МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Магістерська робота

Ігри керування запасами

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 - математика,
спеціалізації математична економіка та економетрика
Сало Наталія Віталіївна

Науковий керівник:
доц. Козицький В.А.

Роботу рекомендовано до захисту на засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
протокол від 04 грудня 2020 року №4

В.о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М.О.

Львів - 2020

Зміст

1 Вступ

Логістика - це наука про планування, управління і контроль руху матеріальних та інформаційних потоків в просторі і в часі від їх первинного джерела до кінцевого споживача. У логістиці важливу роль відіграють логістичні процеси, що представляють собою реалізацію певних послідовностей логістичних операцій і управління ними в рамках відповідних систем. Особливе значення в логістичному менеджменті має управління запасами. Теорія управління запасами - це наукова дисципліна і сфера практичної діяльності з управління матеріальними потоками і запасами в логістичних системах і міжсистемних утвореннях, спрямованих на оптимізацію логістичних витрат.

Виникнення теорії управління запасами пов'язане з роботами Ф. Харріса, Р. Уїлсона і Ф. Еджоурта, в яких досліджувалася проста оптимізаційна модель для визначення економічного розміру замовлення EOQ (Economic Order Quantity) при детермінованому попиті. Після них Т. Уайтіном був розроблений стохастический варіант простої моделі розміру партії замовлення.

В даний час теорія управління запасами (Inventory Theory) продовжує інтенсивно розвиватися, особливо в країнах з розвиненою ринковою інфраструктурою. Результати досліджень в цьому науковому напрямку знайшли широке практичне застосування в управлінні бізнес-процесами. Різноманітність реальних умов реалізації логістичних процесів в виробничо-комерційних структурах (фірмах, підприємствах), наявність внутрішніх і особливо зовнішніх збурень створюють безліч можливих варіантів рішень задач управління запасами товарів. Нині теорія управління запасами пропонує для вирішення завдань оптимізації логістичних процесів практично орієнтовані економіко-математичні моделі, які, як правило, ширяться на випадки, коли на ринку існує одна фірма, яка виробляє або поставляє певний товар. Але при моделюванні більшості завдань управління запасами не розглядається одна важлива сторона - конкурентне ринкове середовище, в якій конкурують кілька виробничо-комерційних структур. Неврахування цього факту призводить до того, що впровадження відповідних розроблених моделей в логістичні системи фірм виявляється нераціональним. Це викликає необхідність застосування нових наукових теорій, за допомогою яких можливо моделювати конфліктні ситуації. Один з можливих підходів для вирішення завдань управління матеріальними запасами в умовах наявності декількох конкуруючих фірм пропонує теорія ігор. Теорія ігор дозволяє аналізувати прийняття рішень економічними суб'єктами (гравцями) в ситуаціях, коли на результат цих рішень впливають дії, що вживаються іншими економічними суб'єктами. Математичні моделі таких ситуацій прийнято називати іграми.

У даній маністерській роботі наведено моделі оптимізації логістичних процесів (систем управління матеріальними запасами) фірм для випадків ринкової конкуренції в теоретико-ігровий постановці.

2 Загальні поняття в теорії ігор

На промислових підприємствах теорія ігор може застосовуватися для вибору оптимальних рішень, наприклад, при створенні раціональних запасів сировини, матеріалів, напівфабрикатів, коли конкурують дві тенденції: збільшення запасів, які гарантують безперебійну роботу виробництва і скорочення запасів у цілях мінімізації витрат на їх зберігання. У сільському господарстві теорія ігор може застосовуватися при вирішенні таких економічних завдань, як посіву однієї з можливих культур, урожай якої залежить від погоди, якщо відомі ціна одиниці тієї чи іншої культури і середня врожайність кожної культури в залежності від погоди (наприклад, чи буде літо посушливим, нормальним або дощовим); в цьому випадку одним гравцем виступає сільськогосподарське підприємство, що прагне забезпечити найбільший дохід, а іншим - природа.

Рішення подібних завдань вимагає повної визначеності у формулюванні їх умов (*правил гри*): встановлення кількості гравців, виявлення можливих стратегій гравців, можливих виграшів (програш розуміється як негативний виграш). Важливим елементом в умові ігрових завдань є *стратегія*, тобто сукупність правил, які залежно від ситуації в грі визначають однозначний вибір дії даного гравця. Важливими є поняття *оптимальної стратегії.* Це така стратегія, яка задовольняє умову оптимальності, тобто один з гравців повинен отримувати максимальний виграш, коли другий дотримується своєї стратегії. У той же час другий гравець повинен мати мінімальний програш, якщо перший дотримується своєї стратегії. Оптимальні стратегії повинні задовольняти умові стійкості, тобто будь-якому з гравців має бути невигідно відмовитися від своєї стратегії в цій грі.

Означення 2.1. *Гра в стратегічній або нормальній формі визначається системою $G = (N, (A_i), (U_i))$:*

- $N = \{1,...,n\}$ *- множина гравців;*
- A_i *- множина стратегій i-го гравця;*
- U_i*:* $A = \bigotimes_j A_j \to R$ *- функція виграшу i-го гравця.*

Сукупність стратегій $a = (a_1, ...a_n)$ - називається *ситуацією гри* або *профілем гри.* Нехай $a \in A$ - профіль гри, тоді $u_i(a)$ - виграш гравця при реалізації ситуації a. [3]

Традиційно теорію ігор можна розділити на дві галузі: некооперативна та кооперативна теорія ігор. Некооперативні ігри використовують поняття стратегічної рівноваги або просто рівноваги для визначення раціональних результатів гри. Найбільш використовувані концепції - це домінантна стратегія, рівновага Неша та ідеальна ріновага підігри.

Рівновага Неша: стратегії, обрані всіма гравцями, перебувають у рівновазі Неша, якщо жоден гравець не може виграти, змінивши свою стратегію в односторонньому порядку. Неш довів, що кожна фінальна гра має принаймні одну рівновагу Неша.

Домінуюча стратегія - це та стратегія, яка досягає найвищої вигоди, незалежно від стратегій інших гравців. Іншими словами, та, яка є оптимальною за всіх обставин. Якщо стратегії є домінуючими, вони також становлять рівновагу Неша, однак протилежне твердження не обов'язково вірне.

Досконала рівновага підігри: стратегії в екстенсивній формі знаходяться в ідеальній рівновазі підігри, якщо стратегії становлять рівновагу Неша в кожній точці рішення.

У теорії кооперативних ігор групи гравців сприймаються як примітиви, і між гравцями можуть бути укладені обов'язкові угоди, які можуть створювати коаліції. У такій грі вигода виникає тоді, коли два або більше гравців співпрацюють і складають коаліцію. Тоді кооперативна теорія ігор може визначити концепцію рішення, яка повинна відповідати набору припущень (так званих аксіом). Найголовнішими з них є:

Оптимальність за Парето: загальна корисність, розподілена між гравцями, повинна дорівнювати загальній корисності гри.

Індивідуальна раціональність: корисність, яку отримує кожен гравець, повинна бути вищою, ніж корисність, яку він отримує, діючи без коаліції.

Відкат: корисність, призначена гравцеві, завжди повинна бути невід'ємною.

Монотонність: із загального збільшення корисності, розподіл для гравця повинен бути вищим.

Означення 2.2. *Профіль гри $a^* = (a_1^*, ...a_n^*) \in A$ - називається рівновагою Неша гри G, якщо*

$$\forall i \in N, \quad u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a_{-1}^*), \quad \forall a_i \in A_i,$$

де $a_{-1}^* = (a_1^*, ..., a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, ...a_n^*) \in \bigotimes_{j \neq i} A_i$.

3 Ігри керування запасами

Головна мета задачі керування запасами - мінімізація середніх (довгострокових) витрат за одиницю часу на купівлю та збереження чинника, забезпечуючи заздалегідь обумовлений мінімальний рівень обслуговування.

Фірми можуть заощадити витрати за збереження запасів, якщо будуть кооперуватися. Наприклад, якщо є фіксована плата за замовлення, то фірмам доведеться платити з врахуванням витрат за замовлення, коли вони замовляють одночасно як група, а не окремо. Це призводить до задачі розподілу витрат: *як мають бути розподілені мінімальні загальні витрати, за замовлення та зберігання запасів чинника, головної коаліції між окремими фірмами.*

У базовій моделі керування запасами наявна одна фірма, яка у виробничому процесі використовує деякий чинник. Попит на продукт фірми сталий протягом часу і споживання чинника також стале і дорівнює $d > 0$ одиниць за одиницю часу. Припустимо, що фірма володіє або орендує склад, який має достатню вмістимість й існує один постачальник, який виконує всі замовлення. Фірма не дає підстави закінчитися чиннику на складі. Не обмежуючи загальності, припустимо, що час між розміщенням замовлення і доставкою дорівнює нулю.

Фірма стикається з двома видами витрат. Перший - вартість замовлення. Припустимо, що вартість замовлення не залежить від кількості замовлення.

Вона охопоює, наприклад, витрати на телефонний зв'язок, витрати на доставку, вартість робочої сили. Щоразу, коли фірма робить замовлення, вона сплачує фіксовану вечичину $a > 0$. Другий - вартість зберігання чинника. У цю вартість входить страхування, оренда складу, якщо склад не належить фірмі, амортизація, якщо склад перебуває у власності фірми, світло тощо. Вартість зберігання за одиницю часу вважаємо сталою і приймемо $h > 0$.

Приймемо за Q - кількість замовлення кожного разу фірмою. Час між двома послідовними замовленнями дорівнює Q/d одиниць часу (часовий інтервал дорівнює Q/d). Цикл визначається часовим інтервалом Q/d, починаючи з моменту замовлення. За m приймемо кількість розміщених замовлень за одиницю часу: $m = Q/d$.

Протягом циклу запас чинників спадає зі сталою швидкістю. Оскільки螺 середнє замовлення становить Q/d за одиницю часу, то середня вартість замовлення за одиницю часу становить aQ/d. Оскільки при розміщенні замовлення розмір запасу дорівнює нулю, то середній розмір запасів становитиме $\frac{1}{2}(0 + Q) = Q/2$. Тоді середня вартість зберігання протягом одиниці часу становить hQ/d. Отже, загальна вартість замовлення та зберігання чинника для фірми за одиницю часу, $AC(Q)$ дорівнює

$$AC(Q) = a\frac{d}{Q} + h\frac{Q}{2}$$

Мінімізуючи середню вартість $AC(Q)$ при $Q > 0$, отримаємо:

- оптимальний обсяг замовлення $Q^* = \sqrt{2ad/h}$;
- оптимальну кількість замовлень за одиницю часу $m^* = d/Q^* = \sqrt{dh/(2a)}$;
- оптимальну довжину циклу споживання $t^* = Q^*/d = \sqrt{2a/(dh)}$;
- мінімальні середні витрати за одиницю часу $AC(Q^*) = 2am^*$.

Зауважимо, що в оптимумі вартість за одиницю часу обидвох замовлення і збереження однакова і дорівнює am^*.

Тепер розглянемо *задачу керування запасами* для n-фірм - (N, d, h, a), де $N = \{1, ..., n\}$ - множина фірм, $d \in \mathbb{R}^{N}_{++}$ - вектор рівнів попиту,
$h \in \mathbb{R}^{N}_{++}$ - вектор витрат за зберігання чинників і $a > 0$ - загальна вартість замовлення. Через Q_i позначимо обсяг замовлення фірми $i \in N$. Якщо дві фірми вирішили зробити замовлення в той самий час, вони можуть зробити його спільно, що призведе до економії у розмірі a. Мета полягає в оптимізації термінів і розмірів замовлення різними фірмами, враховуючи те, що вони можуть кооперуватися. Ми вимагаємо, щоб в оптимумі фірми мали цикли однакової довжини і робили одночасно замовлення. Для спрощення розглянемо випадок $n = 2$. Припустимо, що перша фірма має довший цикл ніж друга. Тоді загальна вартість знижується, якщо перша фірма скорочує тривалість свого циклу до тривалості циклу другої фірми. Насправді, загальна вартість зменшиться, оскільки зменшиться замовлення для першої фірми; також зменшаться витрати на зберігання першої фірми, а для другої все залишиться без змін.

Довжина циклу фірми $i \in N$ дорівнює Q_i/d_i, тому $Q_i/d_i = Q_j/d_j$ для всіх $i,j \in N$. Отже, в оптимумі отримуємо, що $Q_i = \frac{d_i}{d_1}Q_1$ для кожної фірми $i \in N$. Тому сукупні середні витрати за одиницю часу для фірм такі:

$$AC(Q_1,...,Q_n) = a\frac{d_1}{Q_1} + \sum_{i\in N} h_i \frac{Q_i}{2} = a\frac{d_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{2d_1}\sum_{i\in N} h_i d_i$$

або

$$AC(Q_1) = a\frac{d_1}{Q_1} + \frac{Q_1}{2d_1}\sum_{i\in N} h_i d_i$$

Мінімізуючи останню рівність за $Q_1 > 0$ отримаємо:

оптимальний рівень замовлення для кожної фірми $i \in N$

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2ad_i^2}{\sum\limits_{j\in N} d_j h_j}};$$

оптимальну кількість замовлень за одиницю часу

$$m_N = \frac{d_i}{Q_I^*} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j\in N} d_j h_j}{2a}} = \sqrt{\sum_{j\in N} m_j^2},$$

де $m_i = d_i/Q_i^* = \sqrt{d_i h_i/(2a)}$ - кількість замовлень, які мінімізують витрати фірми i;

мінімальну середню вартість

$$AC(Q_1^*) = 2am_N.$$

В опитумі витрати на замовлення та витрати на зберігання однакові і дорівнюють am_N. Зауважимо, що мінімальні витрати залежать лише від параметра a та опимальної кількості замовлень за одиницю часу m_i різних фірм. Отже, для обчислення мінімальних витрат достатньо, щоб кожна фірма $i \in N$ зазначила своє оптимальне значення m_i і не потрібно подавати значення параметрів d_i та h_i. Якщо всі фірми зроблять єдине замовлення, то розмір замовлення фірми $i \in N$ є d_i/m_N, який (оскільки $m_N > m_i^*$) є меншим за індивідуально оптимальний розмір d_i/m_N^* (оскільки $m_N > m_i^*$). Тоді матимемо зниження середнього рівня запасу фірми i, а отже, зниження витрат на зберігання. Припустимо, що кожна фірма платить свої витрати за зберігання і тоді виникає запитання, як розділити оптимальну вартість am_N замовлення.

Ми отримали *задачу розподілу витрат за замовлення запасів* - OPC-задачу, яка визначається трійкою $\langle N, a, m\rangle$, $a > 0$ і $m \in \mathbb{R}\ ^N_{++}$. Кожній OPC-задачі зіставимо TU-гру: $\langle N, c_0\rangle$, де $c_0(\emptyset) = 0$ і

$$c_0(S) = am_s,\ m_s = \sqrt{\sum_{i\in S} m_i^2} \text{ для кожної коаліції } S \subset N,$$

яка називається *гра визначення вартості замовлення (Ordering cost game)* - OCG-гра. [1]

Теорема 3.1. *Нехай $\langle N, a, m\rangle$ - OPC-задача і нехай $\langle N, c_0\rangle$ відповідна гра визначення вартості замовлення запасів. Тоді гра $\langle N, c_0\rangle$ - увігнута і монотонна.*

Доведення. Нехай $\langle N, c_0\rangle$ відповідна гра визначення вартості замовлення. Оскільки $\sum\limits_{i\in S} m_i^2$ зростає зі збільшенням кількості елементів в S і функція $\sqrt{x}$ монотонно зростаюча й увігнута, то гра $\langle N, c_0\rangle$ - монотонна й увігнута. □

Зауважимо, що $c_0^2(S) = \sum\limits_{i \in S} c_0^2(i)$ для кожної $S \subset N$. Отже, гра визначення вартості замовлення повністю характеризується визначенням індивідуальних витрат. Оскільки такі ігри увігнуті, то мають непорожнє С-ядро, щобільше є цілком збалансовані ігри. Наведемо правило розподілу для цього класу ігор, яке визначає розподіл з С-ядра. Оскільки в нас гра розподілу витрат, то розподіл $x \in \mathbb{R}^N$ належить до С-ядра гри визначення ватості замовлення, якщо $\sum\limits_{i \in N} x_i = c_0(N)$ і $\sum\limits_{i \in S} x_i \leq c_0(S)$ для всіх $S \subset N$.

Ще однією влістиістю OCG-ігор є те, що множення гри на додатний множник дає іншу OCG-гру:

$$\lambda > 0,\, \lambda c_0(S) = a\sqrt{\sum_{i \in S} (\lambda m_i)^2}, \quad \forall S.$$

Гра $\langle N, \lambda c_0 \rangle$ відпоідає OCP-задачі $\langle N, a, \lambda m \rangle$. Проте сума двох OCG-ігор не є OCG-гра.

Для класу OCG-ігор визначимо *правило розподілу витрат за замовлення (Share the ordering cost rule)* або SOC-правило за формулою

$$SOC_i(\langle N, c_0 \rangle) = \frac{c_0(i)^2}{\sum\limits_{j \in N} c_0(j)^2} c_0(N) = \frac{c_0(i)^2}{c_0(N)} \text{ для всіх } i \in N.$$

Це правило розподіляє загальні витрати пропорційно до квадрата індивідуальних витрат фірми. Його можна переписати у вигляді

$$SOC_i(\langle N, c_0 \rangle) = \frac{m_i^2}{\sum\limits_{j \in N} m_j^2} c_0(N) = \frac{a m_i^2}{\sum\limits_{j \in N} m_j^2},\ \forall i \in N.$$

[1]

Теорема 3.2. *Нехай $\langle N, a, m \rangle$ - OPC-задача і нехай $\langle N, c_0 \rangle$ відповідна OCG-гра. Тоді SOC-правило визначає розподіл, який належить С-ядру гри.*

Для характеризації SOC-правила наведемо властивосі правила розподілу витрат. Позначимо через IG^N - клас керування запасами (OCG-ігор) з множиною фірм N.

- (EFF) - ефективність: правило розподілу витрат $\phi : IG^N \to \mathbb{R}$ задовольняє властивість ефективності, якщо

$$\sum_{i \in N} \phi_i(N, c_0) = c_0(N), \quad \forall c_0 \in IG^N;$$

- (SYM) - симетрія: правило розподілу витрат $\phi : IG^N \to \mathbb{R}$ задовольняє властиість симетрії, якщо $\phi_i(N, c_0) = \phi_j(N, c_0)$ для всіх симетричних агентів i та j при c_0 і всіх $c_0 \in IG^N$;

- (MON) - монотонність: правило розподілу витрат $\phi : IG^N \to \mathbb{R}$ задовольняє властивість монотонності, якщо для всіх $c_0, \bar{c}_0 \in IG^N$ матимемо $c_0(N)\phi_i(N, c_0) \geq \bar{c}_0(N)\phi_i(N, \bar{c}_0)$, коли $c_0(i) \geq \bar{c}_0(i)$.

[1]

Теорема 3.3. *Правило розподілу SOC - єдине правило розподілу витрат визначене на класі OCG-ігор, яке задовольняє властивості EFF, SYM і MON.*

Мінімальні витрати на замовлення і зберігання коаліції N дорівнюють $2am_N = 2a\sqrt{\sum\limits_{i\in S} m_i^2}$. Визначимо відповідну гру керування запасами (Inventory game) - IG-гру $\langle N, c_v\rangle$, яка коаліції S визначає мінімальні витрати

$$c_v(S) = 2a\sqrt{\sum_{i\in S} m_i^2} \quad \text{і} \quad c_v(\emptyset) = 0,$$

тобто $c_v(S) = 2c_0(S)$ для кожної коаліції S.

Властивості OCG-ігор справедливі і для IG-ігор. SOC-правило OCG-ігор можна використати для побудови розподілу C-ядра IG-ігор. SOC-правило розподіляє загальну вартість замовлення головної коаліції серед гравців. В IG-грі розділити вартість замовлення і зберігання. Фірма i повинна оплатити свою частку замовлення відповідно до SOC-правила і власну вартість зберігання:

$$r_i(c_v) = SOC_i(c_0) + h_i Q_i^*/2,$$

ду Q_i^* - оптимальний обсяг замовлення запасі для фірми i. [1]

Теорема 3.4. *Нехай $\langle N, c_v\rangle$ - гра керування запасами. Тоді*

$$r(c_v) \in C(c_v).$$

4 Модель безперервного огляду з рівномірним попитом

Моделі запасів класифікуються на детерміновані і стохастичні. Детерміновані моделі - це моделі, де попит на певний період відомий, тоді як у стохастичній моделі, попит - це випадкова величина, що має відомий розподіл ймовірностей. Ці моделі також можна класифікувати за способом перегляду інвентаризації, постійним або періодичним. У безперервній моделі замовлення розміщується, як тільки рівень запасу опускається нижче встановленої точки переупорядкування. Під час періодичного огляду, рівень запасів перевіряється через окремі проміжки часу, і рішення про замовлення приймаються лише в цей час, навіть якщо запас опускається нижче точки переупорядкування між часом перевірки.

Перша модель, яку ми розглянемо, це модель безперервного огляду з рівномірним попитом. Ми використовуємо цю модель, щоб визначити, коли потрібно поповнити запаси та на скільки, щоб мінімізувати витрати. Ця модель має дві форми. У першій моделі недопустимі нестачі, а в другій - допустимі.

1) **Нестача не дозволена**. Будемо використовувати такі позначення:

a - попит на товар;

Q - одиниць партії запасів;

$\frac{Q}{a}$ - тривалість циклу або час між виробничими циклами;

K - вартість встановлена для виготовлення або замовлення однієї партії;

c - собівартість одиниці продукції або придбання кожної одиниці;

h - вартість утримання за одиницю одиниці часу, проведеного в запасах;

Q^* - кількість, яка мінімізує загальну вартість за одиницю часу;

t^* - час, необхідний для виведення цього оптимального значення Q^*.

При фіксованому рівні попиту, недостачі можна уникнути, поповнюючи запаси кожного разу, коли рівень запасів опускається до нуля, і це також мінімізує витрати на утримання. Загальна вартість за цикл дорівнює загальній собівартості продукції за цикл плюс вартість утримання поточних запасів.

Загальна собівартість продукції за цикл, PC, визначається наступним рівнянням:

$$PC = K + cQ.$$

Середній рівень запасів протягом циклу становить $(Q + 0)/2 = Q/2$ одиниць за одиницю часу, і відповідна вартість становить $hQ/2$ за одиницю часу. Оскільки тривалість циклу Q/a, вартість утримання за цикл визначається наступним чином:

$$\frac{hQ}{2}\frac{Q}{a} = \frac{hQ^2}{2a}.$$

Отже, загальна собівартість продукції за цикл становить:

$$K + cq + \frac{hQ^2}{2a}.$$

Однак нам потрібні загальні витрати за одиницю часу, тому ми ділимо загальну собівартість продукції за цикл на $\frac{Q}{a}$ щоб отримати наше рівняння загальної вартості за одиницю часу:

$$\frac{aK}{Q} + ac + \frac{hQ}{2}.$$

Значення Q^*, що мінімізує загальну вартість, знайдемо, взявши похідну загальної вартості і встановивши її рівною нулю, і вирішивши для Q. Після деяких обчислень, ми приходимо до наступних двох рівнянь, які описують нашу модель:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}, \tag{1}$$

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}. \tag{2}$$

2) **Нестача дозволена**. Іноді варто дозволити появу невеликих дефіцитів, оскільки тривалість циклу потім може бути збільшена, що призведе до економії витрат на налаштування. Однак ця вигода може бути компенсована вартістю дефіциту. Отже, давайте подивимось на рівняння, якщо допускається нестача. Спочатку введемо кілька нових позначень:

p = дефіцитна вартість за одиницю часу;

S = рівень запасу відразу після додавання Q одиниць;

$Q - S$ = дефіцит запасів безпосередньо перед додаванням Q одиниць;

S^* = оптимальний рівень нестачі.

Виробнича собівартість за цикл, PC, така ж, як у моделі безперервного огляду без дефіциту. Протягом кожного циклу, рівень запасів є позитивним протягом часу S/a. Середній рівень запасів за цей час становить $(S+0)/2 = S/2$

одиниці за одиницю часу, а відповідна вартість становить $hS/2$ за одиницю часу. Отже, вартість утримання за цикл тепер визначається:

$$\frac{hS}{2}\frac{S}{a} = \frac{hS^2}{2a}.$$

Крім того, на деякий час виникає недостача $(Q - S)/a$. Середній розмір нестачі протягом цього часу становить $(0 + Q - S)/2 = (Q + S)/2$ одиниць за одиницю часу, а відповідна вартість становить $p(Q - S)/2$ за одиницю часу. Отже, вартість нестачі за цикл:

$$\frac{p(Q-S)}{2}\frac{Q-S}{a} = \frac{p(Q-S)^2}{2a}$$

Знову ж таки, нам потрібні загальні витрати за одиницю часу. Для того, щоб це визначити, ми додаємо всі наші витрати, а потім ділимо на тривалість циклу (Q/a), щоб отримати:

$$\frac{aK}{Q} + ac + \frac{hS^2}{2Q} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}.$$

У цій моделі є дві змінні рішення (S і Q), тому оптимальні значення (S^* і Q^*) знаходять шляхом встановлення часткових похідних $\delta T/\delta S$ і $\delta T/\delta Q$ рівними нулю. Ми розв'язуємо для Q^* і S^*, що веде до наших моделей. Наші три рівняння для цієї моделі такі:

$$S^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}}, \tag{3}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2aK}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}, \tag{4}$$

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}}\sqrt{\frac{p+h}{p}}. \tag{5}$$

[4,5]

Приклад. Припустимо, що попит на товар становить 30 одиниць на місяць, і товари вилучаються з постійною швидкістю. Вартість налаштування кожного разу, коли проводиться виробничий цикл для поповнення запасів, становить 15 умовних одиниць. Виробнича вартість - 1 у.о. за товар, а вартість утримання запасів - 0.30 у.о. за місяць.

(1) Припускаючи, що нестача недопустима, визначте, як часто проводити виробничий цикл і якого розміру він повинен бути.

Відповідь: Ми знаємо що $a = 30$, $h = 0.30$, $K = 15$. Тепер ми використовуємо рівняння 1, щоб отримати:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(30)(15)}{0.30}} = 54.77$$

Застосуємо рівняння 2 і отримаємо:

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{54.77}{30} = 1.83.$$

(2) Якщо недостача дозволена, але коштує 3 умовні одиниці за товар на місяць, визначте, як часто проводити виробничий цикл і якого розміру він повинен бути.

Відповідь: Тепер $p = 3$. Використаємо рівняння 4, щоб знайти Q^*:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(30)(15)}{0.30}}\sqrt{\frac{3+0.30}{3}} = 57.4433$$

Нарешті, ми використовуємо рівняння 5, щоб з'ясувати, як часто слід розміщувати замовлення:

$$t^* = \frac{Q^*}{a} = \frac{57.4433}{30} = 1.914.$$

5 Кількісні знижки

У попередніх моделях ми припускали, що вартість одиниці товару однакова незалежно від того, скільки одиниць було замовлено. Проте, при замовленні більшої кількості може виникнути зниження ціни.

Приклад. Припустимо, що одинична вартість для кожного динаміка становить $c_1 = 11$ у.о., якщо виробляється менше 10 000 динаміків, $c_2 = 10$ у.о., якщо виробництво становить від 10 000 до 80 000 динаміків, і $c_3 = 9,5$ у.о., якщо виробляється більше 80 000 динаміків. Попит на динаміки становить 8 000 на місяць, і вони виводяться з відомою постійною швидкістю. Вартість налаштування кожного разу, коли проводиться виробничий цикл для поповнення запасів, становить 12 000 у.о., а вартість утримання запасів - 0,30 у.о. за товар на місяць. Яка оптимальна політика?

З висновку першої моделі ми отримали, що якщо вартість одиниці становить c_j і $j = 1, 2, 3$, то загальна вартість одиниці часу, T_j, становить:

$$T_j = \frac{aK}{Q} + ac_j + \frac{hQ}{2}.$$

Значення Q, що мінімізує T_j, визначається за допомогою рівняння 1 із розділу 4 (припускаючи, що дефіцит не дозволяється). Для $K = 12\ 000$, $h = 0{,}30$ та $a = 8\ 000$, знаходимо, що $Q^* = 25\ 298$:

$$\sqrt{\frac{(2)(8000)(12000)}{0,30}} = 25298. \tag{6}$$

Для того щоб побачити, що 25 298 - це оптимальна політика, ми можемо оцінити мінімальні витрати для кожного T_j. Мінімальне можливе значення T_3 становить 89 200 у.о. (яке можна обчислити за допомогою рівняння 6, де $Q = 80\ 000$). Мінімальне можливе значення T_1 становить 99 100 умовних одиниць (яке визначається за допомогою рівняння 6, де $Q = 10\ 000$). Нарешті, мінімальне значення T_2, яке оцінюється в 25 298, становить 87 589 у.о. Оскільки $T_2 < T_3 < T_1$, краще виробляти в кількості 25 298.

6 Стохастична модель одного періоду без витрат на налаштування

Спочатку ми обговоримо базову модель, а потім покажемо дві її похідні. В одному виведенні ми будемо використовувати обчислення, а в іншому - не будемо. Вкінці, ми подивимось на кількох прикладах, як використовувати нашу модель.

6.1 Модель

Існує два ризики, пов'язані з вибором величини y, суми запасів на замовлення чи виготовлення. Існує ризик мати недостатьо запасів і, таким чином, спричинити дефіцитні витрати, і існує ризик мати занадто багато запасів і, тим самим отримати витрати на замовлення та зберігання надлишку запасів.

Для того, щоб мінімізувати ці витрати, ми зводимо до мінімуму очікуване значення суми вартості недостачі і вартості утримання. Оскільки попит є дискретною випадковою величиною з функцією розподілу ймовірностей $(P_D(d))$, понесені витрати також є випадковою величиною. Нехай $P_D(d) = P\{D = d\}$.

Тепер ми будемо збирати деяку довідкову інформацію про статистику. Очікуване значення деякого X, де X - дискретна випадкова величина з функцією ймовірності $p_x(k)$,позначається E_X і задається як:

$$E_X = \sum_{all\ k} k \cdot p_X(k).$$

Подібним чином, якщо Y - неперервна випадкова величина з функцією ймовірності $f_Y(Y)$,

$$E_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) dy.$$

Ми можемо сказати, що:

$$E(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx.$$

Тепер ми повернемося до аналізу наших витрат. Продана сума визначається:

$$min(D, y) = \begin{cases} D \text{ , якщо } D < y \\ y \text{ , якщо } D \geq y. \end{cases}$$

де D - попит, а y - запас. Тепер нехай $C(d, y)$ дорівнює вартості, коли попит D дорівнює d. Звернемо увагу, що:

$$C(d, y) = \begin{cases} cy + p(d - y) \text{ , якщо } d > y \\ cy + h(y - d) \text{ , якщо } d \leq y. \end{cases}$$

Тоді очікувана вартість визначається через $C(y)$,

$$C(y) = E[C(D, y)] = cy + \sum_{d=y}^{\infty} p(d - y) P_D(d) + \sum_{d=0}^{y-1} h(y - d) P_D(d).$$

Іноді подання розподілу ймовірностей D важко знайти, як у випадках, коли попит коливається у великій кількості можливих значень. Отже, ця дискретна випадкова величина часто наближується неперервною випадковою величиною. Для неперервної випадкової величини D нехай $\varphi_D(\xi)$ дорівнює функції щільності ймовірності D, а $\Phi(a)$ - кумулятивній функції розподілу D. Це означає що

$$\Phi(a) = \int_0^a \varphi_D(\xi) d\xi.$$

Очікувана вартість C (y) тоді визначається:

$$C(y) = E[C(D, y)] = \int_0^\infty C(\xi, y) \varphi_D d\xi.$$

Цю функцію очікуваних витрат можна спростити до $cy + L(y)$, де $L(y)$ називається очікуваним дефіцитом плюс вартість утримання. Тепер ми хочемо знайти значення y, скажімо y^0, що мінімізує функцію очікуваних витрат $C(y)$. Ця оптимальна кількість для замовлення y^0 це те значення, яке задовольняє:

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}. \tag{7}$$

[4]

6.2 Виведення моделі використовуючи обчислення

Для початку припустимо, що початковий рівень запасу дорівнює нулю. Для будь-яких додатніх констант c_1 і c_2, визначимо $g(\xi, y)$ як

$$g(\xi, y) = \begin{cases} c_1(y - \xi) \text{ , якщо } y > \xi \\ c_2(\xi - y) \text{ , якщо } y \leq \xi, \end{cases}$$

і нехай

$$G(y) = \int_0^\infty g(\xi, y) \varphi_D(\xi) d\xi + cy.$$

де $c > 0$. За визначенням,

$$G(y) = c_1 \int_0^y (y - \xi) \varphi_D(\xi) d\xi + c_2 \int_y^\infty (\xi - y) \varphi_D(\xi) d\xi + cy.$$

Тепер візьмемо похідну від $G(y)$ і встановимо її рівною нулю. Це дає нам,

$$\frac{dG(y)}{dy} = c_1 \int_0^y \varphi_D(\xi) d\xi - c_2 \int_y^\infty \varphi_D(\xi) d\xi + c = 0.$$

Оскільки,

$$\int_0^\infty \varphi_D(\xi) d\xi = 1,$$

ми можемо написати,

$$c_1 \Phi(y^0) - c_2[1 - \Phi(y^0)] + c = 0.$$

Тепер ми вирішимо цей вираз для $\Phi(y^0)$, що призводить до

$$\Phi(y^0) = \frac{c_2 - c}{c_2 + c_1}.$$

Щоб застосувати цей результат, нам потрібно показати що:

$$C(y) = cy + \int_y^\infty p(\xi - y)\varphi_D(\xi)d\xi + \int_0^y h(y - \xi)\varphi_D(\xi)d\xi,$$

має вигляд $G(y)$. Ми бачимо що $c_1 = h, c_2 = p$, і $c = c$, так що оптимальна кількість для замовлення y^0 це те значення, яке задовольняє

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}.$$

6.3 Без використання обчислень

Ми збираємось дійти до оптимальної політики, раціонально думаючи про витрати і не використовуючи числення.

Припустимо, поточний рівень замовлення - y^0 і ми розглядаємо можливість замовити ще одну одиницю. Ми намагаємось вирішити, хороша це ідея чи ні.

Середня чиста зміна загальних витрат дорівнює середній додатковій вартості на стороні холдингу мінус середня економія на стороні дефіциту. Оптимальна політика - це коли ця чиста середня зміна загальних витрат дорівнює 0.

Середні додаткові витрати з боку холдингу - це ймовірність того, що попит менший ніж y^0, $(P(D < y^0))$, помножена на додаткову вартість утримання ще однієї одиниці (h) плюс додаткова вартість покупки (c) або:

$$P(D < y^0)[h + c].$$

Середня економія на дефіциті - це ймовірність того, що попит більший або дорівнює y^0, $(P(D \geq y^0))$, помножений на вартість дефіциту, яку нам не потрібно більше платити (p) мінус вартість придбання цієї додаткової одиниці (c) або:

$$P(D \geq y^0)[p - c].$$

Тепер ми вирішимо таке рівняння для $\Phi(y^0)$, де $\Phi(y^0) = P(D < y^0)$ і отже, $1 - \Phi(y^0) = P(D \geq y^0)$:

$$0 = P(D < y^0)[h + c] - P(D \geq y^0)[p - c],$$

або

$$0 = \Phi(y^0)[h + c] - (1 - \Phi(y^0))[p - c].$$

і ми отримуємо, що оптимальною політикою є:

$$\Phi(y^0) = \frac{p - c}{p + h}.$$

Отже, ми бачимо, що в цій конкретній моделі, моделі одного періоду без витрат на налаштування, ми можемо дійти до нашої оптимальної політики без використання обчислень.

6.4 Приклади

1. Хлібопекарська компанія щодня розподіляє хліб продуктовим магазинам. Вартість становить 0,80 умовних одиниць за одиницю хліба. Компанія продає хліб магазинам за 1,20 у.о. за одиницю за умови, що він утилізується як свіжий хліб (продається в день, коли він випікається). Непроданий хліб повертається компанії. Компанія має торгову точку, яка продає хліб, який зберігається 1 день і більше за 0,60 у.о. за буханку. Значних витрат на зберігання цього хліба не понесено. Вартість втрати доброзичливого клієнта через нестачу оцінюється в 0,80 у.о. за буханець. Щоденний попит має рівномірний розподіл між 1 000 та 2 000 хлібцями. Знайдіть оптимальну добову кількість хлібців, яку повинен виготовити виробник.

Відповідь: $c = 0,80, h = -0,60ip = 1,20 + 0,80 = 2,00$

Оскільки попит має рівномірний розподіл, нам потрібно розв'язати $\varphi(z) = \int_a^z \frac{1}{b-a}dx$, де $a = 1000ib = 2000$ щоб отримати наступне:

$$\varphi(z) = \int_{1000}^{z} \frac{1}{1000}dx = \frac{z-1000}{1000}.$$

Тепер ми повинні підставити $x = y^0$ і вирішити наступне:

$$\frac{y^0 - 1000}{1000} = \frac{2-0,8}{2-0,6}.$$

Тому виробник повинен виготовити 1 857 буханок хліба.

2. Припустимо, що попит D на запасну частину літака має експоненціальний розподіл із середнім значенням 50, тобто

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-\frac{\xi}{50}}\xi \geq 0 \\ 0 \quad \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Цей літак буде застарілим через 1 рік, тому все виробництво запчастин має відбуватися на даний момент. Зараз виробничі витрати становлять 1 000 у.о. за товар, але вони становлять 10 000 у.о., якщо їх потрібно поставити пізніше, тобто $p = 10\ 000$. Витрати на утримання, що нараховуються на надлишок після закінчення періоду, становлять 300 у.о. за товар. Визначте оптимальну кількість запасних частин, які потрібно виробляти.

Відповідь: Ми знаємо що $c = 1\ 000$, $p = 10\ 000$ і $h = 300$. Розв'язуємо наступний інтеграл для a:

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{1}{50}e^{-\frac{\xi}{50}}d\xi = 1 - e^{\frac{-a}{50}}$$

Оптимальна кількість для виробництва, y^0 це те значення, яке задовольняє:

$$1 - e^{\frac{-y^0}{50}} = \frac{10000-1000}{10000+300} = 104$$

Тому ми знайшли оптимальну політику виробництва, що становить 104 запчастин.

7 Стохастична модель одного періоду з витратами на налаштування

7.1 Модель

Тепер ми припускаємо, що існують встановлені витрати, понесені під час замовлення або виготовлення товарно-матеріальних цінностей. Оптимальна політика запасів полягає в наступному

$$x \begin{cases} < s, & \text{замовити S - x, щоб довести рівень запасів до S,} \\ \geq s, & \text{не замовляйте.} \end{cases}$$

Визначаємо значення S з

$$\varphi(S) = \frac{p-c}{p+h},$$

що є саме оптимальною політикою стохастичної моделі без встановлених витрат.

Крім того, s - це найменше значення, яке задовольняє рівняння

$$cs + L(s) = K + cS + L(S).$$

Отже, ця політика називається політикою (s,S).

7.2 Виведення моделі

Для початку дефіцит і витрати на утримання визначаються $L(y)$, де

$$L(y) = p\int_y^{\infty}(\xi - y)\varphi_D(\xi)d\xi + h\int_0^y (y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi.$$

Отже, загальні очікувані витрати, понесені внаслідок доведення рівня запасів до y, задаються за

$$K + c(y-x) + L(y), y > x,$$
$$L(x), \qquad y = x.$$

Тепер ми визначимо S як значення від y, яке мінімізує $cy + L(y)$, і визначимо s як найменше значення від y , для якого $cs + L(s) = K + cS + L(S)$.

$$\text{Якщо } x > S, K + cy + L(y) > cx + L(x), \text{ для усіх } y > x,$$

так що

$$K + c(y-x) + L(y) > L(x).$$

Лівою частиною цієї нерівності є очікувані загальні витрати на упорядкування $y - x$, щоб довести рівень запасів до y, а правою стороною цієї нерівності є очікувані загальні витрати, якщо замовлення не відбувається.

Тому оптимальна політика говорить, що якщо $x > S$, не замовляйте.

Зауважимо, що якщо $s \leq x \leq S$, то

$$K + cy + L(y) \geq cx + L(x), \text{ для усіх } y > x,$$

так що

$$K + c(y - x) + L(y) \geq L(x).$$

Знову ж таки, ми бачимо, що краще не замовляти.

Тепер, якщо

$$\min_{y \geq x}\{K + cy + L(y)\} = K + cS + L(S) < cz + L(x),$$

або зробивши перестановку, ми отримуємо:

$$\min_{y \geq x}\{K + c(y - x) + L(y)\} = K + c(S - x) + L(S) < L(x),$$

так що вигідно платити за замовлення.

Тому ми отримуємо наступну оптимальну політику:

$$x \begin{cases} < s, & \text{замовити S - x, щоб довести рівень запасів до S,} \\ \geq s, & \text{не замовляйте.} \end{cases}$$

Крім того, s - це найменше значення, яке задовольняє рівняння

$$cs + L(s) = K + cS + L(S).$$

Таким чином, наша політика називається політикою (s, S). [5]

8 Виновоки

У цій магістерській роботі я розглянула два типи моделей: детерміновані моделі безперервного огляду та стохастичні моделі. Крім того, я дізналися про кількісні знижки та про те, як вони вплинули на наші моделі. Також я розглянула кілька прикладів використання цих моделей.

Погана комунікація між ланками в ланцюзі поставок та нехтування великими помилками прогнозу є частою причиною зростання витрат по всьому ланцюгу, що виникає внаслідок збільшення рівня запасів. У середовищі компаній глобального масштабу збір та синхронізація інформації, розподіленої між постачальниками та замовниками, часто порушується через комунікаційний шум. Це призводить до отримання неповних або неточних даних про майбутній попит без урахування поточної економічної ситуації на обраному ринку.

Для оптимізації функціонування ланцюга поставок являється важливим прогнозувати попит на рівні кожної ланки логістичного ланцюга. Сьогодні існує безліч прийомів і методів кількісного та якісного прогнозування. Однак через вимірюваність та об'єктивний характер статистичних методів вони частіше використовуються у багатьох компаніях, які є природними учасниками логістичних ланцюгів.

Окрім підготовки прогнозів із використанням обраного методу, ще однією проблемою є якість потоку інформації про величину попиту. Ця інформація передається лише між прямими ланками ланцюга поставок. Це означає, що фактичний розмір попиту на кінцевого споживача буде відомий лише продавцям та сусіднім ланкам, наприклад оптовикам. Інші учасники отримують інформацію про попит опосередковано. Ці два фактори впливають на неточне прогнозування попиту та перспективне зростання витрат запасів.

Рішенням може бути поєднання кількох методів прогнозування одночасно, використовуючи як кількісні, так і якісні методи, підготовлені на рівні співпраці між ланками. На основі оцінки помилок прогнозів можна оцінити, можливо, найкращі прогнози у досліджуваному логістичному ланцюжку, тоді як ефект поєднання методів залежить від характеру ланцюжка.

Правильна та циклічна оцінка споживчого ринку та сподівань споживачів є ключовим фактором планування розміру виробництва у компаніях. Ця оцінка, як правило, проводиться на основі прогнозів щодо кінцевої продукції. Чим точніше прогнозування попиту, тим ефективніші рішення для запланованого виробництва, нижчі рівні запасів та витрати на утримання запасів. Тому використання методів прогнозування в роботі компанії є економічно виправданим та раціональним.

9 Використана література

Література

[1] Julio Gonzalez-Diaz, Ignacio Garcia-Jurado and M. Gloria Fiestras-Janeiro. An introductory course on mathematical game theory American Mathematical Society/Real Sociedad Matematica Espanola, 2010 - 324с.

[2] М.Я. Бартіш, І.М. Дудзяний. Дослідження операцій. Частина 3. Ухвалення рішень і теорія ігор. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. - 278с.

[3] В.А. Козицький. Опуклі структури, методи оптимізацій та їхнє застосування в економічному аналізі. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008. - 450с.

[4] Hillier, Frederick S. and Gerald J.Lieberman. Introduction to Operations Research. United States of America: McGraw-Hill, Inc., 1995. - 998с.

[5] Ozer, Ozalp, and Wei Wei. Inventory Control with Limited Capacity an Advance Demand Information. Operations Research 52.6. 2004. - 988-1000.