Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет

Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Магістерська робота

«Моделювання потоків інформації за допомогою мереж»

Виконала:
студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – математика
спеціалізації математична економіка та економетрика
Сепик І.В.
Науковий керівник:
Барабаш Г.М.

Роботу рекомендовано до захисту на засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
протокол від 04 грудня 2020 року № 4

В. о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М. О.

Львів - 2020

Зміст

1 Вступ

З розвитком науки та технологій відкрились нові перспективи у сфері збирання, передавання та обробки інформації. Сучасний інформаційно насичений світ потребує глибокого аналізу феномену соціальних мереж як невід'ємного атрибуту сьогодення. Саме тому останніми роками спостерігається сплеск наукових досліджень і, як наслідок, публікацій із всебічним аналізом соціальних мереж.

У даній роботі представлений огляд ряду динамік думок в різних соціальних спільнотах. Кожна з закономірностей має свою специфіку, що виражається не тільки в формальному поданні, властивості, а й в особливостях практичного застосування. Процеси обміну думками, становлення колективного та індивідуального думок безпосередньо залежать від виду соціальної спільноти, а значить і описують їх закони різноманітні і багатогранні. Всі наведені тут динаміки дозволяють ставити завдання оцінки репутацій, досягнення консенсусу в колективі, а також визначати умови його існування.

У цій роботі також розглядатимуться деякі основні моделі навчання та поширення інформації у мережах. Опишемо різні види моделей: модель Е. Катца та П.Лазарсфельда (двоступеневий рух інформації в процесі масової комунікації) модель, що описує процес формування індивідами ідей під впливом лідерів громадської думки. Згідно з даною концепцією, ідеї передаються від засобів масової інформації до лідерів громадської думки, а від них — до більш широкої аудиторії; Баєсову модель навчання, в якій люди спостерігають за діями і результатами своїх сусідів та інформацією на досвідченій основі, та модель, засновану на природній формі модернізації, коли люди обмінюються інформацією зі своїми сусідами протягом деякого часу, а потім модернізуються, беручи до уваги певне нормалізоване значення того, що вони чують. Цей клас моделей дозволяє нам включати в розгляд цінні мережеві структури та надавати точні відповіді на кожен із зазначених вище питань.

Дослідження Лазарсфельда, Берлессона та Гауде слугують основою для виявлення лідерів громадської думки за допомогою спостережень. Вони провели дуже важливе та масштабне дослідження формування думок, цього разу в Декатур, штаті Іллінойс, на початку 1950-х років. Вони провели два набори інтерв'ю з жінками у віці шістнадцяти років і поставили питання про речі за межами політичних поглядів. Зокрема, Кац і Лазарсфельд запитали жінок про їхню думку щодо товарів для дому, моди, фільмів та місцевих громадських організацій (включаючи політику). Дослідження було хитро розроблене, оскільки інтерв'ю з тими самими жінками прововодили кілька разів, пару місяців окремо, щоб зміни в поглядах можна було визначити. Щоб виявити зміни в поглядах, Кац і Лазарсфельд задавали питання, які б допомогли їм виявити джерела, що вплинули на зміну думки. Вони робили це запитуючи у жінок, чия думка змінилася, хто вплинув на їх рішення, а також запитували предмет, якщо він вплинув на рішення інших. Це дозволило Катцу та Лазарсфельду визначити осіб, які відіграли певну роль у змінах декількох поглядів, і вони назвали цих осіб «лідерами думок».

Катц і Лазарсфельд знайшли докази того, що, хоча іноді лідери думок мали вищий соціальний статус, було багато випадків, де лідери громадської думки мали такий же соціальний статус, як і ті, на кого вони впливали, особливо коли мова йшла про різні рішення у побуті. Лідери громадської думки часто відрізнялися своєю товариськістю та розмірами своїх сімей (що потім співвідноситься з їх віком та досвідом).

Наступне навчальне середовище – це варіант, який вивчав Бала і Гоял [1]. Є n агентів, які пов'язані в непрямій соціальній мережі. У кожному періоді $t \in \{1; 2; \dots\}$, агенти одночасно вибирають із обмеженого набору акцій (дій). Виплати за акціями (діями) є випадковими, і їх розподіл залежить від невідомого стану природи. Всі агенти стикаються з однаковим набором можливих дій і тим самим невідомим станом природи. Всі вони мають однакові смаки і стикаються з такою ж невизначеністю щодо дій. На кожну дату, крім спостереження за своїм результатом, агент також спостерігає за виборами та результатами своїх сусідів.

Основні результати та ідеї можна побачити в ситуації з двома варіантами дій, A або B і легко узагальнюються до будь-якого кінцевого числа дій. Припустімо, що A має результат виплат 1 за певний період, тоді як B сплачує 2 з ймовірністю p і 0 з ймовірністю $1-p$. Агент захотів би максимізувати очікувану суму дисконтових виплат,

$$E\left[\sum_t \delta^t \pi_{it}\right]$$

де $\delta \in (0, 1)$ – це дисконтний параметр, і π_{it} – це виграш, який i отримує в момент часу t. Якщо $p > 1/2$, то кожен агент буде віддавати перевагу вибору B, а якщо $p < 1/2$, то кожен агент буде віддавати перевагу вибору дії A. Однак p невідомий агентам і може приймати вкінці безліч значень $p \in \{p_1, \dots, p_k\}$ з кожним $p_k \neq 1/2^3$. Нехай i агент почне з апріорного μ_i для цього набору, таким чином, що $\mu_i(p_k) > 0$ – це ймовірність, що i спочатку визначає стан p_k як ймовірність того, що дія B сплачує 2.

Навчання в такому середовищі може бути досить складним. Наприклад, якщо сусід вибирає дію B, то це може означати, що інші сусіди мали хороші результати від B у минулому. Таким чином, за винятком простого розгляду дій та результатів, людина може робити висновки про результати непрямих сусідів, спостерігаючи за вибором дій сусідів. Таке повне Баєсове навчання досліджено для трьох мережевих зв'язків Гале та Карів [2], але швидко стає нерозв'язним у великих мережах. Замість цього, Бала і Гоял досліджують обмежену форму оновлення Баєса, де агенти лише обробляють інформацію від дій і результатів та нехтують будь-якою непрямою інформацією, яка може бути отримана з послідовності дій сусідів. У цій версії моделі, спостерігаючи 0 або 2 повинно очевидно вказати, що агент прийняв заходи B і виграш 1 вказує, що агент прийняв заходи A. Таким чином, ми можемо відстежити погляди i-го агента в час t просто знаючи початкові переконання μ_i, а потім історію виплат i та кожного його сусіда в час t, позначені h_{it}. Отже нехай $\mu_i(h_{it})$ – це переконання i-го агента що дія B, спричинить за собою виграш 2, оновленого відповідно за правилом Байєса і обумовленого на історичних спостереженях h_{it}.

Твердження 1. *Для будь-якого ε, існує $\mu < 1$ таке, що якщо існує щонайменше один i, який сподівається, що дія B матиме виплати 2 з ймовірністю більшою, ніж μ, то ймовірність того, що всі агенти i-ї компоненти в кінцевому підсумку збігаються до «правильного» вибору дії (з вищим істинним очікуваним виграшем) є принаймні $1 - \varepsilon$.*

Ідея тут полягає в тому, що при наявності достатньої кількості оптимізму, принаймні, один агент, не залежно від початкового рядка результатів, буде вибирати B досить велику кількість разів, так що є вірогідність принаймні $1 - \varepsilon$, що компонента в кінцевому підсумку дізнається, чи має B виграш вищий або нижчий рівня A.

Соціальний вплив - це всепроникаюча сила в соціальній взаємодії людини. Під час багатьох соціальних зустрічей люди змінюють свої думки, погляди, переконання чи поведінку, щоб більше нагадувати думки інших, з якими вони взаємодіють. На окремих людей впливає соціальний вплив, оскільки їх переконують переконливі аргументи, оскільки вони прагнуть бути схожими на інших, оскільки вони не впевнені у прийнятті рішення і слідують керівництву інших, або тому, що вони відчувають соціальний тиск на відповідність соціальним нормам.

Основна мережева модель взаємодії передачі інформації, формуванні думок та формуванні консенсусу належить Де-Гроот. В його моделі припускається, що на думку будь якого учасника можуть впливати інші учасники з заданими вагами, які не міняються з часом. Думка учасника про деякі невідомі величини в наступний момент часу являє собою лінійну комбінацію всіх думок учасників соціальної мережі в даний момент. Де-Гроот розширює поняття «мудрого» натовпу, також вивчається питання досягнення «правди» у випадку, коли число учаників необмежено росте. В якості прикладу розглядається мережа, в якій один учасник являється «центром», а всі інші учасники мережі симетричними. В даному випадку матриця впливу учасників одне на одного, задає динаміку думок, має спеціальний вид. В роботі наводиться альтернативна модель формування думок, в якій основне припущення заключається в тому, що учасники мережі можуть не спостерігати істинних думок інших учасників, а спостерігати лише тільки ті думки, які вони заявляють.В цій моделі рахується відомим тільки своя власна істинна думка в кожний момент часу.

В даній роботі вивчається соціальна мережа, яка містить два центри, кожний із яких може впливати на всіх інших учасників мережі. Випадок існування двох центрів дозволяє описати динаміку думок в соціальній мережі при наявності як «основної», так і «альтернативної» точки зору про деяку величину або подію.

Досліджуються два випадки: коли центри безпосередньо впливають одне на одного і коли такогоь впливу немає. Для кожного випадку в залежності від значення пареметрів моделі отримані умови існування граничної матриці впливу, однак виявляється, що консенсус досягається не у віх випадках.

Ми вводимо поняття консенсуса більшості, розуміючи під «більшістю» всіх учасників соціальної мережі, які не є центрами. Необхідність в такому поняття обумовлена тим, що може ставитись не задача досягнення согласованості думок серед учасників, а задача знаходження умов узгодженості думок лише більшості. Рахується, що консенсус більшості досягається, якщо для будь якого початкового значення всіх учасників, граничне значення учасників, окрім центрів, співпадає. Вплив агентів мережі визначається матрицею, по якій можна зробити висновки про наявність або відсутність консенсуса або консенсуса більшості. Цікавим такоє є питання знаходження випадків, коли консенсус не досягається, але досягається консенсус більшості.

2 Постановка задач

Особи в суспільстві мають початкові погляди на предмет і вони представлені n-вимірним вектором ймовірностей, $p(0) = (p_1(0), \dots, p_n(0))$. Кожне $p_i(0)$ належить інтервалу $[0, 1]$, і можемо розглядати його як ймовірність того, що деяке твердження є вірним, або якість даного продукту, або ймовірність того, що особа може займатися певною діяльністю і т.д. Моделі взаємодії фіксуються через (можливо зважену та орієнтовану) $n \times n$ квадратну матрицю T. Зокрема, нехай T являє собою (за рядами) стохастичну матрицю таку, що сума кожного її рядка дорівнює одиниці. Інтерпретація T_{ij} така: вона представляє вплив або довіру, яку агент i має на сучасні погляди j агента у формуванні його або її поглядів впродовж наступного періоду. Погляди оновлюються з часом, так що

$$p(t) = Tp(t-1) = T^t p(0) \tag{1}$$

Цей процес розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 1. *Оновлена модель Де-Грот.*

Використаємо формулу (1). Припустимо, що існує три особи та матриця оновлення, що описується

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

З матриці бачимо, що 1 агент зважає на 1 та 2 однаково, але ігнорує 3, в той час як 2 агент зважає на 1 та 3, але ігнорує свої погляди, та 2 агент надає більше значення поглядам 3 агента, та 3 агент зважає на всі погляди, та надає більше значення своїм власним поглядам. Припустимо, що ми починаємо із заданого вектора поглядів

$$p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отже, 1 агент починає з переконанням 1 (з імовірністю певної події), а агенти 2 і 3 починають з 0 переконання. Тут,

$$p(1) = Tp(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Як агенти оновлюються знову,то погляди стають

$$p(2) = Tp(1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/18 \\ 5/12 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

Повторення цього процесу в кінцевому випадку призводить до поглядів, які збігаються:

$$p(t) = Tp(t-1) = T^t p(0)$$

$$p(8) = Tp(7) \to \begin{pmatrix} 33/100 \\ 33/100 \\ 33/100 \end{pmatrix}$$

Спосіб, яким ми можемо обчислити граничні погляди, детально обговорюється нижче.

Еволюція вірувань може бути мотивована наступною Байєсівською установкою, обговореною ДеМарцо, Ваяносом та Цвібелем[3]. Агенти пов'язані мережею (можливо орієнтованою), що вказує, яку інформацію вони можуть спостерігати через якийсь час. У час $t = 0$ кожен агент сприймає сигнал $p_i(0) = \mu + e_i$ де e_i є $\mathbb{R}$ – термін шуму з нульовим сподіванням і μ є деякий природний стан. Потім i агент чує думки агентів з якими він взаємодіє і присвоює точність π_{ij} сигналу j-го агента. Ці суб'єктивні оцінки можуть, але не обов'язково, збігатися з істинними точностями їх сигналів. Якщо i агент не слухає агента j, то агент i дає j точність $\pi_{ij} = 0$. У випадку, коли сигнали нормальні, байєсівське оновлення з незалежних сигналів при $t = 1$ передбачає правило $T_{ij} = \pi_{ij}/\sum_k \pi_{ik}$, де π_{ik}=0. В момент $t = 2$, агенти розуміють, що тепер їхні сусіди мають нову інформацію (зібрану сусідами в момент $t = 1$), і тому варто знову слухати своїх сусідів, щоб зібрати цю непряму інформацію. Повна «оптимальна» обробка нових поглядів сусідів на цьому другому етапі дещо складніша, тому що зараз доводиться враховувати, як багато є нової інформації, і наскільки точна вона на цьому етапі. З кожним повторенням, проблема виводу стає ще більш складною. Модель Де-Грот можна розглядати як обмежену раціональну версію цього процесу, де агенти не налаштовують свої погляди через якийсь час. Тим не менш, повторення на оновлюючому процесі дозволяє агентам об'єднувати віддаленішу інформацію і, можливо, досягати згоди. Більше того, є ситуації, коли оновлення відповідно до цього дуже простого процесу все одно призведе до того, що агенти зблизяться з цілком точним граничним поглядом.

2.1 Збіжність та розбіжність у поглядах

Ми починаємо з питання про те, коли переконання всіх агентів у мережі сходяться до чітко визначених меж, на відміну від коливань назавжди.

Означення 1. *Матриця соціального впливу T збігається, якщо існує $\lim_{t\to\infty} T^t p$ для всіх векторів поглядів $p \in [0,1]^n$.*

Це визначення збіжності (1) вимагає, щоб переконання сходилися для всіх початкових векторів переконань. Очевидно, що будь-яка мережа матиме збіжність для деяких початкових векторів, оскільки якщо ми запустимо всіх агентів з однаковими переконаннями, то нетривіального оновлення ніколи не відбудеться. Виявляється, якщо збіжність не вдається для деякого початкового вектора, тоді відбуватимуться цикли або коливання в оновленні переконань, а збіжність не вдасться для цілих класів початкових векторів.

Умовою, що забезпечує збіжність у сильно зв'язаних стохастичних матрицях, є аперіодичність.

Означення 2. *Матриця оновлення/взаємодії T періодична, якщо вона дозволяє циклічний процес без збіжності. Або ж, говоритимемо, що T є аперіодичною, якщо найбільшим спільним дільником всіх довжин орієнтованого циклу є одиничка (орієнтовані цикли визначаються щодо орієнтованої мережі, де орієнтований зв'язок існує від i до j тоді і тільки тоді, коли $T_{ij} > 0$).*

Розглянемо це на прикладах.

Приклад 2.

Розглянемо дуже простий і стандартний приклад який ілюструє збій апериодичності.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$T^t = \begin{cases} T & \text{якщо } t \text{ непарна} \\ I & \text{якщо } t \text{ парна} \end{cases}$$

Зокрема, якщо $p_1(0) \neq p_2(0)$, то вектор переконань ніколи не досягає стійкого стану, і обидва агенти продовжують змінювати переконання.

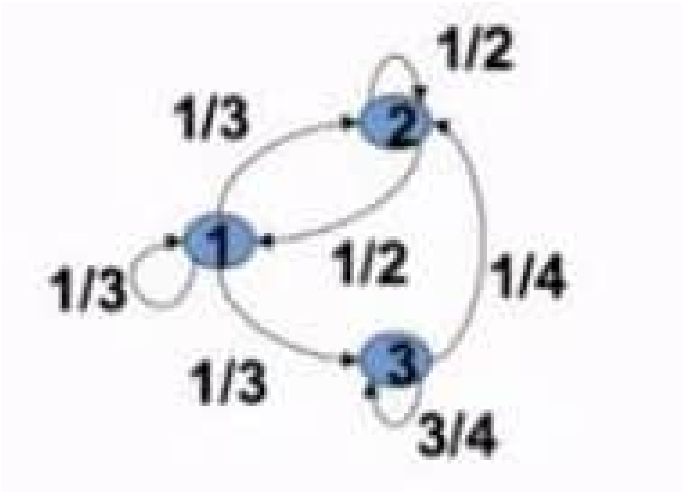
Тут кожен агент ігнорує свою власну віру в оновлення. Потребування принаймні одного агента для зважування його нинішніх переконань позитивно забезпечує зближення. Однак не потрібно мати $T_{ii} > 0$ навіть для одного i, щоб забезпечити збіжність.

Приклад 3. *Приклад збіжності.*

Існує три особи та матриця оновлення що описується

$$T = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Цей процес оновлення наведено на Малюнку



Можна перевірити, що

$$T^{20} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} 3/11 & 4/11 & 4/11 \\ 3/11 & 4/11 & 4/11 \\ 3/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix}$$

Можемо зробити висновок, що незалежно від того які погляди $p(0)$ агента, всі вони закінчують з граничними переконаннями, що відповідають записам $p(\infty) = \lim_t T^t p(0)$, де

$$p_1(\infty) = p_2(\infty) = p_3(\infty) = \frac{3}{11}p_1(0) + \frac{4}{11}p_2(0) + \frac{4}{11}p_3(0)$$

На цьому Прикладі (3), ми також бачимо що погляди агентів збігаються з плином часу і що вони досягають консенсусу, і що 2 і 3 агент мають більше впливу на граничні переконання ніж 1 агент.

Розглянемо приклад де погляди не збігаються.

Приклад 4. *Приклад розбіжності.*

Задамо матрицю оновлення

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, T^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \ldots$$

бачимо що матриця просто коливається і тому є розбіжною, тобто $\nexists \lim_{t\to\infty} T_t p(0)$.

Перш ніж сформувати результати збіжності дамо означення

Означення 3. *Замкненою множиною агентів називатимемо $C \subset \{1, \ldots, n\}$ таку, що немає жодного орієнтованого зв'язку від агента в C до агента за межами C (тобто, немає жодної пари $i \in C$ та $j \notin C$ такої, що $T_{ij} > 0$).*

Теорема 1. *T є збіжною тоді і тільки тоді, коли кожна множина вузлів, що сильно зв'язана і замкнена, є неперіодична.*

Загальновідомо, що апериодичність необхідна і достатня для збіжності у випадку, коли T сильно зв'язна. Ми узагальнюємо це у наступному твердженні.

Твердження 2. *Якщо T - сильно зв'язана матриця, наступні твердження еквівалентні:*

- T збіжна.
- T аперіодична.
- Існує унікальний лівий власний вектор s з T, що відповідає власному значенню 1, записи якого складають 1, таке, що для кожного $p \in [0, 1]^n$,

$$(\lim_{t \longrightarrow \infty} T^t p)_j = sp \tag{2}$$

  для кожного i.

Приклад 5. *Значення тільки тих людей, що мають подібні переконання.*

Наступна модель Крауса [6], дозволяє агенту звернути увагу лише на агентів, переконання яких не є далекими від його власних. Таким чином, агент має якусь недовіру до інформації, яка дуже відрізняється від його власної. Тут,

$$T(p(t), t)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n_i(p(t))} & \text{якщо } |p_i(t) - p_j(t)| < d, \text{ та } n_i(p(t)) = \sharp\{k : |p_i(t) - p_k(t)| < d\} \\ 0 & \text{у іншому випадку} \end{cases}$$

Таким чином, агент надає однакові значення всім думкам, які знаходяться на відстані d від його або її власної думки. Це суттєво ускладнює процес, оскільки оновлення залежить від специфіки думок, а не від часу. Це також тісно пов'язано з моделлю Де-Фант [7] і співавтором Вайсбух та ін, де в кожен момент часу два агенти випадково підбирають, а потім оновлюють свої переконання, тільки якщо переконання досить близько одне до одного.

Досягнення консенсусу (згоди) в наведених узагальнених моделях Де-Грот охоплюється наступним результатом Лоренца [8].

Теорема 2. *Припустимо, що $T(p(t), t)$ задовольняє наступні умови:*

- Існує $\delta > 0$ таке, що $T(p(t), t)_{ij} > 0$ тоді і тільки тоді, коли $T(p(t), t) > \delta$ для всіх t, i, j та $p(t)$.

- $T(p(t),t)_{ii} > 0$ 0 для всіх i, t та $p(t)$.

- $T(p(t),t)_{ij} > 0$ якщо і тільки якщо $T(p(t),t)_{ji} > 0$ для всіх t, i, j та $p(t)$.

Тоді суспільство можна розділити на групи агентів, такі, що кожна група агентів досягає консенсусу (згоди), і будь-які два агенти, які надають ваги один одному нескінченно часто, знаходяться в тій же групі.

Зрозуміло, що Теорема 2 повинна дозволяти різним наборам агентів мати різні граничні переконання, як у моделі Крауза; оновлення відбувається взагалі між агентами, переконання яких починаються на відстані більше d. Модель Крауса не є неперервна, оскільки агент зверне увагу на одні переконання на деякій відстані, але не на інші, які на відстані більше, ніж ε. Цей розрив виявляється важливим у визначенні того, чи погляди відрізняються у різних підгрупах.

Щоб побачити, чому задіяний власний вектор, припустимо, що ми хотіли б знайти вектор $s = (s_1, \ldots, s_n) \in [0,1]^n$, який би вимірював, наскільки кожен агент впливає на обмежувальні переконання. Зокрема, шукатимемо невід'ємний вектор, нормований так, щоб його елементи складали 1, такий, що для будь-якого вектора початкових переконань $p \in [0,1]^n$ маємо

$$(\lim_{t\to\infty} T^t p)_j = \sum_i s_i p_i(0) \tag{3}$$

Відзначаючи, що $\lim_{t\to\infty} T^t p = \lim_{t\to\infty} T^t(Tp)$, це повинно бути саме так

$$sp = sTp \tag{4}$$

для кожного $p \in [0,1]^n$. Це означає, що $s = sT$, а отже, s - це просто одиничний (лівий або рядковий) власний вектор T, за умови, що такий s можна знайти.

Властивість власних векторів, звичайно, просто говорить, що $s_j = \sum_{i\in N} T_{ij} s_i$ для всіх j, так що вплив i є зваженою сумою впливів різних агентів j, які звертають увагу на i, з вагою s_j будучи довірою j для i. Це є цілком природною властивістю для певного впливу i це означає, що впливові люди – це ті, кому довіряють інші впливові люди.

Існує простий спосіб обчислення цього власного вектора. Оскільки повинно бути, що $s \cdot p(0)$ призводить до тих самих переконань, що й будь-яке $p(\infty) = (p^\infty, \ldots, p^\infty) = T^\infty p(0)$. Таким чином, повинно бути, що кожен рядок T^∞ збігається до s. (Такий ефект проілюстровано в Прикладі 6).

Приклад 6. *Соціальний вплив у Прикладі* (3)

$$\lim_t \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^t p(0)$$

$$\lim_t \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3/11 & 4/11 & 4/11 \\ 3/11 & 4/11 & 4/11 \\ 3/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix}$$

Зауважмо, що $s = \begin{pmatrix} 3/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix}$ є одиничним власним вектором T, тобто:

$$sT = \begin{pmatrix} 3/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 & 4/11 & 4/11 \end{pmatrix} = s.$$

Загалом, простий спосіб обчислити або принаймні наблизити лівосторонній власний вектор стохастичної матриці T- це просто ітегрувати T^t і знайти її границю. Також можна розв'язувати $sT = s$ безпосередньо у випадках, коли n не надто велике.

Якщо є лише одна замкнена сильно зв'язана група, то вищенаведені міркування говорять нам, що її переконання збігаються. Тоді інші агенти повинні прагнути до сильно зв'язаної групи, і повинні досягти таких же консенсусних переконань (згоди) (Пропозиція 1). Таким чином, ці та інші агенти в кінцевому підсумку призводять до будь-якого соціального впливу на обмежуючих переконань, і їхні початкові переконання зовсім не мають значення в визначенні граничних переконань.

У випадку, коли існує декілька замкнених сильно зв'язаних груп, кожна з них досягне власного консенсусу (згоди), з власними соціальними навантаженнями, і тоді агенти, що залишились, утворюють шляхи із сильно зв'язаними групами, що призведе до деяких середньозважених граничних переконань сильно зв'язаних груп.

Для заданого T, нехай $\mathcal{M}$ являє собою набір замкнених і сильно зв'язаних множин агентів і нехай $M = \cup_{B \in \mathcal{M}} B$.

Теорема 3. *[Демарзо, Ваянос, і Звібел [3]] Враховуючи T, розіб'ємо множину агентів на замкнені та сильно зв'язані групи $B_1, \ldots, B_k$ і позначимо через R інших агентів, які не перебувають у жодній замкненій і сильно зв'язаній групі. Стохастична матриця T збігається тоді і тільки тоді, коли є невід'ємний вектор-рядок $s \in \mathbb{R}^n$ такий, що*

- $\sum_{i \in B_k s_i} = 1$ *для будь-якої замкненої та сильно зв'язаної групи агентів* B_k
- $s_i > 0$ *якщо* i *перебуває в замкненій і сильно зв'язаній групі та* $s_i = 0$ *в іншому випадку,*
- sB_k *є лівою невід'ємною одиницею власного вектора* T*, обмеженого до* B_k*,*
- *для будь-якого вектора* p *та* B_k*,* $(\lim_{t\to\infty} T^t_{B_k} p) B_k = sB_k p B_k$*,*

і для кожного $j \in \mathbb{R}$ *агента, який не знаходиться в будь-якій замкненій сильно зв'язаній групі, існує* $a\omega^j_{B_k} \geq 0$ *для кожного* B_k *такого, що* $\sum_k \omega^j_{B_k}$ *і такого, що*

- $(\lim_{t\to\infty} T^t p)_j = \sum_k \omega^j_{B_k} sB_k p B_k$.

Означення 4. *Говоритимемо, що група агентів $C \subset \{1, \ldots, n\}$ досягає згоди у T для початкового вектора переконань $p(0)$, якщо $\lim_t p_i(t) = \lim_t p_j(t)$ для кожного i та j в C.*

Пропозиція 1. *У T будь-яка сильно зв'язана та замкнена група осіб досягає згоди для кожного початкового вектора переконань тоді і тільки тоді, коли вона є аперіодичною.*

Доведення: По-перше, ми знаємо, що така група буде мати збіжні переконання, тоді і тільки тоді, коли вона є аперіодичною. Оскільки згода не може бути досягнута, якщо погляди не збігаються, для виконання цієї вимоги достатньо показати, що аперіодичність сильно зв'язаних і замкнених груп означає збіжність. Отже, припустимо, що для деякого $p(0)$ погляди агентів в C збігаються, але для деякого p', такого що $p'_i \neq p'_j$ для деяких i та j в C. Без втрати загальності, ми, можемо знехтувати агентами за межами C, тому розглянемо C, як повний набір агентів $\{1, \ldots, n\}$ та перепишемо агентів так, щоб $p'_1 \geq p'_2 \geq \cdots \geq p'_n$. Знайдемо таке мінімальне i, що $p'_i > p'_{i+1}$. Оскільки агенти сильно зв'язані, треба щоб деякий агент $k \leq i$ мав $T_{kh} > 0$ для деяких $h \geq i+1$. Звідси випливає, що для будь-якого ε, ми можемо знайти досить велике t', таке що $t > t'$:

$$p_k(t) = \sum_j T_{kj} p_j(t-1) \leq \sum_j T_{kj} p'_j + \varepsilon \leq (1 - T_{kh}) p'_1 + T_{kh} p'_h + \varepsilon.$$

Але оскільки права частина менша ніж p'_k, то для досить маленького ε, ми досягли протиріччя.■

Наслідок 1. *Модель Де-Грот досягає згоди тоді і тільки тоді, коли існує рівно одна сильно зв'язана і замкнена група агентів, а T – аперіодична для цієї групи.*

Це також призводить до іншого, визначення згоди з-за Бергером [5].

Наслідок 2. *(Бергер [5]) У моделі Де-Грот досягнуто згоди тоді і тільки тоді, коли існує t таке, що в деякій колонці T^t є всі додатні елементи.*

2.2 Впливові слухачі: експеримент щодо упередженості переконань у соціальних мережах

Мережева структура відіграє важливу роль у визначенні соціального впливу. Однак найвпливовішими агентами є не ті, хто має більше вихідних посилань, як передбачає гіпотеза упередженості переконання, а ті, хто має більше вхідних посилань. Ми показуємо, що обмежено раціональне правило оновлення, яке враховує не лише ступінь агента, але і його ступінь, забезпечує краще пояснення експериментальних даних. У цих рамках переконання щодо консенсусу, як правило, похиляються щодо думок впливових слухачів. Ми представляємо зважену за зусиллями модель оновлення як більш загальну характеристику агрегування інформації в соціальних мережах.

Експеримент призначений для перевірки того, чи особи, що спілкуються через соціальну мережу, піддаються переконанням у переконанні, і, зокрема, чи відображає соціальний вплив в кінцевому рахунку структуру соціальної мережі. Ми розглядаємо проблему повторного навчання, адаптовану за матеріалами ДеМарзо, де спілкування між людьми відбувається в межах соціальної мережі. Ми впроваджуємо два методи лікування шляхом екзогенного маніпулювання структурою мережі, щоб порівняти соціальне навчання у збалансованій та неврівноваженій мережі.

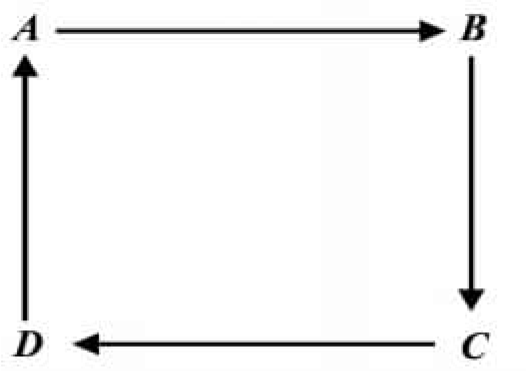
В експериментальному завданні беруть участь чотири особи, які взаємодіють протягом 12 раундів. Кожній особі присвоюється буква (A, B, C і D), що ідентифікує її позицію в соціальній мережі. Позиція та ідентичність компонентів групи залишаються незмінними та анонімними протягом усього завдання.

На початку завдання кожному випробуваному присвоюється ціле число (сигнал). Сигнали формуються наступним чином. Кожній групі з чотирьох випробовуваних присвоюється ціле число, виведене з рівномірного розподілу між 100 і 9999. Сигнали, що спостерігаються членами групи, потім беруться з нормального розподілу із середнім значенням, рівним випадково вибраному числу груп і стандартним відхиленням, рівним 50. Метою завдання є вгадати, в кожному з 12 раундів, середнє значення сигналів, отриманих чотирма компонентами групи на початку завдання.У ДеМарзо сигнал отримується шляхом додавання звичайного випадкового збурення до невідомого параметра, який слід вгадати. Натомість у нашому експерименті кожна з чотирьох складових групи отримує випадково намальоване число, а невідомий параметр є середнім значенням чотирьох чисел. Це істотно спрощує експериментальне завдання, залишаючи теоретичні властивості без змін. Заробіток залежить від точності вгадування на основі трикутної схеми: виграш випробовуваного в кожному раунді дорівнює 20 євро за мінусом абсолютного значення різниці між його здогадкою і середнім значенням чотирьох сигналів. Наприклад, якщо середнє значення чотирьох сигналів дорівнює 803,25, а вибір суб'єкта у вибраному раунді - 792, абсолютне значення різниці становить 11,25, а тоді грошова винагорода дорівнює 8,75 євро. Якщо різниця більше 20, виграш дорівнює 0; наприклад, якщо середнє значення сигналів становить 62,5, а відповідна здогадка - 30,5, різниця дорівнює 32, а суб'єкт нічого не заробляє, оскільки $20 - 32 < 0$. Фактичний прибуток визначається на основі одного раунду, випадково вибраного в кінці експерименту. Плата за явку не передбачена.

Починаючи з другого туру і далі, кожен суб'єкт інформується комп'ютером про вибір, зроблений у попередніх раундах, суб'єктами, з якими він пов'язаний відповідно до мережевої структури. Таким чином, у кожному турі кожен суб'єкт спостерігає за попереднім вибором, зробленим його сусідами.

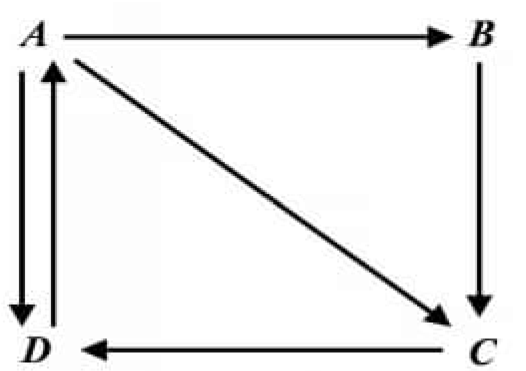
2.2.1 Лікування

Експеримент базується на двох обробках, 1 і 2, реалізовано в міжсуб'єктному дизайні. Ці два способи лікування відрізняються щодо структури комунікаційної мережі, зберігаючи при цьому постійний набір сигналів, що приймаються випробовуваними. У $T1$, структура зв'язку визначається мережею кола, представленою на Vалюнку 1. Це міцно пов'язана та збалансована мережа, де кожен агент має одну вхідну лінію та одну вихідну лінію. Він відтворює ситуацію, коли кожен суб'єкт слухає одного сусіда і розмовляє з іншим сусідом.



Малюнок 1: Структура мережі в лікуванні 1

Лікування 2 отримують шляхом додавання двох ланок до мережі кола, так що вибір, зроблений суб'єктом , спостерігається кожним іншим членом групи, тоді як вибір усіх інших суб'єктів спостерігається лише одним суб'єктом (Малюнок 2). У цій сильно пов'язаній та незбалансованій мережі суб'єкт A має три вихідні посилання та одне вхідне посилання, B має одне вихідне посилання та одне вхідне посилання, D та C мають два вхідні посилання та одне вихідне посилання. Ця мережа відтворює ситуацію, коли центральну тему слухають усі.



Малюнок 2: Структура мережі в лікуванні 2

2.2.2 Процедури

Ми провели дві сесії для 1 і чотири сесії для 2. У кожному сеансі 24 випробування були випадковим чином розділені на 6 груп по чотири предмети. Позиція та ідентичність чотирьох компонентів групи залишалися незмінними протягом сесії. Загалом в експерименті брали участь 144 випробувані, в основному студенти бакалаврів економіки, набрані електронною поштою через Інтернет-систему. Експеримент був проведений в EELAB (Міланський університет Бікокки) в листопаді 2009 р. За допомогою z-Tree (Fischbacher, 2007). Кожне заняття тривало приблизно 80 хвилин, включаючи інструкції, контрольні запитання та платежі. Середній заробіток становив 14,5 євро. Кожна сесія складалася з трьох фаз по 12 раундів, загалом 36 раундів у кожній сесії. На кожній фазі експериментальне завдання реалізовувалося з новим набором сигналів. Завдання повторювали три рази, щоб зробити його звичним для суб'єктів, щоб зменшити шум через нерозуміння завдання. В кінці кожної фази випробовуваних повідомляли про чотири сигнали, їх середнє значення та вибір, зроблений кожним випробуваним. Вибравши 12 раундів спілкування, ми створили ситуацію, коли переконання зближуються як упередження переконання, так і раціональність. Якби всі агенти були раціональними, чотири раунди були б достатніми для конвергенції. Якби всі випробувані дотримувались правила оновлення упередженості переконання, після 12 раундів переконання були б практично однаковими. На початку кожного заняття пояснювали завдання: вголос читали вказівки та відповідали на будь-які запитання щодо гри. Перед початком гри кожному випробуваному задавали письмові контрольні запитання, щоб перевірити, чи цілком зрозуміле завдання. Інструкції чітко пояснювали учасникам, що найкращим вибором при знанні або можливості вирахування заданої кількості сигналів є середнє значення цих сигналів. Причиною цього є те, що ми хотіли забезпечити, щоб суб'єкти знали, як оптимально агрегувати інформацію, якщо всі сигнали є публічною інформацією, таким чином, маючи змогу зосередитись виключно на процесі соціального навчання.

Для того, щоб запобігти можливим помилкам, спричиненим тим, що люди можуть забути свої здогадки з попередніх раундів чи іншої відповідної інформації, монітор кожного учасника відображав попередній вибір суб'єкта та інформацію, отриману в попередніх раундах. Таким чином, ми спровокували гру досконалого запам'ятовування та контролювали вплив пам'яті на прийняття рішень. З метою мінімізації обчислювальних помилок ми також надали випробовуваним калькулятор на екрані комп'ютера

2.2.3 Теоретичні передбачення та гіпотези

Нехай $y_{i,t}$ позначає здогадку окремого i в раунді t та y_t вектор припущень усіх людей у групі в раунді t. Нехай x_i позначає окремі сигнали, x̄ середнє значення чотирьох сигналів у групі та x вектор сигналів. Структура мережі представлена у вигляді спрямованого графіка, де $S_i \subset N$ позначає набір агентів, які i агент слухає. Набори прослуховування для $T1$ є $S_A = \{A, D\}$, $S_B = \{A, B\}$, $S_C = \{B, C\}$, $S_D = \{C, D\}$, в той час як набори для прослуховування $T2$ є $S_A = \{A, D\}$, $S_B = \{A, B\}$, $S_C = \{A, B, C\}$, $S_D = \{A, C, D\}$. Позначаємо $q_{i,j} \in \{0, 1\}$ функція індикатора, що відповідає S_i, де $q_{ij} = 1$, якщо агент i слухає агента j, та $q_{ij} = 0$ якщо немає вхідного зв'язку з j до i (зауважте, що $q_{ii} = 1$, оскільки кожен агент слухає себе).

Зв'язок відбувається протягом повторення раундів. Оскільки всі агенти мають однакові уподобання, тут немає можливості для стратегічного спілкування, і агенти правдиво розкривають свої переконання. Хоча агенти не мають інформації про основний розподіл сигналів, аргумент зворотної індукції передбачає, що як за упередженості переконання, так і за Байєсівським оновлюючись, агенти стимулюють правдиво повідомляти про свій сигнал у першому турі: $y_i = x$. Після цього в кожному раунді агенти вислуховують здогади тих, хто знаходиться в їхньому наборі прослуховування, оновлюють свої переконання та роблять нову здогадку. Всякий раз, коли процес спілкування призводить до того, що всі люди сходяться до однакових переконань, вони визначаються консенсусними переконаннями і позначаються ws, де w являє собою вектор ваг, віднесених до сигналу кожного агента в мережі. Ці ваги можна інтерпретувати як такі, що відображають соціальний вплив агентів.

Якщо всі агенти раціональні, байєсівське оновлення дозволяє кожному витягувати всю приватну інформацію в мережі, щоб консенсусні переконання були ефективними. І в $T1$, і в $T2$, оскільки сигнали однаково інформативні, всі агенти в групі сходяться до однакових переконань, і в рівновазі кожен з чотирьох членів групи має однаковий вплив. Незалежно від структури мережі, консенсусні переконання збігаються із середнім арифметичним сигналів $w_e x$, з $w_e = [0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$.

Якщо особи піддаються упередженому переконанню, як у ДеМарзо, вони трактують інформацію, отриману в кожному раунді, як нову та незалежну, не раціонально не враховувати того, що лише частина її є новою, тоді як решта вже повідомлялася в попередніх раундах. Еволюцію вірувань можна описати правилом оновлення

$$y_t = L y_{t-1} \tag{5}$$

де L - матриця з елементами $l_{ij} = (q_{ij}\pi_{ij})/\sum_j q_{ij}\pi_{ij}$ де π_{ij} позначає точність, яку агент i присвоює переконанню агента j.

ДеМарзо дозволяє людям змінювати з часом вагу, яку вони надають своїм власним переконанням, порівняно з іншими, з якими вони пов'язані. Таким чином ми маємо

$$L_t = (1 - \lambda_t)I + \lambda_t L \tag{6}$$

де L - матриця оновлення та $\lambda_t \in (0, 1)$. Значення λ_t, ближче до нуля, означає, що люди мають більш стійкі думки, тоді як значення, ближчі до 1, означають, що індивіди приділяють однакову вагу переконанням усіх, з ким вони пов'язані (включаючи себе). Поки агенти не надто закріплені у своїх переконаннях і мережа міцно пов'язана, під упередженням переконання переконання людей повинні зближуватися. Різні значення λ_t можуть впливати на швидкість зближення, але не на саму збіжність, а також на консенсусні переконання, якщо $\sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t = \infty$. Оскільки ми зосереджуємось на переконаннях збіжності, ми встановлюємо $\lambda_t = 1$ у кожному періоді t, не втрачаючи загальності.

Якщо припустити, що кожен агент вважає, що всі прослухані ним агенти мають однакову точність, матриця оновлення в $T1$ має вигляд:

$$L = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

тоді як у $T2$ це

$$L = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Тому переконання в крузі t можна записати як $y_t = L^{t-1}x$. Оскільки ми розглядаємо тісно пов'язані мережі, де жоден агент не ізольований, переконання будуть збігатися по колу. Позначаючи w_p вектор ваг, що характеризують консенсусні переконання з упередженням переконання, отримуємо $\lim_{t\to\infty} y_t = w_p x$.

У $T2$, збалансованій і міцно зв'язній мережі, консенсусні переконання за умови упередженості переконання будуть такими ж, як за раціональності. У $T2$, незбалансованій і міцно зв'язаній мережі, консенсусні переконання за умови упередженості переконань відрізнятимуться від раціональних консенсусних переконань. Враховуючи те, що агенти не враховують повторення інформації, більш зв'язані агенти мають більший вплив на рівновагу. Для структури мережі в $T2$, консенсусні переконання задаються $w_p x$ з $w_p \simeq [0.42, 0.10, 0.16, 0.32]$. Тобто, консенсусні переконання надають надмірної ваги сигналу A, оскільки A слухають три суб'єкти, тоді як B, C і D спілкуються лише з одним суб'єктом. Більше того, D також відносно більш впливовий, оскільки він безпосередньо спілкується з A (непрямий соціальний вплив). C і, більшою мірою, B повинні мати менший вплив на $T2$ щодо $T1$, оскільки вони мають лише одну вихідну лінію і не спілкуються безпосередньо з A.

Підводячи підсумок, гіпотези, що перевіряються, можна викласти наступним чином:

$$H_0 : w_A^{T1} = w_A^{T2} = 0.25, H_1 : w_A^{T1} = 0.25 < w_A^{T2} = 0.42$$
$$H_0 : w_B^{T1} = w_B^{T2} = 0.25, H_1 : w_B^{T1} = 0.25 > w_B^{T2} = 0.10$$
$$H_0 : w_C^{T1} = w_C^{T2} = 0.25, H_1 : w_C^{T1} = 0.25 > w_C^{T2} = 0.16$$
$$H_0 : w_D^{T1} = w_D^{T2} = 0.25, H_1 : w_D^{T1} = 0.25 < w_D^{T2} = 0.32$$

Згідно з нульовою гіпотезою раціональності, кожен агент повинен мати однаковий вплив як в $T1$, так і в $T2$. Відповідно до альтернативної гіпотези упередженості переконання, ваги соціального впливу повинні бути однаковими в $T1$, але різними в $T2$. Суб'єкти A і, в меншій мірі, D повинні мати більший вплив на $T2$, ніж на $T1$, тоді як суб'єкти B і, меншою мірою, C повинні мати менший вплив на $T2$, ніж на $T1$.

3 Мудрість натовпу: визначення та характеристика

Щоб охопити ідею «великого» суспільства, ми досліджуємо послідовності мереж, де ми дозволяємо зростати кількості агентів n і працюємо з обмежуючими твердженнями. Обговорюючи мудрість, ми беремо подвійну межу. По-перше, для будь-якої фіксованої мережі ми запитуємо, до чого збігаються її переконання в довгостроковій перспективі. Далі ми вивчаємо межі цих тривалих переконань у міру зростання мереж; друга межа береться через послідовність мереж.

Послідовність мереж фіксується послідовністю матриць взаємодії $n \times n$: ми говоримо, що суспільство – це послідовність $(T(n))_{n=1}^{\infty}$, індексована n, кількість агентів у кожній мережі. Ми позначимо (i, j) запис матриці взаємодії n, $T_{ij}(n)$ і загальніше, усі скаляри, вектори та матриці, пов'язані з мережею n, будуть позначені аргументом n у дужках.

Дотримуємось припущення, що кожна мережа збіжна для кожного n; немає сенсу говорити про мудрість, якщо мережі навіть не мають збіжних переконань, і тому зближення є апріорною необхідною умовою мудрості. Тепер визначимо основний простір ймовірностей і дамо офіційне визначення мудрого суспільства.

Існує справжній природний стан $\mu \in [0, 1]$. Нам не потрібно нічого вказувати щодо розподілу, з якого походить цей справжній стан; ми ставимося до істини як до фіксованої. Якщо це насправді реалізація якогось випадкового процесу, то весь аналіз залежить від його реалізації.

У момент $t = 0$ агент i в мережі n бачить сигнал $p_i^{(0)}(n)$, що лежить у обмеженій множині, нормованій без втрати загальності, щоб бути $[0, 1]$. Сигнал розподіляється із середнім значенням μ та дисперсією щонайменше $\sigma^2 > 0$, а сигнали $p_1^{(0)}(n), ..., p_n^{(0)}(n)$незалежні для кожного n. Подальші припущення щодо спільного розподілу змінних не робляться $p_i^{(0)}(n)$, оскільки n і i перебувають у межах можливих значень. Загальна нижня межа дисперсії гарантує, що зближення з істиною відбувається не просто тому, що в суспільстві є довільно добре обізнані агенти.

Нехай $s(n)$ – вектор впливу, що відповідає $T(n)$. Ми записуємо віру агента i в мережу n в момент часу t як $p_i^{(t)}(n)$. Для будь-якого даного n та реалізації $p^{(0)}(n)$ віра кожного агента i у мережу n наближається до межі, яку ми позначаємо $p_i^{(\infty)}(n)$. Кожне з цих обмежувальних переконань є випадковою величиною, яка залежить від початкових сигналів. Ми говоримо, що послідовність мереж є розумною, коли обмежувальні вірування спільно сходяться за ймовірністю до справжнього стану μ при $n \to \infty$

Означення 5. *Послідовність $(T(n))_{n=1}^{\infty}$ розумна, якщо,*

$$plim_{n\to\infty} \max_{i \leq n} |p_i^{\infty}(n) - \mu| = 0 \tag{7}$$

Хоча це визначення дається із конкретним розподілом сигналів у фоновому режимі, що послідовність мереж буде розумною для всіх таких розподілів або для жодної. Таким чином, особливості розподілу не мають значення для визначення того, чи є суспільство мудрим, за умови, що сигнали незалежні, мають середнє значення μ і мають дисперсії, обмежені від 0. Якщо ці умови виконуються, лише мережева структура визначає мудрість.

Мудрість з точки зору впливу: Закон великих чисел

Щоб дослідити питання, які суспільства мудрі, ми спочатку формулюємо простий закон великих чисел, який є корисним у нашому середовищі, оскільки ми працюємо із зваженими середніми значеннями потенційно неідентично розподілених випадкових величин. Наступний результат буде використаний для повної характеристики мудрості з точки зору впливу ваг.

Не обмежуючи загальності, позначаємо агенти так, щоб $s_i(n) \geq s_{i+1} \geq 0$ для кожного i та n; тобто агенти розташовуються за впливом у порядку зменшення.

Лема 1 (Закон великих чисел)**.** *Якщо $(s(n))_{n+1}^{\infty}$ є будь-якою послідовністю векторів впливу, то*

$$plim_{n \to \infty} s(n) p^{(0)}(n) = \mu$$

тоді і тільки тоді, коли $s_1(n) \to 0$.

Таким чином, у сильно зв'язаних мережах обмежувальна віра всіх агентів,

$$p^{\infty}(n) = \Sigma_{i \leq n} s_i(n) p_i^{(0)}(n),$$

буде наближуватися до істини при $n \to \infty$ тоді і лише тоді, коли вплив найважливішого агента має тенденцію до 0 (нагадаємо, що ми позначили агентів так, що $s_1(n)$ є максимальним серед $s_i(n)$). Трохи більш ретельним аналізом можна продемонструвати, що той самий результат має місце, незалежно від того, чи є мережі міцно зв'язаними, що є змістом наступної пропозиції.

Твердження 3. *Якщо $(T(n))_{n=1}^{\infty}$ є послідовністю збіжних стохастичних матриць, то мудро тоді і тільки тоді, коли пов'язані вектори впливу такі, що $s_1(n) \to 0$.*

Цей результат є природним з точки зору наведених нижче прикладів, які показують, що суспільство може збитися зі шляху, якщо лідер має занадто великий вплив. Дійсно, докази обох результатів випливають з дуже простої інтуїції: щоб ідіосинкратичні помилки були вимиті, а обмежувальні переконання – які є зваженими середніми значеннями початкових переконань – сходились до істини, нічия ідіосинкратична помилка не повинна набувати позитивного значення межа великого суспільства.

Твердження 4. *Нехай $(G(n))_{n=1}^{\infty}$ – послідовність симетричних, пов'язаних між собою матриць суміжності. Послідовність $(T(G(n)))_{n=1}^{\infty}$ мудра тоді і тільки тоді*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{d_i(G(n))}{\sum_{n=1}^{i} d_i(G(n))} \to 0.$$

Тобто необхідною і достатньою умовою мудрості в цій обстановці є те, що максимальний ступінь стає нульово малим відносно суми градусів. Іншими словами, непропорційна популярність якогось агента є єдиною перешкодою на шляху до мудрості. Хоча ця характеристика є дуже інтуїтивною, вона також залежить від особливої структури взаємної уваги та рівних ваг.

3.1 Видатні сім'ї як перешкода мудрості

Зараз ми обговорюємо загальну перешкоду мудрості у довільних мережах: а саме існування видатних груп, які отримують непропорційну частку уваги та збивають суспільство з шляху. Це нагадує дискусію в Бала та Гоял (1998)[1] про те, що може піти не так, коли існує "царська сім'я яка зазвичай спостерігається за іншою моделлю спостережливого навчання. Однак,спосіб, у який це працює, і наслідки для мудрості досить різні.

Подібність полягає в тому, що як під час спостережливого навчання, так і під час неодноразового оновлення, яке обговорюється тут, якщо всі агенти концентрують свою увагу на декількох агентах, це може призвести до суспільних помилок, якщо ці кілька помиляються. Різниця полягає в тому, як цього уникнути. В умовах спостережливого навчання достатньою умовою повного вивчення Бали та Гояла (1998)[1] є те, щоб кожна дія була пов'язана з якимось дуже оптимістичним агентом, а потім щоб кожен інший агент мав шлях до відповідного оптимістичного агента кожної дії. Таким чином, виграш за кожну дію буде правильно визначений її оптимістичним агентом, і тоді суспільство врешті-решт побачить, яка з цих дій найкраща. Єдиною властивістю мережі, яка необхідна для цього висновку, є зв'язок. У нашому контексті аналогом цієї умови було б наявність агента, який з дуже високою точністю спостерігає справжній стан природи, а потім не зважує чужу думку. Однак, відповідно до нашої теми, починаючи з шумної інформації, нас натомість цікавить, коли мережева структура правильно агрегує багато шумних сигналів, жоден з яких не є точним або постійним. Таким чином, наші результати критично залежать від структури мережі.

Ми визначаємо

$$T_{B,C} = \sum_{i \in B, j \in C} T_{ij}$$

що є вагою, яку група B надає групі C. Поняття проілюстроване на малюнку B.

Почнемо з того, що зробимо природне визначення того, що означає група, яку слід спостерігати кожному

Означення 6. *Група B є помітною за t кроків щодо T, якщо $(T^t)_{i,B} > 0$ для кожного $i \notin B$.*

Викликаємо $\pi_B(T;t) := \min_{i \notin B}(T^t)_{i,B}$ - виступання t кроку B щодо T.

Таким чином, група, яка виділяється за t кроків, є такою, що на кожного агента поза нею впливає щонайменше хтось із цієї групи за t кроків оновлення. Зверніть увагу, що спосіб розподілу ваги між агентами у визначній групі залишається довільним, а деякі агенти у відомій групі можуть взагалі ігноруватися. Якщо $t = 1$, то всі, хто не входить до видатної групи, звертають увагу на когось із видатної групи безпосередньо, тобто не через когось іншого протягом декількох турів оновлення.

Це визначення дається відносно однієї матриці T. Хоча це корисно для визначення чітких меж впливу, ми також визначаємо поняття видатності в асимптотичній обстановці. По-перше, ми визначаємо сім'ю як послідовність груп (B_n) таку, що $B_n \subset \{1, \ldots, n\}$ для кожного n. Сім'ю слід розглядати як сукупність агентів, які можуть змінюватися та зростати, коли ми розширюємо суспільство. У додатках сім'ї можуть бути агентами певного типу, але апріорі немає обмежень щодо агентів, які входять до груп B_n. Тепер ми можемо поширити поняття видатності на сім'ї.

Означення 7. *Сімейство* (B_n) *рівномірно видно відносно* $(T(n))_{n=1}^{\infty}$*, якщо існує константа* $\alpha > 0$ *така, що для кожного* n *існує така група* B_n*, що видно за* t *кроків відносно до* $T(n)$ *з* $\pi_B(T(n); t) \geq \alpha$*.*

Щоб сім'я (B_n) була рівномірно помітною, ми повинні мати на увазі, що для кожного n група B_n є помітною відносно $T(n)$ за деяку кількість етапів, а видатність не стає занадто малою. Зверніть увагу, що принаймні одна рівномірно відома сім'я завжди існує, а саме $\{1, \ldots, n\}$. Ми також визначаємо поняття скінченності для сімей: сім'я є скінченною, якщо врешті-решт припинить свій ріст.

Означення 8. *Сімейство* (B_n) *є скінченним, якщо існує* q *таке, що* $sup_n|B_n| \leq q$*.*

Маючи ці визначення в руках, ми можемо сформулювати першу необхідну умову мудрості з точки зору популярності: мудрість виключає кінцеві, однаково відомі сім'ї.

Твердження 5. *Якщо існує скінченна, однаково помітна сім'я щодо* $(T(n))$*, то послідовність не є мудрою.*

Щоб побачити інтуїцію цього результату, розглянемо особливий, але яскравий приклад. Нехай (B_n) – скінченна, рівномірно відома сім'я, так що, у визначенні рівномірної виразності, $t = 1$ для кожного n – тобто сім'я завжди помітна в один крок. Далі, розглянемо сильно пов'язаний випадок, коли агент i в мережі n набуває ваги $s_i(n)$. Нормалізуємо справжній стан світу як $\mu = 0$, і для цілей викладу припустимо, що всі в B_n починають з переконання 1, а всі зовні починають з переконання 0. Нехай α є нижньою межею на видноті B_n. Потім, після одного раунду оновлення, кожен, хто не входить до B_n, має віру, принаймні, α. Отже, для великого суспільства переважна більшість агентів має переконання, які відрізняються щонайменше на α від істини. Єдиний спосіб, яким їх можна було б повернути до істини, – це те, що після одного етапу оновлення принаймні деякі агенти в B_n мають переконання, рівні 0, і вони можуть повернути суспільство до істини. Тепер ми можемо забути те, що було в минулому, і просто розглядати нинішні вірування як нові вихідні вірування. Якщо агенти в B_n мають достатньо впливу, щоб повернути всіх назавжди до 0, коли інші агенти знаходяться на відстані від α, то вони також мають достатньо впливу, щоб назавжди відвести всіх від 0 назавжди. Тож у кращому випадку вони можуть вести лише групову частину шляху назад. Таким чином, ми робимо висновок, що починаючи B_n з неправильними переконаннями, а всі інші з правильними переконаннями можуть призвести всю мережу до неправильних переконань.

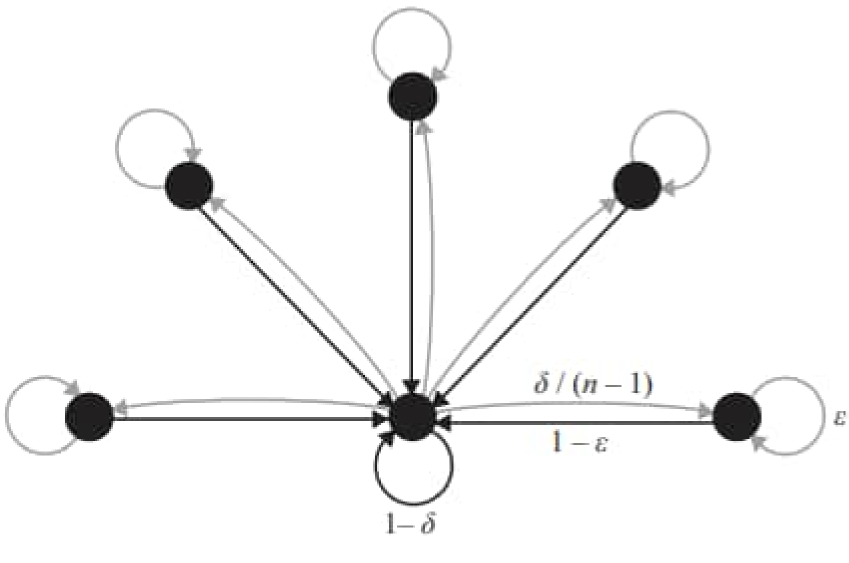
3.2 Інші перешкоди мудрості: приклади

Незважаючи на те, що нерівність є простою і важливою перешкодою для мудрості, не у всіх прикладах, коли мудрість не вдається, є група, яка помітна за кілька кроків. Наступний приклад ілюструє Твердження (5) і демонструє її обмеження.

Приклад 7. *Розглянемо наступну мережу, визначену для довільного* n. *Зафіксуємо* δ, $\varepsilon\ in(0,1)$ *та визначимо для кожного* $n \geq 1$ *матрицю взаємодії* n-*на*-n

$$T(n) := \begin{bmatrix} 1-\delta & \frac{\delta}{n-1} & \frac{\delta}{n-1} & \dots & \frac{\delta}{n-1} \\ 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-\varepsilon & 0 & 0 & \dots & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Мережа показана на Малюнку для $n = 6$ *агентів*



Ми знаходимо що

$$s_i(n) = \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\delta} & \text{якщо } i = 1 \\ \frac{\delta}{(n-1)(1-\varepsilon+\delta)} & \text{якщо } i = 1 \end{cases}$$

Ця мережа не сходиться до істини. Зверніть увагу, що в суспільстві з n *обмежувальним переконанням кожного агента є* $s_1(n)p_1^{(0)}(n)$ *плюс деякі інші незалежні* *випадкові величини, які мають середнє значення μ. Оскільки $s_1(n)$ є постійним і не залежить від n, дисперсія обмежувального переконання залишається обмеженою від 0 для всіх n. Отже, переконання значно відхилятимуться від істини з позитивною ймовірністю. Інтуїція полягає просто в тому, що інформація лідера – навіть коли вона далека від середньої – спостерігається всіма і досить зважена, щоб упереджувати остаточне переконання, і сигнали послідовників не можуть зробити багато для її виправлення. Дійсно, вищезазначене Твердження (3) встановлює брак мудрості через неефективний вплив центрального агента. Якщо δ і ε - фіксовані константи, то центральний агент (завдяки його позиції) помітний в один крок, що робить це ілюстрацією Твердження (5).*

Однак зауважте, що навіть якщо ми дозволимо $1-\varepsilon$ наблизитися до 0 у будь-який час, який нам подобається, так що люди не зважають на центр, центр має ненульовий вплив, якщо $1-\varepsilon$ має принаймні порядок δ. Таким чином, має значення не просто загальна вага даного індивіда, а відносна вага, що надходить і виходить з певних вузлів (і групи вузлів). Зокрема, якщо вага в центрі зменшиться (так що ніхто не буде помітний за один крок), мудрість все одно може зазнати невдачі.

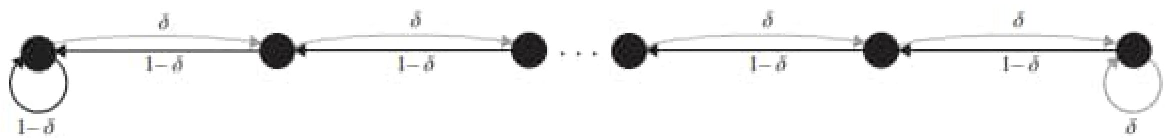
З іншого боку, якщо $1-\varepsilon$ стає малим відносно δ у міру зростання суспільства, то ми можемо отримати мудрість, незважаючи на, здавалося б, незбалансовану соціальну структуру. Це демонструє, що агенти повинні приділяти однакову вагу кожному з своїх сусідів, включаючи їх самих.

Одне, що йде не так у цьому прикладі, це те, що центральний агент отримує високу довіру відносно суми, яку повертають іншим, роблячи його або її надмірно впливовим. Однак це не єдина перешкода мудрості. Є приклади, коли вага, що надходить у будь-який вузол, обмежена відносно ваги, що виходить, і все ще існує надзвичайно впливовий агент, який може утримувати переконання суспільства від справжнього стану. Наступний приклад показує, наскільки непряма вага може мати значення.

Приклад 8. *Зафіксуємо $\delta \in (0, 1/2)$ та визначимо для кожного $n \geq 1$ матрицю взаємодії n-на-n за*

$$T_{11}(n) = 1-\delta$$
$$T_{i,i-1}(n) = 1-\delta, \text{якщо } i \in \{2, \dots, n\}$$
$$T_{i,i+1}(n) = \delta, \text{якщо } i \in \{1, \dots, n-1\}$$
$$T_{nn}(n) = \delta$$
$$T_{ij}(n) = 0$$

Мережа показана на Малюнку



Це дуже просто перевірити

$$s_i(n) = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{i-1} \cdot \frac{1-(\frac{\delta}{1-\delta})}{1-(\frac{\delta}{1-\delta})^{n+1}}$$

Зокрема, $lim_{n\to\infty} s_1(n)$ можна зробити якомога ближчим до 1, вибравши якомого мале δ, і тоді Твердження (3) показує, що мудрість неможлива. Причина надмірного впливу керівника тут дещо витонченіша, ніж Прикладі (7): це не ваговий агент 1, який отримує безпосередньо, а непряма вага через привілейоване становище цього агента в мережі. Таким чином, хоча агент 1 не помітний за будь-яку кількість кроків, менших за $n-1$, вплив агента може перевищувати суму всіх інших впливів на величезний коефіцієнт при малому δ. Це показує, що вимірювати вплив агентів на основі прямої вхідної ваги або навіть непрямої ваги на декількох рівнях може бути оманливим; натомість, вся структура мережі є актуальною.

3.3 Забезпечення мудрості: структурно достатні умови

Зараз ми забезпечуємо достатньо структурні умови, щоб суспільство було мудрим. На прикладах попереднього підрозділу ясно видно, що мудрість – це, загалом, тонка властивість. Таким чином, формулювання достатніх умов вимагає визначення деяких нових концепцій, які можна використовувати для виключення перешкод мудрості.

Властивість 1. *(Баланс): Існує послідовність $j(n) \to \infty$ така, що якщо $|B_n| \leq j(n)$. Тоді*

$$\sup_n \frac{T_{B_n^c, B_n(n)}}{T_{B_n, B_n^c(n)}} < \infty$$

Умова балансу говорить про те, що жодна сім'я, яка не перевищує певного розміру, охопленого $j(n)$, не може отримувати нескінченно більше ваги від решти агентів, ніж надає решті агентів. Послідовність $j(n) \to \infty$ може зрости дуже повільно, що робить умову досить слабкою.

Основна інтуїція умови полягає в тому, що для того, щоб забезпечити мудрість, потрібно не тільки турбуватися про те, щоб поодинокі агенти набирали нескінченно більше ваги, ніж вони видають, але й про те, що в цьому положенні перебувають кінцеві групи. І потрібно не тільки виключити цю проблему для груп певного кінцевого розміру, але і для будь-якого кінцевого розміру. Це пояснює послідовність $j(n)$, яка прагне до нескінченності у визначенні; послідовність може зростати довільно повільно, але з часом повинна стати достатньо великою, щоб вловити якийсь певний кінцевий розмір. Це жорстка умова в тому сенсі, що якщо замість цього потрібно, щоб $j(n)$ був нижче деякої скінченної межі для всіх n, то завжди можна знайти приклад, який задовольняє умові, але при цьому не виявляє мудрості.

Властивість 2. *(Мінімальна дисперсія): Існує $q \in \mathbb{N}$ та $r > 0$, такий що,$|B_n|$ скінченна, $|B_n| \geq q$ та $|C_n|/n \to 1$, тоді $T_{B_n,C_n}(n) > r$ для всіх досить великих n.*

Умова мінімальної дисперсії вимагає, щоб будь-яка досить велика кінцева сім'я повинна надавати хоча б якусь мінімальну вагу будь-якій сім'ї, яка складає майже все суспільство. Це виключає такі ситуації, як Приклад (8) вище, коли є агенти, які ігнорують переважну більшість суспільства. Таким чином, це гарантує, що увага великої групи не буде цілеспрямована.

Сформулювавши ці дві умови, ми можемо навести основний результат цього розділу, який стверджує, що цих умов достатньо для мудрості

Теорема 4. *Якщо $(T(n))_n^\infty = 1$ є послідовністю збіжних стохастичних матриць, що задовольняють рівновагу та мінімальну дисперсію, то вони розумні.*

Однак зауважимо, що жодна умова недостатня сама по собі. Приклад (8) задовольняє першу властивість, але не другу. Квадрат матриці в Прикладі (7) задовольняє другу, але не першу. В обох прикладах суспільство виявляється не розумним.

Теорема (4) передбачає, що в мудрості є два важливі компоненти: відсутність крайніх дисбалансів у матриці взаємодії, а також відсутність малих сімей, які взаємодіють з дуже вузьким фрагментом зовнішнього світу.

Доведення. Припустимо протиріччя, що висновок про мудрість не виконується. Тоді має існувати сімейство агентів, які мають позитивний вплив при $n \to \infty$, і решта невпливових сімей. Оскільки сума впливів повинна складати до 1, наявність деяких дуже впливових агентів вимагає наявності великої кількості невпливових агентів. Зокрема, впливова сім'я повинна бути досить малою. Як результат, він може видавати лише обмежену кількість довіри, і, отже, може мати лише настільки ж обмежену кількість довіри, використовуючи умову балансу. Нагадаємо, що вплив агента – це зважена за довірою сума впливу тих, хто йому довіряє. Зараз невпливова сім'я не має достатнього впливу, щоб підтримати високий вплив впливової сім'ї, оскільки вона може наділити цю сім'ю лише обмеженою кількістю довіри. Але також впливова сім'я не може отримати всю свою підтримку всередині себе, оскільки за умови мінімальної дисперсії вимагає, щоб вона надсилала нетривіальну кількість своєї довіри назовні.

4 Висновки

Модель Де-Грот та її варіанти є важливими та потужними інструментами для вивчення різноманітних питань, пов'язаних з поширенням інформації та навчання. Оскільки матриця T є те, що можна дослідити емпірично, воно відкриває суттєві перспективи не тільки в якості інструмента для емпіричного дослідження. У багатьох ситуаціях зрозуміло, що думки та переконання не збігаються з консенсусом, незважаючи на те, що суспільства сильно пов'язані, але в інших ситуаціях ми бачимо консенсус. Постійні відмінності можуть бути пов'язані з низкою факторів, включаючи оновлення, яке трапляється нечасто, або лише декілька повторень. Або з значеннями, які з часом змінюються. Або з агентами, які по-різному співвідносять події та концентруються по-різному на оновленні. Або з нестаціонарністю у базовому середовищі (постійно надходить нова інформація). Модель Де-Грот та деякі її варіанти служать потужними вихідними точками для аналізу еволюції переконань. Проте ще не досліджено, в яких обставинах ці моделі забезпечують корисні прогнози та подальший розвиток теорії.

Ми пропонуємо обмежено-раціональну модель формування думки, в якій люди піддаються упередженості переконання; тобто вони не враховують можливе повторення отриманої інформації. Ми показуємо, що упередженість переконання передбачає явище соціального впливу, внаслідок чого вплив на думки групи залежить не тільки від точності, а й від того, наскільки він зв'язаний у соціальній мережі, що визначає спілкування. Упередженість переконання також передбачає явище одновимірних думок; тобто думки людей щодо багатовимірного набору питань сходяться до єдиного спектру "ліворуч-праворуч". Ми досліджуємо наслідки нашої моделі в декількох природних умовах, включаючи політичні науки та маркетинг, і отримуємо ряд нових емпіричних наслідків.

5 Використана література

Література

[1] Балла, В та Гоял, С (1998) «Learning from Neighbors,» Огляд економічних досліджень, 65, 595-621.

[2] Гейл, Д. і С. Карів (2008) (2008) «Bayesian Learning in SocialNetworks,» Ігри та економічна поведінка 45 (2): 329-346

[3] ДеМарзо, Ваянос і Звібел (2003) «Persuasion Bias, Social Influence, and Unidimensional Opinions,» Квартальний журнал з економіки, 118 (3):pp. 909-968.

[4] Голуб, Б. та М.О. Джексон (2007) «Naive Learning in Social Networks: Convergence, Influence, and the Wisdom of Crowds,» http://www.stanford.edu/~jacksonm/naivelearning.pdf.

[5] Бергер, Р.Л. (1981) «A necessary and sufficient condition for reaching a consensus using De Groot's method,» Journal of the American Statistical Association, 76, 415-419.

[6] Ю. Краус (2002) «Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulations,» Журнал штучних товариств і Соціальне моделювання, 5: 3, 2002.

[7] Дефант Г., Д. Неу, Ф. Амбард і Г. Вейсбух (2000) «Mixing beliefs among interacting agents,» Advances in Complex Systems, 3, 87-98.

[8] Лоренц, Дж (2005) «A stabilization theorem for dynamics of continuous opinions,» Physica A, 355, 217-223.

[9] Фрідкін Н.Е. і Джонсен Е.С. (1997) «Social positions in influence networks,» Соціальні мережі, 19, 209-222.

[10] Хартфіел та Маєром (1998) « Про структуру стохастичних матриць з субдомінантним власним числом біля 1,» Лінійна алгебра та її додатки, 272: 1, 193-203.

[11] Чегер, Дж (1970) « Нижня межа для найменшого власного значення Лапласіана,» Проблеми аналізу (статті, присвячені Соломону Бохнеру, 1969), стор. 195-199, Princeton Univ. Прес, Прінстон, штат Нью-Джерсі.

[12] Оурі, С., Н. Лініал і А. Ведгерсон, (2006) «Графіки розкладу та їх Програми,» Вісник Американського математичного товариства, 43: 4, 439-561., Штат Нью-Джерсі.