{в } Q, \\ \partial u_2^{(j)} / \partial t + a_{22} u_2^{(j)} - g(u_1^{(j)}) = 0 & \text{в } Q, \\ u_1^{(j)}(0, x) = u_1^0(x), \quad u_2^{(j)}(0, x) = u_2^0(x) & \text{для } x \in \Omega \\ \partial u_1^{(j)} / \partial \nu + \alpha u_1^{(j)} = K * u_2^{(j)} & \text{на } \Sigma_1 \\ \partial u_1^{(j)} / \partial \nu = 0 & \text{на } \Sigma_2. \end{cases} \quad (19)$$

S2: Обчислимо  $(p_1^{(j)}, p_2^{(j)})$  розв'язанням

$$\begin{cases} \partial p_1^{(j)} / \partial t + \Delta p_1^{(j)} - a_{11} p_1^{(j)} + g'(u_1^{(j)}) p_2^{(j)} = 0 & \text{в } Q, \\ \partial p_2^{(j)} / \partial t - a_{22} p_2^{(j)} + w^{(j)} \int_{\Gamma_1} K_0(x, \sigma) p_1^{(j)}(t, \sigma) d\sigma = f'(u_2^{(j)}) & \text{в } Q \\ p_1^{(j)}(T, x) = 0, p_2^{(j)}(T, x) = -l'(u_2^{(j)}(T, x)) & \text{для } x \in \Omega \\ \partial p_1^{(j)} / \partial \nu + \alpha p_1^{(j)} = 0 & \text{на } \Sigma_1, \\ \partial p_1^{(j)} / \partial \nu = 0 & \text{на } \Sigma_2. \end{cases} \quad (20)$$

S3: Обчислимо

$$d^{(j)} := \nabla \Phi(w^{(j)}) = h'(w^{(j)}) - \sum_{i=1}^M a_i \int_{\Omega_i} u_2^{(j)} dx \int_{\partial \Omega_i \cap \Gamma_1} p_1^{(j)} d\sigma.$$

S4: Якщо  $\|d^{(j)}\| < \varepsilon$

потім зупиняємося.

І нехай ще  $w^{(j+1)} := w^j - \rho_j d^{(j)}$  буде таким, що

$$\Phi(w^{(j+1)}) = \min_{\rho > 0} \Phi(w^{(j)} - \rho d^{(j)});$$

Встановимо  $j := j + 1$ ; і переходимо до  $S1$ . Введемо сітку з рівновіддаленими вузлами для змінної часу:

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{NT+1} = T.$$

Відповідними масивами для трьох введених сіток є  $xknot$ ,  $yknot$ , і  $tknot$ , а кроки сітки -  $dx$ ,  $dy$  та  $dt$ , відповідно. Введемо також 3-індексовані масиви, позначені  $u$  для функції  $u_1$ ,  $v$  для  $u_2$ ,  $p$  для  $p_1$  і  $q$  для  $p_2$ . Вони індексуються як  $u(i, j, k)$  для  $u_1(x_i, y_i, t_k)$  тощо. Звернемо увагу, що між цим індексом  $j$  та індексом ітерацій ( $j$ ) з алгоритму (3) немає зв'язку.

### Модуль STATE

Диференціальна система відокремлена як (опускаємо індекс ітерації)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) + a_{11}u(x, y, t) = 0 & \text{в } Q, \\ u(x, y, t_1) = u_1^0(x, y), & \text{для } (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma, t) + \alpha u(\sigma, t) = \int_{\Omega} K(x, y, \sigma, t)v(x, y, t)dxdy & \text{на } \Sigma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma, t) = 0 & \text{на } \Sigma_2, \end{cases} \quad (21)$$

і

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, y, t) + a_{22}v(x, y, t) - g(u(x, y, t)) = 0 & \text{в } Q, \\ v(x, y, t_1) = u_2^0(x, y), & \text{для } (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (22)$$

Нехай  $u^{(k)} = u^{(k)}(x, y) = u(x, y, t_k)$ . Друге рівняння в (23) дає значення  $u^{(1)}$ , а перше напівдискретизується за стандартною неявною схемою, що веде до

$$-(a_{11} + 1/dt)u^{(k+1)} + \Delta u^{(k+1)} = -u^{(k)}/dt \quad \text{в } \Omega, k = 1, 2, \dots, NT. \quad (23)$$

Для кожного фіксованого  $k$  це еліптичний PDE. Ці рівняння розв'язуються у порядку зростання за рівнями часу за допомогою граничних умов у (20).

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x}(a, y) = \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial x}(b, y) = 0 & \text{для } y \in (c, d), \\ \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial y}(x, c) - \alpha u^{(k+1)}(x, c) = \\ = -w(t_{k+1}) \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{\Omega_i} v(x, y, t_{k+1}) dx dy & \text{для } x \in (a, b), \\ \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial y}(x, d) = 0 & \text{для } x \in (a, b). \end{cases} \quad (24)$$

Еліптичні системи вирішуються за допомогою коду під назвою ELLIPT. Відповідні граничні значення зберігаються у векторах BDA, BDB, BDC та BDD відповідно. Права частина (23) зберігається у двовимірному масиві RHS, а ELLIPT зберігає рішення у двовимірному масиві SOL. Система (22) може бути інтегрована математично даючи

$$v^{(k+1)}(x, y) = \exp(-a_{22}t_{k+1})(v^{(1)}(x, y) + \int_0^{t_{k+1}} \exp(a_{22}\tau)g(u(x, y, \tau))d\tau). \quad (25)$$

Спочатку ми представляємо ініціалізацію масиву, яка виконується в основній програмі (код програми):

```

Begin
For i := 1 to M + 1 do
For j := 1 to N + 1 do
u(i, j, 1) := UINIT(xknot(i), yknot(j));

```

```

temp := VINIT(xknot(i), yknot(j));
vnew(i, j, 1) := temp;
For k := 1 to NT + 1 do
vold(i, j, k) := temp
Next k;
Next j;
Next i;
For j := 1 to N + 1 do
bda(j) := 0;
bdb(j) := 0;
Next j;
For i := 1 to M + 1 do
dbd(i) := 0;
Next i;
End.

```

Підпрограми типу функцій UINIT та VINIT обчислюють початкові умови, задані  $u_1^0$  і  $u_2^0$  відповідно. Тепер ми даємо дизайн ДЕРЖАВИ. В якості аргументів включаються лише основні параметри. Зауважимо, що

$eps$  = необхідна точність в  $l_\infty$  для норми  $u_2$ ;

$maxiter$  = кількість ітерацій, дозволених методу фіксованої точки;

$koderr$  = параметр помилки;

= 1- отримано збіжність методу фіксованої точки;

= 0 - інакше.

ПІДГРУПНА ДЕРЖАВА ( $u, vold, vnew, w, eps, maxiter, koderr$ )

*Begin*

$koderr := 0$ ;

$iter := 1$ ;

$(koderr = 0)i(iter \leq maxiter)do$

```

For i := 1 to M + 1 do
For j := 1 to N + 1 do
rhs(i, j) := -u(i, j, 1)/dt;
Next j;
Next i;
For k := 1 to NT do
temp := RFCT(vold, k + 1, ...);
For i := 1 to M + 1 do
callELLIPT(rhs, sol, bda, bdb, bdc, bdd); For i := 1 to M +
1 do
For j := 1 to N + 1 do
u(i, j, k + 1) := sol(i, j);
rhs(i, j) := -sol(i, j)/dt;
Next i;
Next j;
Next k;
err := 0; Fork := 1 to NT + 1 do
For i := 1 to M + 1 do
For j := 1 to N + 1 do
vnew(i, j, k) :=
VFCT(xknot(i), yknot(j), tknot(k), vold, ...);
temp := abs(vnew(i, j, k) - vold(i, j, k));
Iferr < temp;
thenerr := temp;
End - if;
Next i;
Next j;
Next k;
Iferr ≤ eps
thenkoderr := 1

```

*elseiter := iter + 1*

*End – if*

*End – while*

*End.*

Викликаються два підпрограми функціонального типу:

*RFCT* – обчислює праву частину граничної умови (24) для  $t_{k+1}$  фіксованого; використовується двовимірна формула Сімпсона.

*VFCT* - обчислює  $v$ , задане (26) для фіксованого  $x_i, y_i$ ), використовуючи формулу числового інтегрування.

**Модуль ADJST.** Система (20) відокремлена як (ми використовуємо  $p$  замість  $p_1$  і  $q$  замість  $p_2$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t}(x, y, t) + \Delta p(x, y, t) - a_{11}p(x, y, t) = \\ = -g'(u(x, y, t))q(x, y, t) \quad \text{в } Q, \\ p(x, y, T) = 0, \quad \text{для } (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu}(\sigma, t) + \alpha p(\sigma, t) = 0, \quad \text{на } \Sigma_1, \\ \frac{\partial p}{\partial \nu}(\sigma, t) = 0 \quad \text{на } \Sigma_2. \end{array} \right. \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q}{\partial t}(x, y, t) - a_{22}q(x, y, t) = \\ = f'(v(x, y, t)) - w(t) \sum_{i=1}^M a_i \int_{x_{1,i}}^{x_{2,i}} p(x, c, t) dx \quad \text{в } Q, \\ q(x, y, T) = -l'(v(x, y, T)) \quad \text{для } (x, y) \in \Omega. \end{array} \right. \quad (27)$$

Система (27) подібна до (23). Головна відмінність полягає в тому, що ми починаємо з кінцевої умови  $p^{(NT+1)} \equiv 0$  і вирішуємо відповідні еліптичні задачі, задані

$$\Delta p^k - (a_{11} + 1/dt)p^{(k)} = -p^{(k+1)}/dt - g'(u^{(k)})q^{(k)} \quad (28)$$

в  $\Omega, k = NT, NT - 1, \dots, 1.$

у порядку зменшення щодо рівнів часу.

Граничні умови такі

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x}(a, y) = \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{для } y \in (c, d), \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, c) - \alpha p(x, c) = 0 & \text{для } y \in (a, b), \\ \frac{\partial p}{\partial y}(x, d) = 0 & \text{для } y \in (a, b). \end{cases} \quad (29)$$

. У числових тестах ми взяли  $f = 0$ . У цьому випадку  $q$  стає незалежним відносно  $(x, y)$  і, отже, вектор використовується для зберігання числових значень. Доступна математична формула для інтегрування (28):

$$q(t) = \int_t^T \eta(\tau) w(\tau) \exp(a_{22}(t - \tau)) d\tau - \exp(a_{22}(t - T)), \quad (30)$$

$$\eta(\tau) = \sum_{i=1}^M a_i \int_{x_{1,i}}^{x_{2,i}} p(x, c, \tau) dx. \quad (31)$$

Звернемо увагу, що ваги  $a_i$  зберігаються у векторі WEIGHT. Масив P ініціалізується в основній програмі за допомогою

```
Begin
For i := 1 to M + 1 do
For j := 1 to N + 1 do
p(i, j, NT + 1) = 0
Next j;
Next i;
End.
```

Тепер ми даємо дизайн ADJST.

```
Begin
For i := 1 to M + 1 do
bdc(i) = 0;
Next i;
```

```

koderr := 0;
iter := 1; while(koderr = 0)i(iter ≤ maxiter)do
  Fork := NT downto 1 do
    fori := 1 to toM + 1 do
      For j := 1 to N + 1 do
        rhs(i, j) := -(p(i, j, k + 1)/dt + GDER(u(i, j, k)) * gold(k))
      Next j;
    Next i;
  Next k;
  For k := 1 to NT + 1 do
    temp := QUAD1(k, ...);
    eta(k) := temp * w(k) * exp(-a22 * tknot(k));
  Next k;
  cst := exp(-a22 * T)'
  err := 0;
  For k := 1 to NT + 1 do
    num := NT + 2 - k;
    Forindex := 1 tonumdo
      item := k + index - 1;
      yaux(index) := eta(item);
      taux(index) := tknot(item);
    Nextindex;
    ans := QUAD2(taux, yaux, num, taux(1), T);
    qnew(k) := exp(a22 * tknot(k)) * (ans - cst);
    temp := abs(qnew(k) - gold(k));
    Iferr < temp
      thenerr := temp
    End - if
  Next k;
  Iferr ≤ eps

```

*thenkoderr* := 1  
*elseiter* := *iter* + 1  
*End – if*;  
*End – while*;  
*End.*

*GDER*- обчислює похідну функції  $g$ ;

*QUAD1*- інтегрує  $\eta$  задане формулою (33); його параметри залежать від способу подання інформації про субдомени  $\Omega_i$ . Ми використовували масив  $imega(4, M)$ , де  $M$  - кількість субдоменив. Якщо  $\Omega_i = (x_{1i}, x_{2i}) \times (c, d)$  тоді ми встановлюємо

$imega(1, i) := j_1$ , де  $j_1$  - є таким індексом, що  $xknot(j_1) = x_{1,i}$ ;

$imega(2, i) := j_2$ , де  $xknot(j_2) = x_{2,i}$ ;

$imega(3, i) := 1$ , і  $imega(4, i) := N + 1$ .

## Модуль HELPRO

Встановлення кроку  $\rho_j$  на кожній ітерації є найскладнішою частиною методу градієнта. Ми використовуємо алгоритм S.

Функціонал витрат має вигляд  $\Phi(w) = \varphi(w) + \phi(u_2)$  де

$$\varphi(w) = \int_0^T h(w(t))dt \quad \text{і} \quad \phi(u_2) = \int_{\Omega} u_2(x, y, T) dx dy.$$

Для того, щоб оцінити  $\Phi(w - \rho d)$  для даного  $\rho$ , ми повинні вирішити систему стану, оскільки нам потрібно відповідне значення  $\phi$ . Для зменшення складності цієї процедури ми враховуємо той факт, що  $\phi$  є лінійним, а отже

$$\Phi(w^{(j)} - \rho d) = \varphi(w^{(j)} - \rho d) + \phi(u_2^{(j)}) - \rho \phi(v),$$

де  $u_2^{(j)} - \rho v$  є варіацією  $u_2^{(j)}$ . Перші два доданки відразу обчислюю-

ться (за допомогою методів числового інтегрування) для кожного  $\rho$ .

Нехай  $u_1^{(j)} - \rho u$  бути варіацією для  $u_1^{(j)}$ , тоді  $u$  - розв'язок системи

$$\begin{cases} \partial u / \partial t - \Delta u + a_{11}u = 0 & \text{в } Q, \\ u(x, 0) = 0 & \text{для } x \in \Omega, \\ \partial u / \partial \nu + \alpha u = d^{(j)} \sum_{i=1}^M a_i \int_{\Omega_i} u_2^{(j)} dx + \\ + (w^{(j)} - \rho d^{(j)} \sum_{i=1}^M a_i \int_{\Omega_i} v dx & \text{в } \Sigma_1, \\ \partial u / \partial \nu = 0 & \text{в } \Sigma_2 \end{cases} \quad (32)$$

(нагадаємо що  $d^j = \nabla \Phi(w^{(j)})$ ), тоді як система, що відповідає  $v$ , апроксимується

$$\begin{cases} \partial v / \partial t + a_{22}v = g'(u_1^{(j)})u & \text{в } Q, \\ v(x, 0) = 0 & \text{для } x \in \Omega. \end{cases} \quad (33)$$

## 5 Висновок

Епідемії є важливою економічною проблемою, яка потребує економічно ефективного застосування профілактичних стратегій. Моделювання виникнення і поширення епідемії є одним з найбільших кроків до вирішення цієї проблеми. Не дивлячись на чималий прогрес у математичному обґрунтуванні процесів виникнення і розповсюдження епідемій, наразі є нестача у моделях, які б враховували економіку таких процесів і, як наслідок, могли скорегувати план подолання епідемії згідно потреб та наявних ресурсів населення та держави.

## 6 Використана література

### Література

- [1] Arnautu Viorel, Neittaanmaki Pekka-Optimal Control from Theory to Computer Programs-Springer Netherlandi. - 2003. - P. 336.
- [2] Пшеничний О. Ю., Чорней І. М., Шаховський Н. Б., Литвин В. В. - Аналіз сучасних програмних засобів моделювання поширення вірусних захворювань. - 2010. - Ст. 9.