МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної
економіки, економетрії,
фінансової та страхової
математики

Магістерська робота

Тривалість переговорів з випадковими пропозиціями

Виконала: студентка групи МТЕМ-21с
спеціальності 111 – *математика*
спеціалізації *математична економіка*
та економетрія
Мицик Адріана-Вікторія
Несторівна
Науковий керівник:
кан. фіз.-мат. н., доц. Куриляк А.О.

Роботу рекомендовано до захисту
на засіданні кафедри математичної
економіки, економетрії, фінансової та
страхової математики
протокол від 04 грудня 2020 року №4

В.о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М. О.

Львів 2020

Зміст

1 Вступ

Переговори є могутнім інструментом, який винайшло людство для урегулювання конфліктів, розв'язання спірних питань, організації спільної діяльності. Вони завжди припускають, принаймні, двох учасників, інтереси яких частково збігаються, а частково – розходяться. В інших випадках ми маємо справу зовсім з іншими видами взаємодії. Переговори – це факт нашого повсякденного життя, основний засіб одержати бажаний результат.

Ми домовляємося з колегами або підлеглими про час зустрічі, про розподіл обов'язків, про заробітну плату. Бізнесмени обговорюють умови угоди, організацію спільних підприємств, розділ повноважень і продукції. Дипломати домовляються про зобов'язання сторін, запобігання конфліктів, спільної боротьби з тероризмом та іншими державними проблемами.

Переговори можна вважати найбільш оптимальним і найефективнішим способом урегулювання й вирішення конфліктів. Небажання вести переговори для вирішення політичних конфліктів найчастіше пояснюється або мотивом уникнення невдачі, або відсутністю навичок переговорної взаємодії, або надмірними амбіціями сторін, що віддають перевагу силовому вирішенню конфлікту. Тому вивчення різноманітних аспектів переговорного процесу є не тільки актуальним напрямком наукових досліджень, але й перспективним. В даний час неможливо уявити реалізацію міжурядових угод без теоретико - ігрового аналізу. Теорія переговорів викристовується при моделюванні угод про обмеження стратегічних наступальних озброєнь, розподілу оборонних ресурсів для досягнення стійкого миру, процесу голосування в парламентських державах, для оцінки впливу тих чи інших політичних структур.

Об'єктом дослідження в даній дипломній роботі є переговори та їх тривалість. Переговори прийнято ділити на два класи: позиційні і раціональні. У позиційних переговорах кожен з учасників має свою суб'єктивну думку про вирішення проблеми конфлікту і повідомляє свою позицію іншим учасникам, при цьому дана позиція може не збігатися з думкою учасника, а бути лише інформаційним сигналом. Інші учасники переговорів можуть погодитися з даною пропозицією або відкинути її. Тоді переговори тривають до тих пір, поки сторони не дійдуть згоди, при цьому сторони можуть йти на поступки, щоб досягти консенсусу, або жорстко відстоювати заявлену позицію.

Метод раціональних переговорів орієнтований на те, щоб вирішувати проблеми на основі їх якісних властивостей, виходячи із суті справи, і при цьому не торгуватися. Метод раціональних переговорів передбачає жорсткий підхід до розгляду істоти справи і м'який підхід до відносин між учасниками переговорів. Суть методу полягає в тому, що кожний партнер прагне демонструвати увагу і ввічливість до опонентів, але твердо відстоювати свої позиції.

У раціональних переговорах рішення досягається на основі об'єктивних критеріїв справедливості. Особливу роль тут відіграє дизайн переговорів. Учасникам оголошуються правила, за якими ведуться переговори, і вони повинні їх дотримуватися. Часто для вирішення спору вводиться нова нейтральна сторона — арбітр або арбітражний комітет (журі), який стежить за дотриманням правил і приймає остаточне рішення за жеребом, голосуванням або за допомогою якогось іншого механізму. Схеми переговорів з арбітром будемо називати арбітражними процедурами.

Переговори можна номінувати як організаційну форму встановлення та юридичної фіксації виробничо-економічних зв'язків між зацікавленими в спільній діяльності економічно незалежними організаціями. Це формалізовний процес, що ставить конкретну мету, визначає коло питань і завжди реалізується в конкретних умовах, за конкретних обставин.

На сучасному етапі практикою напрацьовано принципи, умови та стратегії, дотримання яких сприяє результативності переговорного процесу. Від того, як будуть організовані і проведені ці переговори, залежить результат — успіх чи занепад проекту і, відповідно, фінансовий злет чи крах. Переговори — це не просто розв'язання проблеми або прийняття рішень, а й знаходження різних умов, які сприяють досягненню мети кожного.

В даній роботі ми розглянемо переговори з математичної точки зору, а саме арбітражні процедури з випадковими пропозиціями. Такі переговори відносяться до класу раціональних переговорів. Арбітр пропонує учасникам певне рішення, і ті погоджуються з ним або ні. Після цього приймається остаточне рішення шляхом певних заданих правил, або проводиться голосування.

2 Переговори з випадковими пропозиціями

Розглянемо задачу розділу ресурсу, де пропозиції робляться не самими гравцями, а деяким незалежним арбітром, який генерує деякі пропозиції, а гравці або погоджуються з цією пропозицією, або ні.

Розглянемо гру двох осіб. Нехай, рішення повинне бути досягнуто за K кроків. Нехай $x_i, i = 1, 2, ..., K$ — послідовність випадкових пропозицій, які ми інтерпретуємо як послідовність пропозицій арбітра на кроці i. Припустимо, що x_i незалежні, однаково розподілені випадкові величини зі щільністю $f(x)$, де $f(x)$ — неперервна додатна функція на проміжку $[0; 1]$ така, що

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \text{ і } \forall x \in [0, 1] : f(x) + f(1 - x) = 2.$$

Коли поступає пропозиція x_i, обидва гравці можуть прийняти її, і тоді першому гравцю дістанеться величина x_i, а другому $1 - x_i$. Якщо обидва гравці не приймають пропозицію, переговори переходять на наступний крок. Якщо ж один гравець приймає пропозицію, а інший ні, то переговори закінчуються в користь "ображеного" гравця. Означимо стратегію "прийняти пропозицію" через (A), а стратегію "заперечити пропозицію" через (R). Тоді при $(A - R)$ виграш першого гравця складає $x_i \wedge 1 - x_i$, а при $(R - A)$ виграш дорівнює $x_i \vee 1 - x_i$, де $\wedge$ і $\vee$ це відповідно мінімум та максимум двох чисел.

Процес переговорів триває до тих пір, поки хтось з гравців не прийме пропозицію арбітра, або поки не настане останній крок, і тоді виграш першого гравця складе x_K. Припустимо також, що з часом виграш гравців дисконтує. Тут δ, $0 < \delta \leq 1$ — дисконтуючий множник.

Описана гра є багатокроковою. Щоб вивести рівняння оптимальності скористаємось індукцією. Нехай, до кінця переговорів залишається k кроків і гравцям від арбітра надходить пропозиція x. Кожен з них може прийняти його або відкинути. У випадку $(A - A)$, $(A - R)$, $(R - A)$ гра закінчується з виграшем x, $x \wedge 1 - x$, $x \vee 1 - x$ відповідно. У разі ж $(R - R)$ гра триває, але виграш дисконтується. Припустимо, що гравцям вже відомий оптимальний виграш H_{k-1} в грі з $k - 1$ кроками. Тоді знаходження оптимальних стратегій на даному етапі зводиться до матричної гри вигляду

$$H_k(x) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & R \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ R \end{array} & \begin{bmatrix} x & x \wedge 1 - x \\ x \vee 1 - x & \delta H_{k-1} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Оскільки пропозиція арбітра x є випадковим, значення H_k гри, що складається з k раундів, є математичним сподіванням значення даної матричної гри. Отже, рівняння оптимальності має рекурентний вигляд

$$H_k = MvalH_k(x), k = 1, ..., K,$$

з граничною умовою $H_0 = 0$.

Теорема 1. *Для будь якого $k = 1, ..., K$ оптимальна стратегія першого гравця має вигляд*

$$I : \begin{cases} A & \text{якщо } \delta H_{k-1} \leq x \leq 1 - \delta H_{k-1} \\ R & \text{якщо } x \leq \delta H_{k-1} \leq 1 - \delta H_{k-1} \end{cases}$$

а оптимальна стратегія гравця II є R.

Значення гри задовольняє рекурентні співвідношення

$$H_k = (\delta H_{k-1})^2 + \frac{1}{4} \text{ і } H_k \leq 1/2, k \in \{1, ..., K\}.$$

Доведення.

$$H_0 < 1/2.$$

Припустимо що $H_{k-1} \leq 1/2$ для деякого $k \geq 1$, і доведемо $H_k \leq 1/2$. Нехай $x \in [0, 0, 5)$. Тоді матриця виграшів першого гравця матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} x & x \\ 1 - x & \delta H_{k-1} \end{pmatrix}$$

Другий стовпець матриці не більший, ніж перший стовпець. Відповідно, оптимальна стратегія гравця II є R. Щоб визначити оптимальну стратегію гравця I порівняємо x та δH_{k-1}. Якщо $x \leq \delta H_{k-1}$, то оптимальна стратегія гравця I буде R, і A в протилежному випадку.

Нехай тепер $x \in [0, 5, 1)$. Тоді матриця виграшів матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} x & 1 - x \\ x & \delta H_{k-1} \end{pmatrix}$$

Другий стовпець не більше, ніж перший, отже, оптимальна стратегія другого гравця буде R. Порівняємо $1 - x$ і δH_{k-1}. Якщо $1 - x \geq \delta H_{k-1}$ то оптимальна стратегія гравця I це A. А якщо $1 - x \leq \delta H_{k-1}$ або $x \geq 1 - \delta H_{k-1}$,то оптимальна стратегія R.

Отже, число гри задовольняє рівняння

$$H_k = \int_0^{\delta H_{k-1}} \delta H_{k-1} f(x) dx + \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} x f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1 - \delta H_{k-1}} (1 - x) f(x) dx +$$

$$+ \int_{1 - \delta H_{k-1}}^{1} \delta H_{k-1} f(x) dx = \int_0^{\delta H_{k-1}} (\delta H_{k-1}) f(x) dx + \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} x f(x) dx -$$

$$- \int_{\frac{1}{2}}^{\delta H_{k-1}} t f(1 - t) dt - \delta H_{k-1} \int_{\delta H_{k-1}}^{0} f(1 - t) dt = \delta H_{k-1} \int_0^{\delta H_{k-1}} f(x) dx +$$

$$+ \delta H_{k-1} \int_0^{\delta H_{k-1}} (2 - f(x)) dx - \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} x f(x) dx + \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} x f(1 - x) dx =$$

$$= 2\delta H_{k-1}\int_0^{\delta H_{k-1}} dx + \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} 2x dx =$$

$$= (\delta H_{k-1})^2 + x^2\Big|_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} = 2(\delta H_{k-1})^2 + \frac{1}{4} - (\delta H_{k-1})^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + (\delta H_{k-1})^2,\ t = 1 - x.$$

Доведемо, що $H_{k-1} < 1/2 \Rightarrow H_k < 1/2$. Це випливає з таких нерівностей

$$H_{k-1} < \frac{1}{2} < \frac{1}{2\delta},\ \delta H_{k-1} < \frac{1}{2}; (\delta H_{k-1})^2 < \frac{1}{4},$$

$$H_k = \frac{1}{4}(\delta H_{k-1})^2 + \frac{7}{16} < \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $H_0 = 0 \Rightarrow \forall k \in \{1, ..., k\} : H_{k-1} \in [0, 0, 5) \Rightarrow H_k \in [0, 0, 5)$.

□

Покажемо, до чого можуть призвести переговори з більшою кількістю кроків.

Теорема 2.

$$\lim_{n\to\infty} H_n = \frac{1 - \sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2}.$$

Доведення. Щоб знайти асимптотику H_n використаємо співвідношення $H_n = (\delta H_{k-1})^2 + \frac{1}{4}$. Зауважимо, що $H_1 - H_0 = \frac{1}{4} > 0$. Нехай для деякого $k \leq\ (K-1)$ має місце $H_k - H_{k-1} > 0$. Тоді

$$H_{k+1} - H_k = (\delta H_k)^2 + \frac{1}{4} - (\delta H_{k-1})^2 - \frac{1}{4} = \delta^2(H_k^2 - H_{k-1}^2) > 0.$$

Звідси випливає, що послідовність H_k зростає. Крім того, вона обмежена зверху 0,5, тобто дана послідовність має границю.

Границя H задовольняє рівняння $H = (\delta H)^2 + \frac{1}{4}$. Дане рівняння має два корені: $H = \frac{1+\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2}$ і $H = \frac{1-\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2}$, але тільки другий корінь рівняння задовольняє умову $H < \frac{1}{2}$.

Таким чином, границя послідовності H_n дорівнює $H = \frac{1-\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2}$. Коли $\delta \in (0; 2]$ зростає, то значення теж зростає від $\frac{1}{4}$ до $\frac{1}{2}$.

□

2.1 Тривалість переговорів

У моделі переговорів з випадковими пропозиціями їх тривалість також є випадковою. Цікаво оцінити цю величину. Визначимо випадкову величину τ — число періодів, протягом яких переговори тривають при оптимальній поведінці гравців. Якщо для переговорів виділено k кроків, то τ може приймати будь-яке значення від 1 до k.

Теорема 3. *Середня тривалість переговорів*

$$M_k\tau = 1 + \sum_{t=1}^{k-1}\prod_{r=1}^{t}\{2\delta H_{k-r}\}.$$

Доведення. Знайдемо розподіл випадкової величини τ. Переговори можуть завершитись на першому кроці. Якщо випадкова величина x_1 потрапить в інтервал $(\delta H_{k-1}; 1-\delta H_{k-1})$. Зауважимо, що

$$P(\delta H_{k-1} < x_1 < 1-\delta H_{k-1}) = \int_{\delta H_{k-1}}^{1-\delta H_{k-1}} f(x)dx =$$

$$= \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\delta H_{k-1}} f(x)dx =$$

$$t = 1-x \quad x = 1-t \qquad dx = -dt$$

$$= \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\delta H_{k-1}} f(1-t)dt =$$

$$= \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} f(1-x)dx =$$

$$= \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} (f(x)+f(1-x))dx =$$

$$= \int_{\delta H_{k-1}}^{\frac{1}{2}} 2dx = 2(\frac{1}{2} - \delta H_{k-1}) = 1 - 2\delta H_{k-1}.$$

Отже, ймовірність закінчення переговорів на першому кроці ($\tau = 1$), дорівнює $1 - 2\delta H_{k-1}$. А якщо переговори не закінчуються, то ймовірність їх завершення на наступному, другому кроці ($\tau = 2$) дорівнює

$$2\delta H_{k-1}(1 - 2\delta H_{k-2}) = 2\delta H_{k-1} - (2\delta)^2 H_{k-1}H_{k-2}.$$

Аналогічно, ймовірність зупинки на кроці t дорівнює

$$(2\delta)^{t-1}H_{k-1}\times\cdots\times H_{k-(t-1)}(1-2\delta H_{k-t}) =$$
$$(2\delta)^{t-1}H_{k-1}\times\cdots\times H_{k-(t-1)} - (2\delta)^{t}H_{k-1}\times\cdots\times H_{k-t}.$$

Отже, розподіл випадкової величини τ визначається співвідношеннями

$$P\{\tau = 1\} = 1 - 2\delta H_{k-1},$$

$$P\{\tau = t\} = (2\delta)^{t-1} H_{k-1} \times \dots \times H_{k-(t-1)}(1 - 2\delta H_{k-1})$$

для $t = 2, \dots, k$.

Тепер обчислимо математичне сподівання

$$M_k\tau = \sum_{t=1}^{k} P\{\tau \geq t\} = 1 + \sum_{t=1}^{k-1} (2\delta)^t H_{k-1} \times \dots \times H_{k-t} = 1 + \sum_{t=1}^{k-1} \prod_{r=1}^{t} \{2\delta H_{k-r}\}.$$

□

Теорема 4. *Справджується рекурентне співвідношення*

$$M_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k M_k \tau$$

та

$$\lim_{k \to +\infty} M_k \tau = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\right].$$

Доведення. Виконується

$$M_{k+1}\tau - M_k\tau = 2\delta H_k + (2\delta)^2 H_k H_{k-1} +$$

$$+(2\delta)^3 H_k H_{k-1} H_{k-2} + \dots + (2\delta)^n H_k H_{k-1} \dots H_1 -$$

$$-(2\delta H_{k-1} + (2\delta)^2 H_{k-1} H_{k-2} + (2\delta)^3 H_{k-1} H_{k-2} H_{k-3} + \dots$$

$$\dots + (2\delta)^{k-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots H_1) = 1 + (2\delta H_k - 1) +$$

$$+2\delta H_{k-1}(2\delta H_k - 1) + \dots + (2\delta)^{k-1} H_{k-1} H_{k-2} \dots$$

$$\dots H_1(2\delta H_k - 1) = 1 + (2\delta H_k - 1) M_k \tau,$$

відповідно, $M_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k M_k \tau$. В теоремі 2 було показано, що H_k — зростаюча послідовність. Використовуючи індукцію, покажемо, що $M_k\tau$ теж зростаюча. Для початку зауважимо, що $1 + \delta/2 = M_2\tau > M_1\tau = 1$. Якщо припустити, що для всіх $t \leq k-1$: $M_{t+1}\tau > M_t\tau$, то для $t = k$ отримаємо

$$H_k M_k \tau > H_{k-1} M_{k-1} \tau,$$

$$M_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k M_k \tau > 1 + 2\delta H_{k-1} M_{k-1} \tau = M_k \tau.$$

Послідовність $M_k\tau$ зверху обмежена значенням $\frac{1}{1-\delta}$, оскільки $M_1\tau = 1 < \frac{1}{1-\delta}$ для $k = 1$. Якщо $M_k\tau < \frac{1}{1-\delta}$ та $H_k < 1/2$, то

$$M_{k+1}\tau = 1 + 2\delta H_k M_k \tau <$$

$$< 1 + 2\delta H_k \frac{1}{1-\delta} < 1 + \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}.$$

$M_k\tau$ має границю M, яка задовольняє рівняння $M = 1 + 2\delta HM$. Тобто

$$M = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\right].$$

Для $\delta = 1$ границя $M_k\tau$ дорівнює $+\infty$. Рівнянню $H_k = (H_{k-1})^2 + \frac{1}{4}$ відповідає диференціальне рівняння $h' = \frac{(1-2h)^2}{4}$. Його розв'язок з граничною умовою $h(0) = 0$ буде $h(k) = \frac{k}{2(k+2)}$. Підставивши цей розв'язок, отримаємо

$$M_k\tau \sim 1 + \sum_{t=1}^{k-1}\prod_{r=1}^{t}\left\{\frac{k-r}{k-r+2}\right\} =$$

$$= 1 + \sum_{t=1}^{k-1}\frac{(k-t+1)(k-t)}{(k+1)k} = 1 + \sum_{t=1}^{k-1}\left(1 - \frac{t}{k+1}\right)\left(1 - \frac{t}{k}\right) =$$

$$= 1 + \frac{(k-1)k(k+1)}{3k(k+1)} = 1 + \frac{k-1}{3} = \frac{k+2}{3}.$$

Звідси отримаємо, що $M_k\tau \sim \frac{k}{3}$, тобто в переговорах без дисконтування середня тривалість переговорів займає приблизно третю частину часу, виділеного на їх проведення.

$\square$

2.2 Переговори з випадковим пропозиціями та лотереєю

Вище ми розглянули модель переговорів, де арбітр на кожному кроці пропонував гравцям деякий варіант розділу ресурсу. При цьому гравці були в однакових умовах. У цьому параграфі ми будемо використовувати схожу схему, але де арбітр буде робити пропозиції обом гравцям, і при цьому рішення в разі конфлікту буде вибиратися за допомогою лотереї. У такій постановці можна розглянути несиметричну гру, коли один з гравців знаходиться в більш бажаному стані, ніж його противник.

Нехай $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., K$ послідовність пар незалежних однаково розподілених випадкових величин. Для зручності припустимо, що вони розподілені рівномірно на $[0, 1]^2$. Ми інтерпретуємо цю пару на кроці i як пропозиція арбітра кожному з гравців I і II. Коли пропозиція(x_i, y_i) поступає, гравці I і II повинні або прийняти її (A), або відкинути (R), чекаючи, що в майбутньому надійде більш вигідна пропозиція. Обидва гравці зацікавлені взяти максимально вигідну пропозицію.

Якщо обидва гравці приймають пропозиції на i-му кроці, гра закінчується з платежами: x_i — гравцеві I і y_i — гравцеві II. Якщо обидва гравця відкидають i-ту пропозицію, переговори переходять на крок $i+1$. Якщо вибір гравців є $(R-A)$ або $(A - R)$, то для того, щоб визначити результат переговорів, проводиться лотерея. При цьому в разі $(R-A)$ з ймовірністю p гра переходить на наступний крок і з ймовірністю $1-p$ гра закінчується з відповідними платежами. В разі ж $(A-R)$ гра з ймовірністю p закінчується і гравці отримують відповідні виграші і з ймовірністю $1-p$ переходять на наступний крок. Без обмеження загальності $p \in [1/2, 1]$.

Таким чином, в цій лотереї з ймовірністю p проходить рішення гравця I і з ймовірністю $\bar{p} = 1 - p$ — рішення гравця II. Будемо казати, що вага першого гравця є p, а другого — $1 - p$. Переговори справедливі, якщо $p = 1/2$, і несправедливі, якщо p відмінно від $1/2$.

Зауважимо, якщо використовувати цю гру переговорів в завданні розділу ресурсу, то можна вважати, що після вибору пари (x_i, y_i) ділять ресурс відповідно як $(x_i/(x_i + y_i), y_i/(x_i + y_i))$. Позначимо (u_k, v_k) оптимальні виграші гравців в грі, в якій до кінця переговорів залишилося k кроків.

Міркуючи по індукції, приходимо до рівняння оптимальності

$$(u_k, v_k) = M\Big[valH_k(X, Y)\Big], \tag{1}$$

де

$$H_k(x, y) = \begin{array}{c|cc} & R & A \\ \hline R & u_{k-1}, v_{k-1} & pu_{k-1} + \bar{p}x, pv_{k-1} + \bar{p}y \\ A & px + \bar{p}u_{k-1}, py + \bar{p}v_{k-1} & x, y \end{array} \tag{2}$$

і

$$(k \geq 1; u_0 = v_0 = 0).$$

Визначимо стан (x, y, k), де k кроків залишається до кінця і поточні пропозиції є x і y.

Теорема 5. *([1]) Рівновагою в грі є пара стратегій виду: в стані (x, y, k)
I обирає A (R), якщо $x \geq (<) u_{k-1}$, незалежно від y,
II обирає A (R), якщо $y \geq (<) v_{k-1}$, незалежно від x.*

Значення гри задовольняє рекурентним співвідношенням

$$u_k = T_1(u_{k-1}, v_{k-1}), v_k = T_2(u_{k-1}, v_{k-1}), k = 1 \dots K \tag{3}$$

де

$$T_1(u, v) = 1/2\Big(pu^2 + \bar{p}(2u-1)v + 1\Big), T_2(u, v) = 1/2\Big(pv^2 + \bar{p}(2v-1)u + 1\Big). \tag{4}$$

Доведення. Легко показати, що біматрична гра $H_k(x, y)$ для будь яких $(x, y) \in [0,1]^2$ має єдину рівновагу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \scriptstyle y<v_{k-1} & \scriptstyle y\geq v_{k-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \scriptstyle x<u_{k-1} \\ \scriptstyle x\geq u_{k-1} \end{array} & \begin{bmatrix} R-R \;\; u, v & R-A \;\; pu+\overline{(}p)x, pv+\overline{(}p)y \\ A-R \;\; px+\overline{(}p)u, py+\overline{(}p)v & A-A \;\; x, y \end{bmatrix} \end{array}$$

Тут, у другому стовпці стоять виплати гравцям I та II, де приймемо $u = u_{k-1}$ та $v = v_{k-1}$. Відповідно

$$u_k = u^2v + \bar{v}\int_0^u (pu + \bar{p}x)dx + v\int_u^1 (px + \bar{p}u)dx + \bar{v}\int_u^1 xdx =$$

$$1/2\Big\{pu^2 + \bar{p}(2u-1)v + 1\Big\} = T_1(u, v)$$

Аналогічно

$$v_n = v^2u + u\int_v^1 (pv + \bar{p}y)dy + \bar{u}\int_v^1 ydy + \bar{u}\int_0^v (py = \bar{p}v)dy =$$

$$1/2\Big\{pv^2 + p(2v-1)u + 1\Big\} = T_2(u, v).$$

$\square$

Теорема 6. *([1]) Для будь-яких $k \geq 1$ $u_n \geq v_n$. При $n \to \infty$, $u_n \uparrow u$ і $v_n \uparrow v_\infty$, де (u_∞, v_∞) існує єдиний розв'язок системи рівнянь*

$$u = T_1(u, v), \;\; v = T_2(u, v)$$

або, еквівалентно

$$pu^2 = (2u-1)(1-\bar{p}v), \quad \bar{p}v^2 = (2v-1)(1-pu). \tag{5}$$

Доведення. Використовуючи ті ж позначення що й в теоремі 5, отримаємо вираз

$$v_k - v_k = T_1(u,v) - T_2(u,v) = 1/2\Big\{p(u^2 + u + 2uv) - \bar{p}(v^2 + v - 2uv)\Big\},$$

який є невід'ємним, оскільки $u^2+u-2uv \geq (u-v)^2+(u-v^2) \geq 0$ і $u^2+u-2uv \geq v^2+v-2uv$. Що доводить $u_k \geq v_k, k \geq 1$.

А також

$$u_k - u_{k-1} = T_1(u_{k-1}, v_{k-1}) - T_1(u_{k-2}, v_{k-2}) =$$
$$1/2\Big[p(u_{k-1}^2 - u_{k-2}^2) + \bar{p}\Big\{(2u_{k-1}-1)v_{k-1} - (2u_{k-2}-1)v_{k-2}\Big\}\Big],$$

і

$$v_k - v_{k-1} = T_2(u_{k-1}, v_{k-1}) - T_2(u_{k-2}, v_{k-2}) =$$
$$1/2\Big[\bar{p}(v_{k-1}^2 - v_{k-2}^2) + p\Big\{(2v_{k-1}-1)u_{k-1} - (2v_{k-2}-1)u_{k-2}\Big\}\Big].$$

Ці два рівняння разом із $u_k, v_k \geq 1/2, k \geq 1$, дають

$$(u_{k-1} \geq u_{k-2}, v_{k-1} \geq v_{k-2}) \Rightarrow (u_k \geq u_{k-1}, v_k \geq v_{k-1}).$$

Таким чином, обидва u_k v_k зростають і обмежені одиницею, звідси випливає що вони мають границі при $k \to \infty$, які задовольняють системі рівнянь

$u = T_1(u,v), v = T_2(u,v)$. Дану систему перепишемо у вигляді

$$pu^2 = (2u-1)(1-\bar{p}v), \bar{p}v^2 = (2v-1)(1-pu)$$

Перше рівняння описує гіперболу що проходить крізь точки (1,1) і $(1-\sqrt{\bar{p}}, 0)$, а друге гіперболу що проходить крізь (1, 1) і $(0, (1-\sqrt{p})/\bar{p})$. Ця система має єдиний корінь в трикутнику $1/2 < v < u < 1$. □

Наслідок 1. Для $p = 1/2$ гра симетрична. Оптимальні стратегії обох гравців в стані (x,y,k): "обрати $A(R)$, якщо $x \geq (<) u_{k-1}$", де u_k задовольняє рівняння

$$u_k = 1/4(3u_{k-1}^2 - u_{k-1} + 2), \quad (k \geq 1, u_0 = 0).$$

Оптимальні виграші для обох гравців однакові і дорівнюють $u_k . u_k \uparrow 2/3$ при $k \to \infty$.

Наслідок 2. Для $p = 1$ оптимальні стратегії в стані (x,y,k): "обрати $A(R)$, якщо $x \geq (<) u_{k-1}$" для I і "завжди обирати R, до закінчення гри" для II. Оптимальні виграші дорівнюють (u_k, v_k), де

$$u_k = 1/2(u_{k-1}^2), (k \geq 1, u_0 = 0), v_k = 1/2, (k \geq 1). \tag{6}$$

Ця послідовність називається послідовністю Мозера, і часто використовується в задачах найкращого вибору.

Зауважимо, що оптимальні рішення даної гри мають деякі цікаві властивості.

(1) Компоненти матриці $H_k(x,y)$ для гравця I не містять y, а для гравця II не містять x. Оптимальні стратегії кожного гравця не залежать від випадкової величини, яку спостерігає опонент. Однак, оптимальний виграш кожного гравця залежить від виграшу опонента.

(2) В рівновазі гравці обирають або R-R, або A-A.

2.3 Переговори з випадковими пропозиціями в задачі про зарплату

Розглянемо задачу про зарплату як гру з нульовою сумою, в якій гравці I (Профспілка) і II (Менеджмент) приймають рішення про зарплату в результаті процесу переговорів на основі розглянутої вище схеми випадкових пропозицій. При цьому перший гравець зацікавлений максимізувати значення гри, а другий гравець, навпаки, мінімізувати це значення.

Наведемо дизайн переговорів в даному випадку. Зафіксуємо спочатку часовий горизонт K для переговорів. нехай $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., K$ послідовність пар незалежних однаково розподілених випадкових величин. Припустимо, що вони приймають невід'ємні значення. їх функції розподілу і щільності позначимо відповідно $F(x), G(y)$і $f(x), g(y)$, $x, y \geq 0$. Ми інтерпретуємо цю пару на кроці i як пропозиція арбітра кожному з гравців I і II. Коли пропозиція (x_i, y_i) приходить, гравці I і II повинні або прийняти його (A), або відкинути (R), чекаючи, що в майбутньому надійде більш вигідна пропозиція.

Опишемо процедуру прийняття рішення. Якщо обидва гравця приймають пропозиції на і-му кроці, гра закінчується з виграшем першого гравця: $(x_i + y_i)/2$. Якщо обидва гравці відкидають і-у пропозицію, переговори переходять на крок $i + 1$.

Якщо один гравець приймає пропозицію, а другий відкидає, арбітр приймає рішення на користь скривдженої (відкидає) сторони. А саме, виграш дорівнює

$$x_i \wedge y_i, \text{якщо рішення} A - R,$$
$$x_i \vee y_i, \text{якщо рішення} R - A,$$

де $a \wedge b = \min(a, b)$ і $a \vee b = \max(a, b)$. Процес триває до тих пір, поки хтось із гравців не прийме пропозиції або поки не настане крок K. На останньому кроці гравці змушені прийняти цю пропозицію. Це гра з нульовою сумою, перший гравець зацікавлений отримати максимальне значення, а другий гравець — мінімізувати це значення.

Нехай H_k — значення гри, що складається із k періодів. Рівняння оптимальності має вигляд

$$H_k = M\left\{val\ H_k(x, y)\right\},$$

де $val\ H_k(x, y)$ є значенням матричної гри

$$H_k(x, y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & \quad R \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ R \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (x+y)/2 & x \wedge y \\ x \vee y & \delta H_{k-1} \end{array}\right] \end{array},$$

$k = 2, 3, 4, ...$ і гранична умова $H_1 = M(x + y)/2$.

Легко бачити, що матриця $H_1 = M(x+y)/2$ має єдину сідлову точку, котра залежить від (x, y). А саме, значення гри з матрицею $H_k(x, y)$ дорівнює

$$valH_k(x,y) = \begin{cases} x \wedge y, & \text{якщо } H_k \leq x \wedge y; \\ H_{k-1}, & \text{якщо } x \wedge y < H_{k-1} < x \vee y; \\ x \vee y, & \text{якщо } H_{k-1} \geq x \vee y. \end{cases}$$

Але тоді рівняння оптимальності приймає вигляд

$$H_k = M\Big\{(x \wedge y) I_{\{H_{k-1} \leq x \wedge y\}}\Big\} + M\Big\{H_{k-1} I_{\{x \wedge y < H_{k-1} < x \vee y\}}\Big\} + M\Big\{(x \vee y) I_{\{H_{k-1} \geq x \vee y\}}\Big\}.$$

Перепишемо його у вигляді

$$H_k - H_{k-1} = M\Big\{(x \wedge y - H_{k-1}) I_{\{H_{k-1} \leq x \wedge y\}}\Big\} + M\Big\{(x \vee y - H_{k-1}) I_{\{H_{k-1} \geq x \vee y\}}\Big\}.$$

Вираз $(x \wedge y - H_{k-1}) I_{\{H_{k-1} \leq x \wedge y\}}$ дорівнює або $x \wedge y - H_{k-1}$, або нуль, тому

$$M\Big\{(x \wedge y - H_{k-1}) I_{\{H_{k-1} \leq x \wedge y\}}\Big\} = M(x \wedge y - H_{k-1})^+,$$

де $a^+ = \max(a, 0)$. Аналогічно

$$M\Big\{(H_{k-1} - x \vee y) I_{\{H_{k-1} > x \vee y\}}\Big\} = M(H_{k-1} - x \vee y)^+.$$

Теорема. Значення гри про зарплату задовольняє рекурентні співвідношення

$$H_k = H_{k-1} + R_1(H_{k-1}) - R_2(H_{k-1}), k = 2, 3...$$
$$H_1 = M(x+y)/2.$$

Оптимальні стратегії гравців на k-му кроці мають вигляд

$A-R$, якщо $H_{k-1} < x \wedge y$; $R-A$, якщо $H_{k-1} > x \vee y$; $R-R$, в інших випадках.

Цікаво відзначити, що в рівновагу не входить стратегія $A-A$, за винятком останнього кроку. Досліджуємо асимптотику значення ігор на великому проміжку часу переговорів. Особливу роль тут відіграє розв'язок рівняння $R_1(z) = R_2(z)$.
Лема *Існує єдиний розв'язок z_0 рівняння $R_1(z) = R_2(z)$.*
Доведення
Розглянемо функцію $R_1(z) = M(x \wedge y - z)^+$. Функція розподілу випадкової величини $x \wedge y$ має вигляд

$$P\{x \wedge y \leq t\} = 1 - P\{x \wedge y > t\} = 1 - P\{x > t\}P\{y > t\} = 1 - \bar{F}(t)\bar{G}(t),$$

де $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$, $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$. Тоді

$$R_1(z) = M(x \wedge y - z)^+ = \int\limits_z^\infty (t-z)d(1-\bar{F}(t)\bar{G}(t)).$$

Інтегруючи частинами, приходимо до виразу

$$R_1(z) = \int\limits_z^\infty (1-\bar{F}(t)\bar{G}(t))dt. \tag{7}$$

Аналогічно, функція розподілу випадкової величини $x \vee y$ має вигляд

$$P\{x \vee y \le t\} = P\{x \le t\}P\{y \le t\} = F(t)G(t),$$

отже,

$$R_2(z) = M(z - x \vee y)^+ = \int\limits_0^z (z-t)d(F(t)G(t)) = \int\limits_0^z F(t)G(t))dt. \tag{8}$$

З (1.3) випливає, що $R_1(z)$ додатна спадна функція і $R_1(0) > 0$ і $\lim\limits_{t\to\infty} R_1(t) = 0$. А з (1.5) випливає, що $R_2(z)$ додатна зростаюча функція і $R_2(0) = 0$ і $\lim\limits_{t\to\infty} R_2(t) = M\{x \vee y\} > 0$. Це доводить, що існує і єдина точка перетину кривих $R_1(z)$ і $R_2(z)$.

Згідно до леми, якщо $H_{k-1} < z_0$, то $R_1(H_{k-1}) < R_2(H_{k-1})$. Отже,

$$H_k = H_{k-1} + R_1(H_{k-1}) - R_2(H_{k-1}) > H_{k-1}, k \ge 2.$$

Таким чином, якщо $H_1 = M(x+y)/2 < z_0$, то послідовність H_k, $k \ge 1$ монотонно зростає і її межа дорівнює z_0. Аналогічно, якщо $H_1 = M(x+y)/2 > z_0$, то послідовність H_k, $k \ge 1$ монотонно спадає і сходиться до z_0.

Таким чином, z_0 є асимптотичним розв'язком задачі переговорів для великого числа кроків. Як ми побачили в лемі, це значення можна знайти з рівняння

$$\int\limits_z^\infty (1-\bar{F}(t)\bar{G}(t))dt = \int\limits_0^z F(t)G(t))dt.$$

Рівномірний і лінійний розподіл. Знайдемо, наприклад, розв'язок задачі про зарплату для випадку, коли x рівномірно розподілено на інтервалі [0, 1], а y має щільність розподілу виду $g(y) = 2y$, $y \in [0,1]$. Тоді

$$R_1(z) = \int\limits_z^1 (1-t)(1-t^2)dt = \frac{2}{3}(1-z)^3 - \frac{1}{4}(1-z)^4, \quad R_2(z) = \int\limits_0^z t^3 dt = \frac{z^4}{4}.$$

Початкове значення $H_1 = M(x+y)/2 = 1/2(1/2+2/3) = 7/12 \approx 0,5833$. Наступне значення дорівнює

$$H_2 = H_1 + R_1(H_1) - R_2(H_1) = \frac{7}{12} + \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{7}{12}\Big)^3 -$$

$$-\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{7}{12}\Big)^4 - \frac{1}{4}\frac{7}{12}^4 \approx 0,5951.$$

Далі послідовно знаходимо $H_3 \approx 0,6013$, $H_4 \approx 0,6045, ...$

Асимптотичне значення переговорів у даному випадку знаходиться з рівняння

$$\frac{2}{3}(1-z)^3 - \frac{1}{4}(1-z)^4 = \frac{z^4}{4}$$

і дорівнює $z_0 \approx 0,6082$.

Експоненціальний розподіл. Розглянемо тепер переговори, коли x і y мають експоненціальний розподіл, відповідно, $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$ і $G(y) = 1 - \exp(-\mu y)$, $y \geq 0$. Тоді

$$R_1(z) = \int_z^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)z},$$

$$R_2(z) = \int_0^z (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t}) dt = z - \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda} - \frac{1 - e^{-\mu z}}{\mu} + \frac{1 - e^{-(\lambda+\mu)z}}{\lambda + \mu}$$

Асимптотичний розв'язок задачі переговорів у цьому випадку знаходиться як розв'язок рівняння (1.7):

$$\frac{2}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)z} + \frac{1 - e^{-\lambda z}}{\lambda} + \frac{1 - e^{-\mu z}}{\mu} = z + \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

Наприклад, при $\lambda = 1$, $\mu = 2$ значення $z_0 \approx 0,5527$.

3 Висновок

В дипломній роботі розглянуто задачу розділу ресурсів, де пропозиції робляться не самими гравцями, а деяким незалежним арбітром, який генерує певні пропозиції, а гравці або погоджуються з цією пропозицією, або ні.

У книзі В.В. Мазалов, А.Е. Менгер, Ю.С. Токарева "Переговори. Математична теорія", розглянуто переговори з випадковими пропозиціями, де пропозиції арбітра x_i — незалежні рівномірно розподілені на $[0,1]$ випадкові величини.

У цій дипломній роботі доведено аналог, отриманих результатів, для випадку, коли x_i — незалежні, однаково розподілені випадкові величини зі щільністю f(x), де f(x) — неперервна додатна функція на проміжку [0;1] така, що

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 1 \text{ і } \forall x \in [0,1] : f(x) + f(1-x) = 2.$$

Нехай n — кількість кроків у переговорах, $\delta \in (0;1)$ — множник дисконтування. Досліджено асимптотику значення гри H_n та математичного сподівання часу τ таких переговорів, при оптимальних стратегіях гравців. Доведено, що

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = \frac{1-\sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} M\tau_n = \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\right].$$

Також знайдено оптимальні стратегії гравців при таких переговорах.

4 Література

1. Мазалов В.В., Менчер А.Е., Токарева Ю.С. Переговори. Математична теорія. – Санкт-Петербург-Москва-Краснодар, 2012. — 303с.

2. Aumann R. J., Maschler M. Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud // Journal of Economic Theory. – 1985. – Vol.36. – P. 195—213.

3. Berger R. L. A necessary and sufficient conditions for reaching a consensus using De Groot's method // Journal of American Statistical Association. – 1981. – Vol.76. – P. 415–419.

4. Bester H., De Palma A., Leininger W., Thomas J., Von Tadden E. L. A noncooperative analysis of Hotelling's location ga- me // Games and Economics Behavior. – 1996. – Vol.12. – P. 165–186.

5. Brams S. J., Kaplan T. R., Kilgour D. M. A simple bargaining mechanism that elicits truthful reservation prices // Working paper 2011/2, University of Haifa, Department of Economics. 2011.

6. Faber H. An analysis of final-offer arbitration // Journal of coflict resolution. 1980. Vol. 35. P. 683-705.

7. Gerchak Y., Greenstein E., Weissman I. Estimating arbitrator's hidden judgement in final offer arbitration // Group Decision and Negotiation. 2004. 13(no 3). P. 291–298.

8. Hoede C., Bakker R.R. A theory of decisional power // Journal of Mathematical Sociology. 1982. Vol. 8. P. 309–322.

9. Kilgour D.M. Game-theoretic properties of final-offer arbitration // Group Decision and Negot. 1994. № 3. P. 285–301.

10. Harsanyi J.C., Selten R.A. General Theory of Equilibrium Selection in Games. Cambridge: MIT Press, Cambridge Mass.: MIT Press. 1989.