МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики

Магістерська робота

Оптимізація гіперболічних систем з інтегральними обмеженнями

Виконав: студент групи МТЕ-61
спеціальності: 111 – *математика*,
спеціалізації *математична економіка та економетрія*,
Магдач Андрій

Науковий керівник:
проф. Кирилич В. М.

Роботу рекомендовано до захисту на засіданні кафедри математичної економіки, економетрії, фінансової та страхової математики
протокол від 04 грудня 2020 року №4

В.о. завідувача кафедрою
проф. Оліскевич М.О.

Львів-2020

Зміст

Вступ

Дана робота побудована на основі монографії Аргучінцева.

Розглядається задача оптимального керування гіперболічною системою, в якій початково - крайові умови визначаються з керованих систем звичайних диференціальних рівнянь.

Допустимі керування вибираються з класу обмежених і вимірних функцій. Метод, побудований на анлізі лагранжіана задачі, отримані умови, при яких принцип максимума є достатньою умовою оптимальності. Досліджується варіант лінійної гіперболічної системи і лінійної керованої системи звичайних диференціальних рівнянь з залежними від керування коефіцієнтами при фазових змінних.

Отримано два симетричних варіанта некласичних точних (без залишкового члена) формул приросту критерія якості. На їх основі доведені необхідні і достатні умови оптимальності варіаційного типу.

1 Узагальнений розв'язок початково-крайової задачі

Об'єктом дослідженння даної роботи є задачі оптимізації в системах напівлінійних гіперболічних рівнянь першого порядку:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \tag{1.1}$$

$$(s,t) \in \Pi = (s_0, s_1) \times (t_0, t_1)$$

Надалі будуть використовуватися наступні позначення: $S = [s_0, s_1]$, $T = [t_0, t_1]$, $\overline{\Pi} = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1] = S \times T$. Припускається, що $x = x(s,t)$ – n-вимірна вектор-функція. Вважатимемо, що система 1.1 записана в інваріантному вигляді, тобто матриця коефіцієнтів $A(s,t)$ є діагональною. За допомогою лінійного невиродженого перетворення змінних довільна система напівлінійних гіперболічних рівнянь може бути зведена до інваріантної форми [9]. Додатково припускаємо, що діагональні елементи $a_i = a_i(s,t), i = 1, 2, ..., n$, матриці коефіцієнтів знакосталі в досліджуваній області:

$$\begin{aligned} &a_i(s,t) > 0, \quad i = 1, 2, ..., m_1, \\ &a_i(s,t) = 0, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, ..., m_2, \\ &a_i(s,t) > 0, \quad i = m_2 + 1, m_2 + 2, ..., n. \end{aligned}$$

Складемо дві діагональні підматриці: $A^+(s,t)$ розмірності $m_1 \times m_1$ і $A^-(s,t)$ розмірності $(n-m_2)\times(n-m_2)$, з додатніх і від'ємних діагональних елементів матриці A відповідно. З вектора стану $x = x(s,t)$ виділимо два підвектора: $x^+ = (x_1, x_2, ..., x_{m_1})$ і $x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, ..., x_n)$, відповідно до додатніх і від'ємних діагональних елементів матриці A.

Задачі оптимізації будуть розглядатися для граничних і стартових керувань, які входять в початково-крайові умови системи (1.1) при різних формах зв'язку між компонентами вектора зв'язку і впливами керування на границі області Π.

Опишемо використане поняття загального розв'язку початково-крайових задач.

При фіксованих значеннях впливів керування найбільш загальна форма постановки початково-крайових умов, до якої збігаються всі види початково-крайових умов і які розглядаються в даній роботі, мають вигляд:

$$x(s, t_0) = p(s), \quad s \in S, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} x^+(s_0,t) = M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T, \\ x^-(s_1,t) = M(t)x^+(s_1,t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тут $M(t)$ і $N(t)$ – прямокутні матриці розмірності $m_1 \times (n-m_2)$ і $(n-m_2)\times m_1$ відповідно.

Припущень, які будуть накладатися на параметри задач оптимального керування, недостатньо не тільки для класичного розв'язку задачі (1.1)-(1.3) [9], але і для існування узагальненого розв'язку з класу $W_2^1(\Pi)$ [10, 11].

В основу поняття загального розв'язку можуть бути покладені різні підходи: інтегральні закони збереження, методи штучної в'язкості, спосіб граничного переходу в різницевих апроксимаціях, апарат теорії узагальнених функцій, поняття потенціалу розв'язків та інші [6, 9]. Але з точки зору використаних в роботі методів дослідження задач оптимального керування найбільше підходить описаний нижче підхід до поняття узагальненого розв'язку.

Введемо характеристики гіперболічного оператора, визначені зі звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a_i(s,t), \quad i = 1,2,...,n. \tag{1.4}$$

Для того, щоб однозначно зафіксувати характеристику, достатньо вказати точку $(\eta,\alpha) \in \overline{\Pi}$, через яку вона проходить. Тому надалі для розв'язків рівнянь (1.4) приймемо наступне позначення $s = s^{(i)}(\eta,\alpha;t)$. Очевидно, що $s^{(i)}(\eta,\alpha;\alpha) = \eta$. В силу гладкості $a_i(s,t)$ такі функції існують, єдині, неперервні і неперервно-диференційовані в $\overline{\Pi}$. Таким чином, кожне рівняння (1.4) породжує в $\overline{\Pi}$ сімейство інтегральних кривих $s = s^{(i)}(\eta,\alpha;t)$, яке називається i-им сімейством характеристик гіперболічної системи (1.1).

Означення 1.1. Узагальненою похідною за Соболєвим вектор-функції $x(s,t) \in L_{1,loc}(\Pi)$ (локально сумовна в Π) по полю напрямків, заданих сімейством інтегральних кривих системи (1.4), називається вектор-функція $D_A x(s,t) \in L_{1,loc}(\Pi)$, яка задовільняє інтегральні тотожності

$$\iint_\Pi \langle x, r_t + (Ar)_s\rangle \; ds\, dt = -\iint_\Pi \langle D_A x, r\rangle \; ds\, dt$$

для будь-якої неперервно-диференційованої і фінітної в $\overline{\Pi}$ n-вимірної вектор-функції $r(s,t)$.

Відмітимо, що якщо функція $x(s,t)$ неперервно-диференційована в $\overline{\Pi}$, то існує її узагальнена похідна $D_A x = x_t + A x_s$, i-а компонента якої фактично представляє собою звичайну похідну вздовж i-ї характеристичної кривої. Такий же вигляд має і узагальнена похідна функції $x \in W_2^1(\Pi)$.

Позначимо через $H^A(\Pi)$ гільбертів простір функцій x з $L_2(\Pi)$, які володіють узагальненою похідною $D_A x$ з $L_2(\Pi)$, зі скалярним добутком

$$\langle x, y\rangle_{H^A(\Pi)} = \iint_\Pi (\langle x, y\rangle + \langle D_A x, D_A y\rangle)\; ds\, dt$$

Простори такого типу були введені В.С. Владіміровим. [10] Їх властивості вивчалися в роботах [10, 8]. Відмітимо, що множина $C_1(\overline{\Pi})$ неперервно-диференційованих в $\overline{\Pi}$ функцій всюди щільна в $H^A(\Pi)$.

Означення 1.2. Під узагальненим розв'язком задачі (1.1)-(1.3) будемо розуміти функцію $x \in H^A(\Pi)$, яка задовільняє майже скрізь в Π системі диференціальних рівнянь

$$D_A x = f(x, s, t) \tag{1.5}$$

і має сліди $x|_{t=t_0}$, $x|_{s=s_0}$, $x|_{s=s_1}$, які задовільняють умови (1.2), (1.3).

В роботі [10] доказано існування і єдиність узагальненого розв'язку в класі $H^A(\Pi)$ при наступних припущеннях:

1. діагональні елементи $a_i(s,t)$ матриці $A(s,t)$ неперервно-диференційовані в $\overline{\Pi}$;

2. елементи матриць $M(t)$ і $N(t)$ в (1.3) неперервні на відрізку T;

3. $p \in L_2(s_0, s_1)$, $g^{(1)} \in L_2(t_0, t_1)$, $g^{(2)} \in L_2(t_0, t_1)$

4. функція $f(x, s, t)$ для всіх $x \in E^n$ квадратично-сумовна по (s,t) на Π і для майже всіх $(s,t) \in \Pi$ задовільняє умову Ліпшіца по x з константою, яка не залежить від вибору $x \in E^n$ і $(s,t) \in \overline{\Pi}$;

5. функція f для кожного $R > 0$ неперервна по t в середньому квадратичному на Π рівномірно відносно множини функцій $z \in L_2(\Pi)$, $\|z\|_{L_2(\Pi)} \leqslant R$, тобто для кожного $R > 0$ величина

$$\max_{\|z\|_{L_2(\Pi)} \leqslant R} \max_{|\alpha| \leqslant \gamma} \iint\limits_{\Pi} \|f(z(s,t), s, t+\alpha) - f(z(s,t)), s, t\|^2_{E^n}\, ds\, dt \underset{\gamma \to 0}{\to} 0$$

Для доведення існування розв'язку [10] використовується метод апроксимації вхідних даних p, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, f, $M(t)$, $N(t)$ послідовностями більш гладких функцій з тим, щоб відповідні їм розв'язки x^n належали класу $W_2^1(\Pi)$. Розв'язок з $H^A(\Pi)$ отримується як границя послідовності x^n в $H^A(\Pi)$.

Роботи [6, 7, 15] дозволяють сформулювати теорему існування і єдиності узагальненого розв'язку початково-крайової задачі (1.1)-(1.3) при вхідних даних з простору L_∞.

Зафіксуємо точку $(s,t) \in \Pi$ і випустимо з неї характеристики $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$, $i = 1, 2, ..., n$. Нехай $(\xi^{(i)}(s,t), \tau^{(i)}(s,t))$ – початкові точки характеристик, для яких при збільшенні параметра τ характеристики попадають всередину області Π. Відповідно, нехай $(\overline{\xi}^{(i)}(s,t), \overline{\tau}^{(i)}(s,t))$ – кінцеві точки характеристик, а $T_i(s,t) = [\tau^{(i)}(s,t), \overline{\tau}^{(i)}(s,t)]$. Позначим через $A_\infty(\Pi)$ простір n-вимірних векторних функцій $x \in L_\infty(\Pi)$, які можна так виправити на множині нульової міри, що після цього для довільного $i = 1, 2, ..., n$ функція $x_i(s^{(i)}(s,t;\tau), \tau)$ абсолютно неперервна по τ на $T_i(s,t)$ і володіє узагальненою по Соболєву похідною вздовж характеристик i-го сімейства:

$$D_i x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \in L_\infty(T_i(s,t)).$$

Теорема 1.1. *[6, 7, 15]. Нехай в початково-крайовій умові задачі (1.1)-(1.3)*

1. *діагональні елементи* $a_i(s,t)$ *матриці* $A(s,t)$ *неперервно-диференційовані в* $\overline{\Pi}$,
2. *елементи матриць* $M(t)$ *і* $N(t)$ *в (1.3) неперервні на відрізку* T,
3. $p \in L_2(s_0, s_1)$, $g^{(1)} \in L_2(t_0, t_1)$, $g^{(2)} \in L_2(t_0, t_1)$,
4. $f(x, \cdot, \cdot) \in L_\infty(\Pi)$ *при фіксованих* $x \in E^n$,
5. *існують неспадні функції* $K_1(\beta)$ *і* $K_2(\beta)$ *дійсної змінної* β, *такі що* $\forall\ X_\beta = \{x \in E^n\ :\ \|x\|_{E^n} < \beta\}$, $\beta < \infty$ *для майже всіх* $(s,t) \in \Pi$ *справедливі оцінки*

$$\|f(x,s,t)\| \leqslant K_1(\beta) < \infty; \quad \|f_x(x,s,t)\| \leqslant K_2(\beta) < \infty \tag{1.6}$$

(норми в (1.6) евклідові)

Тоді існує єдина функція $x \in A_\infty(\Pi)$, *яка:*

1. *має в* Π *узагальнену похідну*

$$D_A x = (D_1 x_1, D_2 x_2, ..., D_n x_n);$$

2. *має сліди* $x|_{t=t_0} \in L_\infty(S)$, $x|_{s=s_0} \in L_\infty(T)$, $x|_{s=s_1} \in L_\infty(T)$, *які задовольняють умовам (1.2), (1.3);*
3. *має сліди* $x|_{t=\overline{t}} \in L_\infty(S)$, $x|_{s=\overline{s}} \in L_\infty(T)$ *відповідно для всіх* $\overline{t} \in T$, $\overline{s} \in S$;
4. *задовільняє систему інтегральних рівнянь*

$$x_i(s,t) = x_i(\xi^{(i)}(s,t), \tau^{(i)}(s,t)) + \int_{\tau^{(i)}(s,t)}^{t} f_i(x(\xi,\tau).\xi,\tau)|_{\xi=s^{(i)}(s,t;\tau)}\, d\tau, \tag{1.7}$$
$$(s,t) \in \Pi; \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Відмітимо, що нескінченно-вимірна система інтегральних рівнянь (1.7) може бути використана для введення поняття узагальненого розв'язку [4, 9, 15]. Якщо система (1.1) має класичний (неперервний і неперервно - диференційований) розв'язок, то до (1.7) приходимо інтегруванням рівнянь (1.1) на відрізках $[\tau^{(i)}, t]$ вздовж відповідних характеристик $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$. І навпаки, диференціюванням гладких розв'язків (1.7) можна отримати (1.1). Таким чином, диференційовна (1.1) і інтегральна (1.7) системи еквівалентні в тому випадку, якщо вони мають класичний в Π розв'язок $x = x(s,t)$.

В даній роботі інтегральний вигляд (1.7) розв'язку вимагається в основному для отримання оцінок збурення стану процесу, викликаних варіаціями керування того чи іншого вигляду. При отриманні умов оптимальності потрібний також узагальнений варіант формули інтегрування частинами.

Теорема 1.2. *[10, 15] Нехай x і y – довільні функції з простору $A_\infty(\Pi)$, $\partial\Pi$ – границя прямокутника Π. Тоді*

$$\iint_\Pi \langle y(,t), D_A x(s,t)\rangle\, ds\, dt = \int_{\partial\Pi} \langle y(s,t), x(s,t)\rangle\, ds - \langle y(s,t), A(s,t)x(s,t)\rangle\, dt - \\ - \iint_\Pi \langle D_A y(s,t) + A_s(s,t)y(s,t), x(s,t)\rangle\, ds\, dt. \quad (1.8)$$

2 Постановка задачі оптимального керування

Для системи гіперболічних рівнянь (1.1) розглянемо керовані початково-крайові умови. Для простоти будемо вважати, що умови при $t = t_0$ і $s = s_1$ фіксовані:

$$x(s, t_0) = x^0(s), \quad s \in S, \quad (2.1)$$

$$x^-(s_1, t) = q(t), \quad t \in T, \quad (2.2)$$

Крайові умови на другій боковій границі ($s = s_0$) прямокутника визначаються з керованої системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial x^+(s_0,t)}{\partial t} = g(x^+(s_0,t), u(t), t), \quad t \in T,$$

$$x^+(s_0, t_0) = (x^0(s_0))^+. \quad (2.3)$$

В якості множини допустимих керувань виберемо сукупність обмежених і вимірних на відрізку T r-вимірних вектор-функцій $u = u(t)$, які задовільняють майже скрізь на даному відрізку обмеження типу включення:

$$u(t) \in U, \quad t \in T, \quad (2.4)$$

де U – компакт з простору E^r.

Ціль задачі оптимального керування є мінімізація функціоналу

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_1), s) ds + \iint_\Pi F(x, s, t)\, ds\, dt, \quad (2.5)$$

визначеного на розв'язках задачі (1.1), (2.1)-(2.3) при допустимих керуваннях, які задовільняють умову (2.4).

Таким чином, для обчислення вектор-функції стану, відповідній деякому фіксованому керуванню $u = u(t)$, необхідно:

1. підставити керування u в праву частину системи звичайних диференціальних рівнянь (2.3) і розв'язати відповідну задачу Коші для визначення $x^+(s_0, t)$;

2. розв'язати першу крайову задачу для системи (1.1) з відомими значеннями $x^+(s_0,t)$, $t \in T$; $x(s,t_0)$, $s \in S$; $x^-(s_1,t)$, $t \in T$; фактично, ми маємо частковий випадок умов (1.2)-(1.3) з $M(t) = 0$, $N(t) = 0$; компоненти функції x закріпляються в початкових точках(«точках входу») характеристик.

Задачу оптимального керування (1.1), (2.1)-(2.5) розглянимо при наступних припущеннях:

1. діагональні елементи матриці A неперервно-диференційовні в $\overline{\Pi}$;
2. вектор-функції $x^0(s)$ і $q(t)$ неперервні відповідно на S і T і задовільняють умову узгодження:
$$q(t_0) = (x^0(s_1))^-;$$
3. вектор-функції $f(x,s,t)$, $g(x^+,u,t)$ і скалярні функції $\varphi(x,s)$, $F(x,s,t)$ неперервні по своїх аргументах і мають неперервні і обмежені часткові похідні по x відповідно на $E^n \times S \times T$, $E^{m_1} \times U \times T$, $E^n \times S$, $E^n \times S \times T$.

Відмітимо, що крайові умови, які можуть бути визначені з системи рівнянь (2.3), є абсолютно неперервними функціями на T. В розглянутому випадку для довільного допустимого керування існує єдиний узагальнений розв'язок початково-крайової задачі (1.1), (2.1)–(2.3) з класу неперервних в Π функцій, які володіють узагальненою похідною $D_A x = (D_1 x_1, D_2 x_2, ..., D_n x_n)$, кожна компонента якої $D_i x_i$ неперервна вздовж відповідного і-го сімейства характеристик [9]. Таким чином, кожна компонента $x_i = x(s,t)$ узагальненого розв'язку x неперервно-диференційовна вздовж довільної характеристики і-го сімейства характеристик.

Пару функцій $\{u, x\}$ будемо називати допустимим процесом, якщо керування $u = u(t)$ допустиме, а $x = x(s,t)$ – відповідний даному керуванню узагальнений розв'язок задачі (1.1), (2.1)-(2.3).

3 Формула приросту функціоналу

Дослідження задачі оптимального керування (1.1), (2.1)–(2.5) проведемо з використанням різних варіантів формули приросту цільового функціоналу на двох допустимих процесах $\{u, x\}$ і $\{\widetilde{u} = u + \Delta u, \widetilde{x} = x + \Delta x\}$. Класичний метод приросту Л.І. Розоноера [16] дозволяє отримати в досліджуваній задачі необхідну умову оптимальності типу принципа максимума Л.С. Понтрягіна. При доведенні важлива локальність формули приросту – залишкові члени оцінюються через величину, яка характеризує малість міри області голкової варіації керування. Для двох часткових випадків досліджуваної задачі в ході подальшої викладки будуть отримані нестандартні точні (без залишкових членів) формули приросту.

Почнемо з класичного варіанту формули приросту.
Позначимо $\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u)$. Очевидно, що

$$\Delta J(\widetilde{u}) = \int_S \Delta\varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint_\Pi \Delta F(x,s,t)\,ds\,dt. \tag{3.1}$$

Функція $\Delta x = \Delta x(s,t)$ є розв'язком наступної початково-крайової задачі:

$$D_A \Delta x = \Delta f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi; \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered} \Delta x(s,t_0) = 0, \ s \in S; \ \ \Delta x^-(s_1,t) = 0, \ t \in T; \\ \Delta x_t^+(s_0,t) = \Delta g(x^+(s_0,t),u(t)t), \ t \in T, \\ \Delta x^+(s_0,t_0) = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Тут

$$\Delta f(x,s,t) = f(\widetilde{x},s,t) - f(x,s,t),$$
$$\Delta g(x^+(s_0,t),u(t),t) = g(\widetilde{x}^+(s_0,t),\widetilde{u}(t),t) - g(x^+(s_0,t),u(t),t).$$

Проробимо ряд достатньо стандартних операцій, які зазвичай використовуються при виведенні необхідних умов оптимальності першого порядку. В формулі (3.1)

1. додамо нульові доданки

$$\int_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \Delta g(x^+(s_0,t),u(t),t)\rangle\,dt$$

$$\iint_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x - \Delta f(x,s,t)\rangle\,ds\,dt,$$

де $\psi(s,t) = (\psi_1(s,t), \psi_2(s,t), ..., \psi_n(s,t))$; $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{m_1}(t))$ – деякі, поки невизначені вектор-функції, які мають такі ж аналітичні властивості, як і функції $(s,t) \to x(s,t)$, $t \to x^+(s_0,t)$ відповідно; ця операція рівносильна введенню функції Лагранжа в досліджуваній задачі на екстремум;

2. застосуємо формули інтегрування частинами до

$$\int_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle\,dt, \quad \iint_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x\rangle\,ds\,dt;$$

при цьому узагальнена формула інтегрування частинами (1.8) для другого інтегралу буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \iint_\Pi \langle \psi(s,t), D_A\Delta x\rangle\,ds\,dt = \int_S (\langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle - \langle \psi(s,t_0)\Delta x(s,t_0)\rangle)\,ds - \\ - \int_T (\langle \psi(s_0,t), A(s_0,t)\Delta x(s_0,t)\rangle - \langle \psi(s_1,t), A(s_1,t)\Delta x(s_1,t)\rangle)\,dt - \\ - \iint_\Pi \langle D_A\psi + A_s(s,t)\psi(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\,ds\,dt; \end{aligned} \tag{3.4}$$

3. введемо функції Понтрягіна

$$H(\psi, x, s, t) = \langle \psi(s,t), f(x,s,t) \rangle - F(x,s,t),$$

$$h(p, x^+, u, t) = \langle p(t), g(x^+(s_0,t), u(t), t) \rangle;$$

4. розкладемо приріст $\Delta\varphi(x,s)$ за формулою Тейлора першого порядку;

5. при цьому

$$\Delta h(p, x^+, u, t) = \Delta_{\widetilde{u}} h(p, x^+, u, t) + \Delta_{\widetilde{x}^+} h(p, x^+, \widetilde{u}, t),$$

розкладемо приріст

$$\Delta_{\widetilde{x}^+} h(p, x^+, \widetilde{u}, t) \text{ і } \Delta H(\psi, x, s, t) = H(\psi, \widetilde{x}, s, t) - H(\psi, x, s, t)$$

також по формулі Тейлора першого порядку, виділивши при цьому лінійну частину відносно приросту стану процесу;

6. будемо вимагати, щоб вектор-функції $\psi = \psi(s,t)$ і $p = p(t)$ були розв'язками наступної спряженої задачі (умова стаціонарності функції Лагранжа щодо стану):

$$\begin{aligned} D_A\psi + A_s(s,t)\psi &= -H_x(\psi, x, s, t), \quad (s,t) \in \Pi \\ \psi(s, t_1) &= -\varphi_x(x(s,t_1), s), \quad s \in S, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\psi^-(s_0,t) = 0, \quad \psi^+(s_1,t) = 0, \quad t \in T;$$

$$\psi^-(s_0,t) = 0, \dot{p} = -h_x(p, x^+(s_0,t), u, t) - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T,$$

$$p(t_1) = 0. \tag{3.6}$$

Тоді формула приросту набуде вигляду

$$\Delta J(u) = -\int_T \Delta_{\widetilde{u}} h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t)\, dt + \eta, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \eta = \int_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)\, ds - \int_T [o_h(\left\|\Delta x^+(s_0,t)\right\|) + \\ + \langle \Delta_{\widetilde{u}} h_x + (p(t), x^+(s_0,t), u(t), t), \Delta x^+(s_0,t) \rangle]\, dt - \\ - \iint_\Pi o_H(\|\Delta x(x,t)\|)\, ds\, dt. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Покажемо, що при виконанні (3.2) справедлива оцінка

$$\gamma(t) = \max_{(\xi,\tau)\in\Pi(t)} \|\Delta x(\xi,\tau)\| \leqslant K \int_T \left\|\Delta_{\widetilde{u}} g(x^+(s_0,t), u(t), t)\right\| dt, \tag{3.9}$$

$$\Pi(t) = \{(\xi,\tau) \in \overline{\Pi} : \tau \leqslant t\}$$

Для цього розглянемо інтегральний варіант (1.7) системи (1.1):

$$\Delta x_i(s,t) = \Delta x_i(\xi^{(i)}(s,t), \tau^{(i)}(s,t)) + \int_{\tau^{(i)}(s)}^{t} \Delta f_i(x(\xi,\tau),\xi,\tau)\Big|_{\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)} d\tau, \tag{3.10}$$

де $(\xi^{(i)}(x,t), \tau^{(i)}(s,t))$ – початкова точка характеристики $\xi = s^{(i)}(s,t;\tau)$, і введемо позначення

$$\gamma^+(t) = \max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} \left\|\Delta x^+(s_0,\tau)\right\|. \tag{3.11}$$

Так як праві частини системи (3.2) задовільняють умову Ліпшіца по x з деякою константою $L > 0$, то з врахуванням (3.10), (3.11) і умов $\Delta x^-(s_1,t) = 0$, $\Delta x^-(s,t_0) = 0$ маємо оцінки

$$|\Delta x_i(s,t)| \leqslant \gamma^+(t) + L\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau, \quad i = 1,2,...,m_1;$$

$$|\Delta x_i(s,t)| \leqslant L\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau, \quad i = m_2+1, m_2+2,...,n.$$

Праві частини цих нерівностей не залежать від номерів i й від змінної s, тому справедлива нерівність

$$\gamma(t) \leqslant \sqrt{n}\gamma^+(t) + L\sqrt{n}\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\, d\tau. \tag{3.12}$$

Далі з (3.3) випливає, що

$$\left\|\Delta x^+(s_0,t)\right\| \leqslant L_1\int_{t_0}^{t} \left\|\Delta x^+(s_0,\tau)\right\| d\tau + \int_{t_0}^{t} \left\|\Delta_{\widetilde{u}} g(x^+(s_0,\tau), u(\tau),\tau)\right\| d\tau$$

де L_1 – константа Ліпшіца для функції $g(x^+,u,t)$. З цієї нерівності отримаємо

$$\gamma^+(t) \leqslant L_1\int_{t_0}^{t} \gamma^+(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \left\|\Delta_{\widetilde{u}} g(x^+(s_0,\tau), u(\tau),\tau)\right\| d\tau.$$

Звідси за леммою Гронуолла-Беллмана маємо

$$\gamma^+(t) \leqslant L_2\int_{t_0}^{t} \left\|\Delta_{\widetilde{u}} g(x^+(s_0,\tau), u(\tau),\tau)\right\| d\tau, \quad L_2 = e^{L_1(t_1 - t_0)}.$$

Підставимо цю нерівність в (3.12) і повторно застосуємо лемму Гронуолла-Беллмана. В результаті отримаємо шукану оцінку (3.9), в якій

$$K = \sqrt{n}L_2 e^{\sqrt{n}L(t_1 - t_0)}.$$

Формула приросту (3.7)-(3.8) і оцінка приросту стану (3.9) представляють собою зручні проміжні результати при доведенні принципа максимума і обґрунтуванні збіжності методів пошуку керувань, які задовольняють необхідним умовам оптимальності.

4 Принцип максимума

Розглянемо формулу приросту цільового функціоналу на голковій варіації допустимого керування. В якості параметрів варіації виберемо точку $\tau \in (t_0, t_1]$, число $\varepsilon \in (0, \tau - t_0]$, вектор $\overline{u} \in U$. Відрізок вар'ювання $(\tau - \varepsilon, \tau]$ повністю лежить в T. Голкову варіацію керування $u = u(t)$ задамо у вигляді

$$\Delta u(t) = \begin{cases} \overline{u} - u(t), & t \in (\tau - \varepsilon, \tau], \\ 0, & t \in T \backslash (\tau - \varepsilon, \tau]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Скористаємося формулою (3.9) для оцінки приросту стану, викликаного даною варіацією керування, і оцінимо залишковий член (3.8) в формулі (3.7) наступним чином:

$$|\eta| \leqslant \left| \int_S o(\varepsilon)\, ds \right| + \left| \int_T o(\varepsilon)\, dt \right| + \left| \iint_\Pi o(\varepsilon)\, ds\, dt \right| + \\ + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \left\| \Delta_{\widetilde{u}} g_{x^+}(x^+(s_0, t), u(t), t) \right\| \cdot \|p(t)\| \cdot \left\| \Delta x^+(s_0, t) \right\| dt.$$

Оскільки функції $g_{x^+}(x^+(s_0,t), u(t), t)$ і $p(t)$ обмежені на відрізку T, то можна зробити висновок про те, що

$$\eta \sim o(\varepsilon).$$

Тоді кінцевий варіант формули приросту функціонала на голковій варіації керування (4.1) має вигляд

$$\Delta J(u) = J(u + \Delta u) - J(u) = -\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Delta_{\widetilde{u}} h(p(t), x^+(s_0, t), u(t), t)\, dt + o(\varepsilon). \tag{4.2}$$

Отримана формула дозволяє сформулювати необхідну умову оптимальності першого порядку на зразок класичного принципа максимума Л.С. Понтрягіна.

Теорема 4.1. *Нехай $\{u^*, x^*\}$ – оптимальний процес в задачі (1.1), (2.1) - (2.5). Тоді даний процес задовільняє майже скрізь на T принцип максимума*

$$h(p^*(t), x^{+^*}(s_0, t), u^*(t), t) = \max_{u \in U} h(p^*(t), x^{+^*}(s_0, t), u, t), \tag{4.3}$$

де $p^*(t)$ – розв'язок спряженої задачі (3.5)-(3.6) при $x = x^*(s,t)$, $u = u^*(t)$.

Зауваження 1. *Для простоти викладу припускалось, що крайові умови на правій боковій границі прямокутника Π фіксовані. Аналогічні результати можуть бути отримані для задач, в яких крайові умови на правому кінці також визначаються з керованої системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду*

$$x_t^-(s_1, t) = q(x^-(s_1, t), w(t), t), \quad t \in T,$$

$$x^-(s_1, t_0) = [x^0(s_1)]^-,$$
$$w(t) \in W, \ \ t \in T$$

Зауваження 2. *З врахуванням результатів роботи [4] для задачі (1.1), (2.1)–(2.5), в якій праві частини системи (1.1) містять розподілені керування, принцип максимума неважко розповсюдити на випадок розподіленого керування і отримати додаткову поточкову умову максимума функції H.*

Розглянемо лінійно-опуклий варіант задачі оптимального керування (1.1), (2.1)–(2.5), в якому праві частини систем (1.1) і (2.3) лінійні по стану:

$$f(x, s, t) = B(s, t)x + d(s, t),$$
$$g(x^+(s_0, t), u(t), t) = G(t)x^+(s_0, t) + \overline{g}(u(t), t),$$

а функції $F(x, s, t)$ і $\varphi(x, s)$ опуклі по x.

Теорема 4.2. *Для лінійно-опуклого варіанту задачі оптимального керування (1.1), (2.1)-(2.5) умова максимума (4.3) є необхідною і достатньою умовою оптимальності процесу $\{u^*, x^*\}$.*

Доведення даного твердження очевидне: достатньо розглянути формулу приросту (3.7) на процесі, який задовільняє умову максимума, і скористатися тим, що залишковий член (3.8) в цій формулі невід'ємний в силу зроблених припущень.

Ці достатньо стандартні для теорії оптимального керування достатні умови можна значно розширити в сфері застосування, якщо скористатися підходом до перетворення принципа максимума, який був запропонований в [5].

Припустимо, що допустимий процес $\{u^*, x^*\}$ задовільняє посиленим умовам принципу максимума у вихідній нелінійній задачі (1.1), (2.1)-(2.5).

Умова MH. Для майже всіх $(s, t) \in \overline{\Pi}$ вектор $x^*(s, t)$ є розв'язком задачі

$$H(\psi^*(s, t), x, s, t) - \langle H_x(\psi^*(s, t), x^*(s, t), s, t), x\rangle \to \max, \ \ x \in E^n.$$

Умова Mh. Для майже всіх $t \in T$ пара $(u^*(t), {x^*}^+(s_0, t))$ є розв'язком задачі

$$h(p^*(t), x^+, u, t) - \langle h_x(p^*(t), {x^*}^+(s_0, t), u^*(t), t), x^+\rangle \to \max,$$
$$x^+ \in E^{m_1}, \ u \in U$$

Умова MB (гранична умова). Для майже всіх $s \in S$ вектор $x^*(s, t_1)$ є розв'язком задачі

$$\varphi(x, s) + \langle \psi(s, t_1), x\rangle \to \min, \ \ x \in E^n$$

Тут припускається, що $\psi^*(s, t), p^*(t)$ – розв'язки спряжених задач (3.5), (3.6) при $x = x^*(s, t)$, $u = u^*(t)$.

Відмітимо, що з умови Mh випливає виконання принципа максимума (4.3) на досліджуваному процесі. Достатньо скористатися довільністю $x^+ \in E^{m_1}$ і покласти $x^+ = {x^*}^+(s_0, t)$.

Теорема 4.3. *Якщо допустимий процес $\{u^*, x^*\}$ задовільняє умовам МН, Мh і МВ, то він є оптимальним в досліджуваній задачі.*

Доведення. Розглянемо лагранжіан задачі (1.1), (2.1)-(2.5) в стандартній формі:

$$L(x,u,\psi^*,p^*) = J(u) + \iint_\Pi \langle \psi^*(s,t), D_A x - f(x,s,t)\rangle\, ds\, dt + \\ + \int_T \langle p^*(t), \dot{x}^+(s_0,t) - g(x^+(s_0,t),u,t)\rangle\, dt.$$

На довільному допустимому процесі він співпадає з $J(u)$, а з допомогою інтегрування частинами L легко можна перетворити до наступного вигляду:

$$L(x,u,\psi^*,p^*) = \int_S [\varphi(s(s,t_1),s) + \langle \psi^*(s,t_1), x(s,t_1)\rangle]\, ds - \\ - \int_T [h(p^*(t), x^+(s_0,t), u(t), t) + \langle \dot{p}^*(t), x^+(s_0,t)\rangle]\, dt - \\ - \iint_\Pi [H(\psi^*(s,t), x(s,t), s, t) + \langle D_A\psi^* + A_s(s,t)\psi^*(s,t), x(s,t)\rangle]\, ds\, dt + \\ + \langle p^*(t_1), x^+(s_0,t_1)\rangle - \langle p^*(t_0), x^+(s_0,t_0)\rangle - \int_S \langle \psi^*(s,t_0), x(s,t_0)\rangle\, ds + \\ + \int_T [\langle \psi^*(s_1,t), A(s_1,t)x(s_1,t)\rangle - \langle \psi^*(s_0,t), A(s_0,t)x(s_0,t)\rangle]\, dt.$$

Скористаємося тим, що функції $\psi^*(s,t)$ і $p^*(t)$ є розв'язками спряжених задач (3.5), (3.6). В останньому інтегралі кожний скалярний добуток можна представити у вигляді суми:

$$\langle \psi^*, Ax\rangle = \langle {\psi^*}^+, A^+x^+\rangle + \langle {\psi^*}^-, A^-x^-\rangle.$$

В результаті отримуємо:

$$L(x,u,\psi^*,p^*) = \int_S [\varphi(s(s,t_1),s) + \langle \psi^*(s,t_1), x(s,t_1)\rangle]\, ds - \\ - \int_T [h(p^*(t), x^+(s_0,t), u(t), t) + \langle h_x(p^*(t), {x^*}^+(s_0,t), u^*(t), t), x^+(s_0,t)\rangle]\, dt - \\ - \iint_\Pi [H(\psi^*(s,t), x(s,t), s, t) - \langle H_x(\psi^*(s,t), x^*(x,t), s, t), x\rangle]\, ds\, dt - \\ - \langle p^*(t_0), (x^0(s_0))^+\rangle - \int_S \langle \psi^*(s,t_0), x^0(s)\rangle\, ds + \int_T [\langle {\psi^*}^-(s_1,t), A^-(s_1,t)q(t)\rangle.$$

В даному вигляді три останніх доданка на всіх допустимих процесах співпадають, а виконання посилених умов максимума гарантує, що сума трьох перших доданків досягає мінімума на трійці функцій $(u^*(t), x^*(S,t), {x^*}^+(s_0,t))$, якщо цю суму розглядати на всеможливих трійках функцій $(u(t), x(s,t), x^+(s_0,t))$ з властивостями компонент допустимих процесів (навіть без врахування диференціальних зв'язків задачі). Звідси, з врахуванням рівності $L = J$ на допустимих процесах, і випливає справедливість теореми. $\square$

5 Числовий метод

Викладені раніше результати: формула приросту цільового функціоналу (3.7)–(3.8), оцінка з допомогою нерівності (3.9) залишкового члена в цій формулі через міру області голкової варіації і поточковий принцип максимума (4.3), дозволяють використати в досліджуваній задачі ітераційні методи послідовних наближень, розроблені для задач оптимального керування системами звичайних диференціальних рівнянь [3, 4]. При цьому для всіх збіжних модифікацій методів, застосування яких можливе в досліджуваній задачі, використовуються стандартні конструкції наступного вигляду:

$$w_u(v,t) = \Delta_v h(p(t), x^+(s_0,t),$$

$$u(t),t) = h(p(t)), x^+(s_0,t), v(t), t) - h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t).$$

$$\overline{u}(t) : w_u(\overline{u}(t),t) = \max_{v\in U} w_u(v,t), \tag{5.1}$$

$$\overline{w}_u(t) = w_u(\overline{u}(t),t) \geqslant 0, \quad t \in T, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{V}_u = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_T \overline{w}_u(t)\,dt \tag{5.3}$$

Очевидно, що якщо $\mathcal{V}_u = 0$, то допустиме керування $u(t)$ задовільняє принцип максимума. На базі керування $u(t)$ будується однопараметрична сім'я керувань

$$u_\varepsilon(t) = u(t) + \chi_\varepsilon(t)(\overline{u} - u(t)), \quad t \in T, \tag{5.4}$$

де функція $\chi_\varepsilon(t) \in L_\infty(T)$ – характеристична функція:

$$\chi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in T_u(\varepsilon), \\ 0, & t \in T\backslash T_u(\varepsilon) \end{cases}$$

Тут $T_u(\varepsilon)$ – однопараметрична сім'я множин з відрізка T, міра яких лінійно залежить від $\varepsilon \in [0,1]$.

Можливість покращення керування, яке не задовільняє принципу максимума, базується на нерівності

$$J(u_\varepsilon) - J(u) \leqslant -\int_{T_u(\varepsilon)} \overline{w}_u(t)\,dt + M\varepsilon^{1+\gamma},$$

яку можна отримати за умови, що

$$\Delta J(u) \leqslant -\int_{T_u(\varepsilon)} \Delta_{u_\varepsilon} h(p(t), x^+(s_0,t), u(t), t)\,dt + M\varepsilon^{1+\gamma}, \tag{5.5}$$

$$M \geqslant 0, \quad \gamma > 0.$$

Твердження 1. *Нехай у доповнення до припущень на вхідні дані задачі оптимального керування (1.1), (2.1)-(2.5), які сформульовані в § 2, функції* $f_x(x,s,t)$, $\phi_x(x(s,t_1),s)$, $F_x(x,s,t)$, $g_x(x^+(s_0,t),u(t),t)$ *задовільняють умову Ліпшіца по* x *з деякими костантами, які не залежать від вибору допустимого процесу і змінних* (s,t). *Тоді для довільних допустимих керувань* $u(t)$ *і* $u_\varepsilon(t)$ *вигляду (5.4) нерівність (5.5) виконується при* $\gamma = 1$.

Доведення. Розглянемо приріст функціонала $J(u_\varepsilon) - J(u)$. Позначимо через $x_\varepsilon = x_\varepsilon(s,t)$ – розв'язок задачі (1.1), (2.1)-(2.3) при керуванні $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t)$, $\Delta x(s,t) = x_\varepsilon(s,t) - x(s,t)$.

Тоді для залишкового члена (3.8) справедливі наступні представлення:

$$o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|) = \langle \varphi_x(x + \mathcal{V}_1 \Delta x, s) - \varphi_x(x(s,t_1),s), \Delta x(s,t_1)\rangle,$$

$$o_h(\left\|\Delta x^+(s_0,t)\right\|) = \langle h_{x^+}(p(t), x^+ + \mathcal{V}_2\Delta x^+, u_\varepsilon(t), t) - \\ - hx^+(p(t), x^+(s_0,t), u_\varepsilon(t), t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle,$$

$$o_H(\|\Delta x(x,t)\|) = \langle H_x(\psi, x + \mathcal{V}_3\Delta x, x, t) - H_x(\psi, x, s, t), \Delta x(s,t)\rangle,$$
$$0 \leqslant \mathcal{V}_i \leqslant 1, \;\; i = 1,2,3.$$

Застосуємо умови Ліпшіца і скористаємося тим, що функція $p(t)$ обмежена на T. В результаті отримаємо оцінку залишкового члена у формулі приросту:

$$|\eta| \leqslant M\varepsilon^2,$$

де константа M не залежить від вибору допустимих процесів $\{u,x\}$ і $\{u_\varepsilon, x_\varepsilon\}$. Тим самим встановлена справедливість даного твердження. □

В залежності від способів вибору параметра ε можуть бути запропоновані два варіанти методу.

Нехай задано початкове наближення з класу допустимих функцій $u^0 = u^0(t)$. Опишемо k-у ітерацію методу, тобто перехід від $u^k(t)$ до $u^{k+1}(t)$, $k = 0,1,2,...$

Крок 1. По керуванню u^k знайдемо функції $x^{+^k}(s_0,t)$ і $p^k(t)$, які є розв'язками задач (2.3) і (3.5)-(3.6).

Крок 2. Після розв'язання допоміжної задачі (5.1) при $x^+ = x^{+^k}(s_0,t)$, $p = p^k(t)$, знайдемо керування $\overline{u}^k = \overline{u}^k(t)$.

Крок 3. По керуванню $\overline{u}^k$, скориставшись формулами (5.2), (5.3), обчислимо функцію $\overline{w}_k(t)$ і середнє значення цієї функції – число $\mathcal{V}_k$. Якщо $\mathcal{V}_k = 0$, то керування u^k задовільняє скінченно-вимірному принципу максимума і розв'язок задачі даним методом зупиняється. Якщо ж $\mathcal{V}_k > 0$, то будуємо сім'ю керувань u^k_ε за правилом (5.4), в якому $\overline{u} = \overline{u}^k$, $T_u(\varepsilon) = T_k(\varepsilon)$.

Крок 4. В першому варіанті методу параметр ε_k визначається як розв'язок задачі одновимірної мінімізації

$$J(u^k_{\varepsilon_k}) = \min_{\varepsilon\in[0,1]} J(u^k_\varepsilon);$$

в другому варіанті методу крок визначається з менш жорсткої умови

$$\varepsilon_k = \delta^l, \;\; l = 0, 1, ...,$$

$$J(u^k_{\delta^l}) - J(u^k) \leqslant -\frac{N_k \mathcal{V}_k^\sigma \gamma}{\gamma + 1}\delta^l. \qquad (5.6)$$

Тут $\delta \in (0, 1)$ – фіксоване число, яке є параметром методу; l - мінімальний номер, при якому справедлива нерівність (5.6); N_k і σ – додатні числа, які визначаються способом побудови областей варіації $T_k(\varepsilon)$. Другий спосіб часто буває зручнішим в практичній реалізації методу.

Ітерація методу закінчується вибором наступного наближення керування як $u^{k+1} = u^k_{\varepsilon_k}$.

Результати дослідження даного методу на збіжність аналогічні результатам, які були отримані в роботах [3, 4], і можуть бути сформульовані у вигляді наступної теореми.

Теорема 5.1. *Нехай в задачі оптимального керування (1.1), (2.1)-(2.5):*

1. *справедлива нерівність (5.5);*
2. *функціонал J(u) обмежений знизу на множині допустимих керувань;*
3. *області голкової варіації $T_k(\varepsilon)$ підібрані таким чином, щоб на кожному кроці методу виконувалася нерівність*

$$\int_{T_k(\varepsilon)} \overline{w}_k(t)\, dt \geqslant N_k \mathcal{V}_k^\sigma \varepsilon, \;\; \varepsilon \in [0, 1], \qquad (5.7)$$

$$N_k \geqslant N > 0, \;\; k = 0, 1, ..., \; \sigma \geqslant 1.$$

Тоді для довільного допустимого початкового наближення $U^0 = u^0(t)$ послідовність керувань, згенерованих методом, є релаксаційною і збігається в сенсі

$$\mathcal{V}_k \to 0, \;\; k \to \infty.$$

Доведення. Розглянемо нерівність (5.5) і нехай $u = u^k$, $u_\varepsilon = u^k_\varepsilon$, $T_u(\varepsilon) = T_k(\varepsilon)$. Посилимо дану нерівність за рахунок (5.7) і отримаємо

$$J(u^k_\varepsilon) - J(u) \leqslant -\int_{T_k(\varepsilon)} \overline{w}_k(t)\, dt + M\varepsilon^{1+\gamma} \leqslant -N_k \mathcal{V}_k^\sigma \varepsilon + M\varepsilon^{1+\gamma}. \qquad (5.8)$$

Функція $r_k(\varepsilon) = -N_k \mathcal{V}_k^\sigma \varepsilon + M\varepsilon^{1+\gamma}$ є опуклою функцією додатнього аргументу ε і досягає глобального мінімума в точці

$$\varepsilon_k^* = (\frac{N_k \mathcal{V}_k^\sigma}{M(1+\gamma)})^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Рівняння прямої, яка проходить через точки $(0,0)$ і $(\varepsilon_k^*, r_k(\varepsilon_k^*))$, має вигляд

$$z_k(\varepsilon) = -\frac{N_k \mathcal{V}_k^\sigma \gamma}{1+\gamma}\varepsilon.$$

Скориставшись тим, що хорда, яка стягує дві точки графіка опуклої функції, лежить не нижче графіка цієї функції, посилюємо (5.8):

$$J(u_\varepsilon^k) - J(u) \leqslant -\frac{N_k \mathcal{V}_k^\sigma \gamma}{1+\gamma}\varepsilon, \ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_k^*) \cap (0, 1].$$

Розглянемо перший варіант методу, коли величина ε_k на 4-ому кроці вибирається як розв'язок задачі одновимірної мінімізації. Тоді

$$J(u^{k+1}) - J(u^k) \leqslant \frac{N_k \mathcal{V}_k^\sigma \gamma}{1+\gamma} \min\{1, \varepsilon_k^*\}. \tag{5.9}$$

Звідси одразу випливає релаксаційність методу: $J(u^{k+1}) \leqslant J(u^k)$. З обмеженості знизу цільового функціонала випливає збіжність

$$\lim_{k\to\infty} [J(u^{k+1}) - J(u^k)] = 0.$$

При переході в (5.9) до границі при $k \to \infty$, отримаємо

$$\mathcal{V}_k \to 0, \ \ k \to \infty.$$

Для другого варіанту вибору ε_k на 4-ому кроці методу зміни в доведенні незначні. Оскільки l – мінімальний номер, при якому справджується (5.6), то для $(l-1)$ ця нерівність не виконується. Такий випадок можливий лише тоді, коли

$$\delta^{l-1} > \min\{1, \varepsilon_k^*\},$$

а відповідно

$$\delta^l < \delta \min\{1, \varepsilon_k^*\}.$$

Підставимо дану нерівність в (5.6) і отримаємо

$$J(u_\varepsilon^k) - J(u) \leqslant -\delta \frac{N_k \mathcal{V}_k^\sigma \gamma}{1+\gamma} \min\{1, \varepsilon_k^*\}.$$

Дана нерівність відрізняється від (5.9) лише постійним множником δ в правій частині, що не впливає на хід подальших суджень. □

6 Варіаційні умови оптимальності для задач лінійних по стану

Отриманий вище принцип максимума є достатньо прогнозований в задачі (1.1), (2.1)–(2.5). Голкова варіація керування, завдяки диференційному зв'язкові на границі, викликає мале по нормі простору $C(T)$ збурення початкового стану, яке потім розповсюджується по області П. До значно більш повних і нестандартних результатів приводить розгляд часткового класу задач типу (1.1), (2.1)–(2.5) з лінійними по стану правими частинами диференціальних рівнянь і залежними від керування коефіцієнтами при фазових змінних. Остання обставина є причиною того, що в задачі навіть у випадку лінійного цільового функціонала не будуть виконуватися умови достатньості принципа максимума, які сформульовані в теоремі 4.2. Неефективними тут є і достатні умови теореми 4.3. Крім того, застосування для такої задачі загальних алгоритмів §5 приводить до ітераційного процесу, на кожному кроці якого необхідно неодноразово інтегрувати системи гіперболічних рівнянь.

Нижче для такої, в загальному нелінійної, задачі оптимізації доводяться необхідні і одночасно достатні умови оптимальності в формі варіаційного принципу максимума. Доведення базується на двох нестандартних точних (без залишкового члена) формулах приросту цільового функціоналу, які використовують проварйований фазовий стан системи або розв'язок спряженої задачі. Наслідком варіаційного принципу максимума є два варіанти редукції розподіленої задачі до задачі оптимального керування звичайними динамічними системами.

6.1 Постановка задачі

Нехай в задачі (1.1), (2.1)–(2.5) функції $f(x(s,t),s,t)$, $\varphi(x(s,t_1),s)$, $g(x^+(s_0,t),u(t),t)$ і $F(x,s,t)$ лінійні по стану:

$$\begin{aligned} f(x,s,t) &= B(s,t)x + d(s,t), \\ g(x^+(s_0,t),u,t) &= C(u(t),t)x^+(s_0,t) + b(u(t),t), \\ \phi(x(s,t_1),s) &= \langle c(s), x(s,t_1)\rangle, \\ F(x,s,t) &= \langle b_0(s,t), x(s,t)\rangle. \end{aligned}$$

Тут $B(s,t)$ і $C(u(t),t)$ – матричні функції розмірності $n\times n$ і $m_1\times m_1$ відповідно; $d(s,t)$, $c(s)$, $b_0(s,t)$ – n-вимірні, $b(u,t)$ – m_1-вимірна вектор-функції. Тоді отримаємо наступну задачу оптимального керування:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = B(s,t)x + d(s,t), \tag{6.1}$$

$$(s,t)\in \Pi = S\times T,\ S=[s_0,s_1],\ T=[t_0,t_1];$$

$$x(s,t_0) = x^0(s),\quad s\in S; \tag{6.2}$$

$$x^-(s_1,t) = q(t),\quad t\in T; \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial x^+(s_0,t)}{\partial t} = C(u(t),t)x^+(s_0,t) + b(u(t),t),\ t\in T; \tag{6.4}$$

$$x^+(s_0,t_0) = (x^0(s_0))^+;$$

$$u(t) \in U, \;\; t \in T, \;\; U \subset E^r; \tag{6.5}$$

$$J(u) = \int_S \langle c(s), x(s,t_1)\rangle \, ds + \iint_\Pi \langle b_0(s,t), x(s,t)\rangle \, ds \, dt. \tag{6.6}$$

Задача (6.1)-(6.6) розглядається в припущеннях § 1.2.

Досліджувана задача не відноситься до класу лінійно-опуклих задач, для яких в силу теореми 4.2 принцип максимума є необхідною і достатньою умовою оптимальності.

Неважко переконатися, що для задачі (6.1)-(6.6) тривіально виконуються умови MH і MB теореми 4.3, але умова Mh не виконується.

6.2 Варіаційні принципи максимума.

Побудуємо відмінний від класичного точний варіант формули приросту цільового функціоналу. Розглянемо два допустимих процеси $\{u, x = x(s,t,u)\}$, $\{\widetilde{u} = u + \Delta u, \widetilde{x} = = x(s,t,\widetilde{u}) = x + \Delta x\}$. Тоді система приростів стану набуде вигляду

$$D_A \Delta x = B(s,t)\Delta x, \;\; (s,t) \in \Pi; \tag{6.7}$$

$$\Delta x(s,t_0) = 0, \;\; s \in S; \; \Delta x^-(s_1,t) = 0, \; t \in T.$$

$$\Delta x_t^+(s_0,t) = C(\widetilde{u}(t),t)\widetilde{x}^+(s_0,t) - C(u(t),t)x^+(s_0,t) - \Delta b(u(t),t), \;\; t \in T, \tag{6.8}$$

$$\Delta x^+(s_0,t_0) = 0,$$

де $\Delta b(u(t),t) = b(\widetilde{u}(t),t) - b(u(t),t)$.

Перетворимо праву частину формули (6.8), використавши представлення

$$C(\widetilde{u},t)x^+(s_0,t) - C(u,t)x^+(s_0,t) = \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)\widetilde{x}^+(s_0,t) + C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t), \tag{6.9}$$

і з врахуванням (6.7) отримаємо формулу приросту цільового функціоналу

$$\begin{aligned}\Delta J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = \int_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle \, ds + \\ + \iint_\Pi \langle \psi(s,t), D_A \Delta x - B(s,t)\Delta x(s,t)\rangle \, ds \, dt + \\ + \iint_\Pi \langle b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle \, ds \, dt + \int_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t) - \\ - \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)\widetilde{x}^+(s_0,t) - C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) - \Delta b(u(t),t)\rangle \, dt,\end{aligned} \tag{6.10}$$

де $\psi(s,t) = (\psi_1(s,t), \psi_2(s,t), ..., \psi_n(s,t))$; $p(t) = (p_1(t), p_2(t), ..., p_{m_1}(t))$ – поки довільні вектор-функції, які мають такі ж аналітичні властивості як і функції $(s,t) \to x(s,t)$, $t \to x^+(s_0,t)$ відповідно.

В (6.10) застосуємо до доданків

$$\int_T \langle p(t), \Delta x_t^+(s_0,t)\rangle \, dt; \;\; \iint_\Pi \langle \psi(s,t), D_A \Delta x\rangle \, ds \, dt$$

звичайну і узагальнену (1.8) формули інтегрування по частинах відповідно. Отримаємо

$$\Delta J(u) = \int_S \langle c(s), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds + \int_S \langle \psi(s,t_1), \Delta x(s,t_1)\rangle\, ds -$$
$$- \iint_\Pi \langle D_A\psi + A_s\psi + B^T\psi, \Delta x\rangle\, ds\, dt + \iint_\Pi \langle b_0(s,t), \Delta x(s,t)\rangle\, ds\, dt +$$
$$+ \int_T [\langle A^+(s_1,t)\psi^+(s_1,t), \Delta x^+(s_1,t)\rangle - \langle A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle -$$
$$- \langle A^-(s_0,t), \psi^-(s_0,t), \Delta x^-(s_0,t)\rangle - \langle \dot p(t), \Delta x^+(s_0,t)\rangle -$$
$$- \langle p(t), \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)\widetilde{x}^+(s_0,t) + C(u(t),t)\Delta x^+(s_0,t) + \Delta b(u(t),t)\rangle]\, dt +$$
$$+ \langle p(t_1), \Delta x^+(s_0,t_1)\rangle.$$

В останньому інтегралі відмовимося від традиційного переходу до незбуреного значення стану $x^+ = x^+(s_0,t,u)$ і будемо вимагати, щоб функції $\psi(s,t)$ і $(p(t) = p(t,u))$ були розв'язками наступної спряженої задачі:

$$D_A\psi + A_s\psi = -B^T(s,t)\psi + b_0(s,t), \;\; (s,t) \in \Pi; \tag{6.11}$$

$$\psi(s,t_1) = -c(s), \;\; s \in S;$$
$$\psi^+(s_1,t) = 0, \;\; \psi^-(s_0,t) = 0, \;\; t \in T.$$

$$\dot p = -C^T(u(t),t)p(t) - A^+(s_0,t)\psi^+(s_0,t), \;\; t \in T; \tag{6.12}$$
$$p(t_1) = 0.$$

В результаті отримаємо формулу приросту цільового функціоналу у вигляді

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,u), \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)x^+(s_0,t,\widetilde{u}) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt. \tag{6.13}$$

Друга формула приросту є симетричною і отримується в результаті використанння в (6.8) наступного представлення:

$$C(\widetilde{u},t)\widetilde{x}^+ - C(u,t)x^+ = \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)x^+ + C(\widetilde{u},t)\Delta x^+. \tag{6.14}$$

Тоді

$$\Delta J(u) = -\int_T \langle p(t,\widetilde{u}), \Delta_{\widetilde{u}} C(u(t),t)x^+(s_0,t,u) + \Delta b(u(t),t)\rangle\, dt. \tag{6.15}$$

В силу довільності допустимих керувань $u(t)$ і $\widetilde{u}(t)$ формула (6.15) може бути отримана з (6.13) формальною заміною u на $\widetilde{u}$ і $\widetilde{u}$ на u.

Відмітимо принципову відмінність формул (6.13), (6.15) від стандартної формули приросту (3.7)-(3.8), використаної раніше при доведенні принципа максимума: формули (6.13), (6.15) є точними(без залишкових членів). Але при цьому системи (6.4) або (6.12) інтегруються на збурених керуваннях. Кожна з формул (6.13), (6.15) безпосередньо приводить до необхідних і достатніх умов оптимальності, які зводять вихідну задачу до лінійних по стану задач оптимального керування системами звичайних диференціальних рівнянь. Достатньо замітити, що в (6.13) всі пари $(\widetilde{u}, \widetilde{x}^{+})$ зв'язані системою звичайних диференціальних рівнянь (6.4), а в (6.15) системою (6.12) зв'язані пари $\widetilde{u}, p(t, \widetilde{u})$. Відповідні результати природньо назвати варіаційними принципами максимума для лінійних по стану задач оптимізації гіперболічних систем.

Для точного формулювання умов оптимальності, які випливають з формули (6.13), розглянемо наступну задачу оптимальності керування $LP(y)$ системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$I(v) = -\int_T \langle p(t,u), (C(v(t),t) - C(u(t),t))y(t,v) + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle \, dt \to \min,$$

$$\dot{y} = C(v(t),t)y + b(v(t),t), \quad t \in T, \tag{6.16}$$
$$y(t_0) = (x^0(s_0))^{+}, \quad v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Тут $u(t)$, $p(t,u)$ – фіксовані функції, $y = y(t)$ – m_1-вимірна функція стану, $v(t)$ – керування, яке задовільняє тим же обмеженням, що й керуюча функція вихідної задачі оптимального керування.

Аналогічно формула (6.15) природнім чином приводить до наступної задачі $LP(p)$:

$$\Phi(v) = -\int_T \langle p(t,v), (C(v(t),t) - C(u(t),t))x^{+}(s_0,t,u) + \\ + b(v(t),t) - b(u(t),t)\rangle \, dt \to \min,$$

$$\dot{p} = -C^T(v(t),t)p - A^{+}(s_0,t)\psi^{+}(s_0,t), \quad t \in T, \tag{6.17}$$
$$p(t_1) = 0, \quad v(t) \in U, \quad t \in T.$$

Тут $u(t)$, $\psi^{+}(s_0,t)$ – фіксовані функції, $x^{+}(s_0,t,u)$ – розв'язок задачі Коші (6.4) при $u = u(t)$; $p = p(t)$ – m_1-вимірна функція стану.

Теорема 6.1. ***Варіаційні принципи максимума***. *Для оптимальності керування $\widetilde{u}(t)$ в задачі (6.1)-(6.6) необхідно і достатньо, щоб керування $\widetilde{(v)} = \widetilde{u}(t)$ було оптимальним в кожній із задач $LP(y)$ і $LP(p)$. Зокрема, це необхідно і достатньо для оптимальності досліджуваного керування $u(t)$.*

Доведення безпосередньо випливає з формул (6.13), (6.15). З цих же формул випливає, що оптимальне значення функції в задачі (6.1)-(6.6) дорівнює

$$J(\widetilde{u}) = J(u) + I(\widetilde{u}) = J(u) + \Phi(\widetilde{u}).$$

Якщо умови оптимальності цієї теореми, зв'язані з задачею $LP(y)$, можна отримати з принципа Лагранжа (наприклад, деталізуючи лагранжіан в доведенні теореми 4.3), то для задачі $LP(p)$ цього зробити не можна, і скоріш за все наявність двох систем оптимальності є одним з проявів двоїстості в задачі (6.1)-(6.6).

6.3 Редукції задач і методи розв'язку.

Обговоримо конструктивні особливості редукцій, які випливають з теореми 6.1, а також можливі числові методи покращення.

З формули (6.13) і відповідного варіаційного принципу максимума випливає, що для розв'язку задачі оптимального керування (6.1)-(6.6) необхідно виконати наступні операції.

1. Задати довільне допустиме керування $u(t)$. Обчислити відповідний йому розв'язок $p = p(t, u)$ спряженої задачі (6.12). Відмітимо, що для цього необхідно також знайти розв'язок задачі (6.11), яке не залежить від вибору допустимого процесу.

2. Розв'язати задачу оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь (6.16).

Відповідно, для розв'язку вихідної задачі (6.1)-(6.6) необхідно всього лиш 2 рази проінтегрувати системи диференціальних рівнянь з частковими похідними (пошук $\psi = \psi(s, t)$ і стану, який відповідає оптимальному керуванню).

Розв'язок задачі оптимального керування (6.1)-(6.6) на основі формули (6.15) і відповідного варіаційного принципа максимума зводиться до наступних операцій.

1. Задається довільне допустиме керування $u(t)$. Обчислюються

$$x^+ = x^+(s_0, t, u) \text{ } i \text{ } \psi = \psi(s, t).$$

2. Розв'язується задача оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь (6.17). Важкість реалізації даної схеми така ж – подвійне інтегрування систем диференціальних рівнянь з частковими похідними, а також розв'язок лінійної по стану задачі оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянемо детальніше, наприклад, задачу оптимального керування (6.17). З математичної точки зору це лінійна задача оптимального керування системою звичайних диференціальних рівнянь. Її характерною особливістю є те, що матриця коефіцієнтів системи залежить від керування. Таким чином, принцип максимума не є достатньою умовою оптимальності. Для розв'язку можна використати нестандартні процедури, також побудовані на ідеях точних формул приросту [1, 13, 14].

Для двох допустимих процесів $\{v, p\}$ і $\{\widetilde{u} = v + \Delta v, \widetilde{p} = p + \Delta p\}$ формула приросту цільового функціоналу має вигляд

$$\Delta I(v) = \int_T \Delta_v H(\xi(t, v), p(t, \widetilde{v}), v, t)\, dt, \tag{6.18}$$

або

$$\Delta I(v) = \int_T \Delta_v H(\xi(t, \widetilde{v}), p(t, v), v, t)\, dt, \tag{6.19}$$

де вектор-функція $\xi = \xi(t)$ задовільняє спряжену систему рівнянь:

$$\dot{\xi} = C(v, t)\xi(t) + (C(v, t) - C(u, t))x^+(s_0, t, u), \quad t \in T,$$

$$\xi(t_0) = 0, \tag{6.20}$$

а скалярна функція $H = H(\xi, p, t, v)$ – функція Понтрягіна для задачі (6.17):

$$H(\xi, p, v, t) = \langle \xi(t), -C^T(v, t)p(t) - A^+\psi^+(s_0, t)\rangle - \\ - \langle p(t), (C(v, t) - C(u, t))x^+(s_0, t, u)\rangle. \tag{6.21}$$

Введемо відображення $v^*(\xi, p, t)$ з допомогою екстремального відношення

$$v^*(\xi, p, t) = \arg\min_{v \in V} H(\xi, p, v, t), \tag{6.22}$$

де $\xi \in E^{m_1}$, $p \in E^{m_1}$, $t \in T$. Позначимо через $D_p(t)$ – множину досяжності фазової системи в момент $t \in T$:

$$D_p(t) = \{p(t, v), \quad v \in V\};$$

D_ξ – множина досяжності спряженої системи в момент $t \in T$:

$$D_\xi(t) = \{\xi(t, v), \quad v \in V\}.$$

Тоді для оптимальності керування $v(t)$ в задачі (6.1) достатньо виконання хоча б однієї з симетричної пари умов:

$$v(t) = v^*(\xi(t, v), p, t), \quad p \in D_p(t), \quad t \in T; \tag{6.23}$$

$$v(t) = v^*(\xi, p(t, v), t), \quad \xi \in D_\xi(t), \quad t \in T. \tag{6.24}$$

Можуть бути запропоновані дві процедури покращення керування v.

На основі формули приросту (6.18) (умови (6.23)) будується перша процедура покращення:

1. знаючи v, знайдемо $\xi(t, v)$, $t \in T$;

2. сформуємо екстремальне керування: $\widetilde{v}^*(p, t) = v^*(\xi(t, v), p, t)$;

3. знайдемо розв'язок $p(t)$, $t \in T$ фазової системи

$$\dot{p} = -C^T(\widetilde{v}^*(p,t),t)p - A^+\xi^+(s_0,t),$$
$$p(t_1) = 0 \tag{6.25}$$

разом з керуванням $\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}^*(p(t),t)$, $t \in T$.

Властивість покращення цілком очевидна. Оскільки

$$\widetilde{v}(t) = v^*(\xi(t,v), p(t,\widetilde{v}), t),$$

то в силу визначення відображення v^* отримаємо

$$\Delta_{\widetilde{v}(t)} H(\xi(t,v), p(t,\widetilde{v}), v(t), t) \leqslant 0, \quad t \in T.$$

Звідси на основі формули приросту (6.18) робимо висновок, що

$$\Delta_{\widetilde{v}} I(v) \leqslant 0.$$

Таким чином для довільного допустимого керування v перша процедура покращення утворює керування, яке задовільняє умову $I(\widetilde{v}) \leqslant I(v)$. Рівність $\widetilde{v}(t) = v(t)$, $t \in T$ означає, що вихідне керування $v(t)$ задовільняє принцип максимума.

Симетрична схема покращення буде отримана на основі формули приросту (6.19) (умова (6.24)):

1. знаючи v, знайдемо $p(t,v)$, $t \in T$;

2. сформуємо екстремальне керування: $\widetilde{v}^*(\xi,t) = v^*(\xi, p(t,v), t)$;

3. знайдемо розв'язок $\xi(t)$, $t \in T$ спряженої системи:

$$\dot{\xi} = C(\widetilde{v}^*(\xi,t),t)\xi(t) + (C(\widetilde{v}^*(\xi,t),t) - C(u,t))x^+(s_0,t,u), \quad t \in T,$$
$$\xi(t_0) = 0 \tag{6.26}$$

разом з керуванням $\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}^*(\xi(t),t)$, $t \in T$.

На виході процедури отримаємо допустиме керування з властивістю покращення. Співпадіння $\widetilde{v}(t) = v(t)$, $t \in T$ означає принцип максимума для керування $v = v(t)$.

В цілях коректності природньо припустити, що розв'язок $p(t) = p(t,\widetilde{v})$ задачі Коші (6.25) в першій процедурі і розв'язок $\xi(t) = \xi(t,\widetilde{v})$ задачі Коші (6.26) в другій процедурі існують на T, причому відповідне керування $\widetilde{v}(t)$, $t \in T$ в обох випадках є обмеженою і вимірною вектор-функцією.

По важкості реалізації друга процедура аналогічна першій: і в тому, і в другому випадку ціна покращення дорівнює двом задачам Коші (для фазової і спряженої систем).

Значною властивістю обох процедур є те, що їх реалізація зв'язана з інтегруванням розривних по фазових або спряжених змінних систем (6.25) або (6.26). В роботах В.А. Срочко зі співавторами [1, 13, 14] показано, що можлива неєдиність розв'язку, яка виникає при інтегруванні розривних систем, що не є мінусом. Навпаки, неєдиність розв'язку дозволяє в ряді випадків покращити керування, яке задовільняє принцип максимума.

Аналогічна схема може бути також запропонована і для задачі (6.16). Для розв'язку допоміжних задач (6.16), (6.17) можуть бути застосовані і інші методи пошуку розв'язку задач оптимального керування системами звичайних диференціальних рівнянь, які вже стали класичними.

7 Задача оптимального керування популяцією, розподілена за віком

7.1 Постановка задачі

На деякому відрізку $T = [0, t_k]$ розглянемо функцію двох незалежних змінних $x = = x(s,t)$, яка характеризує щільність розподілу деякого виду популяції в залежності від віку $s \in S = [0, s_k]$, s_k – максимальна тривалість життя. Коротко пояснимо поняття вікової щільності популяції. Нехай $g(s,t)$ – число осіб даного виду, вік яких в момент часу t менший за s. Тоді під щільністю розподілу спостережуваного виду популяції розуміємо:

$$x(s,t) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{g(s+\Delta s, t) - g(s,t)}{\Delta s} = \frac{\partial g(s,t)}{\partial s}.$$

Припускаючи, що зміна чисельності популяції може відбуватися лише за рахунок народжуваності і смертності її членів, а число померлих осіб пропорційне загальній чисельності популяції, приходимо до наступного рівняння в часткових похідних: [2, 12]

$$\frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} = -\mu(s) x(s,t), \quad s \in S, \quad t \in T \tag{7.1}$$

з початковими крайовими умовами:

$$x(s,0) = x_0(s), \quad s \in S, \tag{7.2}$$

$$x(0,t) = \beta(t) \int_{s_1}^{s_2} K(s) u(s) x(s,t)\, ds, \quad t \in T, \tag{7.3}$$

Тут $\mu(s)$ – коефіцієнт смертності; $x_0(s)$ – початковий розподіл популяції за віком; $\beta(t)$ – коефіцієнт, який характеризує середній рівень народжуваності в кожний момент часу; $K(s)$ – доля самок. Роль керування грає функція $u = u(s)$, яка задає віковий розподіл осіб, здатних народжувати. Ця функція задовільняє наступним умовам:

$$\int_{s_1}^{s_2} u(s)\, ds = 1, \quad u(s) \geqslant 0, \tag{7.4}$$

де s_1, s_2 – границі дітородного віку, $0 < s_1 < s_2 \leqslant s_k$.

Мета задачі – мінімізація функціонала:

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_k), s)\, ds. \tag{7.5}$$

Зокрема, якщо

$$\varphi(x,s) = \frac{1}{2}[x(s,t_k) - \overline{x}(s)]^2,$$

де $\overline{x} = \overline{x}(s)$ – задана функція, тоді метою керування буде досягнення заданої щільності $\overline{x}$ в кінцевий момент часу. В такому випадку задача може бути розглянута як обернена задача математичної фізики, мета якої полягає у відновленні коефіцієнта $u(s)$ по відомим даним з спостереження в кінцевий момент часу.

Задача оптимального керування (7.1)-(7.5) досліджується при наступних умовах на її параметри:

1. функції $u = u(s)$, $K = K(s)$ неперервно-диференційовані на відрізку $[s_1, s_2]$; при проведені проміжних викладок зручно вважати, що
$$u(s) \equiv 0, \quad K(s) \equiv 0, \quad s \notin [s_1, s_2]; \tag{7.6}$$

2. функції $x_0(s)$ і $\beta(t)$ неперервно-диференційовані на відрізках S і T відповідно;

3. функція $\mu(s)$ неперервна на півінтервалі $[0, s_k)$ і задовольняє умову
$$\int_0^{s_k} \mu(s)\, ds = +\infty \tag{7.7}$$

4. функція $\varphi(x, s)$ неперервна по сукупності своїх аргументів і має неперервні й обмежені похідні по x скрізь в своїй області визначення.

Нестандартність умови (7.3) на границі полягає в тому, що значення $x(0, t)$ задається не у вигляді фіксованої функції, а обчислюється в кожний момент часу інтегруванням виразу, в який входить шуканий розв'язок в даний момент часу. Умова (7.7) забезпечує нульову щільність, якщо вік особи перевищує максимальний вік s_k.

Розв'язок задачі з початковими крайовими умовами (7.1) - (7.3) потрібно розуміти як розв'язок інтегрального рівняння, побудованого на сімействі характеристик диференціального рівняння (7.1):

$$x(s,t) = \begin{cases} x_0(s-t)\exp\big(-\int_{s-t}^{s} \mu(\rho)\big), & s \geqslant t, \\ \beta(t-s)\int_{s_1}^{s_2} K(r)u(r)x(r, t-s)\, dr \exp\big(-\int_0^s \mu(\rho)\, d\rho\big), & s < t. \end{cases} \tag{7.8}$$

При зроблених припущеннях для довільного допустимого керування розвязок задачі з початковими крайовими умовами (7.1) - (7.3), яке ми розуміємо в сенсі (7.8), буде невід'ємною функцією і гладкою в областях $s < t$ і $s > t$ [19]. Можливою лінією розриву є пряма $s = t$. Можна гарантувати неперервність функції $x(s, t)$ скрізь у досліджуваній області лише за умови узгодження

$$x_0(0) = \beta(0) \int_{s_1}^{s_2} K(s)u(s)x_0(s, t)\, ds. \tag{7.9}$$

Дану умову можна вважати додатковим інтегральним обмеженням на керування.

Описана модель є однієї з різновидностей структурованих за віком керованих процесів. Крім моделей динаміки популяцій, задачі з початковими крайовими умовами (7.1) - (7.3) використовуються для вивчення процесів розповсюдження інфекційних захворювань і наркоманії [18], динаміки безробіття [18], динаміки капітальних процесів з урахуванням структури основних економічних фондів та інші. При цьому стан процесу може описуватися і векторною функцією (окремі рівняння, які описують зміну чисельності самців і самок; залежних і незалежних від наркотиків осіб та інші). В більшості моделей керування входить в праві частини диференціальних рівнянь чи систем, а результати обмежуються доведенням поточкового чи диференційованого принципа максимума. В роботі [17] задача оптимального керування розглянутого виду досліджувалася з керованим впливом $\beta = \beta(t)$. Автори цитованих статей обмежилися отриманням аналога лініаризованого принципа максимума. Основна мета даної роботи – отримання некласичної необхідної умови оптимальності і побудови числових методів на основі застосування нестандартної варіації, яка задовільняє обмеження (7.4).

Зауваження 7.1. Описану нижче процедуру можна застосувати і до задачі із загальними інтегральними обмеженнями. Нехай керований процес $\{u, x\}$ задовільняє наступну початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \quad (s,t) \in \Pi,$$

$$x(s,t_0) = p(u(s),s), \quad s \in S,$$

$$x^+(s_0,t) = M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T,$$

$$x^-(s_1,t) = M(t)x^+(s_0,t) + g^{(2)}(t), \quad t \in T.$$

Під допустимим керуванням будемо розуміти неперервно-диференційовні функції, які задовільняють інтегральним обмеженням:

$$\int_S \Phi_j(u(s))\,ds = L_j, \quad j = 1,2,...,k,$$

з додатковою умовою однорідності підінтегральних функцій

$$\Phi_j(\lambda u) = \lambda^\alpha \Phi_j(u), \ \alpha \geqslant 1.$$

Метою даної задачі є мінімізація функціонала:

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_1),s)\,ds + \iint_\Pi F(x,s,t)\,ds\,dt.$$

7.2 Формула приросту і небхідна умова оптимальності

Розглянемо приріст цільового функціоналу (7.5) на двох допустимих процесах $\{u, x\}$ і $\{\widetilde{u} = u + \Delta u, \widetilde{x} = x + \Delta x\}$. Функція $\Delta x = \Delta x(s,t)$ є розв'язком наступної задачі з початковими крайовими умовами:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \Delta x}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial s} = -\mu(s)\Delta x, \quad s \in S, \quad t \in T; \\ \Delta x(s, 0) = 0, \quad s \in S; \\ \Delta x(0,t) = \beta(t) \int_{s_1}^{s_2} K(s)[\widetilde{u}(s)\widetilde{x}(s,t) - u(s)x(s,t)]\, ds.\end{gathered} \tag{7.10}$$

З урахуванням (7.10) формула приросту цільового функціоналу може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta J(u) &= J(\widetilde{u}) - J(u) = \\ &= \int_S \Delta\varphi(x(s,t_k),s)\, ds + \int_S \int_T \psi(s,t)[\frac{\partial \Delta x}{\partial t} + \frac{\partial \Delta x}{\partial s} + \mu(s)\Delta x]\, ds\, dt,\end{aligned}$$

де $\Delta\varphi = \varphi(\widetilde{x}(s,t_k),s) - \varphi(x(s,t_k),s)$, а $\psi = \psi(s,t)$ – поки довільна кусково-гладка функція.

1. розкладемо приріст $\Delta\varphi$ по формулі Тейлора першого порядку, виділивши лінійну частину відносно стану процеса;
2. використаємо формулу інтегрування частинами;
3. доданок $\int_T \psi(0,t)\Delta x(0,t)\, dt$, який виникає в попередньому кроці перетворимо з врахуванням (7.10);
4. скориставшись (7.6), перейдемо від інтегрування по відрізку $[s_1, s_2]$ до інтегрування по S і поміняємо порядок інтегрування;
5. підпорякуймо $\psi = \psi(s,t)$ спряженій задачі:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(s,t)}{\partial s} = -\mu(s)\psi(0,t)\beta(t)K(s)u(s), \quad s \in S, \quad t \in T; \\ \psi(s,t_k) = -\frac{\partial\varphi(x(s,t_k),s)}{\partial x}, \quad s \in S; \\ \psi(s_k,t) = 0, \quad t \in T.\end{gathered} \tag{7.11}$$

Тоді кінцевий варіант формули приросту можна записати у вигляді:

$$\Delta J(u) = -\int_{s_1}^{s_2} K(s)\Delta u(s) \int_T \psi(0,t)\beta(t)x(s,t)\, dt\, ds + \eta, \tag{7.12}$$

де

$$\eta = -\int_{s_1}^{s_2} K(s)\Delta u(s) \int_T \psi(0,t)\beta(t)\Delta x(s,t)\,dt\,ds + \int_S o_\varphi(|\Delta x(s,t_k)|)\,ds. \tag{7.13}$$

Введемо функцію $h(\psi,u,x,s) = K(s)\Delta u(s)\int_T \psi(0,t)\beta(t)\Delta x(s,t)\,dt$, тоді формулу (7.12) можна записати в більш короткій і традиційній формі

$$\Delta J(u) = -\int_{s_1}^{s_2} \Delta_{\widetilde{u}} h(\psi,u,x,s)\,ds + \eta,$$

де

$$\Delta_{\widetilde{u}} h(\psi,u,x,s)\,ds = h(\psi,\widetilde{u},x,s)\,ds - h(\psi,u,x,s)\,ds.$$

Отримана формула справедлива для 2 двох довільних допустимих процесів.

Подальше дослідження задачі ґрунтується на застосуванні некласичної варіації допустимих керувань, яка задовільняє умову (7.4).

Нехай $u = u(s)$ – допустиме керування. Варіаційне керування задається формулою

$$u_{\varepsilon,\delta} = (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))u(s+\varepsilon\delta(s)).$$

Де $\varepsilon \in [0,1]$ – параметр, який характеризує малість варіації, $\delta = \delta(s)$ – двічі неперервно-диференційована функція, яка задовільняє умовам

$$s_1 \leqslant s+\delta(s) \leqslant s_2, \quad \dot{\delta}(s) \geqslant -1, \quad s\in[s_1,s_2],$$

$$\delta(s_1) = \delta(s_2) = 0.$$

Застосування даної варіації для допустимого керування u знову приводить до керування, яке задовільняє умову (7.4). Дійсно, для доведення виконання інтегральної умови, достатньо в інтегралі

$$\int_{s_1}^{s_2} u_{\varepsilon,\delta}(s)\,ds = \int_{s_1}^{s_2} (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))u(s+\varepsilon\delta(s))\,ds$$

зробити заміну змінних $r = s+\varepsilon\delta(s)$.

Оцінимо залишковий член (7.4) в формулі приросту цільового функціонала для двох допустимих процесів $\{u,x\}$ і $\{u_{\varepsilon,\delta} = u+\Delta u, x_\varepsilon = x+\Delta x\}$. Скориставшись неперервною диференційованістю допустимих керувань, представимо приріст керування у вигляді

$$\begin{aligned}\Delta u(s) &= (1+\varepsilon\dot{\delta}(s))u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) = \\ &= u(s+\varepsilon\delta(s)) - u(s) + \varepsilon\dot{\delta}(s)u(s+\varepsilon\delta(s)) = \\ &= \varepsilon[\delta(s)u(s) + \dot{\delta}(s)u(s)] + o(\varepsilon).\end{aligned}$$

Таким чином приростом керування є величина порядку ε.

Інтегральне представлення розв'язку (7.8) дає можливість оцінити приріст стану. Дійсно

$$\Delta x(s,t) = \begin{cases} 0, & s \geqslant t, \\ \beta(t-s)\int_{s_1}^{s_2} K(r)[u_\varepsilon(r)x_\varepsilon(r,t-s)- \\ -u(r)x(r,t-s)]\,dr\,\exp\bigl(-\int_0^s \mu(\rho)\,d\rho\bigr), & s < t. \end{cases}$$

Аналізуючи приріст стану при $0 \leqslant s < t$ і використовуючи припущення про обмеженність відповідних функцій, приходимо до нерівності

$$|\Delta x(s,t)| \leqslant M_1 \int_{s_1}^{s_2} |\Delta x(r,t-s)|\,dr + M_2 \int_{s_1}^{s_2} |\Delta u(r)|dr; \;\; M_1 \geqslant 0, \;\; M_2 \geqslant 0.$$

Послідовно застосовуючи дану нерівність для $t \in [0, s_1]$, $t \in (s_1, 2s_1)$ і так далі, отримаємо оцінку:

$$J(u_{\varepsilon,\delta}) - J(u) = -\varepsilon \int_{s_1}^{s_2} K(s)\frac{d}{ds}[\delta(s)u(s)] \int_T \psi(0,t)\beta(t)x(s,t)\,dt\,ds + o(\varepsilon). \tag{7.14}$$

Підставлюючи даний вираз у формулу приросту цільового функціонала і використовуючи формулу інтегрування частинами, приходимо до необхідної умови оптимальності в досліджуваній задачі.

Твердження 2. *Нехай $u^* = u^*(s)$ – оптимальне керування в задачі (7.1) - (7.5), $x^* = x^*(s,t)$ – відповідний стан, а $\psi^* = \psi^*(s,t)$ – розв'язок спряженої задачі (7.11) при $u = u^*(s)$, $x = x^*(s,t)$. Тоді $\forall s \in [s_1, s_2]$ виконується рівність:*

$$u^*(s) \int_T \psi^*(0,t)\beta(t)[K(s)x^*(s,t)]_s\,dt = 0. \tag{7.15}$$

Доведення ґрунтується на щойно отриманій формулі приросту цільового функціоналу і довільності вибору функції $\delta(s)$.

7.3 Числовий метод і результати розрахунків

Необхідна умова оптимальності (7.15) є основою для побудови числових алгоритмів розв'язку задачі оптимального керування. Перейдемо до опису числового методу. Нехай задано початкове наближення $u_0 = u_0(s)$ і з допомогою методу пораховано $u_i = u_i(s), i = 1, 2, \ldots$. Для цього керування розраховуються розв'язки $x_i = x_i(s,t)$, $\psi_i = \psi_i(s,t)$ вихідної (7.1) - (7.3) і спряженої задач (7.2).

Будується функція

$$\omega_i(s) = u^i(s) \int_T \psi^i(0,t)\beta(t)[K(s)x^i(s,t)]_s\,dt.$$

Якщо $\omega_i(s) \equiv 0$, $s \in [s_1, s_2]$, то знайдений розв'язок задовільняє умові оптимальності і метод закінчує свою роботу. В протилежному випадку виділяємо 2 області:

$$\Omega_i^+ = \{s \in [s_1, s_2] : \omega_i(s) > 0\},$$
$$\Omega_i^- = \{s \in [s_1, s_2] : \omega_i(s) < 0\}.$$

Визначимо додаткову функцію $\delta_i = \delta_i(s)$, яка задовільняє умовам:

$$\delta_i(s) = \begin{cases} > 0, & s \in \Omega_i^+, \\ < 0, & s \in \Omega_i^-, \\ 0, & s \notin \Omega_i^+ \cup \Omega_i^-. \end{cases}$$

Побудуємо однопараметричне сімейство керувань

$$u_\varepsilon^i(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}_i)u^i(s + \varepsilon\delta_i(s)).$$

Знайдемо ε_i з умови

$$J(u_\varepsilon^i) \to \min, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \tag{7.16}$$

Тоді наступне наближення будується за формулою

$$u^{i+1}(s) = u_{\varepsilon_i}^i(s).$$

Конкретні варіанти алгоритмів відрізняються конструктивними методами побудови функцій $\delta_i(s)$.

Проведена серія тестових розрахунків для задачі з квадратичним критерієм якості. Для числового інтегрування рівняння (7.1) використовувалася характеристична різницева сітка. Заздалегідь невідомі крайові умови (7.3) відновлювалися на кожному часовому кроці числовим інтегруванням виразу в правій частині (7.3). Приведені нижче результати отримані для наступних значень параметрів:

$$s_k = 5, \quad t_k = 5, \quad s_1 = 1, \quad s_2 = 4;$$

$$\overline{x}(s) \exp\left(5 - s - \frac{1}{5-s}\right), \quad x_0(s) = \exp\left(-s - \frac{1}{5-s}\right);$$

$$\mu(s) = \frac{1}{(5-s)^2}, \quad K(s) = s\exp\left(s + \frac{1}{5-s}\right);$$

$$\beta(t) = \frac{1}{2}\exp(-0.2).$$

Функції $\delta_i(s)$ будувалися за правилом

$$\delta_i(s) = \frac{\gamma_i(s)}{M_i},$$

$$\gamma_i(s) = \frac{(s-s_0)(s_1-s)}{s_1-s_0} \cdot \frac{\omega_i(s)}{\max\limits_{s\in[s_1,s_2]} |\omega_i(s)|},$$

$$M_i = \max_{s\in[s_1,s_2]} |\dot{\gamma}_i(s)|.$$

В таблиці приведені значення цільового функціонала на відповідних ітераціях для 3 різних початкових наближень:

$$\widetilde{u}^0(s) = \frac{1}{3}; \;\; \widehat{u}^0(s)\frac{2}{9}(s-1); \;\; \bar{u}^0(s) = \frac{1}{3}(\sin 2\pi s + 1).$$

Табл. 1

Ітерація	$J(\widetilde{u}^i)$	J$(\widehat{u}^i)$	$J(\bar{u}^i)$
0	$2.827 \cdot 10^7$	$1.314 \cdot 10^4$	$1.329 \cdot 10^3$
1	$2.605 \cdot 10^1$	$2.315 \cdot 10^3$	$1.329 \cdot 10^2$
2	$2.16 \cdot 10^{-7}$	$2.646 \cdot 10^2$	$1.052 \cdot 10^2$
3		$2.6 \cdot 10^{-5}$	$4.593 \cdot 10^1$
6			$2.19 \cdot 10^{-7}$

У всіх 3 випадках реалізація процесу закінчувалася після досягнення необхідної точності для значення цільового функціонала. Таким чином мета керування була досягнута. Мала кількість ітерацій в першому і другому випадках не означають, що об'єм обчислень був малий. Основне навантаження кожної операції полягає в розв'язку допоміжної задачі (7.16). На кожній ітерації для розв'язку цієї задачі одновимірної оптимізації доводилось 15-20 раз інтегрувати рівняння (7.1). Для кожного початкового наближення метод привів до відповідного "майже"оптимального керування. Зауважимо, що в досліджуваній задачі оптимальне керування, яке є глобальним мінімумом цільового функціонала, не є єдиним.

Отже, проведені числові експерименти показують, що запропонований метод може бути достатньо успішно застосований для задачі оптимального керування динамікою популяції.

Висновок

Отримані результати:

1) досліджено задачі оптимізації гіперболічниї систем, в яких початково-крайові умови визначаються з керованих систем звичайних диференційованих рівнянь;

2) досліджено задачі оптимального керування початково-крайовими умовами гіперболічними системами в класі гладких керуючих впливів. На основі застосування нестандартних варіацій установлені необхідні умови оптимальності в задачі оптимального керування системою гіперболічних рівнянь, в якій керуючі граничні умови задані у вигляді скінченно-вимірних зв'язків загального вигляду

3) проведено числову реалізацію ітераційних методів розв'язку задач оптимального керування напівлінійними системами з гладкими граничними керуваннями для прикладної задачі динаміки популяцій по відомих даних спостережень в кінцевий момент часу.

Література

[1] Антоник В.Г., Срочко В.А. *К решению задач оптимального управления на основе методов линеаризации* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1992. — Т. 32, № 7. — С. 979–991.

[2] Блохинов Ю.В. *Качественное исследование модели динамики по- пуляции, распределенной по возрасту и жизненности* // Моделирование процессов экологического развития. Вып. 2. — М.: ВНИИ системных исследований, 1982. — С. 64–69.

[3] Васильев О.В., Аргучинцев А.В., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, основанные на допустимых вариациях* // Труды 12-й Байкальской межд. конф. «Методы оптимизации и их приложения». Пленарные доклады. — Иркутск, 2001. — С. 52–68.

[4] Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения.* Ч. 2. Оптимальное управление. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. — 151 с.

[5] Дыхта В.А. *Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики и ее приложения. — М.: ВИНИТИ. — 2003. — С. 32–64.

[6] Матвеев А.С. *Обобщенные решения полулинейной системы уравнений в частных производных гиперболического типа и задачи управления* // Деп. в ВИНИТИ 23.07.90, No 2983–30. — 39 с.

[7] Морозов С.Ф. *Начально-краевая задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости* // Краевые задачи. — Пермь, 1989. — С. 141–149.

[8] Морозов С.Ф., Сумин В.И. *Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение нестационарного переноса* // Матем. заметки. — 1977. — Т.21, № 5. — С. 665–676.

[9] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – М.: Наука, 1978. – 686 с.

[10] Потапов М.М. *Обобщенное решение смешанной задачи для полулинейной гиперболической системы первого порядка* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 10. – с. 1826-1828.

[11] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.

[12] Соколов А.В. *Об одном подходе к описанию рождаемости в демографических моделях* // Моделирование процессов экологического развития. Вып. 2. — М.: ВНИИ системных исследований, 1982. — С. 77–85.

[13] Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* — М.: Физматлит, 2000. — 160 с.

[14] Срочко В.А. *Квадратично-игольчатая аппроксимация и методы улучшения в задачах оптимального управления* // Иркутский университет. Серия: Оптимизация и управление. Вып.3. — Иркутск, 2001. — 28 с.

[15] Терлецкий В.А. *Обобщенное решение гиперболических систем одномерных полулинейных дифференциальных уравнений.* — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. университета. Сер. Оптимизация и управление. Вып.11. — 2004. — 48 с.

[16] Розоноэр Л.И. *Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем.* I // Автоматика и телемеханика. – 1959. – Т. 20, №10. – с. 1320–1334.

[17] Chan W.L., Guo B.Z. *Optimal birth control of population dynamics* // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — V. 144. — P. 532–552.

[18] Feichtinger G., Gornov A.Yu., Bockmelder E.P. *An approach to mathematical modelling of age-specific social and economic processes* // Труды 12-й Байкальской межд. конф. «Методы оптимизации и их приложения». Т.3. Математическая экономика. — Иркутск, 2001. — С. 216–221.

[19] Song J., Yu J.-U. *Population control system.* — N. Y.: Springer-Verlag, 1987. — 320 p.